

Kapitel 5

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

5.1 Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

In diesem Kapitel wird die Quantisierung verschiedener Feldgleichungen behandelt, man spricht auch von *quantisierten Feldtheorien*.

Die Basis einer Feldtheorie bildet immer eine Gleichung (oder ein Satz von Gleichungen), die das Verhalten einer Größe beschreibt, die ein physikalisches System charakterisiert. Diese Größe nennt man *das Feld*. Die Hydrodynamik z. B. ist eine Feldtheorie für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$, die Elektrodynamik hat Feldgleichungen für \vec{E} - und \vec{B} -Felder (bzw. die Potentiale), nämlich die Maxwell-Gleichungen. Die Feldgleichung für die nichtrelativistische Quantenmechanik ist die Schrödinger-Gleichung, und in der relativistischen QM hat man Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung. Die Allgemeine Relativitätstheorie erklärt die Gravitation mit Hilfe der Einsteinschen Feldgleichungen für die Metrik $g^{\mu\nu}$.

Wenn es sich um klassische Feldgleichungen handelt, so steht man vor der Aufgabe, klassische Felder in quantenmechanische Operatoren überführen zu müssen. Hier führen wir die Quantisierung der Maxwell-Gleichungen durch.

5.1.1 Maxwell-Gleichungen und Korrespondenzprinzip

Bevor wir uns der eigentlichen Quantisierung des Lichtfeldes zuwenden wollen wir einige Vorarbeiten aus der Mechanik, der Elektrodynamik und der QM-I wiederholen.

Korrespondenzprinzip

Das Korrespondenzprinzip hat uns schon in der QM-I geholfen eine formale Herleitung¹ der Schrödingergleichung für ein Teilchen vorzunehmen. Man geht dabei von den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen aus, wir werden es bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes ebenso machen.

Für die kanonisch konjugierten Variablen q_i und p_i gelten folgende Äquivalenzen:

¹Die elementaren Naturgesetze kann man streng genommen nicht herleiten sondern nur postulieren und experimentell überprüfen. In der Physik sieht man es als den besseren Weg an, allg. Prinzipien und Symmetrieforderungen zu postulieren und deren Konsequenz zu testen.

	<u>Mechanik</u>	<u>Quantenmechanik</u>
(1)	Phasenraum	Hilbertraum
(2)	Funktion $A(q_i, p_i)$	Operator \hat{A}
(4)	Hamiltonfunktion H	Hamiltonoperator \hat{H}
(5)	q_i, p_i	Operatoren \hat{q}_i, \hat{p}_i
(6)	Poisson Klammer $\{A, B\}$	Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$
(7)	$\{q_i, p_j\} = 0$	$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$
(8)	$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$	$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A} = i\hbar \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + [\hat{A}, \hat{H}]$

Diese Tabelle beschreibt das Korrespondenzprinzip. Insbesondere sieht man aus Punkt (7) und (8), dass der klassische Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ erfüllt ist.

Poisson Klammer

Wir rufen uns die Definition

$$\{q_n, p_m\} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial q_n}{\partial q_i} \frac{\partial p_m}{\partial p_i} - \frac{\partial q_n}{\partial p_i} \frac{\partial p_m}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^f \delta_{ni} \delta_{mi} = \delta_{nm},$$

der Poisson Klammer für kanonische Variablen in Erinnerung, es gilt demnach

$$\{A, B\} = -\{B, A\}.$$

Hamilton'sche Bewegungsgleichungen

Ein klassisches Feld ist nichts anderes als eine Funktion $F(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$ auf dem Phasenraum $\{\vec{q}, \vec{p}\}$. Es gelten die Hamilton'schen Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \underbrace{\sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{\equiv \{F, H\}}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

wobei $\{F, H\}$ eine Poisson Klammer ist.

Feldoperator

Wir suchen nun eine Feldoperator F_{op} , welcher im klassischen Grenzfall (5.1) erfüllt. Da wir zwischen dem Schrödinger-Bild (Operator mit Superscript 'S') und dem Heisenberg-Bild F_{op} unterscheiden suchen wir eine Feldoperator F_{op} welcher nach erfolgreicher Quantisierung

$$\frac{dF_{op}}{dt} = \left(\frac{\partial F_{op}^S}{\partial t} \right)_H + \frac{1}{i\hbar} [F_{op}, H_{op}], \quad (5.2)$$

erfüllt, also nach dem Korrespondenzprinzip die klassischen Bewegungsgleichungen (5.1) quantenmechanisch erweitert. Der Subscript 'H' steht hier für Heisenberg-Bild, vergleiche (3.1).

Freie elektromagnetische Felder

In Coulomb-Eichung ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) reduzieren sich die Maxwellgleichungen für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x}, t)$ und dem Skalarpotential $\varphi(\vec{x}, t)$ im Vakuum (ohne Quellen) auf

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, & \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \square \vec{A} &= 0, & \square &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Felder erhält man dann mittels

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi. \quad (5.4)$$

Die Lösungen der freien Maxwellgleichungen (5.3) können zu $\varphi = 0$ gewählt werden, da im Unendlichen das Potential verschwindet

Transversale elektromagnetische Felder

Die Felder \vec{E} und \vec{B} sind wie \vec{A} *transversale Felder*, denn für eine ebene Welle

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

führt $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ auf $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$. Deswegen heißt die Coulomb-Eichung auch *transversale Eichung*. Es hat sich als günstig erwiesen, die Coulomb-Eichung auch für die Quantisierung beizubehalten.

Feldenergie

Für die Quantisierung brauchen wir den Hamiltonoperator und damit den Ausdruck

$$E_{kl} = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d^3 r \quad (5.5)$$

für die Gesamtenergie des Strahlungsfeldes. Wir suchen nun eine Operator \vec{A}_{op} für das Vektorpotential so dass

$$i\hbar \frac{d}{dt} \vec{A}_{op} = [\vec{A}_{op}, H] \quad \iff \quad \square \vec{A} = 0 \quad (5.6)$$

mit $H \hat{=} E_{kl}$ gilt. Wir verlangen also, dass die Heisenberg'sche Bewegungsgleichung equivalent mit der klassischen Feldgleichung ist.

Periodische Randbedingungen

Die Quantisierung ist einfacher wenn man es mit abzählbar vielen Freiheitsgraden zu tun hat. Da das Vektorfeld jedoch kontinuierlich ist und überabzählbar viele Freiheitsgrade besitzt, verwenden wir periodische Randbedingungen

$$\vec{A}(x+L, y, z, t) = \vec{A}(x, y, z, t) \quad \text{usw.}$$

für ein endliches Volumen $V = L^3$, welches wir erst am Ende der Rechnungen unendlich gross werden lassen.

Fourier-Reihen

Felder, welche auf einem endlichen Hyperkubus leben, lassen sich in Fourier-Reihen entwickeln. Die allgemeine Lösung für (5.3) lautet dann

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}} \left(A_{\lambda}(\vec{k}, t) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} + A_{\lambda}^*(\vec{k}, t) \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \right) \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}). \quad (5.7)$$

Die \vec{k} -Summe erstreckt sich über alle erlaubten \vec{k} -Vektoren. Für sie gilt wegen der periodischen Randbedingungen

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3), \quad n_i \in \mathbb{Z}.$$

Der Index λ geht von 1 bis 2 und gibt die Polarisation an. Der Faktor unter der Wurzel wird sich später als günstig erweisen und ist ansonsten bedeutungslos. Die Vektoren \vec{u}_1 und \vec{u}_2 sind zwei aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren, die mit \vec{k} ein orthogonales Dreibein bilden (transversale Eichung):

$$\vec{k} \cdot \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) = 0, \quad \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) \cdot \vec{u}_{\mu}(\vec{k}) = \delta_{\mu\lambda}.$$

Außerdem wählt man noch o.B.d.A. $\vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) = \vec{u}_{\lambda}(-\vec{k})$.

