Minimale
Mathematische Formelsammlung

Warnungen:

- Verwende nie eine Gleichung, auf deren einer Seite ein Vektor und auf deren anderer Seite ein Skalar steht!
- Dividiere niemals durch einen Vektor!

Vektoren

Physikalische Dreier-**Vektoren** bzgl. einer physikalisch dimensionslosen rechtshändigen Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \text{Kurzschrift für} \quad \mathbf{x} = x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + x^3\,\mathbf{e}_3$$

(x^1, x^2, x^3 beliebige (ungerichtete) physikalische Größen gleicher Art),

$$\begin{aligned}
\alpha \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} &\overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha\,x^1 + \beta\,y^1 \\ \alpha\,x^2 + \beta\,y^2 \\ \alpha\,x^3 + \beta\,y^3 \end{pmatrix} && \textit{\textbf{Vektorregeln}}\,, \\
\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} &\overset{\text{def}}{=} x^1\,y^1 + x^2\,y^2 + x^3\,y^3 && \textit{\textbf{Skalarprodukt}}\,, \\
\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} &\overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x^2\,y^3 - x^3\,y^2 \\ x^3\,y^1 - x^1\,y^3 \\ x^1\,y^2 - x^2\,y^1 \end{pmatrix} && \textit{\textbf{Vektorprodukt}}\,, \\
\det \begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} &\overset{\text{def}}{=} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) && \textit{\textbf{Spatprodukt}}\,, \\
|\mathbf{x}| &= \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} && \textit{\textbf{Norm}}\,.
\end{aligned}$$

Cramersche Regel:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}\,\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{b}_3)}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}\,\mathbf{b}_2 + \frac{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{x})}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}\,\mathbf{b}_3\,.$$

(für $\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) \neq 0$).

Eigenschaften des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\,,\\
(\alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} &= \alpha\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})+\beta\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\ ,\\
\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k &= \begin{cases} 1 & \text{für } j=k\,,\\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Anschaulich:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = |\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|\ \cos\left(\angle\,\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\ .$$

Eigenschaften des Vektorprodukts:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= -\left(\mathbf{b}\times\mathbf{a}\right)\ ,\\
(\alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b})\times\mathbf{c} &= \alpha\,(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+\beta\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\ ,\\
\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k &= \begin{cases} \mathbf{e}_3 & \text{für } (j,k)=(1,2)\,,\\ \mathbf{e}_1 & \text{für } (j,k)=(2,3)\,,\\ \mathbf{e}_2 & \text{für } (j,k)=(3,1)\,,\\ 0 & \text{für } j=k\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Anschaulich:

$$|\mathbf{x}\times\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|\ |\sin\left(\angle\,\mathbf{x},\mathbf{y}\right)|\ .$$

Eigenschaften der Euklidischen Norm:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\neq 0 &= |\mathbf{a}|>0\\
|\lambda\,\mathbf{a}| &= |\lambda|\ |\mathbf{a}|\ ,\\
|\mathbf{a}+\mathbf{b}| &\leq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}| && \textbf{\textit{Dreiecksungleichung}},\\
|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2 &= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{a}+\mathbf{b}|+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\right) && \textbf{\textit{Parallelogrammgleichung}}.
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0 \implies &\ |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2 && \textbf{\textit{Satz von}}\ \textsc{Pythagoras}\,,\\
|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq &\ |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| && \textsc{Schwarz}\textbf{\textit{sche Ungleichung}}.
\end{aligned}$$

Mehrfachprodukte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0\,,\\
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} && \textbf{\textit{Entwicklungssatz}},\\
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,,\\
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= (\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}))\,\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}))\,\mathbf{a}\,.
\end{aligned}$$

Funktionen einer Variablen

Differentiation gewöhnlicher Funktionen:

$$\begin{aligned}
\dot f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\, f(t) \;&\stackrel{\text{def}}{=}\; \lim_{0\neq\Delta t\to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} && \textit{Ableitung}\,,\\
\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\left(\alpha\, f(t)+\beta\, g(t)\right) &= \alpha\,\dot f(t)+\beta\,\dot g(t) && \textit{Linearität}\,,\\
\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\left(f(t)g(t)\right) &= \dot f(t)g(t)+f(t)\dot g(t) && \textit{Produktregel}\,,\\
\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{f(t)}{g(t)} &= \frac{\dot f(t)\,g(t)-f(t)\,\dot g(t)}{(g(t))^2} && \textit{Quotientenregel}\,,\\
\frac{\mathrm d}{\mathrm dt} f\left(g(t)\right) &= \dot g(t)\,\dot f(t')_{|_{t'=g(t)}} && \textit{Kettenregel}\,,\\
\frac{\mathrm d}{\mathrm dt} f^{-1}(t) &= \frac{1}{\dot f(f^{-1}(t))} && \left[f^{-1}(f(t))=f\left(f^{-1}(t)\right)=t\right].
\end{aligned}$$

Spezielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\, t^n &= n\, t^{n-1}\,,\\
\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\, e^{t/t_0} &= e^{t/t_0}/t_0\,,\\
\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\, \sin(t/t_0) &= \cos(t/t_0)/t_0\,,\\
\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\, \cos(t/t_0) &= -\sin(t/t_0)/t_0\,.
\end{aligned}$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$f(t_2)-f(t_1)=(t_2-t_2)\,\dot f(t') \quad \text{für geeignetes } t'\in[t_1,t_2]\,.$$

TAYLOR-***Entwicklung***:

$$\begin{aligned}
f(t+\Delta t) &= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\,(\Delta t)^\nu \left(\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\right)^\nu f(t) + \frac{1}{n!}\int_t^{t+\Delta t} (t+\Delta t-t')^n \left(\frac{\mathrm d}{\mathrm dt'}\right)^{n+1} f(t')\,\mathrm dt'\,,\\
e^\lambda &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\,\lambda^\nu\,,\\
\sin\lambda &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu\, \frac{\lambda^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\,,\\
\cos\lambda &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu\, \frac{\lambda^{2\nu}}{(2\nu)!}\,.
\end{aligned}$$

Differentiation von Vektorfunktionen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \\ \dot{x}^3(t) \end{pmatrix}\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\alpha\,\mathbf{x}(t) + \beta\,\mathbf{y}(t)\right) &= \alpha\,\dot{\mathbf{x}}(t) + \beta\,\dot{\mathbf{y}}(t)\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(g(t)\mathbf{x}(t)\right) &= \dot{g}(t)\mathbf{x}(t) + g(t)\dot{\mathbf{x}}(t)\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\mathbf{x}(t)\cdot\mathbf{y}(t)\right) &= \dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t)\cdot\dot{\mathbf{y}}(t)\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\mathbf{x}(t)\times\mathbf{y}(t)\right) &= \dot{\mathbf{x}}(t)\times\mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t)\times\dot{\mathbf{y}}(t)\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathbf{x}(t)}{g(t)}\right) &= \frac{g(t)\,\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{g}(t)\,\mathbf{x}(t)}{\left(g(t)\right)^2}\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{x}\left(g(t)\right) &= \dot{g}(t)\,\dot{\mathbf{x}}(t')_{|_{t'=g(t)}}\,.
\end{aligned}$$

Integration gewöhnlicher Funktionen:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{f(t)}_{=\dot{F}(t)}\,\mathrm{dt} = F(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \stackrel{\text{def}}{=} F(t_2) - F(t_1) \qquad \textbf{\textit{Hauptsatz}}\,,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{f}(t)g(t)\,\mathrm{dt} = f(t)g(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} f(t)\dot{g}(t)\,\mathrm{dt} \qquad \textbf{\textit{partielle Integration}}\,,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{g}(t)\,f(g(t))\,\mathrm{dt} = \int_{g(t_1)}^{g(t_2)} f(t')\,\mathrm{dt}' \qquad \textbf{\textit{Variablensubstitution}}\,.$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\underbrace{g(t)}_{\geq 0}\,\mathrm{dt} = f(t')\int_{t_1}^{t_2} g(t)\,\mathrm{dt} \quad \text{für geeignetes } t' \in [t_1, t_2]\,.$$

Integration von Vektorfunktionen:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{x}}(t)\,\mathrm{dt} = \mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}(t_1)\,.$$

Funktionen mehrerer Variabler:

Partielle Ableitung gewöhnlicher Funktionen:

$$\frac{\partial}{\partial q^\nu} f(q^1, \dots, q^n) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{0 \neq \Delta q \to 0} \frac{f(q^1, \dots, q^\nu + \Delta q, \dots q^n) - f(q^1, \dots, q^\nu, \dots q^n)}{\Delta q} \,.$$

Verallgemeinerte Kettenregel:

$$\hat{f}(q^1, \dots, q^n) = f\Big(x^1(q^1, \dots, q^n), \dots, x^n(q^1, \dots, q^n)\Big)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial q^\nu} \hat{f}(q^1, \dots, q^n) = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial q^\nu} x^\mu(q^1, \dots, q^n)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x^1, \dots, x^n)\right)_{|x^\lambda = x^\lambda(q^1, \dots, q^n)} \,.$$

Partielle Differentialausdrücke ($\mathbf{x} = x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + x^3\,\mathbf{e}_3$):

$$\boldsymbol{\nabla} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} \qquad \textsc{Nabla}\text{-}\textit{\textbf{Operator}}\,,$$

