Lösungsvorschlag zu Blatt11 – Theoretische Physik III: Elektrodynamik WS 2015/16

Abgabetermin: keine Abgabe, sondern Wertung als Präsenzübung

Prof. Dr. Claudius Gros, Institut für Theoretische Physik, Goethe-Universität Frankfurt

Übungsgruppenleiter: Dr. Harald O. Jeschke

Aufgabe 42 (**Dielektrizitätskonstante**) (7 Punkte)

Die Ladungsdichte des Hüllenelektrons in einem neutralen Wasserstoffatom werde durch

$$\rho_e(\mathbf{r}) = -\frac{e}{\pi a_B^3} \exp\left\{ -\frac{2r}{a_B} \right\} \tag{1}$$

beschrieben, wobei e der Betrag der Elektronenladung, a_B der Bohrsche Radius und r der Abstand vom Proton ist. Beim Anlegen eines elektrischen Feldes $\mathbf{E}_0$ gilt in erster Näherung, dass die Ladungswolke des Elektrons ohne Deformation um den Vektor $\mathbf{r}_0$ gegen das Proton verschoben wird.

a) Drücken Sie das Dipolmoment $\mathbf{p}$ des Wasserstoffatoms im Feld $\mathbf{E}_0$ mit Hilfe von $\mathbf{r}_0$ aus.

Die Gesamtladungsdichte ρ setzt sich aus der Ladung des Protons im Ursprung des Koordinatensystems und der (im Feld um $\mathbf{r}_0$ verschobenen) Ladungsdichte der Elektronenhülle zusammen:

$$\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r}) - \frac{e}{\pi a_B^3} e^{-\frac{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{a_B}} \tag{2}$$

Das Dipolmoment berechnet sich aus

$$\mathbf{p} = \int d^3r\, \mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) = \int d^3x (\mathbf{r}_0 + \mathbf{x})\rho(\mathbf{r}_0 + \mathbf{x}) = -e\mathbf{r}_0 \tag{3}$$

wegen

$$\int d^3x\, \mathbf{r}_0\rho(\mathbf{r}_0+\mathbf{x}) = \mathbf{r}_0 \int d^3x \left(e\delta(\mathbf{r}_0+\mathbf{x}) - \frac{e}{\pi a_B^3} e^{-\frac{2|\mathbf{x}|}{a_B}} \right) = \mathbf{r}_0 \left(e - \frac{4\pi e}{\pi a_B^3} \int_0^\infty dx\, x^2 e^{-\frac{2x}{a_B}} \right) = 0 \tag{4}$$

und

$$\begin{aligned} \int d^3x\, \mathbf{x}\rho(\mathbf{r}_0 + \mathbf{x}) &= \int d^3x\, \mathbf{x} \left(e\delta(\mathbf{r}_0 + \mathbf{x}) - \frac{e}{\pi a_B^3} e^{-\frac{2|\mathbf{x}|}{a_B}} \right) = -e\mathbf{r}_0 - \frac{e}{\pi a_B^3} \int d^3x\, \mathbf{x} e^{-\frac{2|\mathbf{x}|}{a_B}} \\ &= -e\mathbf{r}_0 - \frac{e}{\pi a_B^3} \int d^3x\, \mathbf{x} e^{-\frac{2|\mathbf{x}|}{a_B}} = -e\mathbf{r}_0 \end{aligned} \tag{5}$$

b) Berechnen Sie die Rückstellkraft auf das Proton durch die verschobene Ladungswolke des Elektrons. Drücken Sie diese für $r_0/a_B \ll 1$ durch das Dipolmoment $\mathbf{p}$ aus. Finden Sie dann aus der Gleichgewichtsbedingung mit der vom elektrischen Feld $\mathbf{E}_0$ ausgeübten Kraft eine Darstellung für $\mathbf{p}$ als Funktion des Feldes.

