Teil VII

Relativistische Invarianz der Elektrodynamik

Kapitel 18

Spezielle Relativitätstheorie

Wir werden im Kap. 19 die Lorentz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen nachweisen. Historisch ist dieses vor der Entwicklung der relativistischen Mechanik geschehen. Diese ist jedoch anschaulicher und wir werden daher zunächst eine Einführung in die spezielle Relativitätstheorie geben.

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen sind invariant unter Galilei-Transformationen, nicht jedoch unter Lorentz-Transformationen. Das Relativitätsprinzip verlangt daher eine Modifikation der Newton'schen Gleichungen, und zwar derart, daß bei Geschwindigkeiten $v \ll c$ die Newton'schen Gleichungen gültig bleiben.

18.1 Einleitung

Einige experimentelle Tatsachen zeigen, dass die Galileiinvariante Mechanik nur begrenzte Gültigkeit haben kann.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit Die beobachtete Invarianz der Lichtgeschwindigkeit,

$$c \;=\; 2,99992458 \times 10^5\,\mathrm{km/s}$$

steht in Widerspruch zum Additionstheorem

$$\vec{v}' \;=\; \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

für Geschwindigkeiten. Die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit folgt, wie besprochen, auch direkt aus den Maxwellgleichungen.

Radioakiver Zerfall bewegter Teilchen Das Myon, eine Art „schweres Elektron“mit Masse $m_\mu \simeq 207\,m_e$, zerfällt spontan in ein Elektron und zwei Neutrinos,

$$\mu \;\to\; \mathrm{e} + \nu_1 + \nu_2 \;,$$

mit einer Zerfallszeit (im Labor)

$$\tau^{(0)}(\mu) \;=\; (2.19703 \pm 0.00004) \times 10^{-6} s \;.$$

Misst man nun die Zerfallszeit von bewegten Myonen (an einem Strahl), so findet man eine Zerfallszeit, welche via

$$\tau^{(v)}(\mu) \;=\; \gamma\,\tau^{(0)}(\mu), \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{18.1}$$

von der Geschwindigkeit v der Myonen abhängt. Nun ist aber der Zerfallsvorgang eines Elementarteilchens ein *intrinsischer* Vorgang, der also ohne äußeren Einfluss nur nach der *inneren* Uhr des Elementarteilchens abläuft. Gleichung (18.1) bedeutet nun, dass die innere Uhr bei erhöhten Geschwindigkeiten um den Faktor γ langsamer läuft.

18.2 Wellengleichung

Die Ausbreitung des Lichts, d.h. der 6 Komponenten des elektromagnetischen Feldes $\vec{E}$, $\vec{B}$, wird durch die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u(\vec{x},t) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right) u(\vec{x},t) = 0$$

beschrieben. Wir betrachten erst einmal eine Raumdimension, d.h.

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) \;=\; 0\;, \tag{18.2}$$

mit der allgemeinen Lösung

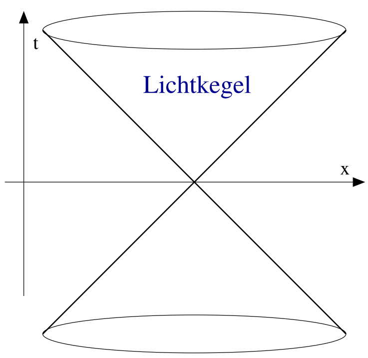
$$u(x,t) \;=\; u_1(x+ct) \;+\; u_2(x-ct), \tag{18.3}$$

wobei die $u_1()$ und $u_2()$ beliebige Funktionen sind, die sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen.

Lichtkegel Nach (18.3) ist somit c die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts. Insbesondere breitet sich das Licht von einem Ereignis zur Zeit t_0 und Ort x_o auf dem „Lichtkegel“

$$u(x,t) \;=\; \delta(x-x_0+c(t-t_0)) \;+\; \delta(x-x_0-c(t-t_0))$$

aus. Wegen der (experimentell festgestellten) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit muss daher die Kugelwellenfront



$$\boxed{c^2(t-t_0)^2 - (\vec{x}-\vec{x}_0)^2 = 0} \tag{18.4}$$

invariant unter einer noch zu findenden Klasse von Transformationen sein. Diese Klasse von Transformationen soll dann nicht nur für die Wellengleichung, d.h. für die Elektrodynamik, sondern auch für die Mechanik gelten; man nennt sie „Lorentztransformationen“.

Postulate der speziellen Relativitätstheorie Die Gesetze der Mechanik müssen demnach gegenüber der Newton'schen Mechanik modifiziert werden, da diese unter der Gruppe der Galileitransformationen invariant sind und eine Galileitransformation mit $\vec{v} \neq 0$ (18.4) nicht invariant lässt. Bei der Bestimmung der neuen Gesetze der Mechanik lässt Einstein sich vom „Trägheitsprinzip“leiten, welches besagt, dass für freie Teilchen das Trägheitsgesetz $\ddot{\vec{x}} = 0$ invariant sein soll. Die Relativitätstheorie beruht also auf drei Postulaten:

- Konstanz der Lichtgeschwindigkeit Aufgrund der experimentellen Evidenz, z.B. durch Michelson und Morley (1887).
- Relativitätsprinzip
  Alle Gesetze der Mechanik (und der Elektrodynamik) müssen invariant unter der Gruppe der Lorentztransformationen sein, d.h. alle Naturgesetze obliegen den gleichen Transformationseigenschaften.
- Trägheitsprinzip
  Die Gleichung $\ddot{\vec{x}}$ soll für freie Teilchen (Lorentz-)invariant sein, ein Spezialfall des Relativitätsprinzips.

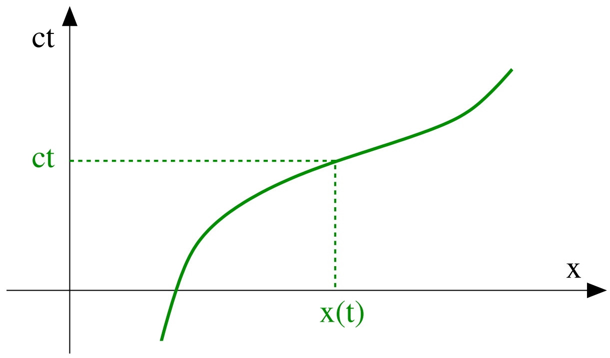
18.3 Lorentztransformationen

In der speziellen, wie auch in der allgemeinen Relativitätstheorie, gibt es eine strenge Vorschrift wie Koordinaten zu schreiben sind. Hoch- oder tiefgestellte Indizes haben verschiedene Bedeutungen, welche wir später genauer definieren werden, und dürfen nicht verwechselt werden.