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^2 \qquad \textsc{Laplace}\text{-}\textit{\textbf{Operator}}\,,$$

$$\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\nabla}\, \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1}\,\Phi(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x^2}\,\Phi(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x^3}\,\Phi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \qquad \textit{\textbf{Gradient}}\,,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\jmath}\,(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\jmath}\,(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x^1}\,\jmath^1(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^2}\,\jmath^2(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^3}\,\jmath^3(\mathbf{x}) \qquad \textit{\textbf{Divergenz}}\,,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^2}\,A^3(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^3}\,A^2(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x^3}\,A^1(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^1}\,A^3(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x^1}\,A^2(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^2}\,A^1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \qquad \textit{\textbf{Rotation}}\,,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\,(\operatorname{grad} \Phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\,\Phi &&= 0\,, \\ \operatorname{div}\,(\operatorname{rot} \boldsymbol{\jmath}) &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\jmath}) &&= 0\,, \\ \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) &= \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}\,. \end{aligned}$$

Bedeutung des Gradienten:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\Phi\big(\mathbf{x}(t)\big) = \dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\mathrm{grad}\,\Phi\big(\mathbf{x}(t)\big)\,.}$$

TAYLOR-***Reihe***:

$$\Phi(\mathbf{x}+\mathbf{a}) = e^{\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}}\,\Phi(\mathbf{x}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Phi(\mathbf{x}) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\,(\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\,)^{\nu}\,\Phi(\mathbf{x})\,.$$

$$(\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\,)\,\Phi(\mathbf{x}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{x}) \quad (\textbf{\textit{Richtungsableitung}},\ \text{falls } |\mathbf{a}|=1)\,.$$

Einfache Parametrisierungen:

$$\begin{array}{rcll}
\mathcal{C} &=& \{\mathbf{x}(t) : t\in[t_1,t_2]\} & \textbf{\textit{Wegstück}}\,,\\
\mathcal{S} &=& \{\mathbf{x}(s,t) : (s,t)\in[s_1,s_2]\times[t_1,t_2]\} & \textbf{\textit{Flächenstück}}\,,\\
\mathcal{G} &=& \{\mathbf{x}(s,t,u) : (s,t,u)\in[s_1,s_2]\times[t_1,t_2]\times[u_1,u_2]\} & \textbf{\textit{Raumgebiet}}\,.
\end{array}$$

Entsprechende Integrale:

$$\textstyle\int_{\mathcal{C}}\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\cdot\underbrace{\dot{\mathbf{x}}(t)}_{\sim\mathbf{t}(\mathbf{x}(t))}\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\textstyle\int_{\mathcal{S}}\boldsymbol{\jmath}\,(\mathbf{x})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{s_1}^{s_2}\boldsymbol{\jmath}\,(\mathbf{x}(s,t))\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{x}(s,t)\times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}(s,t)\right)}_{\sim\mathbf{n}(\mathbf{x}(s,t))}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\,,$$

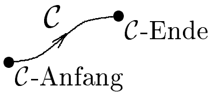
$$\textstyle\int_{\mathcal{G}}\rho(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{u_1}^{u_2}\boldsymbol{\jmath}\,(\mathbf{x})\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{x}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}\times\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}\right)\right)}_{>0}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,.$$

Entsprechende Mittelwertsätze:

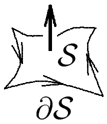
$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int_{\mathcal{C}}\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} &=& |\mathcal{C}|\ \mathbf{t}(\mathbf{x}')\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x}') & \text{für geeignetes } \mathbf{x}'\in\mathcal{C}\,,\\
|\mathcal{C}| &\stackrel{\mathrm{def}}{=}& \displaystyle\int_{t_1}^{t_2}|\dot{\mathbf{x}}(t)|\,\mathrm{d}t & \textbf{\textit{Weglänge}}\,,\\
\displaystyle\int_{\mathcal{S}}\boldsymbol{\jmath}\,(\mathbf{x})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{\mathbf{x}} &=& |\mathcal{S}|\ \mathbf{n}(\mathbf{x}')\cdot\boldsymbol{\jmath}\,(\mathbf{x}') & \text{für geeignetes } \mathbf{x}'\in\mathcal{S}\,,\\
|\mathcal{S}| &\stackrel{\mathrm{def}}{=}& \displaystyle\int_{\mathcal{S}}|\mathrm{d}\mathbf{S}_{\mathbf{x}}| & \textbf{\textit{Flächeninhalt}}\,,\\
\displaystyle\int_{\mathcal{G}}\rho(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} &=& |\mathcal{G}|\ \rho(\mathbf{x}') & \text{für geeignetes } \mathbf{x}'\in\mathcal{G}\,,\\
|\mathcal{G}| &\stackrel{\mathrm{def}}{=}& \displaystyle\int_{\mathcal{G}}\mathrm{d}V_{\mathbf{x}} & \textbf{\textit{Rauminhalt}}
\end{array}$$

($\mathbf{t} \stackrel{\mathrm{def}}{=}$ Tangentenvektor, $|\mathbf{t}\,|=1$; $\mathbf{n} \stackrel{\mathrm{def}}{=}$ Flächennormale, $|\mathbf{n}|=1$).

