

# Kapitel 8

## Supraleitung

### 8.1 Einleitung

#### 8.1.1 Historische Entwicklung

**1911** H. Kamerling Onnes: Entdeckung der Supraleitung in Quecksilber,  $T_C = 4.2\text{ K}$ .  
Nobelpreis 1913.

**1938** Pyotr Kapitsa: Entdeckung der Suprafluidität in  $^4\text{He}$ ,  $T_C = 2\text{ K}$ . Nobelpreis 1978.

**1950** Vitaly L. Ginzburg und Lev Landau: Phänomenologische Theorie der Supraleitung.  
Nobelpreise 1962 für Lev Landau und 2003 für V. Ginzburg.

**1957** Alexei A. Abrikosov: Vorhersage von magnetischen Flussschläuchen in Supraleiter.  
Nobelpreis 2003.

**1957** John Bardeen, Leon Cooper und Robert Schrieffer: Mikroskopische Theorie der  
Supraleitung. Nobelpreis 1972.

**1962** Brian Josephson: Vorhersage des ‘Josephson Effektes’. Nobelpreis 1973.

**1972** D. Lee, D. Osheroff und R. Richardson: Entdeckung der Suprafluidität in  $^3\text{He}$ ,  
 $T_C = 2.7\text{ mK}$ . Nobelpreis 1996.

**1972** Anthony J. Leggett: Theorie für die Suprafluidität in  $^3\text{He}$ . Nobelpreis 2003.

**1986** G. Bednorz und A. Müller, Entdeckung der Hoch- $T_c$  Supraleitung. Nobelpreis 1987.

#### 8.1.2 Makroskopische Elektrodynamik

Die Supraleitung ist ein Phänomen, welche die elektrodynamischen Eigenschaften eines Festkörpers dramatisch beeinflusst. Wir wiederholen daher kurz die allgemeine Formulierung der Elektrodynamik von Feldern in Festkörpern und verwenden dabei Gauss-Einheiten.

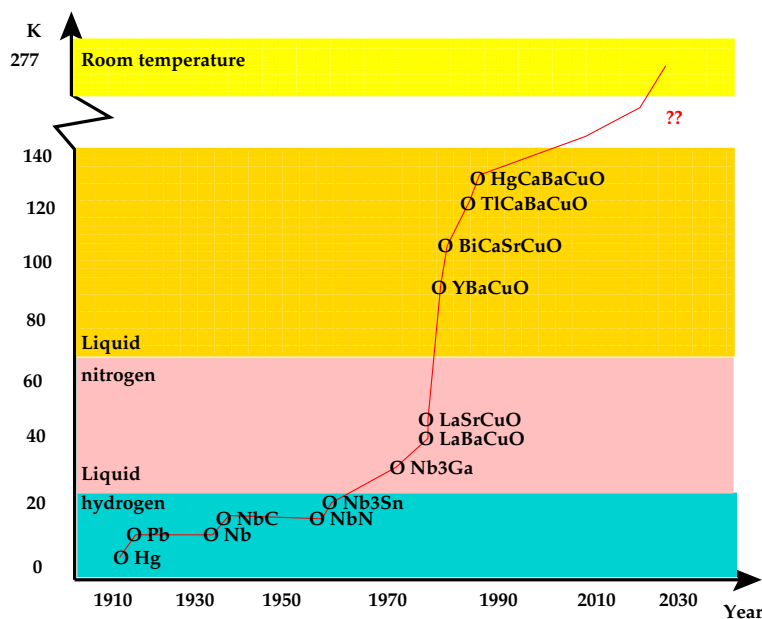


Abbildung 8.1: Historische Entwicklung der Sprung-Temperatur von Supraleiter.

### Makroskopische Maxwellgleichungen

Man teilt die Ladungsträger in einem Festkörper in freie (Index  $f$ ) und gebundene Anteile auf und erhält auf diese Weise die makroskopischen Maxwellgleichungen.

- Homogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

- Inhomogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_f; \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f$$

- Verknüpfungen

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

Dabei sind die  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  diejenigen (mikroskopischen) Felder, welche physikalisch via der Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

auf ein Teilchen mit der Ladung  $q$  wirkt.

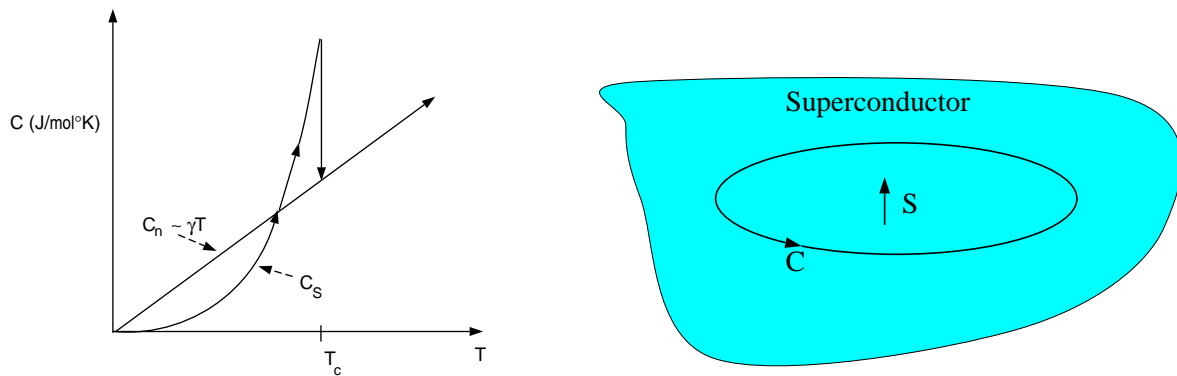


Abbildung 8.2: Links: Spezifische Wärme im supraleitenden ( $C_s$ ) und im normalleitenden ( $C_n$ ) Zustand. Unterhalb der Sprungtemperatur zeigt  $C_s$  ein aktiviertes Verhalten, da es in einem s-Wellen-Supraleiter eine Energielücke gibt.

Rechts: Ein geschlossener Pfad  $C$  innerhalb eines Supraleiters und die gerichtete Oberfläche  $S$ .

### Materialgleichungen

Für die elektrischen Größen bezeichnet man

- $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ : dielektrische Verschiebung
- $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ : dielektrische Polarization
- $\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e$ : Dielektrizitäts-Konstante
- $\chi_e$ : dielektrische Suszeptibilität

und analog für die magnetischen Größen

- $\mathbf{H}$ : makroskopisches Magnetfeld,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
- $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ : Magnetisierung
- $\mu = 1 + 4\pi \chi_m$ : magnetische Permeabilität
- $\chi_m$ : magnetische Suszeptibilität

Die Abhängigkeit von  $\epsilon$  und  $\chi$ , bzw. von  $\chi_e$  und  $\chi_m$  (welche wir als räumlich isotrop angenommen haben) von den Eigenschaften des Festkörpers nennt man Materialgleichungen.

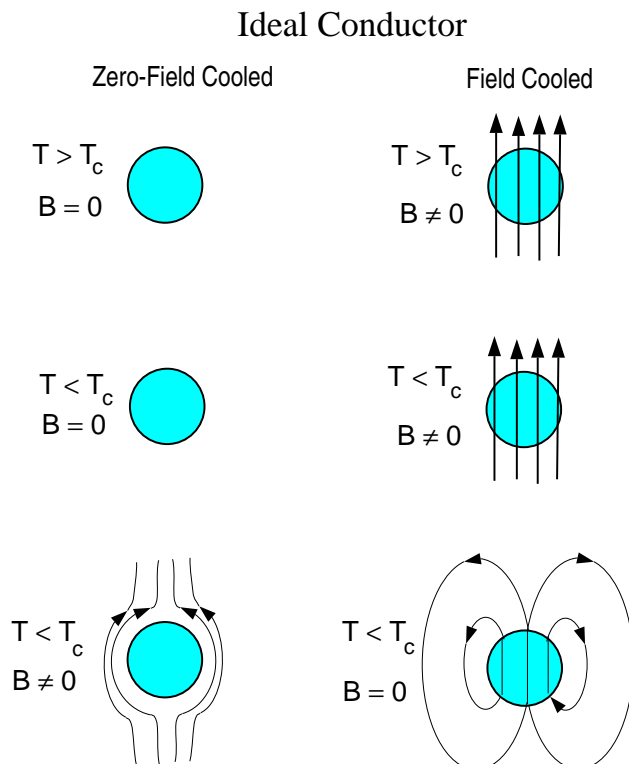


Abbildung 8.3: Für einen idealen Leiter macht es (im Gegensatz zu einem Supraleiter!) einen Unterschied, ob dieser im Feld oder ohne ein äusseres magnetisches Feld gekühlt wird.

### 8.1.3 Phasenübergang

Ein eindeutiger Hinweis auf einen Phasenübergang ist dem Verhalten der spezifischen Wärme zu entnehmen, siehe Fig. 8.2. Der Sprung deutet auf ein Fehlen einer latenten Wärme hin, also auf einen Phasenübergang zweiter Ordnung. Zudem zeigt die spezifische Wärme  $C_s$  für  $T < T_c$  ein aktiviertes Verhalten

$$C_s \sim e^{-\beta\Delta} . \quad (8.1)$$

Dieses deutet auf eine Energielücke  $\Delta$  für thermische Anregungen im supraleitenden Zustand hin.

### 8.1.4 Meissner-Effekt

Ein Supraleiter verdrängt ein äusseres Magnetfeld vollständig aus dem Supraleiter, wie Walter Meissner und Robert Ochsenfeld 1933 herausfanden. Im Inneren eines Supraleiters ist also  $\mathbf{B} = 0$ . Dieses Phänomen existiert nicht in einem idealen Leiter mit verschwindendem elektrischen Widerstand ( $\rho = 0$ ). Für diesen gilt nur  $\dot{\mathbf{B}} = 0$ , da das Integral

$$0 = IR = V = \oint \mathcal{E} \cdot d\lambda = \int_{\mathbf{S}} (\vec{\nabla} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \int_{\mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (8.2)$$

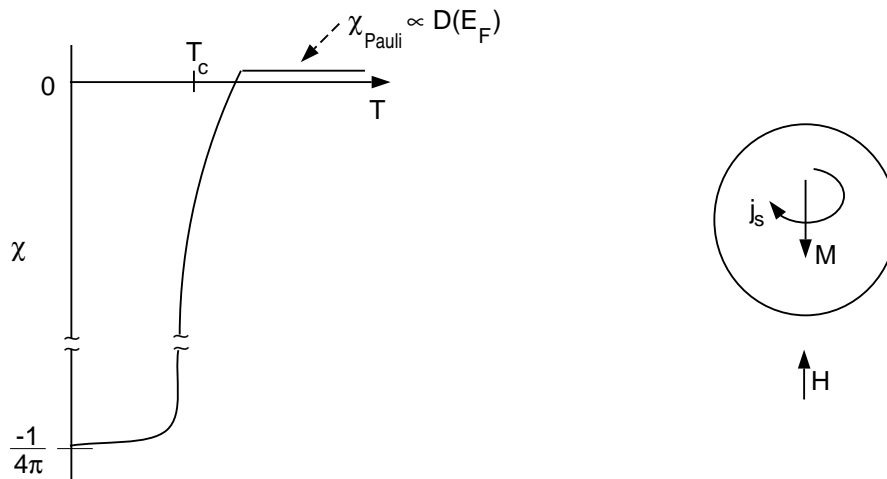


Abbildung 8.4: Links: Sketch der magnetischen Suszeptibilität eines Supraleiters, der diamagnetische Response ist um Größenordnungen stärker als die paramagnetische Pauli-Suszeptibilität des Normalleiters.

