Lösungen der Übungsaufgaben — Theoretische Physik I

WS 04/05 — Prof. Dr. C. Gros

1. Übung

Aufgabe 1

1. (z.B. http://www.lexikon-definition.de/Massenpunkt.html)
   Der Massenpunkt oder auch die Punktmasse beschreibt in der Physik einen idealisierten Körper. Der Körper wird als mathematischer Punkt angesehen, der somit keine Ausdehnung, aber eine endliche Masse besitzt. Ein weiteres Merkmal ist, dass der Massenpunkt keine Rotationsfreiheitsgrade besitzt. Jeder starre Körper kann zur mathematischen Beschreibung als Massenpunkt angesehen werden, wenn der Körper keine Rotationsbewegung durchführt. Der Schwerpunkt des Körpers ist hierbei identisch mit dem Massepunkt. Das Modell des Massenpunktes kann allgemein bei jeder Bewegung von Körpern benutzt werden, wenn es nicht notwendig ist die räumliche Masseverteilung des Körpers zu betrachten.
2. Durch die Angabe der Ortskoordinaten zu jedem Zeitpunkt.
3. Durch erste bzw. zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit.
4. $t' = \pm t + t_0$, $\vec{x}'(t) = R(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$ mit $R(t) \in O(3)$
5.
6. Die träge Masse eines Objektes misst den Widerstand, den es seiner Beschleunigung entgegenstellt (Trägheit). Diese Masse m_T tritt in der Klassischen Mechanik im Newtonschen Kraftgesetz $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_T \cdot \vec{v})$ auf.
7. Der Impuls ist das Produkt von (träger) Masse und Geschwindigkeit.
8. In einem Inertialsystem ist die zeitliche Ãnderung des Impulses gleich der angelegten Kraft.
9. Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem der Trägheitssatz / das 1. Newtonsche Postulat gilt. (Alle Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit. Es gibt kein bevorzugtes Inertialsystem und keine Möglichkeit, eine Geschwindigkeit absolut zu messen.)
10. (a) Jeder Körper, auf den keine Kraft wirkt, bleibt in geradlinig gleichförmiger Bewegung oder verharrt im Ruhezustand.
    (b) Die Änderung des Impulses ist gleich der einwirkenden Kraft. Dies gilt sowohl für den Betrag als auch für die Richtung.
    (c) Die Aktionen zweier Körper aufeinander sind immer gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

Aufgabe 2

1. Die Bahnkurve ist eine Spirale, die ausgehend von $t = 0$ im Ursprung beginnt.

2.

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= u \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t) \end{pmatrix} \\
\vec{a}(t) &= u \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) - \omega[\,\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t)\,] \\ \omega \cos(\omega t) + \omega[\,\cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t)\,] \end{pmatrix} \\
&= u\omega \begin{pmatrix} -2\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t) \\ 2\cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. Zur Abkürzung setzen wir $S = \sin(\omega t)$, $C = \cos(\omega t)$ und $\tau = \omega t$.

$$|\vec{v}| = u\sqrt{(C - \tau S)^2 + (S + \tau C)^2} = u\sqrt{1 + \tau^2}$$

Somit gilt

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

4. Mit den Abkürzungen von oben:

$$\begin{aligned}
a_T &= \vec{a} \cdot \vec{t} \\
&= \frac{u\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} \Big[(-2S - \tau C)(C - \tau S) + (2C - \tau S)(S + \tau C)\Big] \\
&= \frac{u\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} \underbrace{(-2CS + 2\tau S^2 - \tau C^2 + \tau^2 CS \;+\; 2CS + 2\tau C^2 - \tau S^2 - \tau^2 CS)}_{=\tau} \\
&\equiv \frac{u\omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^t |\vec{v}(\tau)|\, d\tau \\
&= u \int_0^t \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}\, d\tau \qquad \text{subst.:}\quad \tau' = \omega\tau \Rightarrow d\tau'/d\tau = \omega \\
&= \frac{u}{\omega} \int_0^{\omega t} \sqrt{1 + \tau'}\, d\tau' \qquad \text{siehe Bronstein Abschnitt 1.1.3.3 Nr. 185} \\
&= \frac{u}{2\omega}\Big(\omega t\sqrt{1 + \omega^2 t^2} + \operatorname{arcsinh}(\omega t)\Big)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Setzt man $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$, die zyklische Invarianz des Spatproduktes $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ und dessen "Vertauschungsrelaton" $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$ als bekannt voraus, so gilt

1.

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times (\vec{c} \times \vec{a})\right) &= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left[\vec{c}\left(\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a}\right) - \vec{a}\underbrace{\left(\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{c}\right)}_{=0}\right] \\
&= \left[\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right] \underbrace{\left[\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a}\right]}_{=\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}} \\
&= \left[\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right]^2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left[\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c}\right] &= \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}\right) \\
&= \underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})}_{=0} + \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \underbrace{- \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})}_{=+\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)} - \underbrace{\vec{b} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)}_{=0} \\
&= 2\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir setzen stets $r \neq 0$ voraus. Zur Vorbereitung betrachten wir zunächst mit $f(x) = x^2 + a$, $g(x) = \sqrt{x}$ und $h(x) = 1/\sqrt{x}$ folgende Ableitungen

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2 + a}\right)' &= \left(g(f(x))\right)' = f'(x)\; g'(f(x)) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + a}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} \\
\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}\right)' &= \left(h(f(x))\right)' = f'(x)\; h'(f(x)) = 2x \cdot \frac{-1}{2(x^2 + a)^{(3/2)}} = -\frac{x}{(x^2 + a)^{(3/2)}}
\end{aligned}$$

1.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \text{Länge} = 1$$

2.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(3/2)}} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \qquad \text{Länge} \sim 1/r^2$$

3. Für die x-Komponente

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}} \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}} \\ &= \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}}\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die y- und z-Komponente. Nach Summation erhält man

$$\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{2x^2+2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2/r$$

4. Für die x-Komponente

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &- \frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \\ y\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}} &- z\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}} = 0\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die y- und z-Komponente. Insgesamt

$$\text{rot grad } r = 0$$

(Allgemein: *Gradientenfelder sind wirkbelfrei.*)

5. Für die x-Komponente

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}} \\ &= -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}} - x\frac{-3x}{(x^2+y^2+z^2)^{(5/2)}} \\ &= \frac{2x^2-y^2-z^2}{r^5}\end{aligned}$$

Insgesamt

$$\Delta\frac{1}{r} = \frac{1}{r^5}\Big(2x^2-y^2-z^2 \; - \; x^2+2y^2-z^2 \; - \; x^2-y^2+2z^2\Big) = 0$$