- Vierer-Vektoren
  Wir beschreiben die Raum-Zeit durch den R^4 mittels des *Vierer-Vektors*

  $$x = (x^0, x^1, x^2, x^3); \qquad x^0 = ct; \qquad \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \ .$$

  Wir nennen $x^0 = ct$ die Zeitkoordinate und $(x^1, x^2, x^3) = \vec{x}$ die kartesische Raumkoordinate.
- Weltlinie
  Die Bewegung eines Teilchens ist eine Kurve im R^4, welche jede Ebene $x^0 =$ konst. nur einmal schneidet („Weltlinie“).



Koordinatentransformationen Für freie Teilchen sind die Weltlinien Geraden. Die gesuchten Transformationen A müssen also nach dem Trägheitsgesetz geradentreu sein und sogar affin (Geraden werden auf Geraden abgebildet, parallele Geraden bleiben parallel, Teilverhältnisse bleiben erhalten), wenn kein Ereignis ins Unendliche abgebildet werden soll,

$$x' = Ax + a; \qquad (\det A \neq 0;\ a \in R^4)\ . \tag{18.5}$$

Koordinatendifferenzen $\xi = x - x_0$ transformieren sich homogen,

$$\xi' \ = \ A\xi\ .$$

Metrischer Tensor Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verlangt nach (18.4) die Invarianz von

$$0 \ = \ c^2(t-t_0)^2 - (\vec{x}-\vec{x}_0)^2 \ = \ (\xi^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(\xi^i)^2 \ = \ \xi^T g\,\xi\ , \tag{18.6}$$

unter Lorentz-Transformationen, wobei ξ^T der transponierte 4-er Vektor ist und wir mit

$$g \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18.7}$$

den „metrischen Tensor“ g im R^4 definiert haben.

Minkowski-Raum Der metrische Tensor g führt via

$$(\xi_1, \xi_2) \ \equiv \ \xi_1^T g\,\xi_2 \tag{18.8}$$

zu einem Skalarprodukt (ξ_1, ξ_2), welches allerdings nicht positiv definit ist. Den R^4 mit dem Skalarprodukt (18.8) bezeichnet man als den *Minkowski-Raum*.

Invarianz der Lichtgeschwindigkeit Die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit ist mit der Invarianz von (18.6) unter einer Lorentz-Transformation $\xi \to \xi' = A\xi$ äquivalent,

$$0 \ = \ (\xi')^T g\,\xi' \ = \ \xi^T \underbrace{A^T g\,A}_{h}\,\xi\ ,$$

dass heißt der Tensor h muss proportional zu g sein, also

$$h \;=\; A^T g\, A \;=\; \mu^2 g \;, \tag{18.9}$$

wobei die Proportionalitätskonstante i.Allg. positiv ist (betrachte z.B. $\xi' = \mu\xi$).

Feste Maßstäbe Reine Dilatationen $\xi' = \mu\xi$ ($\mu > 0$) beschreiben simultane Maßstabsänderungen für Länge und Zeit; sie sind mit allen Postulaten verträglich. Im Allgemeinen wollen wir jedoch die physikalischen Gesetze unter der Annahme formulieren, dass wir in jedem Bezugssytem mit den gleichen (festen) Maßstäben messen. Dann sind Dilatationen nicht zugelassen und

$$\mu^2 \;\equiv\; 1.$$

Damit definieren wir die Gruppe der Lorentztransformationen Λ durch

$$x' = \Lambda x + a; \qquad \boxed{\Lambda^T g \Lambda = g} \qquad a \in R^4. \tag{18.10}$$

Lorentz-Transformationen lassen per Definition den metrischen Tensor invariant.

18.4 Darstellung der Lorentztransformationen

Die allgemeine Lorentztransformation ist durch 6 Parameter bestimmt.

- Rotationen
  Drei Parameter $\vec{\varphi} = |\vec{\varphi}|\,\hat{\varphi}$ beschreiben Rotationen um eine Achse $\hat{\varphi}$ um den Winkel $\varphi = |\vec{\varphi}|$.

- Eigentliche Lorentz-Transformationen
  Drei Parameter $\vec{\phi} = |\vec{\phi}|\,\hat{\phi}$ beschreiben die Transformation auf ein bewegtes Bezugssystem mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = -c\hat{\phi}\,\tanh\phi$, mit $\phi = |\vec{\phi}|$.

Die allgemeine, homogene Lorentztransformation ist durch

$$\Lambda(\vec{\phi}, \vec{\varphi}) \;=\; \exp\left(\vec{\phi}\cdot\vec{K} + \vec{\varphi}\cdot\vec{J}\right) \tag{18.11}$$

gegeben, wobei die infinitesimalen Erzeugenden $\vec{K} = (K_x, K_y, K_z)$ und $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ in Komponenten durch

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18.12}$$

$$K_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18.13}$$

$$K_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18.14}$$

gegeben sind. Den Nachweis, dass sich räumliche Rotationsmatrizen als $\exp(\vec{\varphi}\cdot\vec{J})$ schreiben lassen, können wir an dieser Stelle nicht geben. Für Rotationen um die z-Achse läßt sich dieses schnell nachrechnen.

Gruppeneigenschaft Die homogenen Lorentztransformationen bilden eine Gruppe, es gilt also stets

$$\Lambda(\vec{\phi},\vec{\varphi})\cdot\Lambda(\vec{\phi}',\vec{\varphi}') \;=\; \Lambda(\vec{\phi}'',\vec{\varphi}''),$$

wobei allerdings der Zusammenhang zwischen $(\vec{\phi},\vec{\varphi},\vec{\phi}',\vec{\varphi}')$ und $(\vec{\phi}'',\vec{\varphi}'')$ i.Allg. kompliziert ist. Lorentztransformationen ohne einen Rotationsanteil, also $\Lambda(\vec{\phi},\vec{0})$ bezeichnet man als „spezielle“oder “eigentliche” Lorentztransformationen.

Kommutatoren Der Kommutator zweier Operatoren (Matrizen) A und B ist als $[A,B] := AB - BA$ definiert. Der Kommutator zweier Erzeugenden ist wieder eine Erzeugende, somit bilden die Erzeugenden eine sog. „Lie-Algebra“.