Rechts: In einem Supraleiter werden spontan Oberflächenströme induziert, welche den magnetischen Fluss aus dem Inneren des Supraleiters verdrängen.

über jeden geschlossenen Pfad verschwindet. Dabei sind  $C$  und  $S$  beliebig, also

$$0 = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{B}} = 0. \quad (8.3)$$

Für einen idealen Leiter ist der Widerstand  $\rho > 0$  bei endlichen Temperaturen und das Magnetfeld dringt ein. Wenn man den idealen Leiter nun in Anwesenheit eines Magnetfeldes abkühlt, dann wird wegen  $\dot{\mathbf{B}} = 0$  das Magnetfeld auch nicht aktiv verdrängt, im Gegensatz zum Supraleiter.

### Idealer Diamagnetismus

Ein Supraleiter ist ein idealer, thermodynamisch stabiler Diamagnet:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0, \quad \chi_m = \frac{\mu - 1}{4\pi}, \quad (8.4)$$

und damit

$$\chi_{SC} = -\frac{1}{4\pi}.$$

Die gemessene Suszeptibilität  $\chi$ , siehe Fig. 8.4 ist im supraleitenden Zustand also sehr gross und negativ (diamagnetisch).

Physikalisch rührt der ideale Diamagnetismus von den induzierten Oberflächenströmen her, welche eine Magnetisierung

$$\mathcal{M} = -\frac{1}{4\pi} H_{\text{ext}} \quad (8.5)$$

im Inneren des Supraleiters aufrecht erhalten. Hierzu wird eine Energie benötigt, welche mit steigendem  $H_{\text{ext}}$  ansteigt. Ab einem bestimmten Punkt wird der supraleitende Zustand dann energetisch ungünstig. Es existiert daher ein oberes kritisches Feld  $H_c$ .

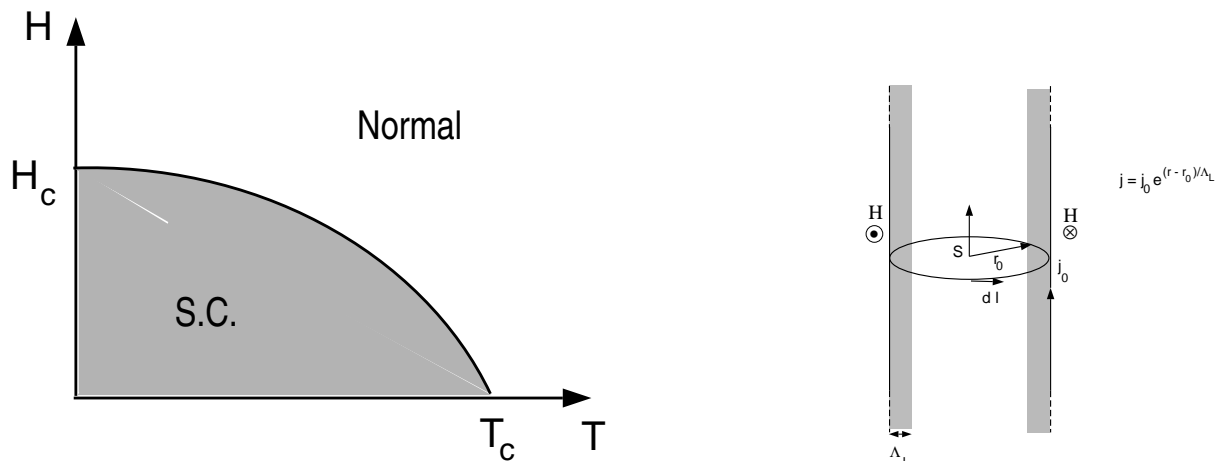


Abbildung 8.5: Links: Die Supraleitung wird durch ein starkes äusseres Magnetfeld oder durch genügend starke thermische Fluktuationen unterdrückt.

Rechts: Ein langer, dicker, supraleitenden Draht. Ein äusseres Feld  $H$  dringt nur die Distanz  $\Lambda_L$  ein.

## 8.2 London-Gleichungen

F. London und H. London haben 1935 eine phänomenologische Theorie entwickelt, welche den Meissner-Effekt erklärt. Sie machten die Annahme, dass es eine Dichte  $n_s$  von supraleitenden Elektronen gibt, welche sich ohne Reibung im Metall bewegen können:

$$m\dot{\mathbf{v}} = -eE, \quad \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -en_s\dot{\mathbf{v}}. \tag{8.6}$$

Damit erhalten wir die erste London-Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \frac{e^2 n_s}{m} E.$$

Wir verwenden nun die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

und erhalten

$$\frac{m}{n_s e^2} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m}{n_s e^2} \vec{\nabla} \times \mathbf{j}_s + \frac{1}{c} \mathbf{B} \right) \tag{8.7}$$

Diese Gleichung beschreibt einen idealen Leiter mit verschwindendem Widerstand ( $\rho = 0$ ). Um den Meissner-Effekt zu erhalten muss die Klammer identisch verschwinden:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{mc} \mathbf{B}, \quad \lambda = \frac{m}{n_s e^2}. \tag{8.8}$$

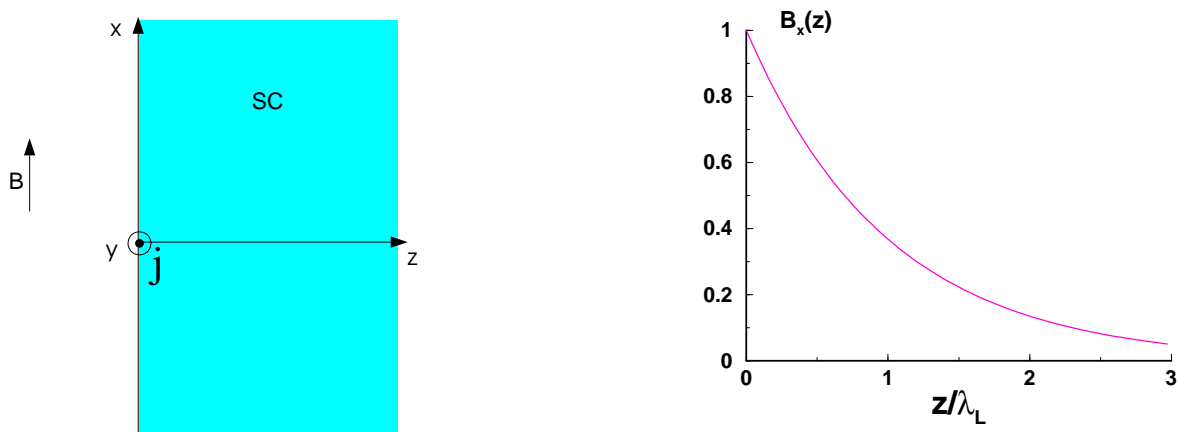


Abbildung 8.6: Eine supraleitende Halbebene in einem magnetischen Feld parallel zur Oberfläche. Das äussere Feld dringt bis zu einer Tiefe von  $\lambda_L$  ein.

Dies ist die zweite London-Gleichung. Die Bedeutung des Parameters  $\lambda^2$  werden wir nun betrachten.

### Feldgleichungen

Wir wollen nun die physikalische Bedeutung der Grösse  $\lambda = m/n_s e^2$  herausarbeiten. Beide London-Gleichungen lassen sich durch  $\lambda$  parametrisieren:

$$\frac{\mathbf{B}}{c} = -\lambda \vec{\nabla} \times \mathbf{j}_s, \quad \mathcal{E} = \lambda \frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t}. \quad (8.9)$$

Diese können wir mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}$$

gleichzeitig lösen:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{\nabla} \times \mathbf{j} = -\frac{4\pi \mu}{c^2 \lambda} \mathbf{B}, \quad (8.10)$$

bzw.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{j}) = -\frac{1}{\lambda c} \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = -\frac{4\pi \mu}{c^2 \lambda} \mathbf{j}. \quad (8.11)$$

Mit  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{a}) - \vec{\nabla}^2 \mathbf{a}$  und

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(Maxwell und Kontinuitätsgleichung) erhalten wir allgemein

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \mathbf{B} - \frac{4\pi \mu}{c^2 \lambda} \mathbf{B} = 0} \quad \boxed{\vec{\nabla}^2 \mathbf{j} - \frac{4\pi \mu}{c^2 \lambda} \mathbf{j} = 0}. \quad (8.12)$$

Diese beiden Feldgleichungen zeigen uns, dass  $\sqrt{\lambda}$  proportional zu einer charakteristischen Längenskala ist.

**London'sche Eindringtiefe**

Wir betrachten nun eine supraleitende Halbebene, wie in Fig. 8.6 illustriert, mit  $\mathbf{B} = (B_x(z), 0, 0)$ . Wegen  $\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}$  sind  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{j}$  orthogonal, also  $\mathbf{j} = (0, j_y(z), 0)$ .

Die London-Gleichungen (8.12) werden damit zu

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_x}{\partial z^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B}_x = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{j}_y}{\partial z^2} - \frac{2}{\lambda_L^2} \mathbf{j}_y = 0, \quad (8.13)$$

wobei wir mit

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{c^2 \lambda}{4\pi \mu}} = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2 \mu}}$$

die London'sche Eindringtiefe definiert haben. Die Lösungen fallen im Inneren exponentiell ab,

$$\mathbf{B}_x = \mathbf{B}_x^0 e^{-z/\lambda_L}, \quad \mathbf{j}_y = \mathbf{j}_y^0 e^{-z/\lambda_L}, \quad (8.14)$$

daher die Bezeichnung Eindringtiefe.

**Kritisches Feld**

Wir betrachten nun einen langen, dicken Draht mit Radius  $r_0 \gg \lambda_L$ , wie in der Abb. 8.5 illustriert. Mit Hilfe der Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (8.15)$$

finden wir für das Kontour-Integral

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \vec{\nabla} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (8.16)$$

Wir beachten, dass das Magnetfeld nur bis zu einer Tiefe von  $\lambda_L$  eindringt. Innerhalb dieser Eindringtiefe sei der mittlere Strom  $j_0$ :

$$2\pi r_0 H = \frac{4\pi}{c} 2\pi r_0 \lambda_L j_0. \quad (8.17)$$

Der supraleitende Zustand kann keine beliebig hohen Ströme unterstützen, es gibt also eine maximale Stromdichte  $j_c$  und damit ein kritisches Feld  $H_c$ :

$$H_c = \frac{4\pi}{c} \lambda_L j_c. \quad (8.18)$$

**8.3 Cooper-Paare**

Die London'sche Theorie beschreibt die Supraleitung phänomenologisch. Sie liefert keine Erklärung für die mikroskopische Ursache der Supraleitung. Um diese zu verstehen betrachten wir zunächst Wechselwirkung zweier Elektronen im Hintergrund eines Fermi-Sees, das sogn. Cooper Problem.



