Übungsaufgaben

Theoretische Physik I

WS 04/05

Prof. Dr. C. Gros

9. Übung

Abgabe: Mi.,26.01.05
(bis 12:00, im Briefkasten)

Aufgabe 32

Zeigen Sie allgemein, dass Transformationen der Lage kanonische Transformationen sind (Siehe Beispiel in Kapitel 7 im Vorlesungsskript). Berechnen Sie allgemein die Einträge für die Jacobi-Matrix

$$A_{kl} \;=\; \frac{\partial y_k}{\partial x_l}$$

und weisen Sie expliziet nach, dass diese die Bedingung

$$A^T \varepsilon\, A \;=\; \varepsilon, \qquad \varepsilon \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & 0 \\ & & 0 & -1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & 0 & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Aufgabe 33

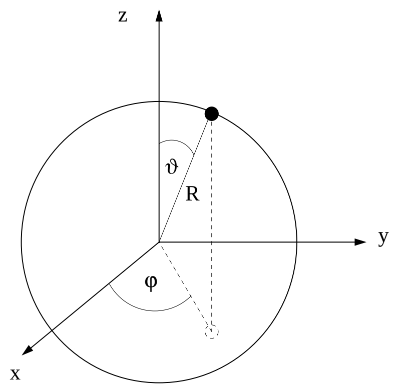
Es sei eine Transformation

$$\begin{aligned} Q &= ln\left(1 + q^{\frac{1}{2}}\, cos(p)\right) \\ P &= 2\left(1 + q^{\frac{1}{2}}\, cos(p)\right) q^{\frac{1}{2}}\, sin(p) \end{aligned}$$

gegeben.

Zeigen Sie, daß die Transformation kanonisch ist !

Aufgabe 34



Ein Massenpunkt bewegt sich reibungsfrei auf einem zu einem Kreis mit dem Radius R gebogenen Draht, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale z-Achse im Schwerefeld rotiert.
Führen Sie geeignete generalisierte Korrdinaten ein.

(a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und daraus die Bewegungsgleichung für den Massenpunkt.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen, d.h. die Lösungen $\vartheta_i = const$ und untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften (stellen Sie also fest, ob der Massenpunkt sich bei einer kleinen anfänglichen Abweichung ϵ von ϑ_i im Laufe der Zeit weiter von $\epsilon = 0$ entfernt oder nicht).

(c) Bestimmen Sie die Gesamtenergie $E = T + V$, die Hamiltonfunktion H, sowie die zeitlichen Änderungen von beiden.

Hinweis zu Teil b) Setzen Sie den Winkel $\vartheta_i + \epsilon$ in die Bewegungsgleichung ein und untersuchen Sie die sich ergebende Bewegungsgleichung für ϵ.

Aufgabe 35

Bestimmen Sie für den im Schwerpunkt gelagerten freien symmetrischen Kreisel (Trägheitsmomente $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$) mit Figurenachse $\tilde{y}_3$ die Lagrange-Funktion mit den Eulerschen Winkeln als generalisierte Koordinaten. Geben Sie die zugehörigen Lagrange-Gleichungen an und zeigen Sie, daß die Lagrange-Gleichung zum Eulerschen Winkel ψ mit einer der Euler-Gleichungen übereinstimmt.