Blatt №8

Dr. Vladislav Borisov <borisov@itp.uni-frankfurt.de>

Aufgabe 23 (*Ideales Photonengas*) (6 Pkte.)

Ein ideales Gas aus N Photonen ($N \gg 1$) ist in einem Behälter des Volumens V eingeschlossen. Die Energie und der Impuls einzelner Photonen sind verknüpft durch $E = |\vec{p}|c$, wobei c für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum steht.

Berechnen Sie mithilfe des mikrokanonischen Ensembles die innere Energie und den Druck des Photonengases als Funktion der Temperatur. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Aufgabe 15 (Blatt 5). *(4 Pkte.)*

Berechnen Sie außerdem die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstanem Volumen (C_V) und Druck (C_P). *(2 Pkte.)*

Hinweis: die multidimensionalen Integrale in der mikrokanonischen Zustandssumme müssen hier nicht explizit ausgewertet werden.

Aufgabe 24 (*Bohr-van Leeuwen-Theorem*) (6 Pkte.)

Ein klassisches System aus N geladenen Teilchen befinde sich in einem beliebigen Potential $V(\{\vec{r}_i\})$ und einem Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$, das im Allgemeinen inhomogen sein kann. Das induzierte magnetische Moment $\vec{m}$ folgt aus der Hamilton-Funktion: $\vec{m} = -\nabla_{\vec{B}} H$ mit $\nabla_{\vec{B}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial B_x}, \frac{\partial}{\partial B_y}, \frac{\partial}{\partial B_z} \right)$.

a) Leiten Sie den allgemeinen Ausdruck für die kanonische Zustandssumme her. Verwenden Sie dafür die Hamilton-Funktion für das N-Teilchensystem im Magnetfeld. *(2 Pkte.)*

b) Wie kann man das mittlere magnetische Moment $\langle \vec{m} \rangle$ mithilfe der Zustandssumme ausrechnen? *(1 Pkt.)*

c) Beweisen Sie, dass das mittlere Moment für beliebiges $\vec{B} \neq 0$ immer null ist. *(2 Pkte.)*

Interpretieren Sie das Ergebnis. Aus welchem Grund haben reale Systeme endliche magnetische Momente? *(1 Pkt.)*

Aufgabe 25 (*Negative absolute Temperaturen*) (8 Pkte.)

Ein Zwei-Niveau-System besteht aus N Teilchen, die jeweils Energien $\epsilon_0 = 0$ oder $\epsilon_1 = \epsilon > 0$ besitzen können. Die Anzahl der Teilchen auf jedem der zwei Niveaus ist nur durch die Gesamtteilchenzahl beschränkt ($N \gg 1$).

a) Berechnen Sie die Anzahl der Mikrozustände mit der Energie im Interval $[E, E + \Delta E]$ mit $\epsilon \ll \Delta E \ll E$. Drücken Sie die Zustandsdichte durch die Gesamtenergie E aus. *(2 Pkte.)*

Hinweis: bestimmen Sie zuerst die Anzahl der Energiezustände im obengenannten Interval und dann die Multiplizität eines gegebenen Energiezustandes.

b) Aus der Zustandsdichte leiten Sie die Entropie $S(E, N)$ des Systems her und bestimmen Sie die Temperaturabhängigkeit der Energie $E(T, N)$. Was erhält man für die mittlere Energie im Grenzfall $T \to \infty$. *(3 Pkte.)*

Hinweis: der Ausdruck für den Logarithmus der Zustandsdichte kann mithilfe der Stirling-Formel vereinfacht werden.

c) Welche Besonderheit hat der Temperaturverlauf der Wärmekapazität? *(2 Pkte.)*

d) In welchem Fall wird die absolute Temperatur negativ? Welche Eigenschaft muss das Energiespektrum eines beliebigen Systems haben, damit ein Zustand mit negativer Temperatur realisierbar ist? *(1 Pkt.)*