Die Kommutatorrelationen der Erzeugenden lassen sich als (Übung)

$$\begin{aligned} [K_i, K_j] &= \epsilon_{ijk}\, J_k \\ [J_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk}\, K_k \\ [J_i, J_j] &= -\epsilon_{ijk}\, J_k \end{aligned}$$

schreiben, wobei i,j,k über x,y,z laufen. Insbesondere sieht man aus $[K_i,K_j] \;=\; \epsilon_{ijk}\,J_k$, dass die speziellen Lorentztransformationen *keine* Gruppe bilden: Zwei spezielle Lorentztransformationen in verschiedenen Richtungen hintereinander beinhalten auch eine Rotation.

Quantenmechanik Nur der Vollständigkeits halber bemerken wir, dass Rotationen allgemein in exponentieller Form geschrieben werden, wobei im Exponenten stets die jeweiligen Erzeugenden stehen. In der Quantenmechanik sind Rotationen durch

$$R(\vec{\varphi}) \;=\; \mathrm{e}^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{J}/\hbar}, \qquad \vec{J} \;=\; \vec{r}\times\vec{p}, \qquad [J_k, J_l] \;=\; i\hbar\,\epsilon_{klm}J_m$$

gegeben. Datei ist $R(\vec{\varphi})$ die 3×3 Matrix für Rotationen um die Achse $\vec{\varphi}/|\vec{\varphi}|$ um den Winkel $|\vec{\varphi}|$, und $\vec{L}$ der Drehimpuls-Operator.

Der Faktor $i/\hbar$ im Exponenten ist notwendig um den ensprechenden Faktor in der Defintion des Impulsoperators, $\vec{p} = (\hbar/i)\nabla$ zu kürzen.

18.5 Spezielle Lorentztransformationen

Drehungen sind auch Lorentztransformationen, doch sie bringen keine neue Physik mit sich. Wir betrachten daher im Folgenden nur die speziellen Lorentztransformationen und können uns hier, o.B.d.A. auf einen „Boost“entlang der x-Koordinaten beschränken, d.h. $\Lambda = \exp[\phi K_x]$.

Boosts Wir wollen nun die explizite Form von (18.11) für einen Boost berechnen. Wir bemerken zunächst, dass

$$K_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{1}'$$

und somit $K_x^{2m} = \mathbf{1}'$ und $K_x^{2m-1} = K_x$ $(m \geq 1)$. Wir berechnen nun explizit die Exponentialreihe für einen Boost in x-Richtung,

$$\mathrm{e}^{\phi K_x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} K_x^n = \mathbf{1} + \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi^{2m}}{(2m)!} \right)}_{\cosh\phi - 1} \mathbf{1}' + \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi^{2m-1}}{(2m-1)!} \right)}_{\sinh\phi} K_x .$$

In Komponenten finden wir also

$$\Lambda(\phi) = \mathrm{e}^{\phi K_x} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

oder, mit $x' = \Lambda(\phi)x$,

$$\begin{aligned} ct' &= \cosh(\phi)\, ct + \sinh(\phi)\, x \\ x' &= \sinh(\phi)\, ct + \cosh(\phi)\, x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{18.15}$$

Geschwindigkeit Bisher ist der Parameter ϕ in der Lorentz-Transformation ein formeller Parameter ohne physikalische Bedeutung. Um diese zu finden betrachten wir einen Punkt, welcher im bewegten Koordinatensystem ruht. Für diesen ist $x' = \text{const.}$, seine Bewegung wird im Laborsystem durch

$$\sinh(\phi)\, ct + \cosh(\phi)\, x = 0 ,$$

beschrieben. Seine Geschwindigkeit ist also

$$v = \frac{x}{t} = -c \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = -c \tanh\phi . \tag{18.16}$$

Damit haben wir den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v des bewegten Systems und dem Parameter ϕ der Lorentztransformation gefunden. Aus

$$\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1; \qquad \cosh^2\phi = \frac{1}{1-\tanh^2\phi}; \qquad \sinh^2\phi = \frac{\tanh^2\phi}{1-\tanh^2\phi}$$

finden wir mit $\beta \equiv v/c$

$$\cosh\phi \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \;\equiv\; \gamma, \qquad \sinh\phi \;=\; -\beta\gamma, \tag{18.17}$$

und somit wird (18.15) zu

$$\boxed{\begin{array}{rcrcr} ct' &=& c\gamma\, t &-& \beta\gamma\, x \\ x' &=& -v\gamma\, t &+& \gamma\, x \end{array}} \tag{18.18}$$

Invarianz des Lichtkegels Wir können nun nachweisen, dass (18.18) tatsächlich eine Lorentztransformation ist, das heißt, dass der Lichtkegel (18.4) invariant ist,

$$\begin{aligned} c^2(t')^2 - (x')^2 &= \gamma^2\,(ct - vx)^2 - \gamma^2\,(-vt + x)^2 \\ &= \gamma^2(1-\beta^2)\left(c^2t^2 - x^2\right) \; . \end{aligned}$$

Die Wellengleichung ist im bewegten Bezugssystem genau dann erfüllt wenn sie auch im Laborsystem gilt.

Kausalität Wir bemerken noch, dass der Lichtkegel (18.4) die „*Kausalität*" erfüllt.

- zeitartige Ereignisse
  Man bezeichnet zwei Ereignisse $(ct_1, \vec{x}_1)$ und $(ct_2, \vec{x}_2)$ als zeitartig, wenn

  $$c^2(t_2 - t_1)^2 \;>\; (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2$$

  erfüllt ist.

- raumartige Ereignisse
  Man bezeichnet zwei Ereignisse $(ct_1, \vec{x}_1)$ und $(ct_2, \vec{x}_2)$ als raumartig, wenn

  $$c^2(t_2 - t_1)^2 \;<\; (\vec{x}_1 - \vec{x}_1)^2$$

  gilt.

Für $t_1 < t_2$ kommt bei zwei zeitartigen Ereignissen ein Lichtsignal vom ersten Ereignis vor dem zweiten Ereignis an, bei zwei raumartigen Ereignissen erst danach. Bei zeitartigen Ereignissen kann das erste also das zweite Ereignis auslösen, bei raumartigen Ereignissen ist dies nicht möglich.

Nach (18.4) bleibt die die Kausalität durch Lorentztransformationen erhalten.