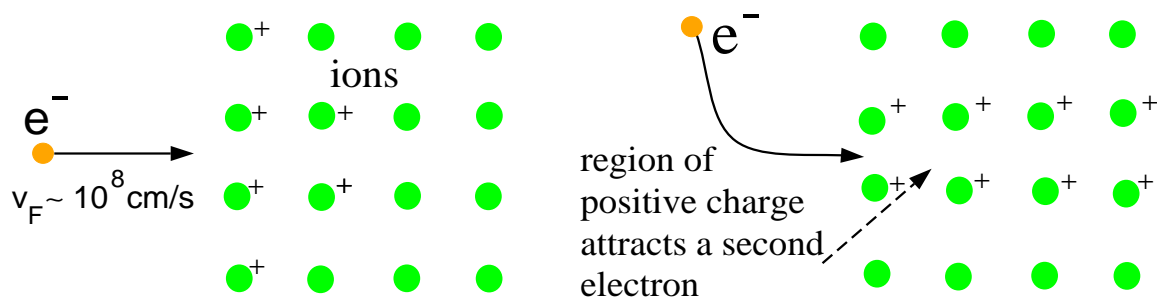


Abbildung 8.7: *Illustration: Die negativ geladenen Elektronen an der Fermi-Kante bewegen sich mit der (hohen) Geschwindigkeit  $v_F$  durch das Kristall. Die positiv geladenen Ionen bewegen sich langsam zum vorbeifliegenden Elektron hin und bilden eine leicht erhöhte Ladungsdichte, welche weitere Elektronen anzieht.*

### 8.3.1 Retardiertes Paarungs-Potential

Im supraleitenden Zustand gibt es eine attraktive Wechselwirkung zwischen Elektronen auf der Fermi-Fläche, welche zur Bildung von Cooper-Paaren führt. In den normalen Supraleitern wird die attraktive Elektron-Elektron-Wechselwirkung durch den Austausch von Phononen erreicht.

Die Deformation des Gitters von Ionen erfolgt auf einer Zeitskala von

$$\tau \sim \frac{2\pi}{\omega_D} \sim 10^{-13} \text{ s}$$

In dieser Zeitspanne hat ein Leitungselektron den Weg

$$v_F \tau \sim 10^8 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 10^{-13} \text{ s} \sim 1000 \text{ \AA}$$

zurückgelegt. Ein zweites Elektron kann also *retardiert* die Anziehung des ersten Elektrons spüren, ohne dass dabei die abstossende Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Elektronen eine Rolle spielt, siehe Fig. 8.7.

### 8.3.2 Cooper-Instabilität des Fermi-Sees

Wir betrachten nun zwei Elektronen ausserhalb des Fermi-Fläche in Anwesenheit eines attraktiven Potentials  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Die Schrödinger-Gleichung ist

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla}_1^2 + \vec{\nabla}_2^2) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\epsilon + 2E_F) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (8.19)$$

Für ein verschwindendes Potential  $V = 0$  ist die Bindungsenergie  $\epsilon = 0$  und die (nicht symmetrisierte) 2-Teilchen Wellenfunktion ist

$$\psi_{V=0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \frac{1}{L^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} = \frac{1}{L^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}, \quad (8.20)$$

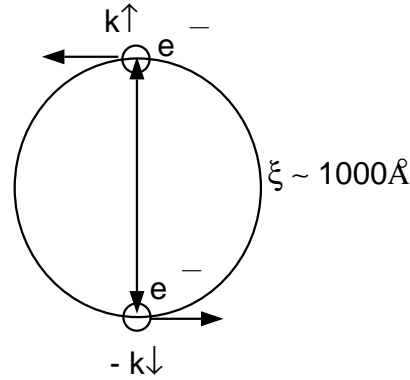


Abbildung 8.8: Die attraktive, Phononen-induzierte Wechselwirkung ist im Ortsraum im wesentlichen isotrop und Spin-unabhängig. Dieses führt zu einer Paarwellenfunktion, welche als Funktion der Relativ-Koordinate gerade, und im Spin-Sektor ein Singlet ist. Äquivalent hierzu ist eine Paarung von  $(\mathbf{k}, \uparrow)$  und  $(-\mathbf{k}, \downarrow)$  im Impulsraum.

wobei wir  $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$  angenommen haben. Wir nehmen nun an, dass die Paar-Wellenfunktion  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  für eine kleine Störung  $V$  als Linearkombination der Basisfunktionen (8.20) dargestellt werden kann:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \quad (8.21)$$

Die  $k$ -Summe in (8.21) ist auf einen kleinen Bereich über der Fermi-Schale beschränkt, mit

$$E_F < \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D \quad (8.22)$$

oder

$$g(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} \mathbf{k} < \mathbf{k}_F \\ \mathbf{k} > \sqrt{2m(E_F + \hbar\omega_D)}/\hbar \end{cases} \quad (8.23)$$

da die Debye-Frequenz  $\omega_D$  viel kleiner als die typische Fermi-Energie ist.

### Selbstkonsistenz-Gleichung

Eine Fourier-Transformation der Schrödinger-Gleichung ergibt zusammen mit dem Ansatz (8.21)

$$2\frac{\hbar^2 k^2}{2m} g(\mathbf{k}) + \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} g(\mathbf{k}') = (\epsilon + 2E_F) g(\mathbf{k}), \quad (8.24)$$

wobei

$$V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = \int V(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r}$$

nun die Streuung von Paaren von Elektronen von  $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$  nach  $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$  beschreibt. Wir nähern  $V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$  durch eine attraktive Konstante:

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \begin{cases} -V_0 & E_F < \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}, \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.25)$$

Damit wird (8.24) zu

$$\left(-\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{m} + \epsilon + 2E_F\right) g(\mathbf{k}) = -\frac{V_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}') \equiv -A, \quad (8.26)$$

bzw.

$$g(\mathbf{k}) = \frac{-A}{-\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{m} + \epsilon + 2E_F}. \quad (8.27)$$

Wir setzen  $g(\mathbf{k})$  nun wieder in (8.26) ein und erhalten mit

$$\frac{V_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{A}{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{m} - \epsilon - 2E_F} = +A, \quad \boxed{1 = \frac{V_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{m} - \epsilon - 2E_F}} \quad (8.28)$$

eine Bestimmungsgleichung für die Bindungsenergie  $\epsilon$ .

### Bindungs-Energie

Wir können die Bestimmungsgleichung (8.28) mit Hilfe der Zustandsdichte  $N(\omega) \approx N(E_F)$  pro Spin in ein Integral umwandeln:

$$1 = V_0 \int_{E_F}^{E_F + \hbar\omega_D} N(E_F) \frac{dE}{2E - \epsilon - 2E_F} = \frac{1}{2} V_0 N(E_F) \ln \left( \frac{\epsilon - 2\hbar\omega_D}{\epsilon} \right), \quad (8.29)$$

mit der Lösung

$$\boxed{\epsilon = \frac{2\hbar\omega_D}{1 - e^{2/(V_0 N(E_F))}} \simeq -2\hbar\omega_D e^{-2/(V_0 N(E_F))} < 0}, \quad (8.30)$$

für  $V_0/E_F \rightarrow 0$ . Wir erhalten also einen exponentiell-kleinen Energiegewinn für alle  $V_0 > 0$ , welcher nicht-analytisch in  $V_0$  ist. Das Resultat (8.30) lässt sich daher nicht in Störungstheorie herleiten.

### Instabilität des Fermi-Sees

Aus der Theorie der Potentialstreuung wissen wir, dass zwei Teilchen mit einer attraktiven Wechselwirkung in drei Dimensionen nur dann einen gebundenen Zustand bilden ( $\epsilon < 0$ ), wenn das Bindungspotential stark genug ist. Für kleine Attraktive Wechselwirkung gibt es dagegen nur Streuzustände.

Das Resultat von Cooper lehrt uns, dass in Anwesenheit eines Fermi-Sees zwei Elektronen schon bei einer infinitesimal kleinen attraktiven Wechselwirkung binden. Dabei ist der Fermi-See passiv. Sein Einfluss ist rein passiv, er beschränkt aufgrund des Pauli-Prinzip die erlaubten Streuzustände, d.h. das Phasenraumvolumen.

## 8.4 BCS-Theorie

Das Cooper-Problem behandelt das Problem von zwei zusätzlichen Elektronen in der Nähe der Fermi-Kante. Da aber Elektronen ununterscheidbare Teilchen sind, müssen wir nun eine echte Vielteilchen-Wellenfunktion aufschreiben, für alle Leitungselektronen, welche die Supraleitung beschreibt. Dazu schreiben wir den Hamilton-Operator nochmals in zweiter Quantisierung auf:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k},\sigma} + \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} \sum_{\sigma\sigma'} V_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},\sigma'}^\dagger c_{\mathbf{k}',\sigma'} c_{\mathbf{k}\sigma}, \quad (8.31)$$

mit dem Potential (8.25) und  $\xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - E_F$ . Das Volumen des Kristalls wurde dabei mit  $L^3$  bezeichnet.

### BCS-Hamiltonian

Die Supraleitung wird durch die Terme  $\sim (-V_0)$  mit  $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$  und  $\sigma' = -\sigma$  im Potential-Term von (8.31) vermittelt,

$$H_{BCS} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k},\sigma} - \frac{V_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \sum_{\sigma} c_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger c_{-\mathbf{k}',-\sigma}^\dagger c_{-\mathbf{k}',-\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}.$$

Dieser Hamilton-Operator wird auch BCS-Hamiltonian genannt, die  $\mathbf{k}$ -Summationen sind dabei implizit auf die Fermischale begrenzt.

### 8.4.1 BCS-Wellenfunktion

Aus dem Cooper-Problem haben wir gelernt, dass Elektronen mit  $\mathbf{k}$  und  $-\mathbf{k}$  Paare bilden, wegen der Symmetrie des Wechselwirkungs-Potentials vorzugsweise mit entgegengesetztem Spin. Die BCS-Wellenfunktion ist daher

$$|\Psi\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left( u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle, \quad (8.32)$$

wobei  $v_{\mathbf{k}}/u_{\mathbf{k}} \sim g(\mathbf{k})$  einen Zusammenhang mit dem Cooper-Ansatz (8.21) liefert. Die BCS-Wellenfunktion hat keine feste Teilchenzahl, dafür eine feste Phase.

Die Normierung  $u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1$  wird durch die Parametrisierung

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \quad (8.33)$$

erfüllt, wobei sich der zunächst noch freie Parameter  $E_{\mathbf{k}}$  später als die Energie der elementaren Anregungen herausstellen wird.

### Bogoliubov-Transformation

Wir nehmen erst einmal an, dass (8.32) ein guter Ansatz für den Grundzustand ist. Wie sehen dann die Anregungen aus? Wir betrachten

$$c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger |\Psi\rangle = u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger \prod_{\mathbf{p} \neq \mathbf{k}} \left( u_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p},\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p},\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle \quad (8.34)$$

und

$$c_{-\mathbf{k},\downarrow}|\Psi\rangle = -v_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} \prod_{\mathbf{p}\neq\mathbf{k}} (u_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}}c_{\mathbf{p},\uparrow}^{\dagger}c_{-\mathbf{p},\downarrow}^{\dagger})|0\rangle. \quad (8.35)$$

Es liegt daher nahe, die Bogoliubov-Transformation

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} &= u_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} - v_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k},\downarrow} \\ \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow} &= v_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} + u_{\mathbf{k}}c_{-\mathbf{k},\downarrow} \end{aligned} \quad (8.36)$$

zu definieren. Man kann sich leicht überzeugen, dass die  $\gamma$  und  $\gamma^{\dagger}$  antikommutieren.