Harmonische Oszillatoren

Wichtig ist nun, dass wegen (5.3), also $\square \vec{A} = 0$, für jeden Fourier-Koeffizienten $A_{\lambda}(\vec{k}, t)$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A_{\lambda}(\vec{k}, t) = -c^2 \vec{k}^2 A_{\lambda}(\vec{k}, t) \quad (5.8)$$

gilt, also eine Differentialgleichung für einen *harmonischen Oszillator*. Man sagt, die Normalmoden des Strahlungsfeldes verhalten sich wie harmonische Oszillatoren. Diese Tatsache wird später den Ausgangspunkt für die Lichtfeldquantisierung bilden.

Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Um (5.8) zu erfüllen, setzen wir

$$A_{\lambda}(\vec{k}, t) = A_{\lambda}(\vec{k}) e^{-i\omega_{\vec{k}} t}, \quad \omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|,$$

wobei $\omega_{\vec{k}} = ck$ die *Dispersionsrelation* des elektromagnetischen Feldes ist. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung (5.3) ist damit

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\vec{k}}}} \left(A_{\lambda}(\vec{k}) \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)}}{\sqrt{V}} + A_{\lambda}^*(\vec{k}) \frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)}}{\sqrt{V}} \right) \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}). \quad (5.9)$$

Die zeitunabhängigen Feldamplituden $A_{\lambda}(\vec{k})$ werden bei der Quantisierung zu Operatoren im Schrödinger-Bild werden.

Energie des Lichtfeldes

Unter Verwendung von (5.9) wollen wir die Gesamtenergie des Strahlungsfeldes durch die Fourier-Koeffizienten $A_\lambda(\vec{k})$ ausdrücken. Es ist mit (5.4) und $\varphi = 0$

$$E_{kl} = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d^3r = \frac{1}{8\pi} \int \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right) d^3r.$$

Wir berechnen die beiden Teile des Integrals getrennt.

Der $\partial \vec{A} / \partial t$ -Term zur Feldenergie

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi c^2} \int \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 d^3r &= \frac{1}{8\pi c^2} \frac{2\pi \hbar c^2}{V} \int \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \sum_{\lambda, \lambda'} \left[\left(-\frac{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}}} \right) \vec{u}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{u}_{\lambda'}(\vec{k}') \times \right. \\ &\quad \times \left(A_\lambda(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - A_\lambda^*(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \times \\ &\quad \left. \times \left(A_{\lambda'}(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} - A_{\lambda'}^*(\vec{k}', t) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \right) \right] d^3r \end{aligned} \quad (5.10)$$

Hier kann man die Beziehungen

$$\frac{1}{V} \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} d^3r = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad \text{und} \quad \frac{1}{V} \int e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}} d^3r = \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \quad (5.11)$$

ausnutzen. Außerdem ist

$$\sum_{\lambda, \lambda'} \vec{u}_\lambda(\vec{k}) \vec{u}_{\lambda'}(\vec{k}) = \sum_{\lambda} \vec{u}_\lambda(\vec{k}) \vec{u}_\lambda(\vec{k})$$

wegen $\vec{u}_\lambda(\vec{k}) \vec{u}_{\lambda'}(\vec{k}) = \delta_{\lambda, \lambda'}$. Damit wird (5.10) zu

$$\frac{1}{4} \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(A_\lambda(\vec{k}, t) A_\lambda^*(\vec{k}, t) + A_\lambda^*(\vec{k}, t) A_\lambda(\vec{k}, t) - \left(A_\lambda(\vec{k}, t) A_\lambda(-\vec{k}, t) + A_\lambda^*(-\vec{k}, t) A_\lambda^*(\vec{k}, t) \right) \right).$$

Der $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ -Term zur Feldenergie

Er liefert bis auf ein Vorzeichen das gleiche Ergebnis wie der andere Term:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 d^3r &= \frac{1}{4} \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(A_\lambda(\vec{k}, t) A_\lambda^*(\vec{k}, t) + A_\lambda^*(\vec{k}, t) A_\lambda(\vec{k}, t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(A_\lambda(\vec{k}, t) A_\lambda(-\vec{k}, t) + A_\lambda^*(-\vec{k}, t) A_\lambda^*(\vec{k}, t) \right) \right) \end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme heben sich also jeweils weg und es wird schließlich

$$E_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(A_\lambda(\vec{k}) A_\lambda^*(\vec{k}) + A_\lambda^*(\vec{k}) A_\lambda(\vec{k}) \right) \quad \omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|. \quad (5.12)$$

Die Zeitabhängigkeit wurde hier schon weggelassen, da sie sowieso herausfällt. Natürlich sind A_λ und A_λ^* Zahlen, also könnte man die Klammer zusammenfassen. Allerdings wollen wir ja auf eine Quantisierung hinaus, also sollte auf die Reihenfolge der Größen, die später Operatoren werden sollen, genau geachtet werden. Um einen geeigneten Formalismus parat zu haben, wiederholen wir nun kurz die Theorie des harmonischen Oszillators.

5.1.2 Quantisierung des harmonischen Oszillators

Der harmonische Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

wird mittels der *Kletter-Operatoren* a und a^\dagger

$$a = \frac{(m\omega)x + ip}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \quad a^\dagger = \frac{(m\omega)x - ip}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$$

diagonalisiert. Sie genügen den Vertauschungsrelationen

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0, \quad (5.13)$$

womit der Hamiltonian für den harmonischen Oszillator

$$\boxed{H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)} \quad H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad (5.14)$$

lautet, mit $N = a^\dagger a$. Für den *Besetzungszahloperator* N gelten die Vertauschungsrelationen

$$[N, a] = -a \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger. \quad (5.15)$$

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Die Relationen (5.15) erlauben eine rein algebraische Herleitung des Eigenwertspektrums des harmonischen Oszillators. Der Teilchenzahloperator N habe das Eigenwertspektrum $\{\beta\}$,

$$N|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} Na^\dagger|\beta\rangle &\stackrel{(5.15)}{=} (a^\dagger + a^\dagger N)|\beta\rangle = a^\dagger(1+N)|\beta\rangle = (1+\beta)a^\dagger|\beta\rangle \\ Na|\beta\rangle &= (-a + aN)|\beta\rangle = (\beta-1)a|\beta\rangle. \end{aligned}$$

Das heißt, der Zustand $a^\dagger|\beta\rangle$ ist Eigenzustand zu N mit Eigenwert $(1+\beta)$, und $a|\beta\rangle$ ist Eigenzustand zu N mit Eigenwert $(\beta-1)$. Das rechtfertigt die Bezeichnung *Kletter-Operatoren*. Man nennt a^\dagger und a auch *Erzeuger* bzw. *Vernichter*.

Für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ gilt

$$\langle\psi|N|\psi\rangle = \langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle = \langle a\psi|a\psi\rangle \geq 0,$$

daher muss der niedrigste Eigenwert β_0 von N größer oder gleich 0 sein. Damit folgt sofort $a|\beta_0\rangle = 0$ und $\beta_0 = 0$. Der Operator N hat also als Spektrum die natürlichen Zahlen einschließlich der 0, deswegen werden seine Eigenzustände ab jetzt mit $|n\rangle$ bezeichnet.

Normierung und Matrixelemente

Wegen $\langle n|N|n\rangle = n$ haben die Kletter-Operatoren auf die Zustände $|n\rangle$ die folgende Wirkung:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (5.16)$$

Einen beliebigen Eigenzustand zum Besetzungszahloperator generiert man also mittels

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle.$$

Schreibt man die Bewegungsgleichung für den Vernichter im Heisenberg-Bild, so wird die Analogie zur klassischen Beschreibung des Lichtfeldes schon deutlich:

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_H(t) = [a_H(t), H]$$

Setzt man hier den Hamiltonian (5.14) ein, so bekommt man

$$\frac{d}{dt} a_H(t) = -i\omega a_H(t), \quad (5.17)$$

und das ist nach nochmaliger Ableitung nach t genau von der Form (5.8). Die letzten beiden Gleichungen bilden die eigentliche Motivation für die folgenden Schritte.

