6. Übung

Aufgabe 20

a) Die kinetische Energie setzt sich aus der Energie der Schwerpunktstranslation T_{trans} und -rotation T_{rot} zusammen. Mit dem Trägheitsmoment $\Theta = MR^2$ des Hohlzylinders gilt

$$T_{trans} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad \text{und} \qquad T_{rot} = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 \ .$$

Für die potentielle Energie gilt $V(x) = -Mg\Delta h(x) = -Mgx\sin\alpha$.

b) Das System besitzt nur einen Freiheitsgrad. Als generalisierte Koordinaten bieten sich x oder φ an. Aus der Rollbedingung ergibt sich $x = R\varphi \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\varphi}$.

$$\begin{aligned} I)\ \ L(x,\dot{x}) &= T(\dot{x}) - V(x) \ = \ M\dot{x}^2 + Mg\sin\alpha\, x \\ II)\ \ L(\varphi,\dot{\varphi}) &= T(\dot{\varphi}) - V(\varphi) = MR^2\dot{\varphi}^2 + MgR\sin\alpha\,\varphi \end{aligned}$$

c) Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} I)\ \ \frac{d}{dt}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x} &= \frac{d}{dt}(2M\dot{x}) - Mg\sin\alpha \Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{g}{2}\sin\alpha \\ II)\ \ \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\varphi,\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L(\varphi,\dot{\varphi})}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt}(2MR^2\dot{\varphi}) - MgR\sin\alpha \Leftrightarrow \ddot{\varphi} = \frac{g}{2R}\sin\alpha \end{aligned}$$

d) Weg 1: (lösen der DGL.)

$$\ddot{x} = \frac{g}{2}\sin\alpha \Rightarrow \dot{x} = \frac{g}{2}t\sin\alpha + \dot{x}(0) \Rightarrow x = \frac{g}{4}t^2\sin\alpha + \dot{x}(0)t + x(0)$$

Mit den Anfangsbedingungen erreicht der Zylinder die Stelle $x = l$ nach einer Zeit t_l mit $x(t_l) = \frac{g}{4}t_l^2\sin\alpha = l \Rightarrow t_l = 2\sqrt{l/(g\sin\alpha)}$. Dort hat er die Geschwindigkeit

$$v = \dot{x}(t_l) = \frac{g}{2}\sin\alpha\, t_l = \sqrt{gl\sin\alpha}.$$

Weg 2: (Energieerhaltung)

$$\begin{aligned} E &= T(\dot{x}(0)) + v(x(0)) = 0 = const. \\ E &= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}M\underbrace{R^2\omega^2}_{=v^2} - Mgl\sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \ v = \ldots \end{aligned}$$

Aufgabe 21

$$\begin{aligned}
y_n &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} y(k_l)\, e^{-ik_l n} \qquad , k_l = \frac{2\pi}{N} l \\
\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{ik'n} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} y(k_l) e^{-ik_l n} e^{ik'n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} y(k_l) \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{i(k'-k_l)n}}_{=N\delta_{k',k_l}} \\
&= \sqrt{N} \sum_{l=0}^{N-1} y(k_l) \delta_{k',k_l} \\
&= \sqrt{N} y(k') \\
\Rightarrow y(\frac{2\pi}{N}\, l) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y_n\, e^{i\frac{2\pi}{N} l\, n}
\end{aligned}$$

Aufgabe 22

a) Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lauten mit $a = -(f' + f)/m$ und $b = f'/m$

$$\begin{aligned}
F_1 = m\ddot{x}_1 &= -fx_1 - f'(x_1 - x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}_1 = ax_1 + bx_2 \\
F_2 = m\ddot{x}_2 &= -fx_2 - f'(x_2 - x_1) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}_2 = bx_1 + ax_2
\end{aligned}$$

Wir definieren nun wie angegeben $z \in \mathbb{R}^4$

$$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + ax_2 \end{pmatrix}$$

Die läßt sich als Matrixmultiplikation $\dot{z} = Az$ schreiben, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Die Eigenwertgleichung lautet

$$det(A - \lambda E) = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & b & -\lambda & 0 \\ b & a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ b & -\lambda & 0 \\ a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ a & b & 0 \\ b & a & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lambda(-\lambda^3 + a\lambda) + a^2 - (b^2 + a\lambda^2) \\
&= \lambda^4 - 2a\lambda^2 + a^2 - b^2 \\
\Rightarrow \lambda^2 &= a \pm \sqrt{a^2 - a^2 + b^2} = a \pm b = \begin{cases} a + b = & -f/m & =: (i\omega_1)^2 \\ a - b = & -(2f' + f)/m & =: (i\omega_2)^2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \lambda_1 = +i\,\omega_1 \quad , \; \lambda_2 = -i\,\omega_1 \quad , \; \lambda_3 = +i\,\omega_2 \quad , \; \lambda_4 = -i\,\omega_2
$$