### Bogoliubov Vakuum

Aus (8.34) und (8.35) folgt sofort, dass die  $\gamma$  den BCS-Grundzustand vernichten:

$$\gamma_{-\mathbf{k},\downarrow}|\Psi\rangle = 0,$$

und analog für  $\gamma_{\mathbf{k},\uparrow}$ . Die BCS-Wellenfunktion ist also das Vakuum für die Bogoliubov-Quasi-Teilchen  $\gamma^{\dagger}$ .

## 8.4.2 BCS-Theorie für $T = 0$

Die Bogoliubov-Transformation (8.36) lässt sich invertieren und in den BCS-Hamilton-Operator (8.31) einsetzen. Die Rechnung verläuft analog zur Bogoliubov-Transformation, welche wir zur Berechnung der Dispersionsrelation der Spinwellen in Antiferromagneten eingesetzt haben, siehe Kap. 6.5.4.

Wir erhalten

$$H = W_{BCS} + \sum_{\mathbf{k},\sigma} E_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k},\sigma}, \quad (8.37)$$

mit der BCS-Energie-Relation

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2} \quad u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (8.38)$$

für die Bogoliubov-Quasiteilchen, der BCS-Selbstkonsistenz-Gleichung

$$\Delta = \frac{V_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} = \frac{V_0}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta}{E_{\mathbf{k}}}, \quad \frac{1}{V_0} = \frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}} \quad (8.39)$$

für die Energielücke  $\Delta$  und der BCS-Grundzustands-Energie

$$\begin{aligned} W_{BCS} &= \langle \psi | H_{BCS} | \psi \rangle = 2 \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 - \frac{2V_0}{L^3} \left( \sum_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} \right) \left( \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \right) \\ &= 2 \sum_{\mathbf{k}} \left( \xi_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 - u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \Delta \right). \end{aligned}$$

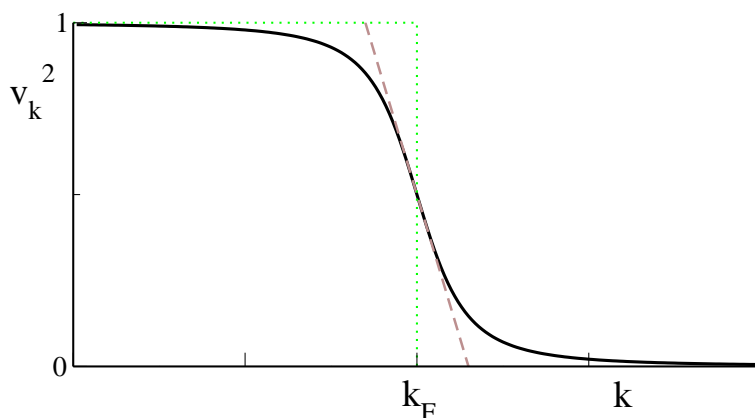


Abbildung 8.9: Sketch der Paar-Verteilungsfunktion im BCS-Grundzustand. Die gestrichelte Linie ist die lineare Approximation um die Fermi-Energie, der Fermi-See ist gepunktet.

### BCS-Grundzustands-Energie

Wir möchten die BCS-Grundzustands-Energie  $W_{BCS}$  mit der Energie

$$W_n = \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} 2\xi_{\mathbf{k}} = 2 \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} (1 - \theta(\xi_{\mathbf{k}})) \quad (8.40)$$

des Normalleiters und vergleichen. Für eine Abschätzung nähern wir für kleine  $\Delta$

$$v_{\xi}^2 = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi < \Delta \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{\Delta}\right) & \text{für } \xi \in [-\Delta, \Delta] \\ 0 & \text{für } \xi > \Delta \end{cases}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass  $v_{|\mathbf{k}=k_F}^2 = 1/2$  und  $\partial v_{\xi}^2 / \partial \xi = 1/(2\Delta)$  an der Fermi-Kante, vergleiche Abb. 8.9.

Mit der Zustandsdichte  $N(E_F)$  pro Spin and der Fermi-Kante erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \frac{W_{BCS} - W_n}{L^3} &\approx 2N(E_F) \int_{-\Delta}^{\Delta} d\xi \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{\xi}{\Delta}\right) - 2N(E_F) \int_{-\Delta}^{\Delta} d\xi \frac{\Delta}{2} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\Delta^2}} \\ &- 2N(E_F) \int_{-\Delta}^0 d\xi \xi \\ &\sim -N(E_F) \Delta^2 . \end{aligned}$$

Der Energiegewinn ist also quadratisch im BCS-Ordnungsparameter  $\Delta$ , was man durch eine einfache Reskalierung  $\xi = \Delta x$  in den Integralen ersieht.

### BCS-Zustandsdichte

Wir berechnen nun für die Dispersionsrelation  $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}$  der angeregten Zustände die Zustandsdichte  $N_s(\omega)$  via

$$N_s(E_k) dE_k = N_n(\xi_k) d\xi_k . \quad (8.41)$$

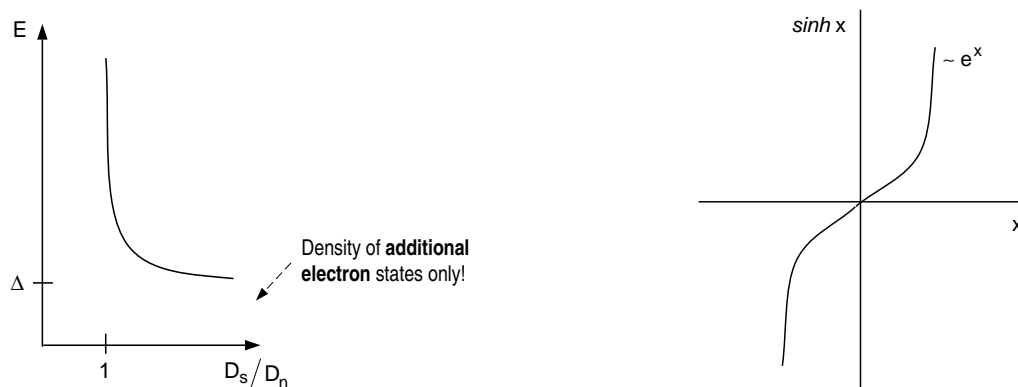


Abbildung 8.10: Links: Die BCS-Zustandsdichte. Rechts: Illustration von  $\sinh$ .

Diese Gleichung drückt die Konstanz der Gesamt-Anzahl der Zustände aus. In der Nähe der Fermi-Kante können wir  $N_n(\xi_k) \approx N_n(E_F)$  setzen. Mit  $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}$  erhalten wir dann für (8.41) und  $E_k > \Delta$

$$\frac{N_s(E_k)}{N_n(E_F)} = \frac{d\xi_x}{dE_k} = \frac{d}{dE_k} \sqrt{E_k^2 - \Delta^2} = \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 - \Delta^2}}. \quad (8.42)$$

Für  $E_k < \Delta$  gibt es keine Zustände,  $\Delta$  ist die Energielücke. Oberhalb von  $\Delta$  hat die Zustands-Dichte eine Divergenz, siehe Fig. 8.10.

### BCS-Gap-Gleichung

Wir lösen nun die Bestimmungsgleichung (8.39) für den Ordnungsparameter  $\Delta$ ,

$$\Delta = \frac{V_0}{L^3} \sum_k u_k v_k = \frac{V_0}{L^3} \sum_k \frac{\Delta}{2E_k} = \frac{1}{2} \frac{V_0}{L^3} \sum_k \frac{\Delta}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}}. \quad (8.43)$$

Wir führen den Kontinuum-Limes durch und beachten, dass bei  $T = 0$  alle Zustände mit  $\xi < 0$  besetzt sind:

$$1 = \frac{V_0}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{N(E_F + \xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}, \quad (8.44)$$

und erhalten mit

$$\frac{1}{V_0 N(E_F)} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} = \sinh^{-1} \left( \frac{\hbar\omega_D}{\Delta} \right) \quad (8.45)$$

die BCS-gap-Gleichung. Für kleine  $\Delta$ , vergleiche Fig. 8.10, hat (8.45) die Lösung

$$\frac{\hbar\omega_D}{\Delta} \sim e^{\frac{1}{V_0 N(E_F)}} \quad \Delta \simeq \hbar\omega_D e^{-\frac{1}{V_0 N(E_F)}}. \quad (8.46)$$

Man beachte die bemerkenswerte Ähnlichkeit von (8.46) mit der Lösung (8.30) für die Bindungsenergie im Cooper-Problem. Bis auf einen Faktor 2 stimmen die Exponenten überein.

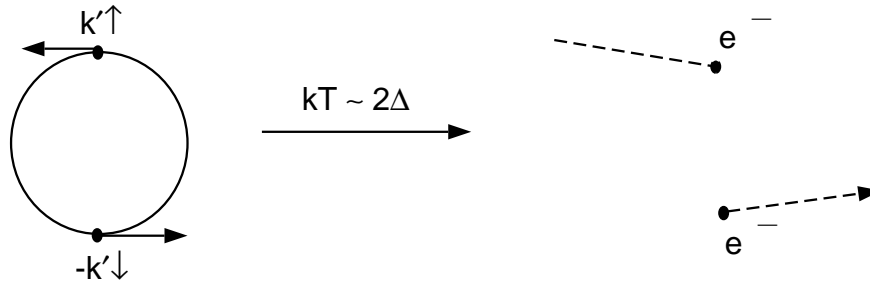


Abbildung 8.11: Um die Cooper-Paare aufzubrechen wird eine Mindestenergie von  $\Delta$  benötigt, was für  $T > 0$  durch thermische Anregungen geschehen kann.

### 8.4.3 Paar-Wellenfunktion

Die Supraleitung ist schlussendlich eine Konsequenz der Paarung von Elektronen. Wir wollen daher die Eigenschaften der Paar-Wellenfunktion untersuchen.

#### Groß-kanonische BCS-Wellenfunktion

Die BCS-Wellenfunktion (8.32) hat keine feste Teilchenzahl, lebt also im groß-kanonischen Ensemble,

$$|\Psi\rangle = \prod_k (u_k + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger) |0\rangle \sim \prod_k (1 + a_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger) |0\rangle = \exp\left(\sum_k a_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger\right) |0\rangle$$

wobei  $a_k = v_k/u_k$  ist. Dabei ist der letzte Schritt aufgrund der Fermi-Statistik der Elektronen exakt.

#### Kanonische BCS-Wellenfunktion

Aus der Thermodynamik wissen wir, dass im thermodynamischen Limes die kanonische und die groß-kanonische Formulierung äquivalent sind. Dies muss auch für die BCS-Wellenfunktion gelten. Wir definieren mit

$$P_N, \quad |\psi_N\rangle = P_N |\psi\rangle$$

einen Projektionsoperator, welcher auf den Unterraum im Fockraum mit fester Teilchenzahl  $N$  projiziert, damit hat  $|\psi_N\rangle$  eine feste Teilchenzahl,

$$|\Psi_N\rangle \sim \left(\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger\right)^{N/2} |0\rangle \sim \left(\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}} a_{\mathbf{x}-\mathbf{y}} c_{\mathbf{x}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{y}\downarrow}^\dagger\right)^{N/2} |0\rangle \quad (8.47)$$

und hat die Form einer Bose-Einsteinkondensation von Elektronenpaaren mit der Paarwellenfunktion  $a_{\mathbf{r}}$ , wobei  $\mathbf{r}$  der relative Abstand der beiden Elektronen ist.

