Blatt №7

Dr. Vladislav Borisov <borisov@itp.uni-frankfurt.de>

Aufgabe 19 (*Van-der-Waals-Gas*) (6 Pkte.)

Für das Van-der-Waals-Gas mit der Zustandsgleichung:

$$(P + a\frac{N^2}{V^2})(V - Nb) = Nk_\mathrm{B}T, \quad a, b = \mathrm{const} \tag{1}$$

a) zeigen Sie, dass die erste und zweite Ableitung vom Druck nach Volumen am kritischen Punkt verschwindet: *(1 Pkt.)*

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0 \tag{2}$$

b) Schreiben Sie die Van-der-Waals-Gleichung durch die dimensionslosen Variablen

$$P' = \frac{P}{P_c}, \ V' = \frac{V}{V_c}, \ T' = \frac{T}{T_c}, \tag{3}$$

wobei P_c, V_c und T_c die Zustandsparameter am kritischen Punkt bezeichnen. *(1 Pkt.)*

c) Führen Sie die Maxwell-Konstruktion unterhalb der kritischen Temperatur aus und betrachten Sie kleine Abweichungen von T_c, sodass $V = V_c(1 + \upsilon)$ und $T = T_c(1 + \tau)$ ($\tau < 0$). Entwickeln Sie $P(T, V)$ nach den kleinen Parametern υ und τ bis zu der Ordnung $O(\tau, \tau\upsilon, \upsilon^3)$. Mithilfe der Maxwell-Konstruktion bestimmen Sie die Koexistenzkurve und die Skalierung der Volumendifferenz zweier koexistierenden Phasen mit der Temperatur, d.h. berechnen Sie den Parameter β, sodass $V_\mathrm{gas} - V_\mathrm{liquid} \sim |\tau|^\beta$. *(4 Pkte.)*

Aufgabe 20 (*Liouville-Theorem*) (3 Pkte.)

Mithilfe der Liouville-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(q, p, t) + (\vec{\upsilon}_{ps} \cdot \nabla)\rho(q, p, t) = 0 \tag{4}$$

beweisen Sie, dass die Verteilung eines statistischen Ensembles stationär ist, wenn die Dichteverteilungsfunktion $\rho(q, p, t)$ nur von der Hamilton-Funktion $H(p, q)$ abhängt.

Aufgabe 21 (*Oszillator mit Dämpfung*) (6 Pkte.)

Im Gegensatz zum idealen harmonischen Oszillator gibt es in realen Systemen immer eine Dämpfung, die zu Energieverlusten führt. Betrachten wir einen gedämpften Oszillator mit den Bewegungsgleichungen:

$$\frac{dp}{dt} = -kq - \gamma\frac{p}{m}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{p}{m} \tag{5}$$

Der Term mit der Konstante $\gamma > 0$ beschreibt die Dämpfung in diesem System. Nehmen wir an, dass ein Ensemble solcher Oszillatoren anfangs über den ganzen Phasenraum gleichmäßig verteilt ist.

a) Wie entwickelt sich die Phasenraumdichte im Laufe der Zeit? Interpretieren Sie das Ergebnis. *(3 Pkte.)*

b) Welche Aussage kann man über die Entropie des Systems treffen? Die Entropie ist definiert durch

$$S = -k_\mathrm{B} \iint dp\, dq\, \rho(p,q,t) \ln[g \cdot \rho(p,q,t)], \tag{6}$$

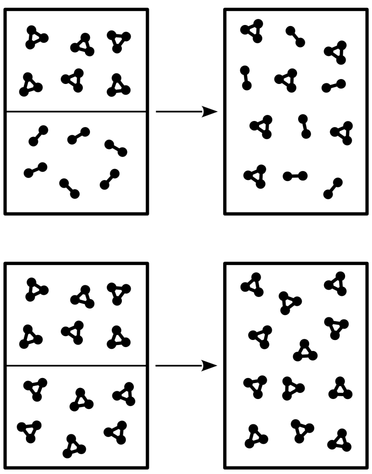
wobei g eine Konstante ist.

Wie kann die beobachtete Entropieänderung mit dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik vereinbart werden? *(2 Pkte.)*

c) Qualitativ, wie ändern sich die Ergebnisse, wenn die Anfangsdichte im begrenzten Phasenvolumen nicht null ist: $\rho(p,q,t=0) = \text{const}$ für $H(p,q) \leq E$ mit $H(p,q) = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 q^2}{2}$? *(1 Pkt.)*

Aufgabe 22 (*Mischungsentropie*) (5 Pkte.)

Um die mikroskopische Bedeutung der Entropie zu veranschaulichen, kann man folgendes Gedankenexperiment durchführen:



a) Zwei unterscheidbare ideale Gase mit N Teilchen der ersten Sorte und N Teilchen der zweiten Sorte sind anfangs durch eine Wand voneinander getrennt und besitzen jeweils das Volumen V und die Temperatur T. Die internen Freiheitsgrade der jeweiligen Teilchen werden hier nicht berücksichtigt und wir vernachlässigen außerdem jegliche Wechselwirkung zwischen den Gasen.

Die Wand wird zunächst entfernt und die beiden Gase vermischen sich, wobei die Gesamtenergie in diesem Prozess erhalten ist. Wie ändern sich die Gesamtentropie und die Temperatur? Wie kann man das Ergebnis physikalisch begründen? *(3 Pkte.)*

b) Betrachten wir jetzt ein ähnliches Experiment, wo die beiden Gase ununterscheidbar sind. Was erhält man hier für die Entropieänderung nach dem Entfernen der Wand?

Interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf Punkt **b**. *(2 Pkte.)*

Hinweis: verwenden Sie die Sackur-Tetrode-Gleichung für die Entropie $S(E, V, N)$.