Lösungen der Übungsaufgaben — Theoretische Physik I

WS 04/05 — Prof. Dr. C. Gros

3. Übung

Aufgabe 8

a.) Möglich. $\vec{L}$ weist in die Papierebene hinein.
Sie $\vec{r}_0$ der Punkt auf der Bahnkurve, der dem Ursprung am nächsten kommt, dann gilt $\vec{r}_0 \cdot \vec{p}(t) = 0$ und mit $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\Delta}(t)$ folgt $\vec{\Delta}(t) \parallel \vec{p}$. Bei konstantem Impuls gilt $\vec{L} = \vec{r}(t) \times \vec{p} = \vec{r}_0 \times \vec{p} + \vec{\Delta}(t) \times \vec{p} = \vec{r}_0 \times \vec{p} = const.$

b.) Möglich. $\vec{L}$ weist in die Papierebene hinein.

c.) Nicht möglich. $\vec{L}$ ändert im "Minimum" das Vorzeichen.

d.) Nicht möglich. $\vec{L} = 0$ im Umkehrpunkt, aber in allen anderen Punkten $\neq 0$.

e.) Nicht möglich. $\vec{L} = 0$ im Ursprung, sonst $\neq 0$.

f.) Möglich. Spezialfall von a) mit $\vec{r}_0 = 0$ und $\vec{L} = 0$.

g.) Möglich. $\vec{L}$ weist in die Papierebene hinein. Im Überschneidungspunkt zählt nur die Komponente von $\vec{r}$ die orthogonal zum Ortsvektor des Überschneidungspunktes ist. Diese Komponente ist im Hin- und Rückflug gleich.

h.) Möglich. $|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = const \Rightarrow v = const \Rightarrow \omega = const.$

i.) Möglich. $\vec{L} = const = 0$

j.) Möglich. Im Gegensatz zu h) ist hier jedoch ω nicht konstant.

Aufgabe 9

Die Bewegungsgleichung lautet in der eindimensionalen Form

$$m \frac{d^2}{dt^2} r(t) = -\frac{\alpha}{r^n}.$$

Wir multipizieren auf beiden Seiten mit $\dot{r}$ und erhalten für den Fall $n \neq 1$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m (\dot{r})^2\right] &= -\frac{\alpha}{r^n}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\alpha}{(n-1)} r^{-(n-1)}\right] \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m (\dot{r})^2 &= \frac{\alpha}{(n-1) r^{n-1}} + E \\
\Leftrightarrow \quad E &= \frac{1}{2} m (\dot{r})^2 - \frac{\alpha}{(n-1) r^{n-1}} \quad (= T + U)
\end{aligned}$$

a.) Für den Fall, daß der Massenpunkt dem Kraftfeld nicht entkommt, gilt am Umkehrpunkt $(\dot{r} =)v = 0$ und daher $E = -\alpha/[(n-1)r^{n-1}] < 0$. Dieses Szenario kann genau dann nicht eintreten, wenn $E \geq 0$!

$$v(t) = \dot{r}(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m(n-1)} \cdot r^{-(n-1)} + \frac{2}{m}E}$$

Hier interessiert speziell der Startzeitpunkt $t = t_0$ und die minimale Geschwindigkeit bei $E = 0$:

$$\tilde{v}_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{m(n-1)}} \cdot r_0^{-(n-1)/2}$$

Für $n = 1$ ist der Ausdruck $r_0^{-(n-1)/2}$ durch $\sqrt{\ln r_0}$ zu ersetzen.

b.) Im Gravitationsfeld der Erde ist $n = 2$ und $\alpha = G \cdot M_E \cdot m$. Durch Einsetzen in obige Formel oder aus $\frac{1}{2}mv^2 = GM_E m/r$ folgt

$$\tilde{v}_0 = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \approx 11\,191\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

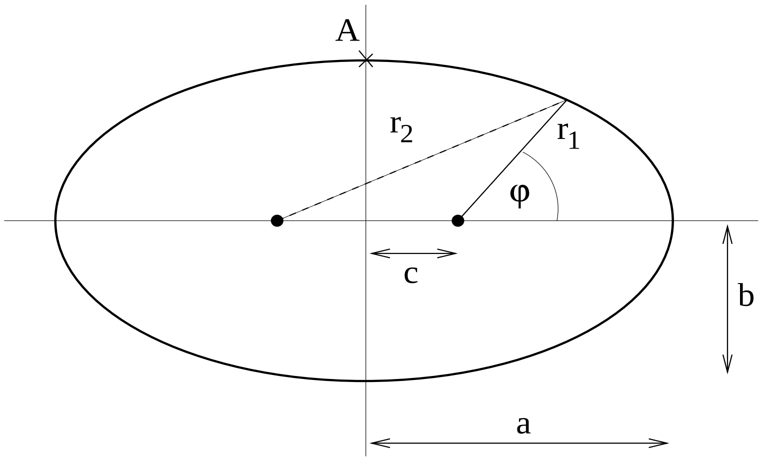
Zusatz: Für die wichtigen Himmelkörper in unserem Sonnensystem lauten die Fluchtgeschwindigkeiten:

Merkur	4,3	[km/s]
Venus	10,2	
Mond der Erde	2,3	
Mars	5,0	
Jupiter	59,6	
Saturn	35,5	
Uranus	21,3	
Neptun	23,3	
Pluto	1,1	
Sonne	617,3	

Um auf der Erde $\tilde{v}_0 = c$ zu erreichen, müßte man den Radius R_E um einen Faktor $(c/\tilde{v}_0)^2$ auf knapp 9mm verringern.

Aufgabe 10

a.) In jedem Punkt der Ellipse gilt $r_1 + r_2 = 2a$ In Punkt A gilt zusätzlich $r_1 = r_2 = \sqrt{c^2 + b^2}$. Somit folgt $2a = r_1 + r_2 = 2r_1 = 2\sqrt{c^2 + b^2} \Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2$.



b.) Es ist

$$r_1 = r(\varphi) = \frac{d}{1+\epsilon\cos\varphi} \ .$$

Also $r_1(\varphi = \frac{\pi}{2}) = d$ und $r_2 = \sqrt{(2c)^2 + d^2}$. Aus $2a = r_1 + r_2 = d + \sqrt{(2c)^2 + d^2}$ folgt durch Isolation der Wurzel und quadrieren $4c^2 + d^2 = 4a^2 - 4ad + d^2 \Leftrightarrow c^2 - a^2 = -ad \Leftrightarrow d = (a^2 - c^2)/a \overset{a)}{=} b^2/a$.
Somit ist Teil 1 der Aufgabe gelöst. Betrachten wir nun die Spezialfälle $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$. Aufgrund der Symmetrie lassen sich dabei r_1 und r_2 vertauschen.

$$\begin{aligned} r(0) &= \frac{d}{1+\epsilon} = r_1 \quad , \qquad r(\pi) = \frac{d}{1-\epsilon} = r_2 \\ \Rightarrow \quad 2a &= r_1 + r_2 = \frac{2d}{1-\epsilon^2} \\ \Leftrightarrow \quad d &= a(1-\epsilon^2) \end{aligned}$$

c.) Aus b) wissen wir das $b^2/a = a(1-\epsilon^2)$. Es folgt

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - a^2\epsilon^2 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} &= \frac{c^2}{a^2} = \epsilon^2 \qquad \Rightarrow \epsilon = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

d.) Aus $d \overset{b)}{=} b^2/a$ folgt sofort $b = \sqrt{ad}$. Setzt man nun $d \overset{b)}{=} a(1-\epsilon^2)$, so erhält man $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$.