18.6 Addition von relativistischen Geschwindigkeiten

Wir betrachten zwei Boosts hintereinander in x-Richtung, den ersten mit Geschwindigkeit v_1, den zweiten mit Geschwindigkeit v_2. Die Endgeschwindigkeit sei v_3 und $\tanh\phi_i = -\beta_i,\ (i=1,2,3)$. Man findet aus der Exponentialdarstellung

$$\mathrm{e}^{\phi_3 K_x} \;=\; \mathrm{e}^{\phi_2 K_x}\cdot \mathrm{e}^{\phi_1 K_x} \;=\; \mathrm{e}^{(\phi_2+\phi_1)K_x},$$

die Beziehung[1]

$$\phi_3 \;=\; \phi_2+\phi_1; \qquad \tanh\phi_i = -\frac{v_i}{c}; \qquad i=1,2,3\ ,$$

oder

$$\tanh^{-1}\beta_3 \;=\; \tanh^{-1}\beta_2 + \tanh^{-1}\beta_1\ . \tag{18.19}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Endgeschwindigkeit v_3 als Funktion der beiden einzelnen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 berechnen. Wir formen um:

$$\begin{aligned}
\beta_3 \;&=\; \tanh\Big[\tanh^{-1}\beta_2+\tanh^{-1}\beta_1\Big] \;=\; \frac{\sinh\Big(\tanh^{-1}\beta_2+\tanh^{-1}\beta_1\Big)}{\cosh\Big(\tanh^{-1}\beta_2+\tanh^{-1}\beta_1\Big)}\\
&=\; \frac{\sinh(\tanh^{-1}\beta_2)\cosh(\tanh^{-1}\beta_1)+\cosh(\tanh^{-1}\beta_2)\sinh(\tanh^{-1}\beta_1)}{\cosh(\tanh^{-1}\beta_2)\cosh(\tanh^{-1}\beta_1)+\sinh(\tanh^{-1}\beta_2)\sinh(\tanh^{-1}\beta_1)}.
\end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir $\sinh = \tanh/\sqrt{1-\tanh^2}$ und $\cosh = 1/\sqrt{1-\tanh^2}$. Damit wird

$$\sinh\tanh^{-1}\beta \;=\; \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \cosh\tanh^{-1}\beta \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

und wir erhalten mit

$$\beta_3 = \frac{\beta_2+\beta_1}{1+\beta_2\beta_1}, \qquad \boxed{v_3 = \frac{v_2+v_1}{1+v_2 v_1/c^2}} \tag{18.20}$$

die gewünschte Additionsformel für relativistische Geschwindigkeiten.

- Für $v_1/c \ll 1$ und $v_2/c \ll 1$ wird (18.20) zu $v_3 = v_1+v_2+O(v_1v_2/c^2)$. Im nichtrelativistischen Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten erhalten wir also die übliche Formel der Galilei'schen Mechanik.

- Man kann leicht zeigen (Übung), dass v_3 nach (18.20) nie größer als die Lichtgeschwindigkeit sein kann.

[1] Beachte: für $[A,B]\neq 0$ ist $\exp(A)\exp(B)\neq\exp(A+B)$.

18.7 Vektorkalkül

In der relativistischen Mechanik spielt der Begriff eines „4-er Vektors"eine zentrale Rolle.

Kontravariante Vektoren Man nennt $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ einen *„kontravarianten"* 4-er Vektor, falls sich die Komponenten unter Lorentztransformationen wie Koordinatendifferenzen verhalten, d.h. wenn

$$\xi'^\mu \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\, \xi^\nu \tag{18.21}$$

gilt. Nicht alle Quardrupel von Zahlen sind 4-er Vektoren; ganz entscheidend sind ihre Transformationseigenschaften. Z.B. ist $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ ein 4-er Vektor, aber (ct, x, y, z^3) ist kein 4-er Vektor.

Kovariante Vektoren Lorentztransformationen sind so definiert, dass der metrische Tensor g invariant bleibt. Somit ist das Skalarprodukt (18.8)

$$(\xi, \eta) \;=\; \xi^\mu\, g_{\mu\nu}\, \eta^\nu \;\equiv\; \xi^\mu\, \eta_\nu \;=\; \xi^0 \eta_0 - \left(\vec{\xi} \cdot \vec{\eta}\right)$$

auch Lorentz-invariant, falls ξ und η 4-er Vektoren sind, sich also wie (18.21) transformieren. Hierbei haben wir mit

$$\boxed{\eta_\mu \;\equiv\; g_{\mu\nu}\eta^\nu} \qquad\qquad (x_\mu) = (ct, -x, -y, -z)$$

die *kovarianten* Komponenten von η definiert. Mit $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ kann man das Skalarprodukt auch als

$$(\xi, \eta) \;=\; g^{\mu\nu} \xi_\mu \eta_\nu$$

schreiben.

Kovariante Ableitungen Die Differenzierung nach der Raum-Zeit, $x = (ct, x, y, z)$, ist kovariant,

$$\boxed{\partial_\mu \;\equiv\; \frac{\partial}{\partial x^\mu}} \tag{18.22}$$

und das Skalarprodukt

$$\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \;=\; \xi^\mu \partial_\mu$$

ein invarianter Differentialoperator.

Die Kovarianz von ∂_μ lässt sich folgendermaßen zeigen: Für eine skalare Funktion $f(x)$ (skalare Funktionen sind Lorentz-invariant) ist die Differenzierung entlang ξ,

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\, f(x + \lambda\xi)\right|_{\lambda=0} \;=\; \xi^\mu\, \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \;=\; \left(\xi^\mu\, \partial_\mu\right)\, f(x)$$

Lorentz-invariant, und somit auch $\xi^\mu\,\partial_\mu$. Damit muss also ∂_μ kovariant sein.

Wellenoperator Natürlich ist der Wellenoperator

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \;=\; \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

invariant; dies war ja unser Ausgangspunkt. Ferner ist für jedes Vektorfeld $A(x)$ die Divergenz

$$\partial_\mu\, A^\mu \;=\; \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}$$

eine Invariante (Skalarfeld).

18.8 Relativistische Mechanik

Wir suchen eine Lorentz-invariante Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld, welche für kleine Geschwindigkeiten den bekannten nichtrelativistischen Grenzfall haben soll. Wir fangen mit einem freien Teilchen an.

