2. Klausur zur Theoretischen Physik I, WS 04/05

Zugelassene Hilfsmittel: Ein DIN-A4 Blatt mit handschriftlichen Notizen.

Vorname:

Name:

Geburtsdatum:

Geburtsort:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	Σ

Aufgabe 1 : Wissensfragen (je 1 Punkt)

1. Welche Rotationen eines freien Kreisels sind stabil?
2. Was sind die Euler'schen Winkel?
3. Auf welchen Postulaten baut die relativistische Mechanik auf?
4. Nennen Sie zwei Experimente, welche mit der Newton'schen Mechanik nicht erklärt werden können.
5. Welches ist die Definitionsgleichung einer Lorentz-Transformation.
6. Definieren Sie ko- und kontravariante Vierer-Vektoren.
7. Was bedeutet die Kausalität im Rahmen der relativistischen Mechanik?
8. Wie ist die Legendre-Transformation definiert?
9. Was ist eine kanonische Transformation?
10. Was ist eine Erzeugende für eine kanonische Transformation?

Aufgabe 2 : Relativistische Mechanik (10 Punkte)

Beschreiben die folgenden Matrizen $\underline{\underline{\Lambda}}$ Lorentztransformationen für kontravariante Vierervektoren der Art $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$?

$$a) \qquad \begin{pmatrix} cosh(\alpha) & 0 & 0 & -sinh(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sinh(\alpha) & 0 & 0 & cosh(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$b) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cosh(\alpha) & 0 & sinh(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & sinh(\alpha) & 0 & cosh(\alpha) \end{pmatrix}$$

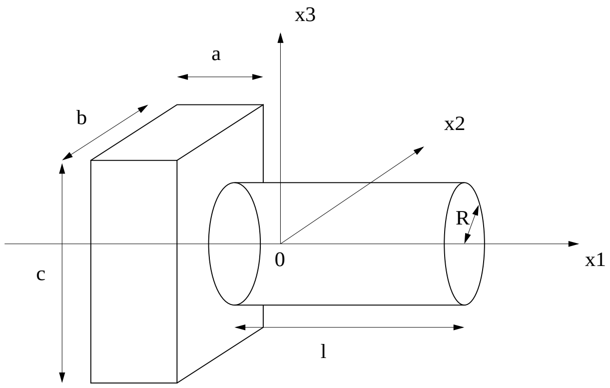
$$c) \qquad \begin{pmatrix} cos(\varphi) & sin(\varphi) & 0 & 0 \\ -sin(\varphi) & cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\varphi) & sin(\varphi) \\ 0 & 0 & -sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Welche Bedeutung haben die Parameter α und φ ?

Aufgabe 3 : Trägheitstensor (10 Punkte)



Bestimmen Sie die Elemente des Trägheitstensors des gezeigten Werkstücks. Es besteht aus einem Quader (Kantenlängen a, b, c, Dichte ρ_1) und einem Zylinder (Länge ℓ, Radius R, Dichte ρ_2), der senkrecht in der Mitte einer Seitenfläche des Quaders angebracht ist.

Bestimmen Sie dazu zuerst die Massen und Trägheitstensoren von Quader und Zylinder. Benutzen Sie hierfür die Orientierung der Achsen wie im Bild vorgegeben.

Legen Sie den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt des Werkstücks und geben Sie die Einzelschwerpunkte $\underline{R}^Q, \underline{R}^Z$ von Quader und Zylinder an.

Aufgabe 4 : Poissonklammern (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Poissonklammern der Drehimpulskomponenten L_i mit den Komponenten eines von $\underline{r}$ und $\underline{p}$ abhängigen Vektors $\underline{A}(\underline{r}, \underline{p})$

a) allgemein

Was erhält man speziell für

b) $\underline{A} \equiv \underline{r}$?

c) $\underline{A} \equiv \underline{p}$?

d) $\underline{A} \equiv \underline{L}$?

Geben Sie für b),c),d) die Matrizen $\{L_i, A_j\}$ explizit an !

Hinweis: Es gilt $(\underline{a} \times \underline{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$; $\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$.

Aufgabe 5 : Infinitesimale Drehung (10 Punkte)

a) Zeigen Sie (qualitativ) mit Hilfe eines Beispiels, dass zwei *endliche* Drehungen im allgemeinen nicht-kommutativ sind.

b) Betrachten Sie eine *infinitesimate Transformation* des Vektors $\vec{x}$:

$$x'_i = x_i + \epsilon_{ij} x_j$$

mit $\epsilon_{ij} \ll 1$. Zeigen Sie, dass diese Transformation als Matrixgleichung $\vec{x}' = (1 + \hat{\epsilon})\vec{x}$ geschrieben werden kann, wobei $\hat{\epsilon}$ die Matrix der ϵ_{ij} ist. Zeigen Sie ferner, dass zwei *infinitesimale* Transformationen kommutieren.

c) Eine infinitesimale Transformation sei durch die Matrix $1 + \hat{\epsilon}$ gegeben. Bestimmen Sie die Matrix der inversen Transformation.

d) Eine infinitesimale Transformationeines Vektors $\vec{x}$ wird durch eine *orthogonale* Matrix $1 + \hat{\epsilon}$ dargestellt, d.h. $x'_i = x_i + \epsilon_{ij} x_j$, wobei $(1 + \hat{\epsilon})^{-1} = (1 + \hat{\epsilon})^T$ gilt. Zeigen Sie, dass $\hat{\epsilon}$ schiefsymmetrisch ist, d.h. für die Elemente ϵ_{ij} gilt $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$. Wieviele unabhängige Elemente enthält $\hat{\epsilon}$ folglich?

e) Zeigen Sie, dass sich die Änderung des Vektors $\vec{x}$ unter einer infinitesimalen Drehung in der Form

$$d\vec{x} = \vec{x} \times d\vec{\Omega}$$

schreiben lässt. Wie hängt $d\vec{\Omega}$ mit den Matrixelementen ϵ_{ij} aus Aufgabenteil d) zusammen? Welche physikalische Bedeutung hat $d\vec{\Omega}$?

Aufgabe 6 : Kanonische Transformation (10 Punkte)

a) Zeigen Sie die Kanonizität der Transformation

$$\begin{aligned}
q_1 &= -\sqrt{P_1/k_1}\cos Q_1 - \sqrt{P_2/k_2}\cos Q_2 \,, \\
p_1 &= \sqrt{P_1 k_1}\sin Q_1 + \sqrt{P_2 k_2}\sin Q_2 \,, \\
q_2 &= -\sqrt{P_1/k_1}\cos Q_1 + \sqrt{P_2/k_2}\cos Q_2 \,, \\
p_2 &= \sqrt{P_1 k_1}\sin Q_1 - \sqrt{P_2 k_2}\sin Q_2
\end{aligned}$$

Hinweis: Überprüfen Sie die Invarianz der Poissonklammern oder geben Sie eine Erzeugende $F_1(q, Q)$ an. Es genügt nicht, die Determinante der Jacobi-Matrix zu berechnen.

b) Lösen Sie mit Hilfe der Transformation aus a) die Bewegungsgleichungen für ein System mit Hamiltonfunktion

$$H = p_1^2 + p_2^2 + \frac{k_1^2}{4}(q_1 + q_2)^2 + \frac{k_2^2}{4}(q_1 - q_2)^2 \; .$$