Lösungen der Übungsaufgaben — Theoretische Physik I

WS 04/05 — Prof. Dr. C. Gros

5. Übung

Aufgabe 16

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + 2\beta\lambda + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega \quad \in \mathbb{C}$$

Für die Lösung $x(t)$ gilt

$$\begin{aligned}
x(t) &= \tilde{A}e^{\lambda_1 t} + \tilde{B}e^{\lambda_2 t} \\
&= e^{-\beta t}\left(\tilde{A}e^{i\omega t} + \tilde{B}e^{-\omega t}\right) \quad \text{setze } A = \tilde{A} + \tilde{B}\,,\ B = i(\tilde{A} - \tilde{B}) \\
&= e^{-\beta t}\left\{\frac{A}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) + \frac{B}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)\right\} \\
&= e^{-\beta t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)
\end{aligned}$$

Nun müßen noch die Koeffizienten A und B bestimmt werden. Für A folgt für $t = 0$ direkt $A = x(0)$.

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -\beta e^{-\beta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + e^{-\beta t}\omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t) \\
\dot{x}(0) &= -\beta A + \omega B \qquad \Leftrightarrow \qquad B = \frac{\beta x(0)}{\omega} + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}
\end{aligned}$$

Somit ist die Gültigkeit der auf dem Übungszettel angegebene Gleichung gezeigt.

Nun zur Berechnung des Propagators: $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{1}{\alpha}\dot{x}(t) \end{pmatrix} = P(t)z(0)$.

$$\begin{aligned}
x(t) &= \underbrace{e^{-\beta t}(\cos\omega t + \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t)}_{P_{11}}\, x(0) + \underbrace{e^{-\beta t}\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t}_{P_{12}}\, \frac{\dot{x}(0)}{\alpha} \\
\dot{x}(t) &= -\beta e^{-\beta t}\left(+x(0)\cos\omega t + \left(\frac{\beta x(0)}{\omega} + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right)\sin\omega t\right) \\
&\quad +\omega e^{-\beta t}\left(-x(0)\sin\omega t + \left(\frac{\beta x(0)}{\omega} + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right)\cos\omega t\right) \\
&= e^{-\beta t}\left\{x(0)\left(-\frac{\beta^2}{\omega}\sin\omega t - \frac{\omega^2}{\omega}\sin\omega t\right) + \dot{x}(0)\left(-\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$= \quad \alpha \cdot \left[\underbrace{-e^{-\beta t}\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t}_{P_{21}}\, x(0) + \underbrace{e^{-\beta t}\left(-\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t\right)}_{P_{22}} \frac{\dot{x}(0)}{\alpha} \right]$$

Aufgabe 17

$$\begin{array}{llcl}
(i) & |\dot{\underline{r}}| & = & v_0 \;\Rightarrow\; \dot{\underline{r}}\,\dot{\underline{r}} = v_0^2 \;\Rightarrow\; \dot{\underline{r}}\,\ddot{\underline{r}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{\ddot{\underline{r}} = 0}_{I} \;\vee\; \underbrace{\dot{\underline{r}} \perp \ddot{\underline{r}}}_{II} \\
(ii) & \dot{F} & = & \frac{1}{2}\left(\underline{r} \times \dot{\underline{r}}\right) = c/2 \;\Rightarrow\; \underline{r} \times \ddot{\underline{r}} = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{\ddot{\underline{r}} = 0}_{I} \;\vee\; \underbrace{\underline{r} \| \ddot{\underline{r}}}_{II}
\end{array}$$

Zu (I): $\ddot{\underline{r}} = 0 \Rightarrow \dot{\underline{r}} = \underline{v} = const \Rightarrow \underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}t$. Aus $\underline{r}_0 \times \underline{v} = r_0 v \sin\alpha = c$ folgt $|\underline{r}_0| = c/(v\sin\alpha)$. $|\underline{r}(t)|$ minimal für $\alpha = \pi/2 \Rightarrow r_{min} = c/v$.
$\Rightarrow$ Lösungen sind alle Geraden in der Ebene $\perp$ $\underline{c}$, die einen minimalen Abstande $r_{min} = c/v$ haben.

Zu (II): Die Bewegung erfolgt in einer Ebene senkrecht zu $\underline{c}$. Wir verwenden daher Polarkoordinaten.

$$\begin{array}{lcl}
\underline{r} & = & r \cdot \underline{e}_r \\
\dot{\underline{r}} & = & \underbrace{\dot{r} \cdot \underline{e}_r}_{=:V_r} + \underbrace{r\,\dot{\phi}\;\underline{e}_\phi}_{=:V_\phi} \\
\ddot{\underline{r}} & = & \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\underline{e}_r}_{=:A_r} + \underbrace{\left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\underline{e}_\phi}_{=:A_\phi}
\end{array}$$

1) $\dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = 0$ und wegen $\ddot{\underline{r}} \| \underline{r}$ ist auch $\dot{\underline{r}} \cdot \underline{r} = 0$. Somit ist $V_r = 0$. $\Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow r = r_0 = const.$

2) $\ddot{\underline{r}} \| \underline{r} \Rightarrow A_\phi = 0. \Rightarrow \ddot{\phi} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = \omega = const.$

Aus $|\dot{\underline{r}}| = v = r\dot{\phi}$ folgt $\omega = v/r_0$, und aus $|\underline{r} \times \dot{\underline{r}}| = c = |\underline{r}||V_\phi|$ folgt $\omega = c/r_0^2$. Man erhält somit

$$\omega = \frac{v^2}{c} \qquad \text{und} \qquad r_0 = \frac{c}{v}\,.$$

Die Lösung ist ein Kreis in der Ebene $\perp$ $\underline{c}$ mit Radius $r_0 = c/v$, der mit $\omega = v^2/c$ durchlaufen wird.