#### Kohärenzlänge

Der mittlere Abstand  $\xi$  der Elektronen, der Radius der Paar-Wellenfunktion, ist durch

$$\xi^2 = \frac{\sum_{\mathbf{r}} a_{\mathbf{r}}^2 |\mathbf{r}|^2}{\sum_{\mathbf{r}} a_{\mathbf{r}}^2} = \frac{\sum_{\mathbf{k}} (\nabla_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}})^2}{\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^2}, \quad a_{\mathbf{k}} = \frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} = \frac{v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}^2} = \frac{\Delta}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2} + \xi_{\mathbf{k}}}$$



gegeben. Wir führen nun die Reskalierung

$$\tilde{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k_F}, \quad \mathbf{q}^2 = \frac{\hbar^2 k_F^2 \mathbf{k}^2}{2m\Delta k_F^2} = \frac{mv_F^2}{2\Delta} \tilde{\mathbf{k}}^2, \quad \nabla_{\tilde{\mathbf{k}}} = \frac{mv_F^2}{2\Delta} \nabla_{\mathbf{q}}$$

durch und erhalten damit

$$\xi^2 \sim \frac{mv_F^2}{2\Delta} \frac{1}{k_F^2} \quad (8.48)$$

für die typische Ausdehnung eines Cooper-Paars. Diese Länge wird auch Kohärenzlänge genannt, da sie gleichzeitig die typische Längenskala für die Kohärenz supraleitender Fluktuationen angibt.

### Kohärenzlänge und Molekularfeld-Näherung

Typische Werte für die Kohärenzlänge  $\xi$  sind

$$\xi \sim (10^3 - 10^4) \text{ \AA} .$$

Ein Cooper-Paar hat in normalen oder typischen Supraleitern daher Kontakt mit

$$\frac{4\pi n}{3} \left(\frac{\xi}{2}\right)^3 \sim 10^8 \quad (8.49)$$

anderen Paaren. Daher ist die Molekularfeld-Näherung der BCS-Theorie i.A. auch sehr gut.

#### 8.4.4 BCS-Theorie für $T > 0$

Um die Vorhersagen der BCS-Theorie für  $T > 0$  zu berechnen, müssen wir die  $T = 0$  Gap-Gleichung (8.45) für endliche Temperaturen verallgemeinern.

### Gap-Gleichung bei endlichen Temperaturen

Die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron im ungepaarten Zustand, also ausserhalb des Kondensats, zu finden ist

$$f(E_{\mathbf{k}} + E_F, T) = \frac{1}{\exp(\beta E_{\mathbf{k}}) + 1} .$$

Zur Selbstkonsistenz-Gleichung (8.45) tragen jedoch nur die Cooper-Paare bei. Damit haben wir

$$\frac{1}{V_0 N(E_F)} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \left\{ 1 - 2f(E_{\mathbf{k}} + E_F, T) \right\} \quad (8.50)$$

für  $T \neq 0$ . Dabei ist  $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2} \geq 0$ . Für  $\beta \rightarrow \infty$  erhalten wir natürlich wieder das  $T = 0$  Resultat.

Gleichung (8.50) bestimmt  $\Delta(T)$ , siehe Fig. 8.12.

### Bestimmung von $T_c$

Am Phasen-Übergang, also für  $T = T_c$ , verschwindet der Ordnungsparameter, also  $\Delta(T \rightarrow T_c^-) \rightarrow 0^+$ . Damit wird die gap-Gleichung (8.50) zu

$$\frac{1}{V_0 N(E_F)} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\xi} \tanh\left(\frac{\xi}{2kT_c}\right), \quad (8.51)$$

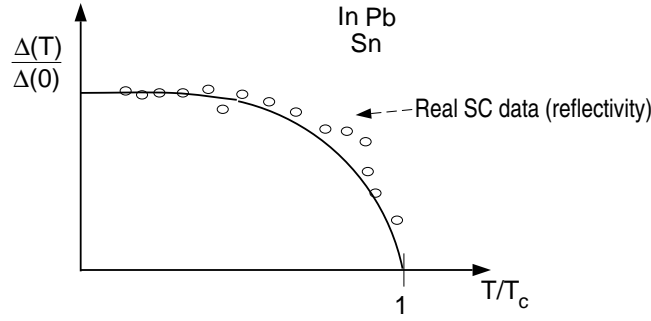


Abbildung 8.12: Die Temperatur-Abhängigkeit der Energielücke  $\Delta(T)$  im Vergleich mit experimentellen Daten (aus Reflektivitäts-Messungen) und der Vorhersage der BCS-Näherung (8.50).

mit der numerischen Lösung

$$1 = V_0 N(E_F) \ln \frac{1.14 \hbar \omega_D}{k T_c}, \quad \boxed{k T_c = 1.14 \hbar \omega_D e^{-1/\{V_0 N(E_F)\}}} \quad (8.52)$$

Wir vergleichen nun  $T_c$  mit der Energielücke bei  $T = 0$ ,  $\Delta = 2 \hbar \omega_D e^{-1/\{V_0 N(E_F)\}}$ , und erhalten mit

$$\boxed{\frac{\Delta(0)}{k T_c} = \frac{2}{1.14} = 1.764} \quad (8.53)$$

das universelle BCS-Verhältnis, vgl. die Tabelle 8.4.4.

### 8.4.5 Green-Funktionen

Selbstredend lassen sich Supraleiter auch diagrammatisch beschreiben und dieser Zugang ist von grosser Bedeutung wenn man komplizierte Situation wie der Einfluss von Unordnung etc. betrachtet.

Supraleitung entspricht der Paar-Kondensation von Elektronen und spiegelt sich daher in der Zweiteilchen-Green-Funktion im Teilchen-Teilchen-Kanal (Leiter-Diagramme) wieder.

| Metal | $T_c$ °K | $N(E_F)V_0$ | $\Delta(0)/kT_c$ |
|-------|----------|-------------|------------------|
| Zn    | 0.9      | 0.18        | 1.6              |
| Al    | 1.2      | 0.18        | 1.7              |
| Pb    | 7.22     | 0.39        | 2.15             |

Tabelle 8.1: Der experimentelle Wert von 2.15 für  $\Delta(0)/kT_c$  ist für Blei grösser als die BCS-Vorhersage von 1.76. Solche Systeme werden auch stark-Kopplungs-Supraleiter genannt und durch die Eliashberg-Migdal-Theorie beschrieben.

Hier untersuchen wir die Auswirkungen der Supraleitung auf die Einteilchen-Green-Funktion.

### BCS Hamiltonian

Der BCS-Hamiltonian lässt sich entkoppeln,

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mathbf{k},\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k},\sigma} - V \left( \sum_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}',\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}',\downarrow}^\dagger \right) \left( \sum_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k},\downarrow} \right) \\ &\approx \sum_{\mathbf{k},\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k},\sigma} - \Delta^* \sum_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k},\downarrow} - \Delta \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger + |\Delta|/V, \end{aligned} \quad (8.54)$$

mit den molekularen Feldern

$$\Delta = V \sum_{\mathbf{k}'} \langle c_{-\mathbf{k}',\downarrow} c_{\mathbf{k}',\downarrow} \rangle, \quad \Delta^* = V \sum_{\mathbf{k}'} \langle c_{\mathbf{k}',\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}',\sigma} \rangle. \quad (8.55)$$

### Normale und anormale Green-Funktion

Wir betrachten nun mit

$$G_{\mathbf{k}\uparrow}(t) = -i\Theta(t) \langle [c_{\mathbf{k},\uparrow}(t), c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger]_+ \rangle, \quad F_{\mathbf{k}\uparrow}(t) = -i\Theta(t) \langle [c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger(t), c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger]_+ \rangle \quad (8.56)$$

die normale retardierte Green-Funktion  $G_{\mathbf{k}\uparrow}(t)$ , sowie den anormalen Anteil  $F_{\mathbf{k}\uparrow}(t)$ , vgl. Kapitel 4.3.

### Bewegungsgleichungen

Die Einteilchen-Greenfunktionen gehorchen den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} G_{\mathbf{k}\uparrow}(t) = -i\delta(t) - \Theta(t) \langle [\dot{c}_{\mathbf{k},\uparrow}(t), c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger]_+ \rangle, \quad \frac{d}{dt} F_{\mathbf{k}\uparrow}(t) = -i\Theta(t) \langle [\dot{c}_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger(t), c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger]_+ \rangle,$$

wobei  $\dot{c} = i[H, c]_-$  und  $\dot{c}^\dagger = i[H, c^\dagger]_-$ . Analog zum Abs. 4.3.7 finden wir für den BCS-Hamiltonian (8.54) die Kommutator-Relationen

$$\begin{aligned} \dot{c}_{\mathbf{k},\uparrow} &= -i\xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow} + i\Delta c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \\ \dot{c}_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger &= i\xi_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger + i\Delta^* c_{\mathbf{k},\uparrow} \end{aligned}$$

für die zeitabhängigen Operatoren. Im Frequenzraum wird hieraus

$$\begin{aligned} \omega G_{\mathbf{k}\uparrow}(\omega) &= 1 + \xi_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{k}\uparrow}(\omega) - \Delta F_{\mathbf{k}\uparrow}(\omega) \\ F_{\mathbf{k}\uparrow}(\omega) &= -\xi_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}\uparrow}(\omega) - \Delta^* G_{\mathbf{k}\uparrow}(\omega), \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\left( \omega - \xi_{\mathbf{k}} - \frac{\Delta\Delta^*}{\omega + \xi_{\mathbf{k}}} \right) G_{\mathbf{k}\uparrow}(\omega) = 1, \quad G_{\mathbf{k}\uparrow}(\omega) = \frac{\omega + \xi_{\mathbf{k}}}{\omega^2 - \xi_{\mathbf{k}}^2 - |\Delta|^2}.$$

Wir finden also mit

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta|^2}, \quad u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right)$$

die Lösung

$$G_{\mathbf{k}\uparrow}(\omega) = \frac{u_{\mathbf{k}}^2}{\omega - E_{\mathbf{k}}} + \frac{v_{\mathbf{k}}^2}{\omega + E_{\mathbf{k}}}, \quad (8.57)$$

wie zu erwarten war.

## 8.5 Anwendungen der BCS-Theorie

### 8.5.1 Die Energielücke im Experiment

#### Spezifische Wärme

Die elementare Anregung eines BCS-Supraleiters, die Aufbrechung eines Cooper-Paares, hat die Energie  $2\Delta$ . Für kleine Temperaturen hat daher die innere Energie die asymptotische Gestalt

$$E(T) \approx E(T=0) + 2\Delta e^{-\beta 2\Delta}, \quad T \ll T_c. \quad (8.58)$$

Für die spezifische Wärme finden wir damit

$$C = \frac{\partial E(T)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} \approx \frac{4\Delta^2}{T^2} e^{-\beta 2\Delta}. \quad (8.59)$$

#### Mikrowellen-Absorption und Reflektion

Durch Absorptions- und Reflexions-Experimente kann der Gap direkt gemessen werden. Wenn das einfallende Licht eine Energie  $\hbar\omega < 2\Delta$  hat, dann können die Cooper-Paare nicht aufgebrochen werden und das Licht wird weder reflektiert noch absorbiert. Für  $\hbar\omega = 2\Delta$  ergibt sich eine Resonanz.

