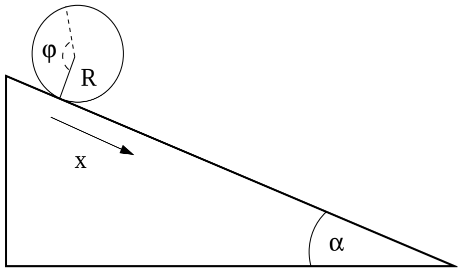
Übungsaufgaben — Theoretische Physik I

WS 04/05 — Prof. Dr. C. Gros

6. Übung — Abgabe: Mi.,01.12.04
(bis 12:00, im Briefkasten)



Aufgabe 20

Ein hohler Kreiszylinder der Masse M mit Radius R rollt ohne Schlupf (d.h. ohne zu gleiten) eine schiefe Ebene hinab (siehe Abb.).

a) Bestimmen Sie die kinetische Energie T als Funktion von $\dot{x}$ und $\dot{\varphi}$ und die potentielle Energie als Funktion von x.

   Hinweis: Der Beitrag der Rotationsenergie zu T lautet: $T_{rot} = \frac{1}{2} M R^2 \ \dot{\varphi}^2$.

b) Benutzen Sie die Tatsache, daß der Zylinder auf der Ebene rollt, um das System durch eine einzige generalisierte Koordinate zu beschreiben.
   Wie lautet die Lagrange-Funktion L ?

c) Geben Sie die Lagrangesche Bewegungsgleichung an !

d) Welche Geschwindigkeit erreicht der Zylinder nach einer Rollstrecke l, wenn er zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ losgelassen wird ?

Aufgabe 21

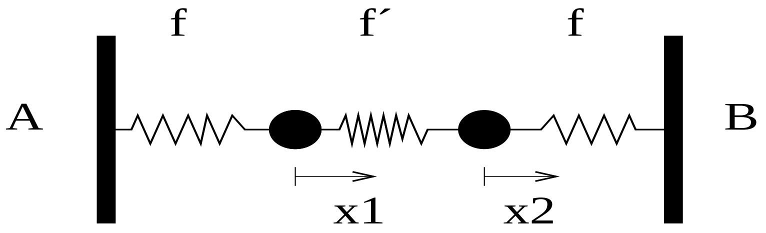
Zeigen Sie, daß sich in der Fourierdarstellung

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} y\left(\frac{2\pi}{N} l\right) \ e^{-i \frac{2\pi}{N} l \, n}$$

eines Vektors die Entwicklungskoeffizienten zu

$$y(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \, e^{i \frac{2\pi}{N} l \, n} \quad , \quad k = \frac{2\pi}{N} \, l$$

ergeben.



Aufgabe 22

Zwei gleiche Massen m sind auf die im Bild gezeigte Weise durch Federn mit Kraftkonstanten f und $f' \neq f$ verbunden und können auf der Linie A-B reibungslos gleiten.

a) Stellen Sie die Newton´schen Bewegungsgleichungen für dieses System auf. Definieren Sie dann einen Vektor $\underline{z}$ mit den Komponenten $z_i = x_i$ und $z_{i+2} = \dot{x}_i$ für $i = 1, 2$ (x_i : Auslenkung der Masse i aus der Gleichgewichtslage) und bringen Sie die Bewegungsgleichung auf die Form $\dot{\underline{z}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{z}$ mit einer geeigneten Matrix $\underline{\underline{A}}$.

b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen des Systems und beschreiben Sie die zugehörigen Grundschwingungen.
Hinweis: Es sind die Eigenwerte und -vektoren von $\underline{\underline{A}}$ zu berechnen und zu interpretieren.

Aufgabe 23

Gegeben seien eine Langrange-Funktion $L = L(x, \dot{x}, \ddot{x})$, die explizit von der zweiten Ableitung $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ abhängt, und die zugehörige Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, \ddot{x})\, dt\,.$$

Bestimmen Sie die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung indem Sie S bei festen Randwerten $x(t_1)$, $x(t_2)$, $\dot{x}(t_1)$, $\dot{x}(t_2)$ variieren.