4. Übung

Aufgabe 12

a) $$2\vartheta + \chi = \pi \Rightarrow \chi = \pi - 2\vartheta$$
$$sin\vartheta = b/a \Rightarrow b = a\sin\vartheta = a\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) = a\cos\frac{\chi}{2}$$

b) $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{a\cos(\chi/2)}{2\sin(\chi/2)\cos(\chi/2)}\cdot\frac{a}{2}\sin\frac{\chi}{2} = \frac{a^2}{4}$$
$$\sigma = \int\limits_{\Omega}\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\sigma}{d\Omega}d(\cos\chi)d\varphi = 4\pi\frac{d\sigma}{d\Omega} = a^2\pi$$

Streuquerschnitt σ entspricht dem Kugelquerschnitt
$b > a$: Teilchen fliegt unbeeinflußt weiter
$b < a$: Streunung

Aufgabe 13

Es gilt

$$2r\dot{r} = \frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(\underline{r}\cdot\underline{r}) = 2\underline{r}\,\dot{\underline{r}} \quad\Rightarrow\quad \dot{r} = \frac{1}{r}\underline{r}\,\dot{\underline{r}}$$

sowie

$$m\ddot{\underline{r}} = -\nabla V = -\frac{\alpha\underline{r}}{r^3} \quad\Leftrightarrow\quad -\ddot{\underline{r}} = \frac{\alpha}{mr^3}\underline{r}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \dot{\underline{\lambda}} &= -\ddot{\underline{r}}\times\frac{1}{\alpha}\underline{L} + \frac{1}{r}\dot{\underline{r}} - \underline{r}\frac{1}{r^2}\dot{r} \\ &= \frac{1}{r^3}\underline{r}\times(\underline{r}\times\dot{\underline{r}}) + \frac{1}{r}\dot{\underline{r}} - \frac{1}{r^3}\underline{r}\,(\underline{r}\,\dot{\underline{r}}) \\ &= \frac{1}{r^3}\left[\underline{r}\,(\underline{r}\,\dot{\underline{r}}) - \dot{\underline{r}}r^2\right] + \frac{1}{r}\dot{\underline{r}} - \frac{1}{r^3}\underline{r}\,(\underline{r}\,\dot{\underline{r}}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 14

Da $\sqrt{2m(E-V(r))-l^2/r^2}$ stetig in r, l ist, gilt $\frac{\partial}{\partial l}\int \cdot dr = \int \frac{\partial}{\partial l} \cdot dr$. Somit steht in in beiden Formeln - bis auf die Grenzen und den Faktor 2 - das gleiche Integral. Die Integration für $\Delta\phi$ verläuft über einen ganzen Umlauf, d.h. von r_{min} über r_{max} zu r_{min}, bzw. 2mal von r_{min} bis r_{max}.

Für den Integranden $\mathcal{I}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \sqrt{[2m(E+a/r)-l^2/r^2]-2m\Delta V(r)} \\
&= \sqrt{2m/\gamma}\sqrt{1-\gamma\Delta V(r)} \qquad \text{mit } \gamma = 2m/\left[2m(E+a/r)-l^2/r^2\right] \\
&= \sqrt{2m/\gamma}\left(1-\frac{1}{2}\gamma\Delta V(r)-\frac{1}{8}\gamma^2\Delta V(r)^2+\dots\right) \\
&= \sqrt{2m/\gamma}-\frac{1}{2}\sqrt{2m\gamma}\Delta V(r)+\dots
\end{aligned}
$$

Somit ist in erster Näherung und $\Delta V(r) = \beta/r^2$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \sqrt{2m(E+a/r)-l^2/r^2}-\frac{m\beta/r^2}{\sqrt{2m(E+a/r)-l^2/r^2}} \\
&= \underbrace{\sqrt{2m(E+a/r)-l^2/r^2}}_{\mathcal{I}_1}-\underbrace{\frac{m\beta}{l}\frac{l/r^2}{\sqrt{2m(E+a/r)-l^2/r^2}}}_{\mathcal{I}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad 2\pi+\Delta\phi &= \underbrace{-2\frac{\partial}{\partial l}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\mathcal{I}_1\,dr}_{=2\pi}-2\frac{\partial}{\partial l}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\mathcal{I}_2\,dr \\
\Rightarrow\quad \Delta\phi &= -2\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{m\beta}{l}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{l/r^2}{\sqrt{2m(E+a/r)-l^2/r^2}}\,dr\right) \\
&= -2\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{m\beta}{l}\int_0^{\pi}d\phi\right)
\end{aligned}
$$

Aus der Herleitung der “allgemeinen Beziehung” $\phi(r) = \int \cdots dr$ ergibt sich die Relation für $dr \mapsto d\phi$. (Man kann diese auch aus $r(\phi) = d/(1+\epsilon\cos\phi)$ ableiten.) Dabei muß man sich klar machen, daß die Integration $\int dr$ über die ungestörte Trajektorie verläuft.

$$
\Delta\phi = -2\frac{\partial}{\partial l}\frac{m\pi\beta}{l} = \frac{2\pi\beta m}{l^2}
$$