Differentielle Bogenlänge Die differentielle Bogenlänge ds auf einer Weltlinie $x(t)$ ist ein Skalar,

$$\boxed{ds^2 \;=\; g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu} \;=\; c^2dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)\ , \tag{18.23}$$

oder, mit der „3-er Geschwindigkeit“$\vec{v} = d\vec{x}/dt$,

$$ds^2 \;=\; \left(c^2 - \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right)\, dt^2$$

und somit Lorentz-invariant.

Eigenzeit Die „Eigenzeit“τ ist via $c\,d\tau = ds$ definiert, also

$$\boxed{d\tau \;=\; \frac{1}{c}\,ds \;=\; \sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}\,dt}\ . \tag{18.24}$$

Da τ Lorentz-invariant ist und im Limes kleiner Geschwindigkeiten mit der Laborzeit t übereinstimmt, ist τ die Eigenzeit, also die „Uhr“ in dem bewegten Bezugssystem.

Zeitdilatation Der in der Einleitung diskutierte radioaktive Zerfall ist als physikalischer Prozess Lorentz invariant und läuft daher nach (18.24) n der Laborzeit dt gemäß

$$dt \;=\; \gamma\, d\tau$$

um den Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ langsamer ab (Zeitdilation), in Einklang mit dem Experiment, siehe (18.1).

4-er Geschwindigkeit Als „4-er Geschwindigkeit“bezeichnet man

$$u \;=\; \frac{dx}{d\tau}; \qquad (u^\mu) \;=\; \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \tag{18.25}$$

mit $(u,u) = c^2$. Anlog ist der „4-er Impuls“via

$$p \;=\; mu; \qquad (p^\mu) \;=\; \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \tag{18.26}$$

definiert, wobei m die Ruhemasse ist. Er erfüllt stets

$$(p,p) \;=\; m^2c^2. \tag{18.27}$$

Lagrangefunktion Um die Lagrangefunktion für ein freies Teilchen herzuleiten gehen wir vom Prinzip von Euler-Maupertuis (siehe Mechanik) aus, welches besagt, dass für ein freies Teilchen die Variation der Lorentz-invarianten Wirkung

$$\int_{(1)}^{(2)} ds$$

für feste Endpunkte (1) und (2) verschwindet (Die Endzeiten sind jedoch variabel). Wir postulieren also, dass das Prinzip von Euler-Maupertuis auch relativistisch gilt, wenn man wie mit s einen Lorentz-invarianten Kurvenparameter wählt.

Wir multiplizieren mit $(-mc)$ und erhalten

$$\int (-mc)\, ds \;=\; \int (-mc^2)\, d\tau \;=\; \int \underbrace{(-mc^2)\sqrt{1-v^2/c^2}}_{\equiv L}\, dt.$$

Das Variationsprinzip

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} L\, dt \;=\; 0,$$

führt zur Definition der Lagrangefunktion

$$L \;=\; (-mc^2)\sqrt{1-v^2/c^2} \;\approx\; -mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + O(v^2/c^2)\ .$$

Bewegungsgleichungen Die Lagrange-Gleichungen,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} \;=\; 0, \qquad (i=1,2,3) \tag{18.28}$$

werden somit zu den Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \;=\; 0}\ , \tag{18.29}$$

welches den relativistischen 3-er Impuls

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}$$

definiert, in Einklang mit (18.26). Die Lösung von (18.29) ist natürlich $\vec{v} =$ konst..

Relativistische Energie Aus der Mechanik wissen wir, dass für zeitunabhängige Lagrangefunktionen die verallgemeinerte Energie $\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$ erhalten ist. In unserem Fall ist die Energie E

$$\begin{aligned} E = \sum_{i=1}^{3} p^i \dot{x}^i - L &= \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} - (-mc^2)\sqrt{1-v^2/c^2} \\ &= \frac{m\vec{v}^2 + (mc^2)(1-v^2/c^2)}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\ , \end{aligned}$$

also

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}} \qquad E(\vec{v}=0) = mc^2\ , \tag{18.30}$$

mit der *„Ruheenergie“* $E(\vec{v}=0) = mc^2$.

Energie-Impuls-Beziehung Ein Vergleich der relatistischen Energie (18.30) mit der Definition des 4-er Impulses (18.26) zeigt, dass der 4-er Impuls die Form

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{18.31}$$

hat und die Relation $(p,p) = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2$, siehe (18.27), somit zu

$$\boxed{E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + (mc^2)^2}} \tag{18.32}$$

wird. Gl. (18.32) ist die berühmte Energie-Impuls-Beziehung der speziellen Relativitätstheorie.

Masselose Teilchen Aus (18.32) folgt, dass auch Teilchen *ohne Masse*, wie z.B. Photonen, einen Impuls

$$p = E/c$$

haben.

18.9 Relativistisches Teilchen in einem elektromagnetischen Feld

Mit den Definitionen für das skalare Potential $\Phi(t,\vec{x})$ und für das Vektorpotential $\vec{A}(t,\vec{x})$ aus Abschnitt 7.1,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\Phi \tag{18.33}$$

können wir das kovarianten 4-er Potential

$$\boxed{(A^\mu) \;:=\; \left(\phi, \vec{A}\right)} \tag{18.34}$$

definieren, wie in Kapitel 19 noch näher erläutert werden wird.

Lagrange Funktion für ein Geladenes Teilchen Mit der der 4-er Geschwindigkeit $u = \gamma(c, \vec{v})$, nach (18.25), könne wir die Wirkung $I = (-mc^2) \int d\tau$ für eine freies Teilchen Lorentz-invariant zu

$$I \;=\; \int \left[-m^2c^2 - \frac{e}{c}(u, A)\right] d\tau \;=\; \int \underbrace{\left[-mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - e(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A})\right]}_{L(\vec{x},\vec{v},t)} dt \tag{18.35}$$

verallgemeiner, wobei wir die Lagrange Funktion $L(\vec{x}, \vec{v}, t)$ definieren haben und $d\tau = dt/\gamma$ verwendete haben, mit $1/\gamma = \sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Lagrange Gleichungen Für die Lagrange Gleichungen (18.28) brauchen wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \;=\; \frac{d}{dt}\left[\frac{mv^k}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c}A^k\right] \;=\; \frac{d}{dt}\frac{mv^k}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c}\frac{\partial A^k}{\partial t} + \frac{e}{c}\sum_i \frac{\partial A^k}{\partial x^i}v^i$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} \;=\; -e\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} + \frac{e}{c}\sum_i \frac{\partial A^i}{\partial x^k}v^i \;.$$

Wir erhalten somit mit (18.33) die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{mv^k}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;=\; e\underbrace{\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x^k} - \frac{1}{c}\frac{\partial A^k}{\partial t}\right)}_{E^k} + \frac{e}{c}\underbrace{\sum_i \left(v^i\frac{\partial A^i}{\partial x^k} - v^i\frac{\partial A^k}{\partial x^i}\right)}_{(\vec{v}\times\vec{B})^k},$$

für eine relativistisches Teilchen in einem äußerm elektromagnetischem Feld. Die Rechte Seite entspricht der Lorrentz Kraft. Hier haben wir

$$(\vec{v} \times \vec{B})_k = \epsilon_{klm} v_l \epsilon_{mop} \partial_o A_p \;=\; (\delta_{ko}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{lo}) v_l \partial_o A_p$$

verwendet.