5.1.3 Quantisierung des Lichtfeldes

Der klassische Ausdruck (5.12) für die elektromagnetischen Feldenergie stellt sich als Summe über harmonische Oszillatoren dar. Wir können also die entsprechende Quantisierungsvorschrift übernehmen.

Photonen sind Bosonen

Nun folgt der entscheidende Schritt zur Quantisierung. Wir nehmen in der klassischen Gesamtenergie (5.12) die Ersetzungen

$$\begin{aligned} A_\lambda(\vec{k}) &\longrightarrow a_\lambda(\vec{k}) \\ A_\lambda^*(\vec{k}) &\longrightarrow a_\lambda^\dagger(\vec{k}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

vor, wobei die Kletter-Operatoren den bosonischen Vertauschungsrelationen

$$[a_\lambda(\vec{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (5.19)$$

genügen. Das Vektorpotential wird nun also zu einem *Operator*.

Zur Vereinfachung packen wir den Polarisationsindex λ ab jetzt stets mit in \vec{k} hinein, so dass (5.19) sich zu

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

vereinfacht.

Hamiltonian

Der Hamilton-Operator für das elektromagnetische Feld schreibt sich mit (5.18) aus der klassischen Feldenergie (5.12) zu

$$H_{em} = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(N_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.20)$$

Damit ist die Analogie des elektromagnetischen Feldes zum harmonischen Oszillator komplett: Das Feld kann als eine unendliche Zahl harmonischer Oszillatoren beschrieben werden, die sich durch den Wellenvektor \vec{k} unterscheiden.

Operator für das Vektor-Potential

Das Vektorpotential wird mit den kanonischen Ersetzungen (5.18) zu einem hermiteschen Operator, der aus einer Linearkombination von Kletter-Operatoren besteht,

$$\vec{A}_{op}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{V \omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} \right) \vec{u}_{\vec{k}} \quad (5.21)$$

mit $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$. Sämtliche Eigenschaften des quantisierten Lichtfeldes lassen sich nun direkt aus dieser Darstellung ableiten.

Heisenbergsche Bewegungsgleichung

Die Heisenberg-Gleichung

$$i\hbar \frac{d\vec{A}_{op}}{dt} = [\vec{A}_{op}, H], \quad i\hbar \frac{dN_{\vec{k}}}{dt} - [N_{\vec{k}}, H] = 0 \quad (5.22)$$

für das Vektorpotential ist äquivalent zur Wellengleichung (5.3), d.h. mit

$$\square \vec{A}_{op}(\vec{r}, t) = 0, \quad \square e^{\pm i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} = 0,$$

welche schon für jede einzelne Welle erfüllt ist. Wir betrachten nun für (5.22) die einzelnen Terme von \vec{A}_{op} und verwenden die Vertauschungrelation $[N, a] = -a$, siehe (5.15),

$$i\hbar(-i\omega_{\vec{k}})a_{\vec{k}} - \hbar\omega_{\vec{k}}[a_{\vec{k}}, N_{\vec{k}}] = \hbar\omega_{\vec{k}}a_{\vec{k}} - \hbar\omega_{\vec{k}}a_{\vec{k}} = 0.$$

Damit ist die Bewegungsgleichung (5.22) erfüllt.

Zeitabhängigkeit

Die Kletter-Operatoren in (5.21) sind vollkommen zeitunabhängig, da dort das Schrödinger-Bild verwendet wurde. Via

$$a_{\vec{k}}(t) = e^{iHt/\hbar} a_{\vec{k}} e^{-iHt/\hbar} .$$

wird die Zeitabhängigkeit auf die Kletter-Operatoren übertragen. Nun ist

$$\frac{d}{dt} a_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{i\hbar} e^{iHt/\hbar} [a_{\vec{k}}, H] e^{-iHt/\hbar} \stackrel{(5.19)}{=} \frac{1}{i\hbar} e^{iHt/\hbar} (\hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}) e^{-iHt/\hbar} = -i\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}(t) .$$

Daraus folgt

$$\boxed{a_{\vec{k}}(t) = e^{-i\omega_{\vec{k}}t} a_{\vec{k}}} \quad \text{und} \quad \boxed{a_{\vec{k}}^{\dagger}(t) = e^{i\omega_{\vec{k}}t} a_{\vec{k}}^{\dagger}} .$$

was mit (5.21) konsistent ist.

Feldoperatoren

Die Operatoren für das elektrische und magnetische Feld sind laut (5.4) in der Coulombbeziehung $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, also

$$\vec{E}_{op}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{V}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} - \text{h.c.} \right) \vec{u}_{\vec{k}} \quad (5.23)$$

$$\vec{B}_{op}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}} \vec{k} \times \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} - \text{h.c.} \right) \vec{u}_{\vec{k}} \quad (5.24)$$

Die Buchstaben "h.c." stehen für das hermitesch Konjugierte des ersten Ausdruckes in der Klammer, also in diesem Fall für $a_{\vec{k}}^{\dagger} \exp(-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t))$.

Impuls

Es sei noch der Ausdruck für den Impuls des quantisierten Lichtfeldes erwähnt. Klassisch ist die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes durch

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi c} \int_V (\vec{E} \times \vec{B}) d^3r \quad (5.25)$$

gegeben. Verwendet man die Formeln (5.23) und (5.24), so ergibt das in Abhängigkeit von den Kletter-Operatoren

$$\boxed{\vec{P}_{op} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}} \quad \vec{P}_{op} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} N_{\vec{k}} .$$

Der Impuls eines einzelnen Photons ist also $\hbar\vec{k}$.

Zusammenfassung

Es lassen sich jetzt folgende Regeln für die quantenmechanische Beschreibung des Lichtfeldes angeben:

- Vakuum

Es existiert ein Vakuum-Zustand $|0\rangle$ mit

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \quad \forall \vec{k} \quad \text{und} \quad \langle 0|0\rangle = 1.$$

- Photonen

Ein Photon in einem Zustand mit festem Impuls $\hbar\vec{k}$ wird beschrieben durch

$$a_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle.$$

- Allg. Zustand

Ein allgemeiner Photonenzustand mit $n_{\vec{k}_i}$ Photonen pro Impuls $\hbar\vec{k}_i$ (man sagt auch “in der Mode \vec{k}_i ”) wird beschrieben durch

$$\frac{(a_{\vec{k}_1}^\dagger)^{n_{\vec{k}_1}} (a_{\vec{k}_2}^\dagger)^{n_{\vec{k}_2}} \dots |0\rangle}{\sqrt{n_{\vec{k}_1}!} \sqrt{n_{\vec{k}_2}!} \dots} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{(a_{\vec{k}_i}^\dagger)^{n_{\vec{k}_i}}}{\sqrt{n_{\vec{k}_i}!}} |0\rangle. \quad (5.26)$$

Dafür schreibt man auch kurz

$$|n_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \dots\rangle \quad \text{oder} \quad |\{n_{\vec{k}}\}\rangle. \quad (5.27)$$

Der Vakuum-Zustand lautet folglich korrekterweise $|0, 0, \dots\rangle$. Die Darstellung (5.27) heißt auch *Besetzungszahldarstellung*.

- Besetzungszahloperator

Der Besetzungszahloperator $N_{\vec{k}_i}$ hat die Eigenschaft

$$N_{\vec{k}_i} |\dots, n_{\vec{k}_i}, \dots\rangle = n_{\vec{k}_i} |\dots, n_{\vec{k}_i}, \dots\rangle.$$

Der Hamiltonian (5.20) separiert in Einzelbeiträge zu den verschiedenen Moden. Deswegen kann der allgemeine Zustand (5.27) auch als direktes Produkt

$$|n_{\vec{k}_1}\rangle \otimes |n_{\vec{k}_2}\rangle \otimes \dots = |n_{\vec{k}_1}\rangle |n_{\vec{k}_2}\rangle \dots$$

geschrieben werden. Für jeweils eine Mode \vec{k} bilden die $\{|n_{\vec{k}}\rangle\}$ ein vollständiges orthonormales System. Für eine einzelne Mode schreibt man oft auch nur $|n_{\vec{k}}\rangle$.

