Goethe-Universität Frankfurt
Fachbereich Physik

Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Harald O. Jeschke

Frankfurt, 13. Oktober 2015

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III - Elektrodynamik
Wintersemester 2015/16

Blatt 0

(Abgabetermin: Freitag, 16. 10. 2015 (freiwillig))

Name(n)	
Übungsgruppe	

Aufgabe 1 (**Levi-Civita-Symbol**)

Das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} ist folgendermaßen definiert:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (ijk) \text{ eine gerade Permutation von (123) ist,} \\ -1, & \text{wenn } (ijk) \text{ eine ungerade Permutation von (123) ist,} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Dieses Symbol vereinfacht viele sonst mühsame Herleitungen und Beweise. Es lässt sich beispielsweise die i-te Komponente des Kreuzproduktes $\mathbf{C}$ zweier dreidimensionaler Vektoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ einfach schreiben als

$$C_i = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_j B_k. \tag{1}$$

Die Einsteinsche Summenkonvention (es wird über wiederholte Indizes von 1 bis 3 summiert) vereinfacht die Notation weiter:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k. \tag{2}$$

Beweisen Sie, unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention, folgende Identitäten:

a) $\delta_{ii} = 3$.

b) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}$.

c) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$.

d) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 2 (**Kreuzprodukt und Skalarprodukt**)

Beweisen Sie folgende Identitäten für dreidimensionale Vektoren mithilfe des Levi-Civita-Symbols:

a) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

b) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$.

c) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$.

Hinweis: Die Identitäten der ersten Übung dürfen verwendet werden.

Aufgabe 3 (**Nabla-Operator**)

Der Nabla-Operator ∇ wird in kartesischen Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y, z)$ als

$$\nabla = \widehat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \widehat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial x} + \widehat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial x} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \tag{3}$$

definiert. $\widehat{\mathbf{x}}$ ist Einheitsvektor in x-Richtung. Beweisen Sie:

a) $\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$.

$\nabla\frac{1}{r^2} = -2\frac{\mathbf{r}}{r^4} = -2\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^3}$.

Diese Ergebnisse werden in der Elektrostatik oft verwendet.

b) $\nabla \cdot \big[f(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r})\big] = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla f(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$,

wobei $f(\mathbf{r})$ eine skalare Funktion von $\mathbf{r}$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ eine Vektorfunktion von $\mathbf{r}$ ist.

c) $\nabla \times \big[\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})\big] = \nabla\big[\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})\big] - \nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

d) $\nabla \cdot \big[\mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})\big] = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \big[\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})\big] - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \big[\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})\big]$.