### 8.5.2 Isotopen-Effekt

Die effektive Elektron-Elektron-Anziehung  $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$  resultiert aus dem Austausch virtueller Phononen. Wenn wir die Masse (Isotop) eines der vibrierenden Atome ersetzen, dann bleiben die elektronischen Eigenschaften des Materials unverändert, insbesondere auch die Zustandsdichte  $N(E_F)$ , welche in die BCS-Formel (8.52) für die kritische Temperatur eingeht. Die Frequenz der Phononen ist dagegen

$$\omega_D \sim \sqrt{\frac{k}{M}} \sim M^{-\frac{1}{2}}. \quad (8.60)$$

invers proportional zur atomaren Masse und damit auch  $T_c \sim M^{-\frac{1}{2}}$ . Diese Vorhersage wird durch die meisten "normalen" Supraleiter erfüllt.

### 8.5.3 Kritischer Strom und kritisches Feld

#### Kritisches Feld

Der Energiegewinn (8.41) des supraleitenden Zustandes relativ zum normal-leitenden Zustand,

$$\frac{1}{2}N(0)\Delta^2 = \frac{1}{L^3}(W_n - W_{BCS}), \quad (8.61)$$

muss genügend gross sein, um den Verlust an magnetischer Feldenergie  $\mathbf{H}^2/(8\pi)$  auszugleichen. Das klappt bis zu einem kritischen Feld  $H_c$ :

$$\frac{1}{2}N(0)\Delta^2 = \frac{1}{8\pi}\mathbf{H}_c^2, \quad (8.62)$$

also

$$H_c = 2\Delta\sqrt{\pi N(0)}. \quad (8.63)$$

#### Kritischer Strom

Mit Hilfe der London-Gleichungen hatten wir, siehe (8.18), die Beziehung  $j_c = \frac{c}{4\pi\Lambda_L}H_c$  zwischen dem kritischen Strom  $j_c$  und dem kritischen Feld  $H_c$  hergeleitet. Mit Hilfe von (8.63) erhalten wir

$$j_c = \frac{c}{4\pi\Lambda_L}2\Delta\sqrt{\pi N(0)}, \quad \Lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi ne^2\mu}}. \quad (8.64)$$

Nehmen wir eine konstante Zustandsdichte  $N(E) \approx N(0)$  an, dann ist

$$N(0) \simeq \frac{n}{E_F} \quad (8.65)$$

und wir finden mit einer magnetischen Permeabilität  $\mu = 1$

$$j_c = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{4\pi ne^2}{mc^2}}2\Delta\sqrt{\frac{\pi n 2m}{\hbar^2 k_F^2}} = \sqrt{2}\Delta\frac{ne}{\hbar k_F}. \quad (8.66)$$

## 8.6 Supraleiter im Magnetfeld

### 8.6.1 Kohärenz und Meissner-Effekt

Der Meissner Effekt ist die zentrale Eigenschaft eines Supraleiters und sollte daher auch aus der BCS-Theorie ableitbar sein.

#### Strom-tragende Wellenfunktion

Wir betrachten ein Strom-tragendes Cooper-Paar,

$$\psi_{\mathbf{Q}}^{\dagger}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}/2,\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}+\mathbf{Q}/2,\downarrow}^{\dagger} \quad (8.67)$$

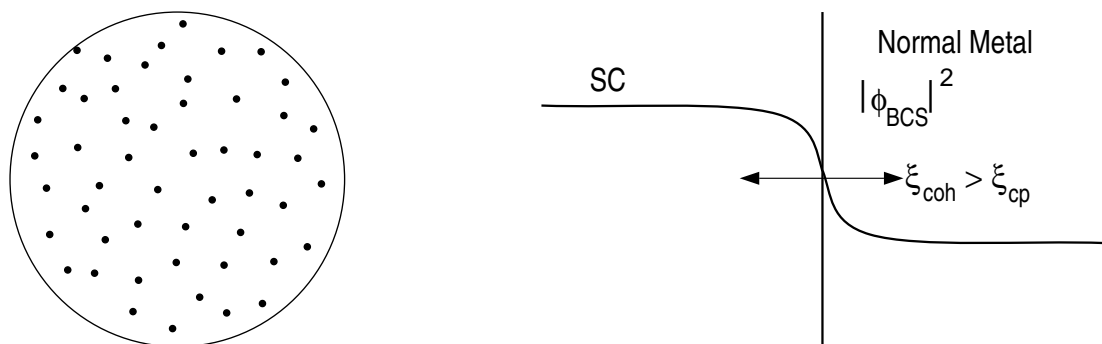


Abbildung 8.13: Links: Innerhalb des Volumens einer Cooper-Paar-Wellenfunktion halten sich viele Elektronen auf und tragen damit zur Robustheit der Wellenfunktion bei.

Rechts: Der Durchmesser eines Cooper-Paares,  $\xi_c$  wird i.A. kleiner als die Kohärenzlänge  $\xi_{coh}$  sein.

in Analogie zu (8.21) und (8.47). Dabei ist  $\mathbf{Q}$  die Wellenzahl der Schwerpunkts-Koordinate  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ . Insbesondere impliziert (8.67) die Annahme, dass die  $g(\mathbf{k})$  unabhängig vom Impuls  $\hbar \mathbf{Q}$  des Cooper-Paares sind (Robustheit der Wellenfunktion). Dieses ist nur dann der Fall, wenn alle anderen Cooper-Paare den selben Impuls haben:

$$\psi_{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_{\mathbf{Q}=0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}} .$$

### Robustheit der Wellenfunktion

Wir nehmen nur an, dass alle Cooper-Paare den gleichen Impuls  $\hbar \mathbf{Q}$  haben. Diese Annahme ist in Anbetracht des hohen gegenseitigen Überlapps der Cooper-Paare gerechtfertigt. Somit ist dann

$$\Phi_{BCS}(\mathbf{Q}) = e^{i\varphi} \Phi_{BCS}(\mathbf{Q} = 0) = e^{i\varphi} \Phi_{BCS}(0) , \quad (8.68)$$

für die Gesamtwellenfunktion  $\Phi_{BCS}$  in erster Quantisierung, mit der (Gesamt-) Phase

$$\varphi = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \dots) .$$

### Supra-Strom

Der Stromoperator für ein einzelnes Cooper-Paar ist

$$\mathbf{j} = -\frac{2e}{4m} \left\{ \psi \mathbf{p}^* \psi^* + \psi^* \mathbf{p} \psi \right\} . \quad (8.69)$$

Dieses ist der normale Stromoperator mit der Masse des Paares  $2m$  und der Paar-Ladung  $-2e$ . Aufgrund der Robustheit (8.67) der Paar-Wellenfunktion können wir

$$\mathbf{p} = -i\hbar \vec{\nabla} - \frac{2e}{c} A, \quad \vec{\nabla} = \vec{\nabla}_R + \vec{\nabla}_r \approx \vec{\nabla}_R \quad (8.70)$$

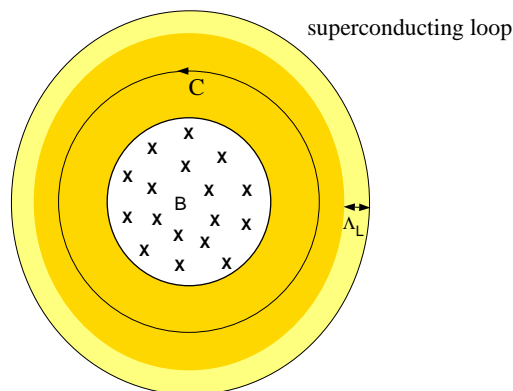


Abbildung 8.14: Der magnetische Fluss, welcher einen supraleitenden Ring durchdringt, ist quantisiert.

setzen. Damit erhalten wir für die Suprastrom-Dichte  $\mathbf{j}_s$ :

$$\mathbf{j}_s \approx \frac{2e}{4m} \sum_{\nu} \left\{ \Phi_{BCS}^* \left( -i\hbar \vec{\nabla}_{R_{\nu}} - \frac{2eA}{c} \right) \Phi_{BCS} + \Phi_{BCS} \left( -i\hbar \vec{\nabla}_{R_{\nu}} - \frac{2eA}{c} \right)^* \Phi_{BCS}^* \right\},$$

bzw.

$$\mathbf{j}_s = -\frac{2e}{2m} \left\{ |\Phi_{BCS}(0)|^2 \frac{4eA}{c} + 2\hbar |\Phi_{BCS}(0)|^2 \sum_{\nu} \vec{\nabla}_{R_{\nu}} \phi \right\}. \quad (8.71)$$

### London-Gleichung

Nun gilt  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$  für alle  $\phi$ , und damit wird (8.71) zu

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{j}_s = -\frac{2e^2}{mc} |\Phi_{BCS}(0)|^2 \vec{\nabla} \times A. \quad (8.72)$$

Wenn wir nun mit  $|\Phi_{BCS}(0)|^2 = n_s/2$  die Dichte  $n_s$  der supraleitenden Elektronen identifizieren, dann erhalten wir die zweite London-Gleichung (8.8):

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{mc} \mathbf{B}, \quad \boxed{|\Phi(0)|^2 = \frac{n_s}{2}}. \quad (8.73)$$

## 8.6.2 Magnetische Flussquanten

Die Quanten-Kohärenz der Wellenfunktion eines Supraleiters hat auch zur Folge, dass der magnetische Fluss von Flussschläuchen quantisiert ist. Wir betrachten den Ausdruck (8.71)

$$\mathbf{j}_s = -\frac{e^2 n_s}{mc} A - \frac{e\hbar n_s}{2m} \sum_{\nu} \vec{\nabla}_{R_{\nu}} \phi \quad (8.74)$$

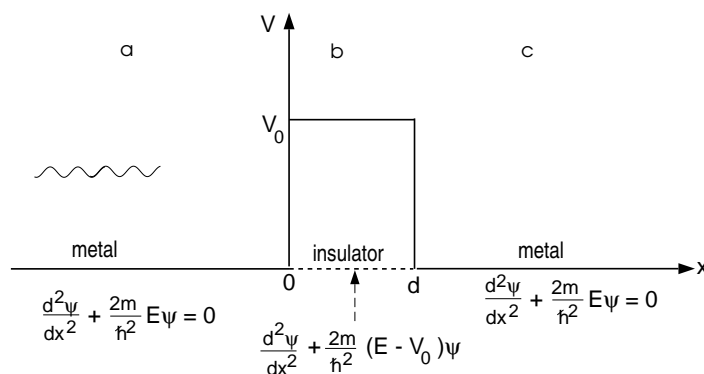


Abbildung 8.15: Eine Tunnelbarriere zwischen zwei normalleitenden Metallen.

für den supraleitenden Strom und berechnen das Kontour-Integral

$$\oint \mathbf{j}_s \cdot d\mathbf{l} = -\frac{e^2 n_s}{mc} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \frac{e\hbar n_s}{2m} \sum_{\nu} \oint \vec{\nabla}_{R_{\nu}} \phi \cdot d\mathbf{l} \quad (8.75)$$

innerhalb des supraleitenden Ringes, siehe Fig. 8.6.1, und weit genug von der Oberfläche entfernt, so dass kein Magnetfeld mehr vorhanden ist. Demnach ist auch  $\mathbf{j}_s = 0$  entlang des Kontours und

$$\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (8.76)$$

### Eindeutigkeit der Phase

Die Phase  $\phi$  der Wellenfunktion  $\Phi_{BCS} = e^{i\phi}\Phi(0)$  ist eindeutig, also

$$\sum_{\nu} \oint \vec{\nabla}_{R_{\nu}} \phi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi N, \quad N \in \mathcal{Z}.$$

Damit wird das Kontour-Integral (8.75) für den Supra-Strom zu

$$-\frac{e^2 n_s}{mc} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{e^2 n_s}{mc} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2N\pi \frac{e\hbar n_s}{2m},$$

bzw.

$$\boxed{\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = N \frac{hc}{2e} \equiv N\Phi_0}, \quad (8.77)$$

mit dem Flussquantum  $\Phi_0 = hc/(2e)$  für den Supraleiter. Wichtig ist hierbei die Ladung  $2e$  im Nenner des Flussquantums. Der totale magnetische Fluss  $\Phi$  durch den Ring ist also quantisiert.