Wir wählen den Ursprung des $\mathbf{r}'$-Koordinatensystems zunächst im Ladungsschwerpunkt des Elektrons. Dann erhalten wir unter Verwendung des Gaußschen Satzes und der sphärischen Symmetrie der Ladungsverteilung $\rho_e(\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ (dabei ist V' das Volumen einer Kugel mit Radius R'):

(6)

$$\int_{\partial V'} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{F}' = 4\pi R'^2 E(r') = \int_{V'} d^3r' \, \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') = \int_{V'} d^3r' \, \frac{\rho_e(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} = -\frac{4\pi e}{\pi a_B^3 \epsilon_0} \int_0^{R'} dr' \, r'^2 e^{-\frac{2r'}{a_B}}$$
$$= -\frac{4e}{a_B^3 \epsilon_0} \frac{a_B^3}{4} \left[1 - e^{-\frac{2R'}{a_B}} \left(1 + \frac{2R'}{a_B} + \frac{2R'^2}{a_B^2} \right) \right]$$

Damit ergibt sich für das elektrische Feld des Elektrons

(7) $$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \left[1 - e^{-\frac{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{a_B}} \left(1 + \frac{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{a_B} + \frac{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}{a_B^2} \right) \right]$$

Für die rückstellende Kraft auf das Proton erhält man

(8)
$$\begin{aligned}
\mathbf{F} = e\mathbf{E}(0) &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \left[1 - e^{-\frac{2r_0}{a_B}} \left(1 + \frac{2r_0}{a_B} + \frac{2{r_0}^2}{a_B^2} \right) \right] \\
&= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \left[1 - \left(1 - \frac{2r_0}{a_B} + \frac{2{r_0}^2}{a_B^2} - \frac{4r_0^3}{3a_B^3} + \dots \right) \left(1 + \frac{2r_0}{a_B} + \frac{2{r_0}^2}{a_B^2} \right) \right] \\
&\approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \frac{4r_0^3}{3a_B^3} = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a_B^3} \mathbf{r}_0 = -\frac{e}{3\pi\epsilon_0 a_B^3} \mathbf{p}
\end{aligned}$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung $e\mathbf{E}_0 = -\mathbf{F}$ erhält man damit

(9) $$\mathbf{p} = 3\pi\epsilon_0 a_B^3 \mathbf{E}_0$$

c) Berechnen Sie die Dielektrizitätskonstante ϵ für ein Dielektrikum aus N homogen im Volumen V verteilten Wasserstoffatomen.

Für eine kleine Konzentration an Wasserstoffatomen N/V (keine gegenseitige Wechselwirkung, $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_0$) ergibt sich daraus die Polarisation

(10) $$\mathbf{P} = \frac{N}{V} \mathbf{p} \approx 3\pi\epsilon_0 \frac{N a_B^3}{V} \mathbf{E} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

und somit die Dielektrizitätskonstante

(11) $$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon_0 \left(1 + 3\pi \frac{N a_B^3}{V} \right)$$

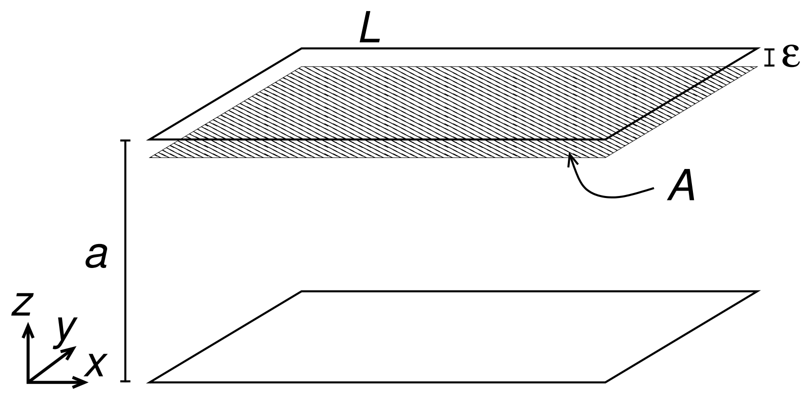
Aufgabe 43 (**Wellen zwischen Leiterplatten**) (8 Punkte)

Gegeben seien zwei unendlich ausgedehnte parallele Leiterplatten mit Abstand a. Im Raum zwischen den Platten sollen sich weder Ladungen noch Ströme befinden.

a) Begründen Sie, dass das elektrische Feld überall senkrecht auf den Leiterplatten stehen muss.

Die Begründung ist dieselbe wie in der Elektrostatik: Da in einem Leiter die Ladungsträger per Definition frei beweglich sind, würde jedes in ihm enthaltene elektrische Feld sofort ausgeglichen. In Normalrichtung fällt das Feld beim Übergang in den Leiter also rapide auf Null ab, und in Tangentialrichtung kann selbst unmittelbar über der Leiteroberfläche kein Feld existieren. (Für ideale Leiter ist das Feld im Innern exakt null. Für gute, aber nicht perfekte Leiter dringt das Feld ein wenig in die Oberfläche ein.)

b) Zeigen Sie unter Verwendung des Induktionsgesetzes, dass für ein zeitlich veränderliches **B**-Feld die Normalkomponente auf den Leiterplatten verschwinden muss.



