Blatt №1

Dr. Vladislav Borisov <borisov@itp.uni-frankfurt.de>

Aufgabe 1 (*Partielle Ableitungen und Kettenregel*) (6 Pkte.)

Variablen x, y und z sind durch eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ verbunden. Zeigen Sie folgende Relationen:

a) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1$ *(1 Pkt.)*

b) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$ (Kettenregel) *(2 Pkte.)*

Überprüfen Sie diese Relationen für die Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$f(P, V, T) = PV - Nk_\mathrm{B}T = 0 \quad \textit{(3 Pkte.)}$$

Aufgabe 2 (*Exakte Differenzialformen*) (6 Pkte.)

a) Unter welchen Bedingungen ist die Differenzialform $d\omega = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$ exakt, sodass $\omega(x, y)$ einer Zustandsfunktion entspricht? *(1 Pkt.)*

b) Prüfen Sie, ob die folgende Differenzialform exakt ist:

$$d\omega = \left(\ln\frac{x}{y} - 1\right) dx + \frac{x}{y} dy$$

Wenn möglich, bestimmen Sie die Funktion $\omega(x, y)$. *(2 Pkte.)*

c) Es sei eine nicht exakte Differenzialform gegeben:

$$d\omega(T, V) = C\,dT + P\,dV,$$

wobei die Variablen P, V und T die Zustandsparameter eines idealen Gases repräsentieren und es gilt $PV = Nk_\mathrm{B}T$.

Finden Sie den integrierenden Faktor $f(T)$, sodass das Produkt $f(T) \cdot d\omega(T, V)$ eine exakte Differenzialform darstellt. Integrieren Sie diese Form und drücken Sie das Ergebnis als Funktion von T und V aus. *(3 Pkte.)*

Aufgabe 3 (*Stirling-Formel, Binomial- und Poissonverteilung*) (8 Pkte.)

Die Stirling-Formel ermöglicht die Abschätzung von $n!$ für große n:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{1}$$

- **(a)** Finden Sie einfache Argumente dafür, dass diese Formel den Term $(n/e)^n$ enthalten soll. *(2 Pkte.)*
- **(b)** Wie groß ist der relative Fehler von (1) für $n = 10$? Wie groß muss n sein, damit die relative Abweichung der Stirling-Formel vom exakten Ergebnis für $n!$ weniger als ein Prozent beträgt? *(2 Pkte.)*
- **(c)** Bei einem Experiment wird das Ergebnis A mit der Wahrscheinlichkeit p gemessen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei N Durchführungen solches Experiments das Ergebnis A genau n-mal gemessen wird, ist gegeben durch die Binomialverteilung:

  $$w(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

  Vereinfachen Sie diesen Ausdruck im Grenzfall, wenn $N \to \infty$ und $p \to 0$, das Produkt $Np = \lambda$ aber konstant gehalten wird, und zeigen Sie, dass das Ergebnis einer Poissonverteilung entspricht. Bestimmen Sie die Parameter dieser Verteilung und berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable n als Funktion vom Parameter λ. *(4 Pkte.)*