- Photonen sind Bosonen

Da die Besetzungszahlen $n_{\vec{k}}$ beliebige Zahlen aus \mathcal{N}_0 sein dürfen, hat man es mit *Bosonen* zu tun: Ein Energieniveau (hier eine Mode) kann beliebig stark bevölkert sein. Daher gibt es kohärente Zustände und Laserlicht, was wir im Abschnitt 5.2.1 besprechen werden.

Fock-Raum

Man beachte, daß man hier mit der Besetzungszahldarstellung (5.27) auf einen Hilbertraum umgeschaltet hat, der zur Darstellung *variabler Teilchenzahlen* geeignet ist. So ein Raum heißt *Fock-Raum*, wie er auch bei der zweiten Quantisierung von Fermionen auftritt.

Nullpunktsenergie

Bildet man den Erwartungswert des Hamiltonian (5.20) mit dem Vakuum-Zustand, so zeigt sich ein überraschendes Ergebnis:

$$\langle 0 | H_{em} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \rightarrow \infty. \quad (5.28)$$

Die Energie des Vakuums ist offenbar divergent!

- I.A. betrachten wir lediglich Energie-Differenzen und eine unendlich grosse Energie des Vakuums spielt daher keine Rolle.
- Die Vakuumsenergie hängt von den Randbedingungen ab und verändert sich in beschränkten Geometrien, wie z.B. zwischen zwei Leiterplatten, was man experimentell mittels des *Kasimir-Effektes* nachweisen kann.

5.2 Eigenschaften des Strahlungsfeldes**5.2.1 Kohärente Zustände**

Die Zustände $|n_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \dots\rangle$ mit festen Photonenzahlen entsprechen keinem klassischen elektromagnetischem Feld. Die Fragestellungen, welche in diesem Zusammenhang auftauchen, wollen wir nun untersuchen.

Verschwindende Felder

Nach (5.23) hat der Operator des elektrischen Feldes die vollständige Darstellung

$$\vec{E}_{op}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{op}}{\partial t} = i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega_{\vec{k}}}{V}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} - \text{h.c.} \right) \vec{u}_{\vec{k}}. \quad (5.29)$$

Im Folgenden sind wir nur an einer bestimmte Mode \vec{k} des Feldes interessiert. Für diese Mode lautet (5.29) einfach

$$\vec{E}_{op}(\vec{k}) = i \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega_{\vec{k}}}{V}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} - \text{h.c.} \right) \vec{u}_{\vec{k}}. \quad (5.30)$$

Der Erwartungswert dieses Operators in einem Zustand $|n_{\vec{k}}\rangle$ mit fester Anzahl $n_{\vec{k}}$ von Photonen ist dann

$$\langle n_{\vec{k}} | \vec{E}_{op}(\vec{k}) | n_{\vec{k}} \rangle = 0,$$

da $\vec{E}_{op}(\vec{k})$ linear in Erzeugern und Vernichtern ist und die $|n_{\vec{k}}\rangle$ orthonormal sind.

Nicht-klassische Felder

Der Erwartungswert des elektromagnetischen Feldes in Zuständen mit fester Photonenzahl verschwindet.

Zustände mit festen Photonenzahlen sind daher nicht klassisch.

Endliche Energiedichte

Andererseits gilt für die Energiedichte im selben Zustand

$$\langle n_{\vec{k}} | \frac{1}{8\pi} (\vec{E}_{op}^2 + \vec{B}_{op}^2) | n_{\vec{k}} \rangle = \langle n_{\vec{k}} | \frac{1}{4\pi} \vec{E}_{op}^2 | n_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{V} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right),$$

wie wir es erwartet hätten. Das Ganze läßt vermuten, dass es mit der Photonenzahl etwas Besonderes auf sich hat.

Wir werden nun zeigen, dass der Besetzungszahloperator nicht mit dem *Phasen-Operator* kommutiert. In einem Eigenzustand von $N_{\vec{k}}$ ist die Phase des Feldes vollkommen unbestimmt und damit verschwinden die klassischen Erwartungswerte. Um den Übergang zur klassischen Feldtheorie korrekt zu beschreiben muss man daher kohärente Überlagerungen von Zuständen mit unterschiedlichen Photonenzahlen betrachten.

Phasen-Operator

Für den Rest des Abschnittes behandeln wir eine einzige Mode des Strahlungsfeldes und werden daher die \vec{k} -Abhängigkeit der Operatoren weglassen.

Zunächst definieren wir den Phasen-Operatoren ϕ mittels

$$a \equiv \sqrt{N+1} e^{i\phi}, \quad a^\dagger = e^{-i\phi^\dagger} \sqrt{N+1}, \quad (5.31)$$

wir zerlegen also die Erzeuger und Vernichter formal in eine Amplitude $\sqrt{N+1}$ und eine Phase ϕ . Für geeignete Kommutationsrelationen, die wir noch herleiten müssen, ist diese Definition mit $N = a^\dagger a$ konsistent

Die Zerlegung (5.31) lässt sich allg. bei Bosonen durchführen. Wie wir sehen werden ist der Phasen-Operatoren “fast selbstadjungiert”, $\phi \simeq \phi^\dagger$, nur beim Vakuumzustand $|0\rangle$ wird man aufpassen müssen. Zunächst muss gezeigt werden, dass die Darstellung (5.31) unitär ist. Die Aufgabe ist also die, diejenigen Vertauschungrelationen von $N = a^\dagger a$ und ϕ zu finden, so dass die Äquivalenz

$$[N, \phi] = ? \quad \iff \quad [a, a^\dagger] = 1$$

erfüllt ist.

Eigenschaften des Phasen-Operators

Man kann Gl. (5.31), unter Beachtung der Reihenfolge, invertieren:

$$\left(\sqrt{N+1} \right)^{-1} a = e^{i\phi} \quad a^\dagger \left(\sqrt{N+1} \right)^{-1} = e^{-i\phi^\dagger}. \quad (5.32)$$

Wir erinnern uns an die Matrixelemente (5.32) und (5.16),

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

und finden

$$\begin{aligned} e^{i\phi}|n\rangle &= \left(\sqrt{N+1}\right)^{-1} a|n\rangle \\ &= (1 - \delta_{n,0}) \left(\sqrt{N+1}\right)^{-1} \sqrt{n}|n-1\rangle = \begin{cases} |n-1\rangle & ; n > 0 \\ 0 & ; n = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.33)$$

da der Teilchenzahl-Operator N diagonal ist. Daher der Faktor $\sqrt{N+1}$ in der Definition des Phasenoperators in (5.31), und nicht \sqrt{N} . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} e^{-i\phi^\dagger}|n\rangle &= a^\dagger \left(\sqrt{N+1}\right)^{-1} |n\rangle = (n+1)^{-1/2} a^\dagger|n\rangle \\ &= |n+1\rangle. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt die Matrixdarstellung

$$\begin{aligned} \langle m|e^{i\phi}|n\rangle &= \delta_{m+1,n} & (n-1 = m, n > 0) \\ \langle m|e^{-i\phi^\dagger}|n\rangle &= \delta_{m-1,n} & (n+1 = m) \end{aligned} \quad (5.35)$$

des Phasen-Operators, und somit

$$\langle m|e^{i\phi}e^{-i\phi^\dagger}|n\rangle = \delta_{m,n}, \quad \langle m|e^{-i\phi^\dagger}e^{i\phi}|n\rangle = (1 - \delta_{n,0})\delta_{m,n}. \quad (5.36)$$

Gleichung (5.36) zeigt, dass $e^{i\phi}$ und $e^{-i\phi^\dagger}$ bis auf $n = 0$ vertauschen, also für alle endliche Teilchenzahlen.