Wir integrieren das Induktionsgesetz über ein zu den Leiterplatten L paralleles Flächenstück A im Abstand ε zu einer der Platten:

$$\int_A \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathbf{df} = -\int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{df} = -\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \tag{12}$$

Das geht für $\varepsilon \to 0$ gegen null, da unmittelbar vor der Leiterplatte **E** senkrecht auf der Fläche steht (während der Rand ∂A von A parallel zur Oberfläche verläuft). Am Leiter gilt also für beliebige Flächen A parallel zur Leiterplatte L

$$\int_A \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathbf{df} = 0 \curvearrowright \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathbf{df} = 0 \tag{13}$$

df ist parallel zum Normalenvektor der Leiterplatte; damit muss für ein zeitlich veränderliches **B**-Feld die Normalkomponente auf die Leiterplatte L verschwinden. Wenn wir ein statisches **B**-Feld ausschliessen, gilt das nicht nur für $\dot{\mathbf{B}}$, sondern auch für **B** selber.

c) Finden Sie eine Lösung der Wellengleichung die eine fortschreitende elektromagnetische Welle zwischen den Platten beschreibt und die obigen Randbedingungen erfüllt.
Hinweis: Ein Separationsansatz $E_x(\mathbf{r}, t) = u(x)v(y)w(z)f(t)$ für die x-Komponente des elektrischen Feldes ist zielführend.

Die Felder müssen neben den Randbedingungen die Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}, \quad \Box \mathbf{E} = 0, \quad \Box \mathbf{B} = 0 \tag{14}$$

erfüllen. Das Koordinatensystem wählen wir so, dass die z-Achse senkrecht auf den Leiterplatten steht, und legen den Ursprung in die untere Platte. Die Leiterebenen liegen dann bei $z = 0$ und $z = a$. Wir suchen die Lösung durch einen Separationsansatz für die x-Komponente des elektrischen Feldes:

$$E_x(\mathbf{r}, t) = u(x)v(y)w(z)f(t) \tag{15}$$

Daraus ergibt sich

(16)
$$
\begin{aligned}
\Box E_x(\mathbf{r},t) &= (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2-\frac{1}{c^2}\partial_t^2)E_x \\
&= \big[u''(x)v(y)w(z)+u(x)v''(y)w(z)+u(x)v(y)w''(z)\big]f(t)-\frac{1}{c^2}u(x)v(y)w(z)\ddot{f}(t) \overset{!}{=} 0 \\
&\curvearrowright \left(\frac{u''(x)}{u(x)}+\frac{v''(y)}{v(y)}+\frac{w''(z)}{w(z)}-\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)}\right)E_x(\mathbf{r},t)=0 \\
&\curvearrowright \frac{u''(x)}{u(x)}+\frac{v''(y)}{v(y)}+\frac{w''(z)}{w(z)}-\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)}=0
\end{aligned}
$$

Da jeder Summand von einer anderen unabhängigen Variablen abhängt, müssen die einzelnen Summanden konstant sein:

$$
\frac{u''}{u}=a_1,\quad \frac{v''}{v}=a_2,\quad \frac{w''}{w}=a_3,\quad \frac{\ddot{f}}{f}=a_0,\quad a_1+a_2+a_3-\frac{1}{c^2}a_0=0 \tag{17}
$$

Wir suchen Wellen, die in x- und y-Richtung laufen, in z-Richtung aber stehen. Daher ist folgender Ansatz sinnvoll:

$$
\begin{aligned}
&u(x)=A_1e^{ik_xx},\quad v(y)=A_2e^{ik_yy},\quad w(z)=\sin(k_zz+\gamma),\quad f(t)=A_0e^{-i\omega t} \\
&\curvearrowright E_x(\mathbf{r},t)=C_xe^{i(k_xx+k_yy-\omega t)}\sin(k_zz+\gamma),\qquad \varphi\equiv k_xx+k_yy-\omega t
\end{aligned} \tag{18}
$$

Analoge Ausdrücke haben wir für E_y und E_z. Jetzt müssen die Randbedingungen erfüllt werden: E_x und E_y sind bei $z=0$ und bei $z=a$ tangential zu den Leiteroberflächen:

$$
\begin{aligned}
E_x(x,y,0,t)=0 &\curvearrowright \sin(\gamma)=0 \\
E_x(x,y,a,t)=0 &\curvearrowright \sin(ak_z)=0
\end{aligned} \tag{19}
$$