Kanonischer Impuls und Energie Der kanonische Impuls ist

$$\vec{p} \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \;=\; m\gamma\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A} \;,$$

wie aus der klassischen Mechanik im nicht-relativistischem Limes $\gamma \to 1$ schon bekannt. Die erhaltene Gesamtenergie ist nach dem Satz von Noether dann

$$E \;=\; \vec{p}\cdot\vec{v} - L \;=\; m\gamma c^2 + e\Phi \;,$$

wobei wir (18.30) verwendet haben. Die Terme $\pm\vec{v}\cdot\vec{A}\,e/c$ heben sich weg, die Lorentz-Kraft ist keine Potentialkraft.

Teilchen im konstanten elektrischen Feld Wir haben

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \;=\; e\vec{E} + \frac{e}{c}\,\vec{v}\times\vec{B}\;, \tag{18.36}$$

zu lösen, für den Fall eines konstanten elektrischen Feldes $\vec{E} = E_0\hat{x}$ und $\vec{B} = 0$. Mit $\vec{v} = v\hat{x}$ wird dann die Bewegungsgleichung (18.36) zu

$$\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \;=\; eE_0t\;,$$

oder

$$0 \;=\; m^2v^2 - (eE_0t)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \;=\; v^2\left(m^2+\frac{(eE_0t)^2}{c^2}\right) - (eE_0t)^2\;.$$

Für die Geschwindigkeit $v = v(t)$ erhalten wir

$$v \;=\; v(t) \;=\; \frac{eE_0t}{\sqrt{m^2+(eE_0t)^2/c^2}}\;.$$

Für kleine Zeiten ist $v \simeq eE_0t/m$, für große Zeiten ist $\lim_{t\to\infty} v = c$, die Lichtgeschwindigkeit c hat also die Bedeutung einer asymptotischen Grenzgeschwindigkeit.

Kapitel 19

Lorentz-invariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

19.1 Das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum

Das Ziel dieses Abschnittes wird es sein, einen Formalismus zu entwickeln, mit dessen Hilfe die Gesetze der Elektrodynamik auf eine Weise geschrieben werden können, die ihre Invarianz bezüglich Lorentz-Transformationen (LT) evident macht. Als ersten Schritt errinnern wir an die Viererschreibweise, welche wir im Kapitel 18 eingeführt haben.

Vektorkalkül Seien ct, x, y und z Koordinaten im Minkowski-Raum. Es gelten die folgenden Definitionen und Konventionen:

- Kontravariante Vierervektoren x^μ

$$x^\mu \;\equiv\; (x^0, x^1, x^2, x^3) \;=\; (ct, x, y, z); \qquad\qquad \mu = 0, 1, 2, 3\ .$$

- Kovariante Vierervektoren x_μ

$$x_\mu \;\equiv\; (x_0, x_1, x_2, x_3) \;=\; (ct, -x, -y, -z); \qquad\qquad \mu = 0, 1, 2, 3\ .$$

- Lateinische und griechische Indizes
  Per Konvention steht ein griechischer Index für 0...3, ein lateinischer für 1...3.

- Summenkonvention
  Die Einstein-Konvention, wie wir sie bisher verwendeten, wird nun eingeschränkt. Summiert wird nur noch über gleichnamige Indizes, wenn sie auf verschiedenen Ebenen stehen, d.h.

$$x^\mu x_\mu \;\equiv\; \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = s^2; \qquad\qquad x^i x_i \;\equiv\; \sum_{i=1}^{3} x^i x_i\ .$$

- Metrik
  Die Beschaffenheit, d.h. die Geometrie eines Raumes ist durch seine Metrik und damit durch sein Linienelement eindeutig festgelegt. Nach (18.23) ist die differentielle Bogenlänge ds mit

$$ds^2 \;=\; g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \tag{19.1}$$

Lorentz-invariant, wobei $g_{\mu\nu}$ der metrische Tensor ist.

Metrischer Tensor Im euklidischen vierdimensionalen Raum lautet die Metrik

$$g_{\mu\nu} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Im Minkowski-Raum der Relativitätstheorie gilt dagegen

$$\boxed{\; g_{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;} . \tag{19.2}$$

Die Form des metrischen Tensors folgt unmittelbar aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, wie im Kapitel 18 diskutiert.

- Mit der Metrik (19.2) ist es möglich, Indizes zu heben bzw. zu senken und damit kovariante in kontravariante Vektoren zu verwandeln und umgekehrt. Es gilt

  $$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \qquad \text{und} \qquad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \ ,$$

  wobei $g^{\mu\nu}$ die zu $g_{\mu\nu}$ inverse Metrik darstellt.

- Es gilt $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ denn

  $$g^{\mu\nu} \;=\; g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g_{\mu'\nu'} \ .$$

- Die 4er-Einheitsmatrix ${\delta^\mu}_\lambda$ (das 4er Kronecker-δ) ist durch

  $${g^\mu}_\lambda \;=\; g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} \;=\; {\delta^\mu}_\lambda \;=\; \begin{cases} 0 & \mu \neq \lambda \\ 1 & \mu = \lambda \end{cases}$$

  gegeben.

- Die vertikale Positionierung der Indizes ist wichtig. Die Lorentztransformationen ${\Lambda^\mu}_\nu$ und ${\Lambda_\nu}^\mu$ sind i.Allg. nicht gleich, die Schreibweise Λ^μ_ν unzulässig. Der erste Index eines Tensor indiziert die Reihe, der zweite die Spalte.