Falls ϕ selbstadjungiert wäre ($\phi = \phi^\dagger$), wäre (5.36) mit $\langle m|e^{i\phi}e^{-i\phi^\dagger}|n\rangle = \langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$ bis auf $n = 0$ erfüllt. In diesem Sinn ist der Phasenoperator 'fast' hermitesch.

Observable Phasen

Die Operatoren $e^{i\phi}$ und $e^{-i\phi^\dagger}$ entsprechen Ab- und Aufsteigeoperatoren, jedoch mit normierten Matrixelementen, wie aus (5.35) folgt. Diese Operatoren sind daher nicht hermitesch. Die entsprechenden trigonometrischen Funktionen,

$$\sin(\phi) \equiv \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi^\dagger}}{2i}, \quad \cos(\phi) \equiv \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi^\dagger}}{2}, \quad (5.37)$$

des Phasenoperators sind dagegen per Konstruktion hermitesch. Sie entsprechen daher physikalischen Observablen. Falls ϕ selbstadjungiert wäre (was nach (5.36) fast der Fall ist), entspräche diese Definition jeweils dem Imaginär- sowie dem Realteil. Für einen generischen Operator ϕ definiert (5.37) neue Operatoren, die mit $\sin(\phi)$ und $\cos(\phi)$ bezeichnet werden.

Kommutationsrelationen

Im Folgenden machen wir die Approximation $\phi \simeq \phi^\dagger$, welche bis auf das Vakuum exakt ist. Dann folgen aus

$$\begin{aligned} 1 &= aa^\dagger - a^\dagger a = \sqrt{N+1} e^{i\phi} e^{-i\phi} \sqrt{N+1} - e^{-i\phi} (N+1) e^{i\phi} \\ &= N - e^{-i\phi} N e^{i\phi} = N - e^{-i\phi} \left(e^{i\phi} N + [N, e^{i\phi}] \right) \\ &= -e^{-i\phi} [N, e^{i\phi}] \end{aligned}$$

die Kommutationsrelationen

$$[N, e^{i\phi}] = -e^{i\phi}, \quad [N, e^{-i\phi}] = e^{-i\phi}. \quad (5.38)$$

Es gelten daher die Vertauschungsrelationen

$$[N, \cos \phi] = -i \sin \phi, \quad [N, \sin \phi] = i \cos \phi, \quad [N, \phi] = i, \quad (5.39)$$

wobei letztere aus den Taylor-Reihen für sin und cos folgt. Mit der Heisenberg'schen Unschärferelation ist also prinzipiell nicht möglich ist, Phase und Teilchenzahl gleichzeitig scharf zu bestimmen, die beiden Messungen sind somit nicht verträglich.

Unschärferelation

Die Phase ϕ und der Teilchenzahloperator $N = a^\dagger a$ sind für Bosonen kanonisch konjugierte Variablen.

Zur Erinnerung, die Heisenbergsche Unschärferelation

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| = \frac{1}{2}, \quad [A, B] = i,$$

wobei letztere Beziehung für kanonisch konjugierte Operatoren A und B gilt.

Exkurs: Supraleitung

Dieses Ergebnis ist für die Supraleitung essentiell. Supraleitung kommt durch Singulett-Paarung von Elektronen zustande und in einer (sehr groben) Näherung kann man diese Singulett-Paare als Bosonen betrachten, denn nach dem Spin-Statistik-Theorem sind Teilchen mit ganzzahligen internem Spin Bosonen.

Das supraleitenden Kondensat ist durch eine feste Phase charakterisiert, man spricht auch von einer spontanen Brechung der globalen Eichinvarianz.

Wenn die Phase fest ist, dann kann es nach (5.39) die Teilchenzahl nicht sein. Daher ist die BCS-Wellenfunktion

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} \underbrace{c_{\vec{k},\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger}_{\text{Elektronenpaar}} \right) |0\rangle$$

eine kohärente Überlagerung von Zuständen mit verschiedenen Anzahl von Singulett-Paaren.

Schwankungsquadrate

In einem reinen Zustand $|n\rangle$ mit fester Photonenzahl verschwindet die Schwankung des Besetzungszahloperators:

$$\Delta N = \sqrt{\langle n|N^2|n\rangle - \langle n|N|n\rangle^2} = 0$$

Dagegen hat $\cos\phi$ eine endliche Schwankungsbreite. Es gilt $\langle \cos\phi \rangle = 0$ und

$$\langle \cos^2\phi \rangle = \frac{1}{4} \langle e^{i\phi} e^{-i\phi^\dagger} + e^{-i\phi^\dagger} e^{i\phi} \rangle = \frac{2 - \delta_{n,0}}{4}$$

in einem reinen Zustand $|n\rangle$, und somit für $\Delta \cos\phi = \Delta \sin\phi$, gilt daher

$$\Delta \cos\phi = \sqrt{\langle \cos^2\phi \rangle - \langle \cos\phi \rangle^2} = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & : n > 0 \\ \frac{1}{2} & : n = 0 \end{cases} .$$

Kohärente Zustände

Um einen Übergang zur makroskopischen Elektrodynamik zu erreichen, kann man Zustände mit verschiedenen Teilchenzahlen linear kombinieren. Man definiert einen kohärenten Zustand $|c\rangle$ (auch Glauber-Zustände genannt, Nobelpreis 2005) via

$$|c\rangle \equiv e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{C}, \quad c = |c|e^{i\theta}. \quad (5.40)$$

Wenn man für den Zustand $|n\rangle$ die Darstellung (5.26) benutzt, kann man das auch kompakter schreiben:

$$|c\rangle = e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = \exp\left(-|c|^2/2 + ca^\dagger\right) |0\rangle$$

Ein Glauber-Zustand $|c\rangle$ enthält nur eine einzigen Mode, also ist die Wellenzahl \vec{k} scharf festgelegt.

Eigenschaften des Glauberzustandes

Mit $[a, a^\dagger] = 1$ gilt zunächst allgemein

$$\begin{aligned} a (a^\dagger)^n |0\rangle &= (aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a) (a^\dagger)^{n-1} |0\rangle \\ &= (a^\dagger)^{n-1} |0\rangle + a^\dagger a (a^\dagger)^{n-1} |0\rangle = \dots \\ &= n (a^\dagger)^{n-1} |0\rangle, \end{aligned}$$

woraus übrigens auch $N(a^\dagger)^n |0\rangle = n(a^\dagger)^n |0\rangle$ folgt. Damit gilt

$$a|c\rangle = c e^{-|c|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \frac{(a^\dagger)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |0\rangle = c|c\rangle .$$

Der Glauberzustand ist also ein Eigenzustand des Vernichters. Wir fassen die Beziehungen mit

$$\boxed{a|c\rangle = c|c\rangle} \quad \langle c|a|c\rangle = c, \quad \langle c|a^\dagger|c\rangle = c^*, \quad \langle c|c\rangle = 1 \quad (5.41)$$

zusammen. Wir bemerken, dass die kohärenten Zustände keine orthogonale Basis bilden, denn i.A. ist $\langle c|c'\rangle \neq 0$.

Elektrisches Feld eines kohärenten Zustandes

Der Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle c|\vec{E}_{op}|c\rangle &= i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} \left(ce^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \text{c.c.} \right) \vec{u} = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} |c| \left(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\theta)} - \text{c.c.} \right) \vec{u} = \\ &= -2\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} |c| \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \theta) \vec{u}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

des elektrischen Feldes in einem kohärenten Zustand entspricht dem klassischen Ausdruck.