Das wird durch $\gamma=0$, $ak_z=n\pi$ für natürliche n erfüllt ($n=0$ würde $E_x=0$ bedeuten, negative n kehren nur das Vorzeichen von C_x um). Dann erhalten wir aus Gl. (17) die Beziehung

$$
\omega^2=c^2\left((k_x^2+k_y^2+\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\geqslant\frac{c^2\pi^2}{a^2} \tag{20}
$$

Es sind also nicht alle Frequenzen erlaubt. Wir haben jetzt

$$
\begin{aligned}
E_x(\mathbf{r},t)&=C_xe^{i(k_xx+k_yy-\omega t)}\sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right), &&n=1,2,\dots \\
E_y(\mathbf{r},t)&=C_ye^{i(k'_xx+k'_yy-\omega' t)}\sin\left(\frac{n'\pi}{a}z\right), &&n'=1,2,\dots \\
E_z(\mathbf{r},t)&=C_ze^{i(k''_xx+k''_yy-\omega'' t)}\sin(k''_zz+\gamma'')
\end{aligned} \tag{21}
$$

Aus der Forderung $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ folgt dann

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E} =& ik_xC_xe^{i(k_xx+k_yy-\omega t)}\sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right)+ik'_yC_ye^{i(k'_xx+k'_yy-\omega' t)}\sin\left(\frac{n'\pi}{a}z\right) \\
&+k''_zC_ze^{i(k''_xx+k''_yy-\omega'' t)}\cos(k''_zz+\gamma'')=0
\end{aligned} \tag{22}
$$

Diese Gleichung muss für alle x,y,z,t erfüllt sein; daher müssen in jedem Summanden identische Funktionen von x,y,z,t auftreten. Das bedeutet

$$
k_x=k'_x=k''_x,\quad k_y=k'_y=k''_y,\quad \omega=\omega'=\omega'',\quad n=n' \tag{23}
$$

und außerdem

$$\sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) = \cos(k_z''z+\gamma'') \curvearrowright \gamma'' = -\frac{\pi}{2}, \quad k_z'' = \frac{n\pi}{a} \tag{24}$$

Die Vorfaktoren müssen die Bedingung

$$i(k_x C_x + k_y C_y) - \frac{n\pi}{a}C_z = 0 \tag{25}$$

erfüllen. Zusammen lautet die Lösung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} C_x \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\ C_y \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\ C_z \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \tag{26}$$

Das **B**-Feld folgt aus dem Induktionsgesetz:

$$\nabla\times\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik_y C_z \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) - C_y \frac{n\pi}{a}\cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\ \frac{n\pi}{a}C_x \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) - ik_x C_z \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\ ik_x C_y \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) - ik_y C_x \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \end{pmatrix} e^{i\varphi}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(ik_y C_z - C_y\frac{n\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\ \left(\frac{n\pi}{a}C_x - ik_x C_z\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\ \left(ik_x C_y - ik_y C_x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{27}$$

$$\curvearrowright \mathbf{B} = \frac{1}{i\omega}e^{i\varphi}\begin{pmatrix} \left(ik_y C_z - C_y\frac{n\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\ \left(\frac{n\pi}{a}C_x - ik_x C_z\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\ \left(ik_x C_y - ik_y C_x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \end{pmatrix}$$

Man prüft leicht nach, dass $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ erfüllt ist. Auch $B_z = 0$ für $z = 0$ und $z = a$ ist erfüllt.

d) Geben Sie eine reelle Lösung für das **E**- und das **B**-Feld an.

Wir wählen C_x, C_y reell und damit $C_z = i\frac{a}{n\pi}(k_x C_x + k_y C_y)$. Dann nehmen wir die

Realteile der komplexen Funktionen E_x, E_y, E_z:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \operatorname{Re}\begin{pmatrix} C_x \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\ C_y \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\ C_z \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\
&= \begin{pmatrix} C_x \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right)\cos(k_x x + k_y y - \omega t) \\ C_y \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right)\cos(k_x x + k_y y - \omega t) \\ \frac{a}{n\pi}(k_x C_x + k_y C_y)\cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right)\sin(k_x x + k_y y - \omega t) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{28}
$$

Für das **B**-Feld ermittelt man den Realteil vom Ausdruck in Gl. (27).