Es verbeibt noch die Aufgabe, die Eigenvektoren $a_i = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \neq 0$ gemäß $(A - \lambda_i E)a_i = 0$ zu bestimmen. Zu $\lambda_{1,2}$:

$$
\begin{pmatrix} \mp i\omega_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp i\omega_1 & 0 & 1 \\ a & b & \mp i\omega_1 & 0 \\ b & a & 0 & \mp i\omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad \mp i\omega_1 x_1 + x_3 &= 0 & \Rightarrow \; & x_3 = \pm i\omega_1 x_1 & (1) \\
\mp i\omega_1 x_2 + x_4 &= 0 & \Rightarrow \; & x_4 = \pm i\omega_1 x_2 & (2) \\
a x_1 + b x_2 \mp i\omega_1 x_3 &= 0 & \Rightarrow \; & (a \mp i\omega_1(\pm i\omega_1))x_1 + b x_2 = 0 & (3) \\
b x_1 + a x_2 \mp i\omega_1 x_4 &= 0 & \Rightarrow \; & b x_1 + (a \mp i\omega_1(\pm i\omega_1))x_2 = 0 & (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(-\frac{f' + f}{m} + \omega_1^2\right) x_1 + \frac{f'}{m} x_2 = \left(-\frac{f' + f}{m} + \frac{f}{m}\right) x_1 + \frac{f'}{m} x_2 = \frac{f'}{m}(x_2 - x_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_2 = x_1 \\
(4) \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 = x_1 \;\; \text{(analog)}
\end{aligned}
$$

Wir wählen $x_1 = x_2 = 1$ und erhalten als Eigenvektoren

$$
a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\omega_1 \\ i\omega_1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i\omega_1 \\ -i\omega_1 \end{pmatrix} .
$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren zu $\lambda_{3,4}$ ist in den obigen Gleichungen ω_1 durch ω_2 zu ersetzen

$$
\begin{aligned}
(1') \quad & \qquad x_3 = \pm i\omega_2 x_1 \\
(2') \quad & \qquad x_4 = \pm i\omega_2 x_2 \\
(3') \quad & \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{f' + f}{m} + \omega_2^2\right) x_1 + \frac{f'}{m} x_2 = \frac{f'}{m}(x_2 + x_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -x_1 \\
(4') \quad & \Leftrightarrow \quad x_2 = -x_1 \;\; \text{(analog)}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\omega_2 \\ -i\omega_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\omega_2 \\ i\omega_2 \end{pmatrix}$$

Die beiden Lösungen a_1 und a_2 gehöhren mit der Frequenz ω_1 zu Schwingungen, bei denen sich die Massen mit konstantem Abstand und gleicher Geschwindigkeit bewegen ($x_1 = x_2$). Bei den Lösungen zu ω_2 schwingen die Massen gegeneinander ($x_1 = -x_2$). Die Schwingung gegeneinander erfolgt stets schneller als die gleichphasige ($\omega_2 > \omega_1$).

Aufgabe 23

Sie $x(t, \lambda)$ eine ein-parametrige Schar von Bahnkurven, wobei für $\lambda = 0$ die physikalische Bahn realisiert wird. Es gilt

$$\delta S \equiv \delta S[x(t)] = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{d\lambda} S[x(t,\lambda)]\Big|_{\lambda=0} = 0$$

Diese Variation führen wir nun aus

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} \int_{t_1}^{t_2} L\left(x(t,\lambda),\, \frac{d}{dt}x(t,\lambda),\, \frac{d^2}{dt^2}x(t,\lambda),\, t\right) dt \Big|_{\lambda=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \Bigg(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda}}_{(I)} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \lambda}}_{(II)} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial \lambda}}_{(III)} \Bigg) dt \Big|_{\lambda=0} \end{aligned}$$

Wir werden die Ausdrücke II und III soweit partiell integrieren, bis im Integranden Terme der Form $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ vorkommen, wie dies in I der Fall ist.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (II)\, dt\Big|_{\lambda=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) dt\Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\Big|_{t_1,t_2;\lambda=0} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\frac{\partial x}{\partial \lambda}\, dt\Big|_{\lambda=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (III)\, dt\Big|_{\lambda=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) dt\Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)\Big|_{t_1,t_2;\lambda=0} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) dt\Big|_{\lambda=0} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda}\Big|_{t_1,t_2;\lambda=0} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\frac{\partial x}{\partial \lambda}\Big|_{t_1,t_2;\lambda=0} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\frac{\partial x}{\partial \lambda}\, dt\,\Big|_{\lambda=0}$$

Aufgrund der Randbedingungen gilt für x und $\dot{x}$ fallen alle Randterme weg. Es bleibt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} S[x(t,\lambda)]\Big|_{\lambda=0} &= 0 \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right]\frac{\partial x}{\partial \lambda}\, dt\,\Big|_{\lambda=0} \end{aligned}$$

Wenn dies für alle Kurvenscharren $x(t,\lambda)$ gelten soll, so muß der Integrand verschwinden, d.h. die Euler-Lagrange Gleichung lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = 0$$