Es besteht also eine Eins-zu-Eins Beziehung zwischen den ebenen Wellen der klassischen Elektrodynamik und kohärenten Zuständen $|c\rangle$, da mittels $c = |c|e^{i\theta}$ sowohl die Amplitude wie auch die Phase der ebenen Welle mittels (5.42) bestimmt werden können.

Photonen-Anzahl-Fluktuationen

Aus

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1, \quad N^2 = a^\dagger(aa^\dagger)a = a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger aa$$

folgt mit (5.41)

$$\langle c|N|c\rangle = |c|^2 \quad \text{und} \quad \langle c|N^2|c\rangle = |c|^4 + |c|^2,$$

so dass

$$\Delta N = \sqrt{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2} = |c|. \quad (5.43)$$

Die relative Schwankung der Photonenzahl ist damit

$$\frac{\Delta N}{\langle N\rangle} = \frac{1}{|c|} = \frac{1}{\sqrt{\langle N\rangle}}. \quad (5.44)$$

Je größer also die Teilchenzahl, desto geringer ist ihre relative Schwankung. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung genau m Photonen zu finden, ist

$$|\langle m|c\rangle|^2 = \left| \frac{c^m}{\sqrt{m!}} e^{-|c|^2/2} \right|^2 = e^{-|c|^2} \frac{|c|^{2m}}{m!},$$

sie gehorcht also einer Poisson-Verteilung.

Schwankungen der Phase

Wir gehen von der Unschärferelation

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$$

für zwei allgemeine hermitesche Operatoren A und B aus. Mit (5.39) für die Vertauschungsrelation $[N, \sin(\phi)] = i \cos(\phi)$ erhalten wir für die Schwankungen $\Delta \sin(\phi)$ von $\sin(\phi)$

$$\Delta N \Delta \sin(\phi) \geq \frac{1}{2} \left| \langle \cos(\phi) \rangle \right|$$

und mit (5.43) für $\Delta N = |c|$ und $\Delta \sin(\phi) = \Delta \cos(\phi)$ finden wir

$$\frac{\Delta \cos(\phi)}{|\langle \cos(\phi) \rangle|} \geq \frac{1}{2|c|}. \quad (5.45)$$

Die Abschätzung ergibt streng genommen nur eine untere Schranke für die relative Schwankungen der Phase, erspart uns aber eine aufwendige Rechnung. Im Allgemeinen sind die Schwankungen zweier Operatoren von der gleichen Grössenordnung, wie durch die jeweiligen Unschärferelation angegeben.

Die relative Phasenschwanken verschwinden also im Grenzfall grosser Photonenzahlen $\langle N \rangle = |c|^2$, genau wie die relativen Schwankungen der Photonenzahlen selber, Gleichung (5.44).

Klassischer Grenzfall

Das Lichtfeld ist in Phase und Teilchenzahl um so besser definiert ist, je mehr Photonen es enthält. Im Grenzfall großer Photonenzahlen entspricht der klassischen Beschreibung.

Das ist auch intuitiv klar. Bei wenigen Photonen treten deren quantenmechanischen Eigenschaften deutlich zu Tage, und mitteln sich im Grenzfall hoher Photonenzahlen weg.

5.2.2 Wechselwirkung von Strahlung mit Materie

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Emission und Absorption von Photonen durch Materie (hier durch gebundene Elektronen).

Minimalsubstitution

Der gesamte Hamiltonian für Materie und Strahlung lautet

$$H = H_{em} + H_{mat} + H_I, \quad (5.46)$$

wobei H_{em} das Lichtfeld alleine, H_{mat} die Materie alleine und H_I die Wechselwirkung zwischen beiden beschreibt,

$$H_{em} = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(N_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right), \quad H_{mat} = \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots).$$

Wir vernachlässigen hier Spin-Effekte. Der Index i zählt die beteiligten Teilchen durch. Die Wechselwirkung H_I ergibt sich mit der Einführung elektromagnetischer Felder durch Minimalsubstitution in Coulomb-Eichung:

$$\vec{p}_i \rightarrow \vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}_{op}(\vec{r}_i, t),$$

wobei e die Elementarladung ist. Dabei ist zu beachten, daß für das Vektorpotential der Operator (5.21) einzusetzen ist, er beschreibt das Vektorpotential an der Stelle \vec{r}_i des i -ten Teilchens.

Licht-Materie-Wechselwirkung

Für die Wechselwirkung H_I von Licht und Materie erhalten wir mit $\vec{A}_{op}^i = \vec{A}_{op}(\vec{r}_i, t)$

$$\begin{aligned} H_I &= \sum_i \left(-\frac{e}{2m_i c} \left(\vec{p}_i \cdot \vec{A}_{op}^i + \vec{A}_{op}^i \cdot \vec{p}_i \right) + \frac{e^2}{2m_i c^2} \left(\vec{A}_{op}^i \right)^2 \right) \\ &= -\sum_i \underbrace{\frac{e}{m_i c} \vec{A}_{op}^i \cdot \vec{p}_i}_{\text{paramagnetisch}} + \sum_i \underbrace{\frac{e^2}{2m_i c^2} \left(\vec{A}_{op}^i \right)^2}_{\text{diamagnetisch}} \equiv H'_I + H_I \end{aligned} \quad (5.47)$$

heraus, wobei wegen der Coulomb-Eichung, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$,

$$\vec{p} \cdot \vec{A} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p} = \vec{A} \cdot \vec{p}$$

gesetzt wurde. Die beiden Terme in (5.47) bezeichnet man als paramagnetische und diamagnetische Anteile. Der diamagnetische Term $\sim (\vec{A})^2$ koppelt an die Materie ausschliesslich durch den Ortsoperator \vec{r}_i im Argument des Vektorpotentials $\vec{A}_{op}^i = \vec{A}_{op}(\vec{r}_i, t)$.

Zustandsraum

Der gesamte Hamiltonian (5.46) wirkt auf einen Zustand, der sowohl das Lichtfeld als auch die Materie enthält:

$$|\text{Materiezustand}\rangle \otimes |\text{Lichtfeldzustand}\rangle$$

Störoperator für ein einzelnes Elektron

Im Folgenden betrachten wir einen Spezialfall: Wir fragen nach den Übergangsraten, die ein einzelnes gebundenes Elektron in einem Atom (z. B. dem Wasserstoff-Atom) durch die Anwesenheit eines Strahlungsfeldes erfährt. Der Hamiltonian der Wechselwirkung lautet jetzt

$$H'_I = -\frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{V \omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \text{h.c.} \right) (\vec{u}_{\vec{k}} \cdot \vec{p}). \quad (5.48)$$

Zwei Vereinfachungen wurden hier gemacht. Erstens wurde der \vec{A}^2 -Term und zudem der $e^{i\omega t}$ -Faktor weggelassen. Letzteres, da sich die zeitabhängigkeiten in der folgenden Rechnung so wieso gegenseitig aufheben.²

Fermi's goldene Regel

Wir betrachten nun H'_I als Störung. Die Goldene Regel für die Übergangsrate von einem Anfangszustand $|i\rangle$ in einen Endzustand $|f\rangle$ lautet dann

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f) |\langle f | H'_I | i \rangle|^2 . \quad (5.49)$$

Gesamtenergien

Die Energien E_i und E_f sind die Gesamtenergien von Strahlungsfeld und Materie vor und nach dem Übergang, genau wie $|i\rangle$ und $|f\rangle$ die Zustände in *beiden* Hilbert-Räumen angeben. Wir nehmen an, der Anfangs- und Endzustand sei jeweils ein Eigenzustand von $H_0 = H_{em} + H_{mat}$:

$$\begin{aligned} H_{mat} |\epsilon_i\rangle &= \epsilon_i |\epsilon_i\rangle \\ H_{mat} |\epsilon_f\rangle &= \epsilon_f |\epsilon_f\rangle \\ H_{em} |\{n_{\vec{k}}^i\}\rangle &= \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k}}^i + \frac{1}{2} \right) |\{n_{\vec{k}}^i\}\rangle \\ H_{em} |\{n_{\vec{k}}^f\}\rangle &= \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k}}^f + \frac{1}{2} \right) |\{n_{\vec{k}}^f\}\rangle \end{aligned}$$

Die Zustände lauten dann

$$|i\rangle = |\epsilon_i\rangle \otimes |\{n_{\vec{k}}^i\}\rangle, \quad |f\rangle = |\epsilon_f\rangle \otimes |\{n_{\vec{k}}^f\}\rangle .$$

Wir betrachten nun nacheinander die Emission und die Absorbtion eines Photons.