Aufgabe 18

1)

$$z(t) \;=\; \underbrace{P(t,s)}_{=:z_H}\, z(s) + \underbrace{\int_s^t P(t,\tau) b(\tau)\, d\tau}_{=:z_I}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_H &= AP(t,s)z(s) = Az(t) \\
\dot{z}_I &= \frac{\partial}{\partial t}\Big\{e^{At}\underbrace{\int\limits_s^t e^{-A\tau}b(\tau)\,d\tau}_{B(t)-B(s)}\Big\} \qquad \text{mit } \frac{\partial}{\partial t}B(t) = e^{-At}b(t) \\
&= Ae^{At}(B(t)-B(s)) + e^{At}e^{-At}b(t) \\
&= Az_I(t) + b(t) \\
\Rightarrow \dot{z}(t) &= \dot{z}_H(t) + \dot{z}_I(t) = Az_H(t) + Az_I(t) + b(t) = Az(t) + b(t)
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
P(t) &= e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!} \\
\Rightarrow \int\limits_0^t P(t-\tau)b(\tau)\,d\tau &= \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}be^{i\omega\tau}\,d\tau = be^{At}\int\limits_0^t e^{(i\omega-A)\tau}\,d\tau \\
&= be^{i\omega t}\frac{1}{i\omega - A} - be^{At}\frac{1}{i\omega - A}
\end{aligned}
$$

Dazu kommt die homogene Lösung $P(t)z(0) = e^{At}z(0)$. Also hat die Gesamtlösung $z(t)$ die Form:

$$
z(t) = e^{At}[z(0) - a(\omega)] + e^{i\omega t}a(\omega)\,,
$$

wobei wir $a(\omega) = (i\omega - A)^{-1}b$ gesetzt haben.

3)

$$
\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= Ae^{At}[z(0) - a(\omega)] + i\omega e^{i\omega t}a(\omega) \\
&\stackrel{?}{=} Az(t) + b(t) = A\left(e^{At}[z(0) - a(\omega)] + e^{i\omega t}a(\omega)\right) + b(t)
\end{aligned}
$$

Zu zeigen bleibt

$$
\begin{aligned}
Ae^{i\omega t}a(\omega) + be^{i\omega t} &= i\omega e^{i\omega t}a(\omega) \\
\Leftrightarrow -Ae^{i\omega t}a(\omega) + i\omega e^{i\omega t}a(\omega) &= be^{i\omega t} \\
\Leftrightarrow (i\omega - A)a(\omega) &= b \\
\Leftrightarrow a(\omega) = \frac{b}{i\omega - A}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19

a.) $\qquad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \gamma^2 x = F_0 e^{-\alpha t}$

Wir übernehmen weitestgehend die Nomenklatur aus Aufgabe 16, nur müßen wir dort α durch γ ersetzen. Es ist $\omega = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$.

b.) Ansatz: $x_S(t) = Ce^{-\alpha t}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \alpha^2(Ce^{-\alpha t}) - 2\beta\alpha(Ce^{-\alpha t}) + \gamma^2(Ce^{-\alpha t}) &= F_0 e^{-\alpha t} \\
\Leftrightarrow \quad C &= \frac{F_0}{\alpha^2 - 2\beta\alpha + \gamma^2} = \frac{F_0}{\alpha^2 - 2\beta\alpha + (\beta^2 + \omega^2)} \\
&= \frac{F_0}{(\alpha - \beta)^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x(t) &= x_H(t) + x_S(t) \\
&= (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\beta t} + \frac{F_0}{(\alpha-\beta)^2 + \omega^2} e^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

c.) Der Fall $\alpha \in \mathbb{R}$ ist nicht wieter interessant, da x_S monoton gegen Null strebt, wobei $C \in \mathbb{R}$, $C \leq F_0/\omega^2$.
Für $\alpha \in i\mathbb{R}$ überlebt die spezielle Lösung die homogene (für $t \gg \beta^{-1}$ ist $x_H \approx 0$). $x(t)$ beschreibt dann eine Schwingung mit der Frequenz $i\alpha$, die von außen angelegt wurde. Die Amplitude dieser Schwingung ist dann gegeben durch $|C| = CC^*$. Um diese Auszurechnen setzen wir $\alpha = i\Omega$ mit $\Omega \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
CC^* &= \frac{F_0}{-\Omega^2 - 2i\beta\Omega + \gamma^2} \cdot \frac{F_0}{-\Omega^2 + 2i\beta\Omega + \gamma^2} \\
\Rightarrow |C| &= \frac{F_0}{\sqrt{(\gamma^2 - \Omega^2) + (2\beta\Omega)^2}} \quad \leq \frac{F_0}{2\beta\Omega}
\end{aligned}$$

Die Amplitude wird sehr groß, wenn $\Omega = \gamma$ und $\beta \ll 1/\gamma$, d.h. bei kleiner Dämpfung und wenn das System mit seiner Eigenfrequenz stimmuliert wird.