Rechnen mit Tensoren Als Beispiel betrachten wir einen Tensor

$$\left({M_\mu}^\nu\right) \;=\; \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}; \qquad \left(g_{\mu\nu}\right) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

für den vereinfachten Fall von einer räumlichen und einer zeitlichen Dimension. In Klartext haben wir

$$
\begin{aligned}
M_0^{\ 0} &= A \qquad & M_0^{\ 1} &= B \\
M_1^{\ 0} &= C \qquad & M_1^{\ 1} &= D
\end{aligned}
$$

in Komponenten-Schreibweise. Es gilt

$$
M_{\mu\nu} = g_{\nu\nu'} M_\mu^{\ \nu'}; \qquad (M_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix}
$$

und

$$
M^\mu_{\ \nu} = g^{\mu\mu'} M_{\mu'\nu}; \qquad (M^\mu_{\ \nu}) = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix} .
$$

Diese Beziehung zwischen $(M_\mu^{\ \nu})$ und $(M^\mu_{\ \nu})$ läßt sich ohne Probleme auf den Fall dreier räumlicher Dimensionen verallgemeinern.

Lorentz-Transformationen Wie transformieren sich Vektoren beim Übergang in ein anderes Koordinatensystem? Was macht einen kovarianten Vektor aus? Man betrachte die ko- bzw. kontravarianten Vierervektoren

$$
A_\mu = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3); \qquad A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) .
$$

Ein Vektor ist nun dann und nur dann ko- bzw. kontravariant wenn er sich unter einer Lorentz-Transformation Λ vom Laborsystem Σ zu einem bewegten Bezugssystem Σ' wie

$$
(A')_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu} A_\nu; \qquad (A')^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} A^\nu; \qquad \Lambda_\mu^{\ \nu} = g_{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\ \nu'} \tag{19.3}
$$

transformiert, vergl. (18.21). Nun ist die Lorentz-Transformation eine lineare Abbildung und daher gilt

$$
\Lambda^\mu_{\ \nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}; \qquad \Lambda_\mu^{\ \nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \tag{19.4}
$$

wenn wir mit x_μ die 4er Koordinaten im Laborsystem Σ bezeichnen und mit x'_μ die im bewegten Bezugssystem Σ', vgl. (18.18) und (18.22). Aus einem Vergleich der rechten und linken Seite von (19.4) ist klar dass die Ableitung nach einem kontravarianten Vektor kovariant sein muss und umgekehrt,

$$
\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right); \qquad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right) ,
$$

siehe auch (18.22).

Invarianz des Skalarproduktes Lorentz Transformationen lassen per Definition die Metrik invariant, als

$$
(x'|x') = (x|x) \qquad (x')^\mu \, g_{\mu\nu} \, (x')^\nu = x^\sigma g_{\sigma\rho} \, x^\rho ,
$$

was ausgeschrieben

$$
x^\sigma \, g_{\sigma\rho} \, x^\rho = \Lambda^\mu_{\ \sigma} \, x^\sigma \, g_{\mu\nu} \, \Lambda^\nu_{\ \rho} \, x^\rho
$$

ergibt, vergl. auch (18.10). Diese Beziehung gilt für alle x^σ und wir finden daher mit

$$g_{\sigma\rho} \;=\; g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\sigma\Lambda^\nu{}_\rho; \qquad\qquad \delta^\lambda{}_\rho \;=\; g^{\lambda\sigma}\, g_{\sigma\rho} \;=\; \underbrace{g^{\lambda\sigma}\, g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\sigma}_{=:\,(\Lambda^{-1})^\lambda{}_\nu}\Lambda^\nu{}_\rho \;=\; (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\nu\,\Lambda^\nu{}_\rho$$

einen Ausdruck für die inverse Lorentz-Transformation Λ^{-1}.

Wellengleichung Die Viererdivergenz

$$\partial_\mu A^\mu \;=\; \partial^\mu A_\mu \;:=\; \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3}\right) \;=\; \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A} \tag{19.5}$$

führt via

$$\boxed{\;\Box \;:=\; \partial_\mu\partial^\mu\;} \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \Delta \;=\; \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\ .$$

zur Wellengleichung, welche per Definition Lorentz-invariant ist und damit ein Skalar.

Rotationen Einfache Rotationen des Koordinatensystems lassen die Minkowski-Metrik invariant und gehhören also auch zur Gruppe der Lorentz-Transformationen.

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Die Untermatrix R beschreibt dabei eine Rotation, also eine orthogonale Transformation im euklidischen 3d-Unterraum, mit

$$\left\{\begin{array}{c} \det L = \det R = 1 \\ \det L = -1 \end{array}\right\} \qquad : \qquad \left\{\begin{array}{c} \text{eigentlichen} \\ \text{uneigentlichen} \end{array}\right\}\ \text{Rotationen.}$$

Boosts Lorentz Transformationen welche (ohne eine zusätzliche Rotation des Koordinatensystems) auf ein Bezugssystem transformieren, welche sich mit der Relativgeschwindigkeit v zum Laborsystem bewegt, nennt mann Boosts. Für $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ und $\beta = v/c$ gilt

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x'^2 = x^2, \qquad x'^3 = x^3\ , \tag{19.6}$$

also

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ . \tag{19.7}$$

Für kovariante Ortsvektoren lautet das Transformationsgesetz

$$x'_\mu \;=\; \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu, \qquad \text{mit} \qquad \Lambda_\mu{}^\nu \;=\; g_{\mu\rho}\Lambda^\rho{}_\lambda g^{\lambda\nu}\ ,$$

also

$$\left(\Lambda_\mu{}^\nu\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{19.8}$$

Drei Rotationen um und drei Boots entlang der Raumachsen ergeben sechs unabhängige Parameter für die eindeutige Bestimmung einer LT. Man sieht das auch auf eine alternative Weise ein.

19.2 Gauß'sches cgs-System

Für die relativistische Formulierung ist es vorteilhaft, nicht das bisher benützte MKSA-System für die elektromagnetischen Einheiten zu benützen, sondern das Gauß'sche cgs-System. Die Maxwell-Gleichungen haben im Gauß'schen cgs-System (im Vakuum) die Form:

$$\begin{array}{rclcrcl} \nabla\cdot\mathbf{E} &=& 4\pi\rho & \qquad & \nabla\cdot\mathbf{B} &=& 0 \\ \nabla\times\mathbf{B} &=& \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} & & \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} &=& 0\,. \end{array} \tag{19.9}$$

Die Lorentz-Kraft lautet im Gauß'schen cgs-System: $q\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$.
Aus den Potentialen $\mathbf{A}$ und ϕ gewinnt man die physikalischen Felder im cgs-System via

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\phi\,, \tag{19.10}$$

die Lorentz-invarianted Lorentz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu \;=\; \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \nabla\cdot\mathbf{A} \;=\; 0\,. \tag{19.11}$$

Beachte, dass $\partial_\mu=(\partial/\partial x^0,\vec{\nabla})$ und $A^\mu=(\phi,\mathbf{A})$ ist.