Emission eines Photons $\hbar \vec{k}$

Die Energien von Anfangs- und Endzustand sind

$$\begin{aligned} E_i &= \epsilon_i + \sum_{\vec{k}'} \hbar \omega_{\vec{k}'} \left(n_{\vec{k}'} + \frac{1}{2} \right) \\ E_f &= \epsilon_f + \sum_{\vec{k}'} \hbar \omega_{\vec{k}'} \left(n_{\vec{k}'} + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_{\vec{k}} , \end{aligned}$$

denn es soll genau ein Photon der Energie $\hbar \omega_{\vec{k}}$ emittiert werden. Die Zustandsvektoren sind

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |\epsilon_i\rangle \otimes |\dots, n_{\vec{k}}, \dots\rangle \\ |f\rangle &= |\epsilon_f\rangle \otimes |\dots, n_{\vec{k}} + 1, \dots\rangle . \end{aligned}$$

²Man kann auch den zeitabhängigen Operator $\vec{A}_{op}(\vec{r}, t)$ ins Schrödinger-Bild transformieren und würde das gleiche Ergebnis erhalten. Die Zustände, die in der folgenden Rechnung auftreten, wären dann zeitabhängig, was allerdings nicht ins Gewicht fiele.

Die Goldene Regel sagt nun aus, dass bei einem entsprechenden Übergang

$$E_i - E_f = \varepsilon_i - (\varepsilon_f + \hbar\omega_{\vec{k}}) = 0$$

gelten muß. Das ist die Energie-Erhaltung. Es gilt weiter

$$\langle f|H_I|i\rangle = -\frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{k}'}}} \langle \varepsilon_f | \vec{u}_{\vec{k}'} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \vec{p} \varepsilon_i \rangle \langle \dots, n_{\vec{k}} + 1, \dots | a_{\vec{k}'}^\dagger | \dots, n_{\vec{k}}, \dots \rangle .$$

Die Vernichter kommen nicht mehr vor, da die zugehörigen Matrixelemente sowieso verschwinden (links stehen mehr Photonen als rechts). Von der Summe bleibt nur ein Summand übrig, nämlich der für $\vec{k} = \vec{k}'$. Nur in diesem Fall wird durch den Erzeuger in der richtigen Mode ein Photon erzeugt, und das Skalarprodukt verschwindet nicht. Der zweite Faktor in der Klammer ergibt also

$$\langle \dots, n_{\vec{k}} + 1, \dots | a_{\vec{k}}^\dagger | \dots, n_{\vec{k}}, \dots \rangle = \sqrt{n_{\vec{k}} + 1} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'},$$

und die Übergangsrate für die Emission ist somit

$$\Gamma_{i \rightarrow f}^e = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2 V \omega_{\vec{k}}} \delta(\varepsilon_i - (\varepsilon_f + \hbar\omega_{\vec{k}})) (n_{\vec{k}} + 1) \left| \langle \varepsilon_f | \vec{u}_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{p} | \varepsilon_i \rangle \right|^2 . \quad (5.50)$$

Eine Diskussion dieser Formel folgt später.

Absorption eines Photons $\hbar\vec{k}$

Die Energien von Anfangs- und Endzustand sind

$$E_i = \varepsilon_i + \sum_{\vec{k}'} \hbar\omega_{\vec{k}'} \left(n_{\vec{k}'} + \frac{1}{2} \right)$$

$$E_f = \varepsilon_f + \sum_{\vec{k}'} \hbar\omega_{\vec{k}'} \left(n_{\vec{k}'} + \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega_{\vec{k}},$$

denn nun wird das Photon dem Lichtfeld "entzogen". Die Zustandsvektoren sind

$$|i\rangle = |\varepsilon_i\rangle \otimes |\dots, n_{\vec{k}}, \dots\rangle$$

$$|f\rangle = |\varepsilon_f\rangle \otimes |\dots, n_{\vec{k}} - 1, \dots\rangle .$$

Bei der Berechnung des Matrixelementes $\langle f|H_I|i\rangle$ tragen in diesem Fall die Erzeuger nichts bei, und es bleibt nur der Vernichter mit $\vec{k} = \vec{k}'$ übrig. Auf analoge Weise wie bei der Emission ergibt sich

$$\Gamma_{i \rightarrow f}^a = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2 V \omega_{\vec{k}}} \delta(\varepsilon_i - (\varepsilon_f - \hbar\omega_{\vec{k}})) n_{\vec{k}} \left| \langle \varepsilon_f | \vec{u}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{p} | \varepsilon_i \rangle \right|^2 . \quad (5.51)$$

Diskussion: Absorption vs. Emission

Die beiden Ausdrücke (5.50) und (5.51) für Emissions- und Absorptionsprozesse sind identisch, bis auf die Besetzungszahlfaktoren

- Spontane Emission

Von spontaner Emission spricht man, wenn ein Photon in Abwesenheit anderer Photonen emittiert wird. Spontane Emission ist möglich, da der Faktor $(n_{\vec{k}} + 1)$ in (5.50) in Abwesenheit eines äußeren Photonenfelds ($n_{\vec{k}} = 0$) nicht verschwindet.

- Stimulierte Emission

Der Faktor $(n_{\vec{k}} + 1)$ in (5.50) besagt, dass in Anwesenheit eines äußeren Feldes mit der gleichen Quantenzahl die Emissionswahrscheinlichkeit erhöht ist, proportional zur Intensität des äußeren Lichtfeldes.

Man spricht von stimulierter Emission, essentiell für den Laser, da eine Mode $\vec{h}\vec{k}$ nur Photonen mit exakt der gleichen Wellenlänge $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$ zur Emission bringt. Man erhält also kohärente Strahlung.

- Absorption

Die Interpretation des Besetzungszahlfaktors $n_{\vec{k}}$ in (5.51) für Absorptionsprozesse ist vergleichsweise trivial. Es können nur Photonen absorbiert werden, welche vorhanden sind.

Elektrische Dipol-Übergang

Wir betrachten den *elektrische Dipol-Übergang*, welcher dann stattfindet, wenn man die Exponentialfunktion $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ im Matrixelement als konstant gleich 1 annehmen kann. Dieses ist möglich, wenn

$$\vec{k} \cdot \vec{r} \approx \frac{2\pi a_0}{\lambda} \ll 1, \quad (5.52)$$

also wenn die Wellenlänge λ der beteiligten Strahlung groß im Vergleich zu der typischen Abmessungen des Systems ist (hier der Bohrsche Radius). Warum (5.52) *elektrische Dipol-Näherung* heißt, wird klar, wenn man das Matrixelement weiter umformt. Wir verwenden

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x \right] = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x - x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) = \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{i\hbar}{m} p_x$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_f | \vec{p} | \epsilon_i \rangle &= \langle \epsilon_f | \frac{im}{\hbar} [H_{mat}, \vec{r}] | \epsilon_i \rangle = \frac{im}{\hbar} \langle \epsilon_f | H_{mat} \vec{r} - \vec{r} H_{mat} | \epsilon_i \rangle \\ &= \frac{im}{\hbar} \langle \epsilon_f | \vec{r} | \epsilon_i \rangle (\epsilon_f - \epsilon_i). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Das ist aber genau das Dipol-Matrixelement, das sich auch ergibt, wenn man als Wechselwirkung gleich die elektrische Dipol-Energie im Feld

$$E_{dip} = -e\vec{r} \cdot \vec{E}_{op}$$

einsetzt.

