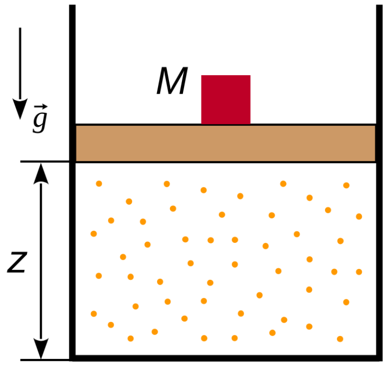
Achtung: Dies ist eine Präsenzübung, d. h. die Übungsaufgaben sollen wie gewohnt zuhause bearbeitet, dann aber im Tutorium einzeln gelöst und anschließend beim jeweiligen Tutor abgegeben werden.

Blatt №9 (Präsenzübung)

Dr. Vladislav Borisov <borisov@itp.uni-frankfurt.de>

Aufgabe 26 (*Fluktuationen im kanonischen Ensemble*) (8 Pkte.)



Wir betrachten ein ideales Gas mit N Teilchen der Masse m pro Teilchen in einem zylindrischen Behälter der Querschnittsfläche A (siehe Abbildung). Die Gewichtskraft einer Masse M wirkt auf den Stempel, der sich entlang der z-Richtung reibungsfrei bewegen kann. Die Temperatur T des ganzen Systems wird konstant gehalten.

a) Nutzen Sie das kanonische Ensemble, um das mittlere Volumen $\langle V\rangle = A\langle z\rangle$ zu berechnen ($\langle z\rangle$ ist die mittlere z-Koordinate vom Stempel). Was erhält man für die Zustandsgleichung? *(4 Pkte.)*

Hinweis: Bei der Berechnung der Zustandssumme kann man die Definition der Gamma-Funktion verwenden: $\Gamma(N) = \int_0^\infty dt\, t^N e^{-t}$, *und* $\Gamma(N) = N!$ *für ganzzahlige* N.

b) Wie groß sind die Volumenfluktuationen $\langle \Delta V^2\rangle$? Vergleichen Sie die Fluktuationen mit dem mittleren Wert $\langle V\rangle$ und diskutieren Sie das Ergebnis. *(2 Pkte.)*

c) Berechnen Sie die innere Energie $\langle E\rangle$ und erklären Sie den Ursprung der beobachteten Temperaturabhängigkeit. *(2 Pkte.)*

Aufgabe 27 (*Dipol im elektrischen Feld*) (7 Pkte.)

Ein Gas bestehe aus N Molekülen mit einem intrinsischen Dipolmoment $p_0 = ql \neq 0$ und befinde sich in einem homogenen elektrischen Feld der Stärke E. Die Energie eines Dipols, der mit dem Winkel θ zu der Feldrichtung steht ist gegeben durch den klassichen Ausdruck $H_E = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -p_0 E\cos\theta$. Das System ist im thermischen Gleichgewicht und hat eine konstante Temperatur T. Wechselwirkungen zwischen den Molekülen sind vernachlässigbar.

a) Bestimmen Sie die Temperatur- und Feldabhängigkeit des mittleren Gesamtdipolmoments in Richtung des Feldes mithilfe des kanonischen Ensembles. *(3 Pkte.)*

Hinweis: Ein klassischer Dipol darf prinzipiell eine beliebige Orientierung zu dem externen elektrischen Feld haben.

b) Skizzieren Sie den Verlauf des mittleren Moments als Funktion des Feldes und berechnen Sie die Suszeptibilität im Grenzwert schwacher Felder ($p_0 E \ll k_\mathrm{B} T$). *(2 Pkte.)*

Die Suszeptibilität beschreibt die Reaktion der Dipole auf das elektrische Feld und ist definiert durch:

$$\chi(T) = \lim_{E \to 0} \left(\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial E} \right)_T \tag{1}$$

c) Wie ändert sich die Wärmekapazität (bei konstantem Volumen) durch die Präsenz der elektrischen Dipole im Vergleich zu dem Fall $p_0 = 0$? Das Gas besteht aus zweiatomigen Molekülen und dementsprechend ist die innere Energie ohne elektrisches Feld ($\vec{E} = 0$) gegeben durch $U = \frac{5}{2} N k_\mathrm{B} T$. Bei der Analyse der Wärmekapazität betrachten Sie den Fall schwacher Felder, sodass $p_0 E \ll k_\mathrm{B} T$. *(2 Pkte.)*

Aufgabe 28 (*Entropie für die Gauß-Verteilung*) (5 Pkte.)

Eine eindimensionale Zufallsvariable x hat eine Wahrscheinlichkeitsverteilung im Interval $-\infty < x < \infty$, die durch eine Gauß-Funktion mit dem Mittelwert $\langle x \rangle = 0$ und der Standardabweichung $\langle x^2 \rangle = \sigma^2$ beschrieben wird:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right] \tag{2}$$

a) Berechnen Sie die Entropie für diese Verteilung, die ähnlich wie im Blatt 7 folgendermaßen definiert ist:

$$S = -k_\mathrm{B} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, W(x) \ln W(x) \tag{3}$$

Qualitativ, wie ändert sich die Verteilung, wenn die Entropie wächst? *(2 Pkte.)*

b) Beweisen Sie, dass die Gauß-Verteilung (2) für eine vorgegebene Standardabweichung σ die Entropie (3) maximiert. Verwenden Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren, um die Normierung der Verteilung $W(x)$ und die vorgegebene Standardabweichung $\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, x^2 \, W(x)$ zu berücksichtigen.

(3 Pkte.)