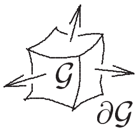
Entsprechende Hauptsätze:



$$\int_{\mathcal{C}} \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \quad = \quad \Phi\left(\mathbf{x}_{\text{Ende}}\right) - \Phi\left(\mathbf{x}_{\text{Anfang}}\right) ,$$



$$\int_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} ,$$



$$\int_{\mathcal{G}} \operatorname{div} \jmath\,(\mathbf{x})\; \mathrm{d}V_{\mathbf{x}} \underset{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial\mathcal{G}} \jmath\,(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{\mathbf{x}} .$$

Wichtige Äquivalenzen:

Ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ heißt ***wirbelfrei***, oder auch ***konservativ***, falls eine der folgenden drei äquivalenten Aussagen zutrifft:

1. $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$ für **jeden geschlossenen** Weg $\mathcal{C}$.
2. $\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ für **alle** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.
3. $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x})$ für geeignetes ***Skalarpotential*** $\Phi(\mathbf{x})$.

Ein Vektorfeld $\mathbf{B}$ heißt ***quellfrei***, falls eine der folgenden drei äquivalenten Aussagen zutrifft:

1. $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = 0$ für **jedes geschlossene** Flächenstück $\mathcal{S}$.
2. $\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ für **alle** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.
3. $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ für ein geeignetes ***Vektorpotential*** $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Fundamentalsatz der Vektoranalysis:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \underbrace{-\operatorname{grad} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}'}}_{\text{wirbelfrei}} + \underbrace{\operatorname{rot} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}'}}_{\text{quellfrei}}$$

(für hinreichend gutartiges $F(\mathbf{x})$).

Kugelkoordinaten r , ϑ , φ :

$$x^1 = r\, \sin\vartheta\, \sin\varphi , \quad x^2 = r\, \sin\vartheta\, \cos\varphi , \quad x^3 = r\, \cos\vartheta ,$$

$$\mathbf{e}_r \overset{\text{def}}{=} \frac{\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{x}}{\left|\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{x}\right|} , \quad \mathbf{e}_\vartheta \overset{\text{def}}{=} \frac{\frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathbf{x}}{\left|\frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathbf{x}\right|} , \quad \mathbf{e}_\varphi \overset{\text{def}}{=} \frac{\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{x}}{\left|\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{x}\right|} ,$$

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{grad}\Phi)^r &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_r \cdot \operatorname{grad}\Phi &= \frac{\partial}{\partial r}\Phi\,,\\
(\operatorname{grad}\Phi)^\vartheta &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_\vartheta \cdot \operatorname{grad}\Phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Phi\,,\\
(\operatorname{grad}\Phi)^\varphi &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_\varphi \cdot \operatorname{grad}\Phi &= \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{div}\boldsymbol{\jmath} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \jmath^r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\jmath^\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\jmath^\varphi\,,
$$

$$
\triangle\Phi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 (r\,\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\Phi\,,
$$

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{rot}\boldsymbol{\jmath})^r &= \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\jmath^\varphi\right) - \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\jmath^\vartheta\,,\\
(\operatorname{rot}\boldsymbol{\jmath})^\vartheta &= \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\jmath^r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\jmath^\varphi\right)\,,\\
(\operatorname{rot}\boldsymbol{\jmath})^\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\jmath^\vartheta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\jmath^r\,.
\end{aligned}
$$

Fourier-Theorie

Fourier-*Reihenentwicklung:*

$$
f(t) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{\nu=-n}^{+n} c_\nu(f)\,e^{+i\,\nu\,\omega\,t}\,,\qquad c_\nu(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} f(t)\,e^{-i\,\nu\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t\,,
$$

punktweise konvergent unter Voraussetzung der Dirichlet-*Bedingungen:*

(i) $f(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$,

(ii) f stückweise stetig,

(iii) $\Re(f)$, $\Im(f)$ stückweise monoton,

(iv) $f(t) = \frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to+0}\left(f(t+\Delta t) + f(t-\Delta t)\right)$.

Fourier *Transformation* $f \longmapsto \tilde{f}$:

$$
\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t \qquad\Longleftrightarrow\qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\omega)\,e^{+i\,\omega\,t}\,\mathrm{d}\omega
$$

(für hinreichend gutartiges $f(t)$).