Auswahlregeln

Die Matrixelemente in (5.50) und (5.51) legen fest, mit welcher Wahrscheinlichkeit oder überhaupt der betrachtete Übergang stattfindet. Sie sind für die *Auswahlregeln* zuständig.

Für den elektrischen Dipol-Übergang besagt das Matrixelement (5.53) dass Anfangs- und Endzustand auf jeden Fall unterschiedliche Parität haben müssen, wenn der Übergang erlaubt sein soll, denn \vec{r} ist ungerade unter Raumspiegelung. Im Atom sind daher elektrischen Dipol-Übergänge vom s-Niveau in die p- oder die f-Schale erlaubt, nicht aber in die d-Schale.

Übergänge höherer Ordnung

Übergänge, die in nullter Ordnung verboten sind, können dennoch stattfinden, wenn höhere Ordnungen zuschlagen, also die Exponentialfunktion weiter entwickelt wird:

$$e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}} \approx 1 \pm i\vec{k}\cdot\vec{r} + \dots$$

Die nächste Ordnung (linear in $\vec{k}\cdot\vec{r}$) beschreibt dabei magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolübergänge.

5.2.3 Lebensdauer eines angeregten Zustandes

Auf den ersten Blick mag es verwundern, dass in (5.50) und (5.51) noch das Periodisierungsvolumen V steht. Eigentlich sollten Übergangsraten von dieser Hilfsgröße unabhängig sein. In der folgenden Rechnung wird es daher um den Limes $V \rightarrow \infty$ gehen. Für sinnvolle Ergebnisse, muß man dabei Übergänge nicht nur in einen einzigen, sondern in eine Gruppe von Endzuständen betrachten. Über diese, und zusätzlich über alle möglichen \vec{k} -Vektoren des Photons, ist zu summieren. Die δ -Funktion sorgt dann für die Energie-Erhaltung. Als Beispiel betrachten wir die spontane Emission aus einem beliebigen Zustand in eine Menge von Endzuständen.

Lebensdauer eines angeregten Zustandes

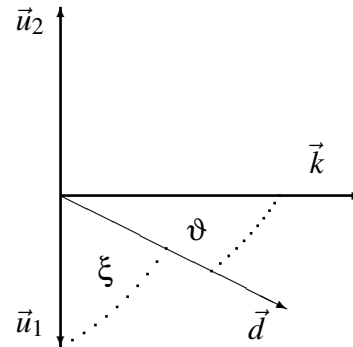
Wir definieren die Lebensdauer τ eines angeregten Zustandes über die Übergangsraten der spontanen Emission in das Zielniveau $|\epsilon_f\rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &\equiv \sum_{f,\vec{k}} \Gamma_{i\rightarrow f} \\ &= \sum_f \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar^2 V \omega_{\vec{k}}} \left| \langle \epsilon_f | \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) \cdot \vec{r} | \epsilon_i \rangle \right|^2 \delta(\epsilon_f - \epsilon_i + \hbar\omega_{\vec{k}}) (\epsilon_i - \epsilon_f)^2, \end{aligned} \quad (5.54)$$

wobei wir den Ausdruck (5.53) für das Dipol-Matrixelement verwendet haben.

- Der Ausdruck (5.54) besteht aus dem Anteil der spontanen Emission in (5.50), summiert über alle Zielniveaus f des Atoms und alle Wellenvektoren \vec{k} des Photons.
- Die δ -Funktion sorgt dafür, dass von den Summen nur die Glieder übrig bleiben, bei denen die freigewordene Energie auch ins Strahlungsfeld geht.
- Der Polarisationsindex λ ist in (5.54) wieder explizit, mit dem Einheits-Polarisationsvektor $\vec{u}_{\lambda}(\vec{k})$ des Lichtfeldes.

Das orthogonale Dreibein, bestehend aus den beiden Polarisationsvektoren \vec{u}_1 , \vec{u}_2 und dem Wellenvektor des Photons \vec{k} , kann so gelegt werden, dass das Dipol-Matrixelement \vec{d} in der \vec{u}_1 - \vec{k} Ebene zu liegen kommt.



Thermodynamischer Limes

Nun soll V gegen unendlich gehen. Durch die Ersetzung

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{1}{V} \int \frac{d^3k}{\Delta^3k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k$$

wird das bewerkstelligt, denn das Volumen Δ^3k einer Mode im \vec{k} -Raum ist bei periodischen Randbedingungen gleich $(2\pi)^3/V$, bei kontinuierlichem \vec{k} aber gleich d^3k .

Summation über Polarisationszustände

Zuerst kümmern wir uns um die λ -Summation. Es ist

$$\sum_{\lambda=1}^2 \left| \vec{u}_\lambda(\vec{k}) \cdot \underbrace{\langle \epsilon_f | \vec{r} | \epsilon_i \rangle}_{\equiv \vec{d}} \right|^2 \quad (5.55)$$

zu berechnen.

Da die \vec{u}_λ mit \vec{k} ein orthogonales Dreibein bilden müssen (siehe Abbildung), sonst aber frei wählbar sind, kann man z. B. \vec{u}_2 so wählen, dass es auf das Dipol-Matrixelement \vec{d} senkrecht steht, so dass die Summe nur noch das Glied mit \vec{u}_1 enthält. Bezeichnet ξ den Winkel zwischen \vec{d} und \vec{u}_1 , so ist der Winkel zwischen \vec{d} und \vec{k} gleich $\vartheta = (\pi/2 - \xi)$. Damit wird die obige Summe zu

$$|\langle \epsilon_f | \vec{r} | \epsilon_i \rangle|^2 \sin^2 \vartheta.$$

Integration über Photonen-Impulse

Günstigerweise legt man das Koordinatensystem für die \vec{k} -Integration so, dass \vec{d} in k_z -Richtung zeigt. Dann multipliziert der Faktor $\sin^2 \vartheta$ das Volumenelement, welches für die Integration in Kugelkoordinaten benötigt wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \sum_f \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar^2} |\langle \epsilon_f | \vec{r} | \epsilon_i \rangle|^2 (\epsilon_f - \epsilon_i)^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int k^2 \sin \vartheta \sin^2 \vartheta \frac{\delta(\epsilon_f - \epsilon_i + \hbar\omega_{\vec{k}})}{\omega_{\vec{k}}} dk d\vartheta d\phi \\ &= \sum_f \frac{e^2}{2\pi \hbar^4 c^3} |\langle \epsilon_f | \vec{r} | \epsilon_i \rangle|^2 (\epsilon_f - \epsilon_i)^2 \underbrace{\left(\int \sin^3 \vartheta d\vartheta d\phi \right)}_{8\pi/3} \underbrace{\int \epsilon \delta(\epsilon_f - \epsilon_i + \epsilon) d\epsilon}_{\epsilon_i - \epsilon_f} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die k -Integration auf die Variable $\varepsilon = \hbar\omega_{\vec{k}}$ umgeschrieben. Das Winkelintegral ergibt $8\pi/3$, und damit lautet das endgültige Ergebnis

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4e^2}{3\hbar c^3} \sum_f \left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_f}{\hbar} \right)^3 |\langle \varepsilon_f | \vec{r} | \varepsilon_i \rangle|^2 . \quad (5.56)$$

Wie man sieht, sind spontane Emission und Auswahlregeln ‘‘Gegenspieler’’:

- Wenn ein System sich in einem Zustand befindet, von dem aus nur verbotene Übergänge nach unten führen, so ist dieser angeregte Zustand sehr langlebig.
- Wenn man es fertigbringt, ‘‘von oben herab’’ ein solches Niveau zu bevölkern, dann kann man eine Besetzungsinversion erreichen.

Anwendung findet dieses Prinzip in jedem Laser.