Goethe-Universität Frankfurt
Fachbereich Physik

Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Harald O. Jeschke

Frankfurt, 27. November 2015

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III - Elektrodynamik
Wintersemester 2015/16

Blatt 7
(Abgabetermin: Freitag, 4. 12. 2015, 12:00 Uhr in der Vorlesung)

Name(n)	
Übungsgruppe	
Punkte	

Aufgabe 27 (**Deltafunktion, Fouriertransformation**) (5 Punkte)

a) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta\big(x^2 \cos(x)\big)$.

b) Berechnen Sie entlang des Randes ∂K des Einheitskreises K:

$$\oint_{\partial K} \delta(\varphi - \varphi_0)\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{ds} \quad \text{mit } \mathbf{x}_1 = (1, 1)$$

c) Skizzieren Sie die periodische Funktion

$$f(x) = 1 - x^2 \qquad \text{für } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

mit $f(x + 2) = f(x)$ und bestimmen Sie ihre Fourier-Reihe.

d) Bestimmen Sie die Fourierkomponenten $\tilde{\Phi}(\mathbf{k})$ des elektrostatischen Feldes $\Phi(\mathbf{r})$ einer Punktladung Q mit

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \tilde{\Phi}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}} = \Phi(\mathbf{r})$$

Aufgabe 28 (**Polarisation**) (2 Punkte)

Betrachten Sie eine ebene Welle

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{e}_1 E_1 + \mathbf{e}_2 E_2) \exp\big(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi)\big) \tag{1}$$

mit $E_1, E_2 \in \mathbb{C}$, d.h.

$$E_1 = E_1' + iE_1'', \qquad E_2 = E_2' + iE_2''$$

a) Zeigen Sie, dass E_1 ohne Beschränkung der Allgemeinheit reell gewählt werden kann, wenn man die Phase φ verschiebt.

b) Zeigen Sie dann, dass es sich bei diesem Ansatz um die Überlagerung einer linear polarisierten mit einer zirkular polarisierten Welle handelt.

Aufgabe 29 (**Fourier-Raum-Berechnung der retardierten Green'sche Funktion für die Wellengleichung**) (7 Punkte)

Berechnen Sie die retardierte Green'sche Funktion für die Wellengleichung, $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$, mithilfe der Fourier-Transformation. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung, die die Green'schen Funktion für die Wellengleichung erfüllen muss, und deren Fourier-Transformation. Begründen und verwenden Sie

(2) $$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega(t-t')}.$$

und

(3) $$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\left(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega(t-t')\right)} G(\mathbf{k},\omega).$$

b) Identifizieren Sie einen Ausdruck für $G(\mathbf{k},\omega)$.

c) Berechnen die inverse Fourier-Transformation von $G(\mathbf{k},\omega)$, nämlich $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Gl. (11.22) im Skript. Werten Sie zuerst das Integral über ω aus:

(4) $$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}} = \begin{cases} \frac{2\pi c}{k}\sin\left(kc(t-t')\right), & t>t' \\ 0 & t<t'. \end{cases}.$$

Das Integral über $\mathbf{k}$ lässt sich in sphärischen Koordinaten leicht auswerten. Begründen Sie:

(5) $$c\int_0^{\infty} dk\, \sin\left(kc(t-t')\right)\sin\left(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right) = \frac{\pi}{2}\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right), \qquad t>t'.$$

Aufgabe 30 (**Green'sche Funktion für die Poisson-Gleichung in 1, 2 und 3 Dimensionen**) (6 Punkte)

Berechnen Sie die Green'sche Funktion $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ für die Poisson-Gleichung

(6) $$\nabla^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\delta^{(d)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

für $d = 1$, 2 und 3.

Hinweis: Im unbeschränkten Raum gilt $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$.

Hinweis für 1D: Betrachten Sie die Fourier-Transformation von der Gleichung, die die Greensche Funktion erfüllt und verwenden Sie

(7) $$\int_0^{\infty} dk\, \frac{\sin(kx)}{kx} = \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{sign}(x)}{x}.$$

Hinweis für 2D: Schreiben Sie die Poisson-Gleichung in Polarkoordinaten und integrieren Sie sie in $\mathbb{R}^2$.