## 8.6.3 Energie eines isolierten Flussschlauchs

### Typ-II Supraleiter

In Absch. 8.2 hatten wir gesehen, dass Supraleiter externe Magnetfelder aus ihrem Inneren



verdrängt, solange die dafür notwendigen diamagnetischen Ströme nicht zu gross sind, siehe (8.18). Dieses Magnetfeld nennt man  $H_{c1}$

Allerdings bricht die Supraleitung für  $H > H_{c1}$  nicht notwendigerweise zusammen. Unter bestimmten Umständen ist es für das System energisch günstiger den Supraleitenden Zustand beizubehalten, dafür aber das Magnetfeld partiell in der Form von quantisierten Vortizes, auch Flussschläuche genannt, eindringen zu lassen. Man spricht dann vom Typ-II Supraleiter.

### Magnetischer Vortex

Der qualitative Verlauf des Magnetfeldes  $H(r)$  und der supraleitenden Wellenfunktion  $\Psi(r)$  ist in Abb. 8.16 für den Fall

$$\lambda_L \gg \xi$$

veranschaulicht. Im Kern des Vortex ist normal-leitend, denn hier bricht die Supraleitung zusammen. Ausserhalb des Kernes dringt das Magnetfeld bis zu einer Tiefe ein, welche durch die London'sche Eindringtiefe  $\lambda_L$  gegeben ist.

### Magnetisches Fluss eines Vortex

Wir betrachten nun zunächst die magnetische Feldenergie eines Vortex. Die freie London-Gleichung (8.12) hat die Form

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} = 0 .$$

Wir nähern nun den Vortex-Kern durch eine  $\delta$ -Funktion und verallgemeinern die London-Gleichung zu

$$\mathbf{B} - \lambda_L^2 \Delta \mathbf{B} = \vec{\phi}_0 \delta(\mathbf{x}) , \quad (8.78)$$

wobei  $\vec{\phi}_0$  entlang der Vortex-Linie zeigt. Wir integrieren über eine Fläche senkrecht zum Vortex und erhalten

$$\phi_0 = \int \mathbf{B} \cdot d\vec{\sigma} - \lambda_L^2 \oint (\vec{\nabla} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \approx \int \mathbf{B} \cdot d\vec{\sigma} ,$$

wenn wir berücksichtigen, dass ein Magnetfeld im Supraleiter nach (8.14) exponentiell abfällt und damit  $\vec{\nabla} \times \mathbf{B}$  für  $r \gg \lambda_L$  vernachlässigbar ist.

Damit ist  $\phi_0$  nach (8.77) ein Vielfaches des magnetische Flussquantums  $hc/2e$ .

### Energie eines Vortex

Die Energie eines Vortex setzt sich aus der Feldenergie

$$E_H = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu}{8\pi} \int d^3x \mathbf{H}^2$$

und er kinetischen Energie

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \int d^3x \frac{m\mathbf{v}^2}{2} n_s = \frac{\mu}{8\pi} \int d^3x \frac{8\pi c^2 (4\pi)^2 m(e\mathbf{v}n_s)^2}{\mu c^2 (4\pi)^2 2e^2 n_s} \\ &= \frac{\mu}{8\pi} \int d^3x \frac{mc^2}{4\pi e^2 \mu n_s} \left( \frac{(4\pi)^2}{c^2} \mathbf{j}_s^2 \right) n_s = \frac{\mu}{8\pi} \int d^3x \lambda_L^2 (\vec{\nabla} \times \mathbf{H})^2 \end{aligned}$$

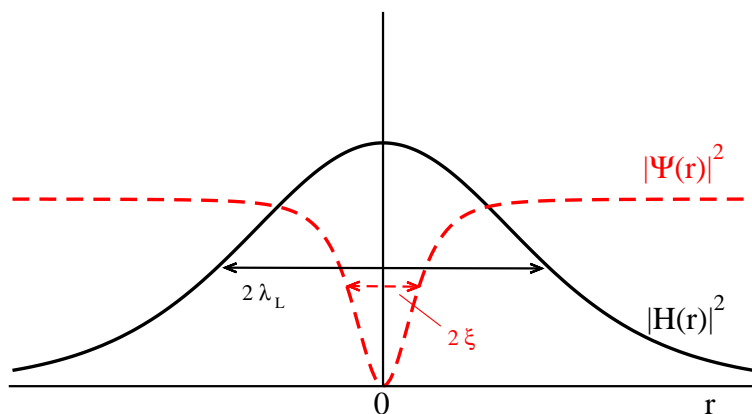


Abbildung 8.16: Der Verlauf des Magnetfeldes  $\mathbf{H}(r) = (0, 0, H)$  und der makroskopischen Wellenfunktion  $\Psi(r)$  in einem Vortex als Funktion des Abstandes  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  in der  $x - y$  Ebene. Entlang der  $z$ -Axis ist der Vortex translationsinvariant.

wobei  $n_s$  die Dichte der supraleitenden Elektronen (nicht der von Cooper-Paaren) ist, und wir

$$\mathbf{j}_s = evn_s, \quad \lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 \mu n_s}}, \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s$$

verwendet haben. Mit (8.78) lässt sich die Energie eines isolierten Vortex damit zu

$$E_v = \frac{\mu}{8\pi} \int d^3x \left( \mathbf{H}^2 + \lambda_L^2 (\vec{\nabla} \times \mathbf{H})^2 \right) = \boxed{\left( \frac{\phi_0}{4\pi\lambda_L} \right)^2 \log(\lambda_L/\xi)} \quad (8.79)$$

ausrechnen.

- Die Energie ist quadratisch im Fluss  $\phi_0$ . Zwei Flussschläuche mit je einem Fluss  $\phi_0$  sind daher energetisch günstiger als einer mit Fluss  $2\phi_0$ .
- Der Ausdruck (8.79) gilt für eine Flussschlauch mit einem Radius  $\xi$  für den normalleitenden Kern. Da die Energie nur sehr schwach, logarithmisch, von der Kohärenzlänge  $\xi$  abhängt, ist dieses eine vertretbare Approximation.

#### 8.6.4 Untere kritische Feld $H_{c1}$

Wir kommen nun auf die Eingangs gestellte Frage zurück: Wann ist es energetisch günstig wenn einzelne Flussschläuche in den Supraleiter eindringen?

##### Energiebilanz

Mit einer Querschnittsfläche  $\pi\xi^2$  für den normalleitenden Kern ergibt sich die Energiebilanz zu

$$\Delta E = E_v - \frac{\pi\xi^2}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \phi_0 \left( \frac{E_v}{\phi_0} - \frac{H}{4\pi} \right). \quad (8.80)$$

Dabei ist der zweite Term die magnetische Feldenergie des normalleitenden Kernes, welche man gewinnt. Zudem haben wir

$$\pi\xi^2 B = \phi_0 = \frac{hc}{2e}$$

verwendet. Die Energiebilanz wird für

$$H_{c1} = \frac{4\pi E_v}{\phi_0} = \boxed{\frac{\phi_0}{4\pi\lambda_L^2} \log(\lambda_L/\xi)} \quad (8.81)$$

negativ.

$$H_{c1} \ll H_c, \quad H_c = 2\Delta\sqrt{\pi N(0)}.$$

### Typ I und Typ II Supraleiter

Wenn wir (8.47) benutzen, und die Zustandsdichte  $N(0)$  durch  $k_F$  parametrisieren erhalten wir

$$\boxed{\frac{H_{c1}}{H_c} = \frac{\pi}{\sqrt{24}} \frac{\xi}{\lambda_L} \log(\lambda_L/\xi)} \quad (8.82)$$

für das Verhältnis  $H_{c1}/H_c$ .

Für die meisten Supraleiter ist die Kohärenzlänge  $\xi$  in der Größenordnung von einigen zehn Angström und die Eindringtiefe  $\lambda_L$  in der Größenordnung von einigen tausend Angström. Damit ist i.A.  $H_{c1}$  deutlich kleiner als das thermodynamische kritische Feld (8.63). In diesem Fall spricht man von Typ-II Supraleiter, ansonsten von Typ-I Supraleiter.

### Typ-II Supraleiter

Wenn das Magnetfeld in den Supraleiter in der Form von Flussschläuchen eindringen kann, dass bricht die Supraleitung auch nicht für  $H > H_c$  zusammen, sondern erst bei einem höheren Feld, welches  $H_{c2}$  genannt wird, vgl. Abb. 8.17.

### 8.6.5 Magnetische Flussgitter

Im vorangehenden Abschnitt haben wir die Eigenschaften einzelner Flussschläuche für den Fall  $H > H_{c1}$  mit  $H \simeq H_{c1}$  betrachtet. Im allgemeinen müssen wir jedoch für

$$H_{c1} < H < H_{c2}$$

damit rechnen, dass es eine endliche Dichte von Vortizes gibt und diese miteinander wechselwirken.

### Abrikosov Gitter

In der gemischten oder Meisner-Ochsenfeld-Phases eines Typ-II Supraleiters ordnen sich

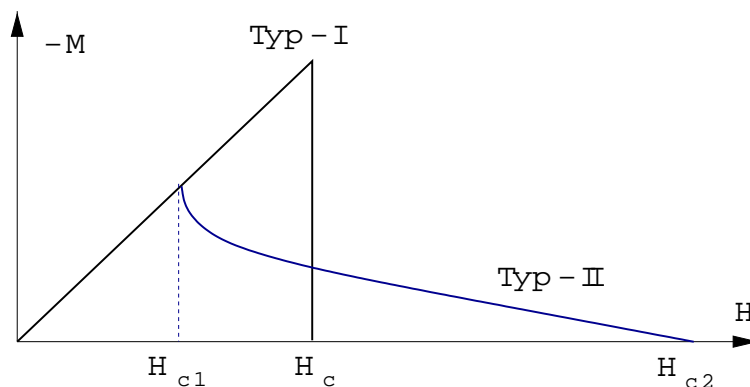


Abbildung 8.17: Die Magnetisierungskurven für Typ-I und Typ-II Supraleiter.

die magnetischen Flusslinien zu einem Gitter an, dem Abrikosov-Gitter. Die Flussläuche haben eine repulsive Wechselwirkung und das Gitter ist ein Dreiecksgitter.

### Hochtemperatur-Supraleitern

Die Hochtemperatur-Supraleitern sind ausgesprochene Typ-II Supraleiter,  $\xi$  ist in der Größenordnung von wenigen Angström.

Die kritische Temperatur  $T_c$  ist in den Hochtemperatur-Supraleitern ist so hoch, dass das Abrikosov-Gitter aufgrund termischer Anregungen schmelzen kann. Es kommt zu einem Phasenübergang fest-flüssig für die Flusslinien.