Aufgabe 44 (**Punktladung vor dielektrischer Kugel**) (7 Punkte)

Eine Punktladung q befinde sich bei $\mathbf{r}_0 = (0, 0, a)$ auf der z-Achse vor einer ungeladenen dielektrischen Kugel vom Radius R und Dielektrizitätskonstante ϵ, deren Mittelpunkt sich im Ursprung des Koordinatensystems befinde. Es gelte $a > R$. Bestimmen Sie das elektrische Potential überall im Raum.

Betrachten wir zuerst den Fall ohne Dielektrikum, d.h. nur die Ladung q am Ort $\mathbf{r}_0$. Das Potential ist

$$
V_q(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos\theta), \tag{29}
$$

wobei

$$
r_< = r,\ r_> = a, \qquad \text{für } r < a, \tag{30}
$$

$$
r_< = a,\ r_> = r, \qquad \text{für } r > a. \tag{31}
$$

Die Präsenz einer dielektrischen Kugel führt zu einem zusätzlichen Beitrag zum Potential aufgrund der Polarisationsladung (Superpositionsprinzip), $V_s(\mathbf{r})$. Diesen Beitrag kann man in Legendre-Polynome entwickeln:

$$
V_s(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta). \tag{32}
$$

Wir schauen uns nun an, welche Form $V_s(\mathbf{r})$ in den verschiedenen Bereichen im Raum hat. Innerhalb der Kugel muss das Potential analytisch sein (d.h. es fallen alle im Ursprung divergierenden Terme mit $r^{-(l+1)}$ weg):

$$
V_s(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), \qquad r < R. \tag{33}
$$

Außerhalb der Kugel muss $V_s(\mathbf{r})$ analytisch sein, insbesondere auch im Limes $r \to \infty$, sodass

$$
V_s(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta), \qquad r > R. \tag{34}
$$

Schreiben wir dann die Gesamtlösung im ganzen Raum explizit:

$$(35)\quad V(\mathbf{r},t) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta) & \text{für } r < R, \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta) & \text{für } R < r < a \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos\theta) & \text{für } a < r \end{cases}$$

Wenn wir jetzt die Koeffizienten umdefinieren, erreichen wir einen etwas kompakteren Ausdruck:

$$(36)\quad V(\mathbf{r},t) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A'_l r^l P_l(\cos\theta) & \text{für } r < R, \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta) & \text{für } R < r < a \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos\theta) & \text{für } a < r. \end{cases}$$

(Man könnte in der dritten Zeile auch B'_l definieren, aber das macht den späteren Umgang mit der zweiten Zeile etwas umständlich). Wir benötigen auch

$$(37)\quad \frac{\partial V(\mathbf{r},t)}{\partial r} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} l A'_l r^{l-1} P_l(\cos\theta) & \text{für } r < R, \\ \sum_{l=0}^{\infty} -(l+1) B_l r^{-(l+2)} P_l(\cos\theta) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty} l\frac{r^{l-1}}{a^l} P_l(\cos\theta) & \text{für } R < r < a. \end{cases}$$

Für $a < r$ brauchen wir es nicht.

Es müssen nun die Koeffizienten A_l und B_l durch Anwendung der Randbedingungen an der Oberfläche der Kugel bestimmt werden. Die Randbedingungen für das Potential im Falle von linearen Medien lauten

$$(38)\quad \lim_{r\to R^-} V(\mathbf{r}) = \lim_{r\to R^+} V(\mathbf{r})$$

$$(39)\quad \lim_{r\to R^-} \epsilon\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial r} = \lim_{r\to R^+} \epsilon_0\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial r},$$

wobei ϵ die Dielektrizitätskonstante des Medium ist.

Betrachten wir zunächst einmal den Fall $R < r < a$. Die Randbedingungen ergeben

$$(40)\quad A'_l R^l = B_l R^{-(l+1)} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\frac{R^l}{a^l},$$

$$(41)\quad \epsilon l A'_l R^{l-1} = -\epsilon_0(l+1)B_l R^{-(l+2)} + \frac{q l \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\frac{R}{a}\right)^{l-1}.$$

Man erhält dann

$$(42)\quad A'_l = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^{l+1}}\left(1 + \frac{l(\epsilon_0 - \epsilon)}{l(\epsilon + \epsilon_0) + \epsilon_0}\right)$$

und

$$(43)\quad B_l = \frac{q l R^{2l+1}}{4\pi\epsilon_0 a^{l+1}}\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{l(\epsilon_0 + \epsilon) + \epsilon_0}.$$

Damit ist das Potential vollständig bestimmt.