### Supraleitung und Dissipation

Typ-II Supraleitung haben weiterhin einen verschwindenden elektrischen Widerstand, solange sich die Flussläuche nicht bewegen können. Diese ist im Abrikosov-Gitter der Fall, denn das Gitter als Ganzes ist starr.

Dissipation, und damit ein endlicher elektrischer Widerstand, tritt auf sobald sich die Flussläuche zu bewegen beginnen, denn die Vortizes haben ja einen normalleitenden Kern.

Daher versucht man in technischen Anwendungen Verunreinigungen gezielt in die Supraleiter einzubringen, an welchen die Flusslinien festgehalten werden (gepinnt).

## 8.7 Tunnel-Kontakte

### 8.7.1 Tunneln in einen Supraleiter

Wir betrachten als Einführung den Tunnelkontakt zwischen zwei normalleitenden Metallen, siehe Fig. 8.15, z.B. durch eine dünne Oxidschicht.

#### Potentialbarriere

Die von links einfallende Wellenfunktion  $\psi_a$  trifft auf die Tunnelbarriere,  $\psi_b$ , und propagiert dann nach rechts weiter,  $\psi_c$ :

$$\begin{aligned} \psi_a &= A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ik \cdot x} & \psi_b &= A_2 e^{ik' \cdot x} + B_2 e^{-ik' \cdot x} \\ \psi_c &= B_3 e^{-ik \cdot x} . & & \end{aligned} \quad (8.83)$$

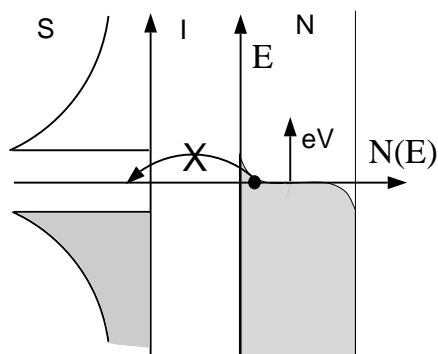


Abbildung 8.18: Illustration eines Tunnelkontaktes zwischen einem Normal-Leiter und einem Supraleiter in der Anwesenheit einer angelegten Spannung  $V$ .

Mit diesem Ansatz ist die Schrödinger-Gleichung zu lösen, falls

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{in a \& c} \quad (8.84)$$

$$k' = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \quad \text{in b} \quad (8.85)$$

Die Koeffizienten  $A_{1,2}$  und  $B_{1,2,3}$  werden durch die Stetigkeitsbedingungen für  $\psi$ ,  $\psi'$  und  $x = 0, x = d$  bestimmt. Für  $E < V_0$ , also für

$$k' = i\kappa = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar \quad (8.86)$$

finden wir für die Tunnelwahrscheinlichkeit

$$P_{l \rightarrow r} = \frac{|B_1|^2}{|B_1|^2} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \left( \frac{k}{\kappa} - \frac{\kappa}{k} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k} \right)^2 \cosh 2\kappa d \right\}^{-1}. \quad (8.87)$$

Für grosse Werte von  $\kappa d$  vereinfacht sich die Tunnelwahrscheinlichkeit zu

$$P_{l \rightarrow r} \propto 8 \left( \frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k} \right)^{-2} e^{-2\kappa d} \quad (8.88)$$

$$= 8 \left( \frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k} \right)^{-2} \exp \left\{ -\frac{2d\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \right\}. \quad (8.89)$$

Die Wahrscheinlichkeit durch die Potentialbarriere zu tunneln fällt also exponentiell ab.

### **N-S Kontakt**

Wir betrachten nun die Tunnelrate für einen N-S Kontakt, also die Injektion von Elektronen aus einem Normalleiter in einen Supraleiter, siehe Fig. 8.18, bei einer angelegten Spannung  $V$ .

Sei  $f(\epsilon)$  die Fermi-Verteilungsfunktion und  $N_n(\epsilon)$  und  $N_s(\epsilon)$  die jeweiligen Zustandsdichten des normal- bzw. des supraleitenden Kontaktes.

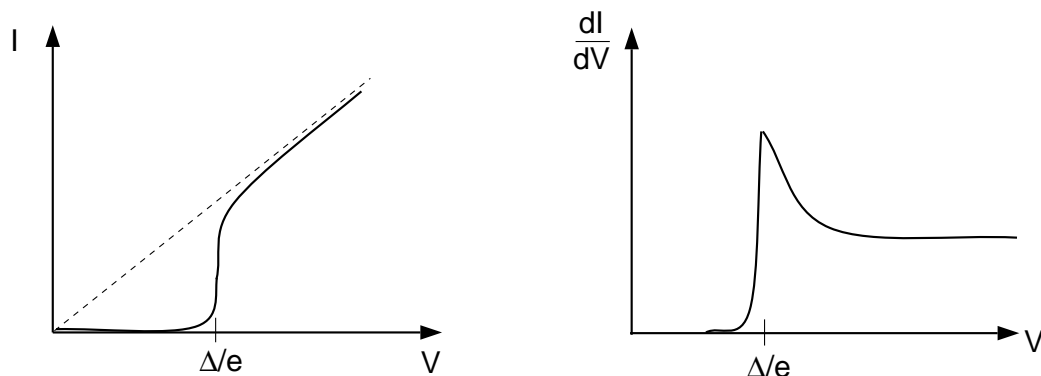


Abbildung 8.19: Bei tiefen Temperaturen sind N-S Tunnel Kontakte sehr gut geeignet um, via der differentiellen Leitfähigkeit, die quasi-Teilchen Zustandsdichte im Supraleiter zu messen.

Der Tunnelstrom ist mit

$$I \propto P \int d\epsilon f(\epsilon - eV) N_n(E_F) N_s(\epsilon) (1 - f(\epsilon)) \\ - P \int d\epsilon f(\epsilon) N_s(\epsilon) N_n(E_F) (1 - f(\epsilon - eV))$$

proportional zur Differenz der Tunnelwahrscheinlichkeiten  $P(n \rightarrow s)$  und  $P(s \rightarrow n)$ . Ohne eine äussere Spannung ( $eV = 0$ ) verschwindet der Tunnelstrom ( $I = 0$ ).

### Differentieller Tunnelstrom

Sei nun  $eV > 0$  und  $kT \ll \Delta$ . Wegen der Energielücke in  $N_s(\epsilon)$  ist  $P(s \rightarrow n)$  unterdrückt und

$$I \sim P N_n(E_F) \int d\epsilon f(\epsilon - eV) N_s(\epsilon) .$$

Der differentielle Tunnelstrom

$$\frac{dI}{dV} \sim P N_n(E_F) \int d\epsilon \frac{\partial f(\epsilon - eV)}{\partial V} N_s(\epsilon)$$

nimmt daher für tiefe Temperaturen,

$$\frac{\partial f}{\partial V} \sim e\delta(\epsilon - eV - E_F), \quad (T \ll E_F)$$

die Form

$$\boxed{\frac{dI}{dV} \simeq P N_n(E_F) N_s(eV + E_F)} \quad (8.90)$$

an. Mit  $\frac{dI}{dV}$  lässt sich also die Zustandsdichte  $N_s(\epsilon)$  im Supraleiter als Funktion der angelegten Spannung  $V$  direkt messen, vgl. Fig. 8.19.

## 8.7.2 Josephson-Effekt

In Abs. 8.7.1 haben wir das Tunneln von einzelnen Elektronen von einem Normaleiter in einen Supraleiter betrachtet. Es stellt sich nun die Frage, ob bei Kontakt von zwei Supraleitern auch das Tunneln von Cooperpaaren möglich ist, und welche Auswirkungen ein solcher Tunnelprozess hat.

### Phänomenologischer Wellenfunktion

Nach (8.68) und (8.73) schreiben wir

$$\Psi = \Phi_{BCS} = \sqrt{n_s/2} e^{i\varphi} = |\Psi| e^{i\varphi}$$

für die supraleitende Wellenfunktion, wobei  $n_s$  die Dichte von Cooper-Paaren ist, und  $\varphi$  die Phase.

### Phänomenologische Schrödingergleichung

Für zwei Supraleiter  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  im Kontakt gilt demnach die phänomenologische Schrödingergleichung

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1 &= E_1 \Psi_1 + K \Psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2 &= E_2 \Psi_2 + K \Psi_1 \end{aligned} \quad (8.91)$$

wobei  $E_{1/2}$  die jeweiligen Grundzustands-Energien sind und  $K$  die (Paartunnel-) Kopplungskonstante.

### Tunnelstrom von Cooper-Paaren

Der Strom  $I_{1 \rightarrow 2}$  von tunnelnden Cooper-Paaren ist durch

$$\begin{aligned} I_{1 \rightarrow 2} &= e \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_1|^2 = e \Psi_1^* \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + e \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial t} \Psi_1 \\ &= \frac{e}{i\hbar} (E_1 |\Psi_1|^2 + K \Psi_1^* \Psi_2 - E_1 |\Psi_1|^2 - K \Psi_2^* \Psi_1) \\ &= \frac{eK}{i\hbar} (\Psi_1^* \Psi_2 - \Psi_2^* \Psi_1) = \frac{eK}{i\hbar} |\Psi_1| |\Psi_2| (e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} - e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}) \\ &= \frac{2eK}{\hbar} |\Psi_1| |\Psi_2| \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \quad (8.92)$$

gegeben. Wir erhalten also einen Gleichstrom von Cooper-Paaren wann immer eine Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  zwischen den beiden Supraleitern existiert.

### Gleichstrom Josephson Effekt

Um die zeitabhängigkeit der Phasendifferenz in (8.92) zu berechnen, trennen wir Real- und Imaginärteil in der makroskopischen Schrödinger-Gleichung (8.91),

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1| - \hbar \dot{\varphi}_1 &= E_1 |\psi_1| + K |\psi_2| e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_2| - \hbar \dot{\varphi}_2 &= E_2 |\psi_2| + K |\psi_1| e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned}$$

was uns zu

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= -\frac{E_1}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \frac{|\psi_2|}{|\psi_1|} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \dot{\varphi}_2 &= -\frac{E_2}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \frac{|\psi_1|}{|\psi_2|} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

führt. Für näherungsweise gleiche Dichte von Cooper-Paaren  $|\Psi_1|^2 = |\Psi_2|^2$  in den beiden Supraleitern erhalten wir damit

$$\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \equiv \frac{eU}{\hbar}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{eU}{\hbar}t. \quad (8.93)$$

Dabei haben wir eine angelegte Spannung von  $U$  angenommen, welche ja den respektiven Nullpunkt der Energieskalen um  $eU$  verschiebt. Damit erhalten wir mit

$$I = \frac{eK}{\hbar}n_s \sin\left(\frac{eU}{\hbar}t\right) \quad (8.94)$$

einen (hochfrequent-) oszillierenden Strom bei anlegen einer Gleichspannung, der (Gleichspannungs-) Josephson-Effekt.

### SQUIDS

Der Josephson-Effekt ist auch die Grundlage für eine ganze Reihe von Anwendungen, insbesondere für die SQUIDS, den ‘*Superconducting Quantum Interference Devices*’. Ein SQUID besteht aus einem supraleitenden Ring, der an einer oder zwei Stellen durch Josephson-Kontakte unterbrochen ist. Zusammen mit der in Abschn. 8.6.2 besprochenen Flussquantisierung im Ring erlaubt das SQUID hochpräzise Magnetfeld-Messungen.