19.3 Ströme, Dichten, Potentiale

Der in den letzten Abschnitten entwickelte Formalismus stellt eine leistungsfähige Methode zur Formulierung der Elektrodynamik dar. Im Folgenden werden die Gleichungen der Elektrodynamik so geschrieben, dass diese unter LT forminvariant bleiben.

Kontinuitätsgleichung Die Viererdivergenz (19.5) legt einen Zusammenhang mit der Kontinuitätsgleichung nahe. Setzt man den Viererstrom

$$\boxed{(j^\mu) \;=\; (c\rho,\vec{j})}$$

in die Kontinuitätsgleichung ein, so erhählt man

$$0 \;=\; \dot{\rho} + \nabla \cdot \vec{j} \;=\; \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + \nabla \cdot \vec{j}; \qquad \boxed{\partial_\mu j^\mu \;=\; 0} \;. \tag{19.12}$$

Da dies einen Skalar darstellt, ist die Gleichung Lorentz-invariant. Alle physikalischen Gesetze müssen invariant sein, so wie die Kontinuitätsgleichung (19.12).

4er-Strom Bei der Herleitung von (19.12) haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass j^μ ein 4er-Vektor ist. Dafür muss sich seine nullte Komponente $c\rho$ wie eine zeitartige Variable transformieren.

Die im Volumenelement d^3x eingeschlossene Ladung ist $\rho\, d^3x$. Das Minkowski-Volumenelement d^4x transformiert sich auf folgende Weise:

$$d^4x' \;=\; \underbrace{\left|\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\right|}_{=|\det L|=1} d^4x \;=\; d^4x \;, \qquad d^3x'\, d(x')^0 \;=\; d^3x\, dx^0 \;,$$

also ist d^4x eine Lorentz-Invariante. Andererseits ist wegen der Invarianz der elektrischen Ladung

$$\rho'\, d^3x' \;=\; \rho\, d^3x; \qquad \frac{\rho'}{d(x')^0} \;=\; \frac{\rho}{dx^0} \;. \tag{19.13}$$

Damit ist gezeigt, dass ρ eine zeitartige Variable ist: Sie transformiert sich wie dx^0.

Lorentz-Eichung Die Lorentz-Eichbedingung lautet

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi \;=\; 0 \;.$$

Mit der Definition

$$\boxed{(A^\mu) \;:=\; (\phi, \mathbf{A})} \tag{19.14}$$

wird diese zu

$$\partial_\mu A^\mu \;=\; 0 \;, \tag{19.15}$$

welche als Skalar wieder invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Das gilt offensichtlich nicht für die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Vektor- und Skalarpotential in Lorentz-Eichung Die Feldgleichungen (7.9) und (7.10)) für die Potentiale ϕ und $\mathbf{A}$ können nun in Lorentz-Eichung kompakt hingeschrieben werden. Sie lauten zusammen einfach

$$\boxed{\Box A^\mu \;=\; \frac{4\pi}{c} j^\mu} \;. \tag{19.16}$$

Die inhomogenen Wellengleichungen sind zu den Maxwell-Gleichungen äquivalent und die Lorentz-Invarianz von (19.16) impliziert somit auch die Lorentz-Invarianz der klassischen Elektrodynamik.

E- und B-Felder Mit $\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$ ergibt sich beispielsweise für die x-Komponenten

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\left(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0\right) \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} &= -\left(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2\right) \end{aligned} \tag{19.17}$$

19.4 Maxwell-Gleichungen in Vakuum und Materie

Die Darstellung (19.17) der elektromagnetischen Felder legt nahe den kontravarianten antisymmetrischen **Feldstärkentensor**

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{19.18}$$

zu definieren. Seine kovariante Form erhält man durch

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} F^{\rho\lambda} g_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{19.19}$$

Aus diesem gewinnt man den sogenannten **dualen** Feldstärketensor $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ über

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{19.20}$$

Analog zum dreidimensionalen Fall ist hier

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} +1 & \text{falls} \quad \mu,\nu,\lambda,\rho \quad \text{zyklisch} \\ -1 & \text{falls} \quad \mu,\nu,\lambda,\rho \quad \text{antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{19.21}$$

Man sieht, dass man von $F^{\mu\nu}$ direkt nach $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ gelangt, wenn man **B** für **E** und −**E** für **B** einsetzt. Mit diesen Definitionen können die Maxwell-Gleichungen äußerst kompakt aufgeschrieben werden.

Wir bemerken noch, dass die dreier-Komponenten von $F^{\mu\nu}$ als

$$\begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y \\ B_z & 0 & -B_x \\ -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k$$

geschrieben werden kann.

Inhomogene Maxwell-Gleichungen Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lauten unter Verwendung des Feldstärketensors einfach

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} \;=\; \frac{4\pi}{c} j^\nu} \;, \tag{19.22}$$

und diese Formulierung ist, wie man leicht zeigen kann, Lorentz-invariant. Also gilt in jedem anderen Inertialsystem Σ' die Gleichung

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} \;=\; \frac{4\pi}{c} j'^\nu \;.$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (19.22) lassen sich aus der Lagrange Funktion

$$I \;=\; \int \left[-m^2c^2 - \frac{e}{c}(u, A)\right] d\tau \;-\; \frac{1}{16\pi c}\int d^4y F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{19.23}$$

herleiten, wenn man (19.18) benutzt und (19.23) nach den Feldern A^μ variert. Siehe auch (18.35).

Homogene Maxwell-Gleichungen Die homogenen Maxwell-Gleichungen haben die Form

$$\boxed{\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} \;=\; 0} \;, \tag{19.24}$$

wobei $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ hier der duale Feldstärketensor ist. Man kann die homogenen Gleichungen auch mit Hilfe des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ schreiben,

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \; \partial^\lambda F^{\mu\nu} \;=\; 0 \;. \tag{19.25}$$

Diese Gleichung heißt auch *Jacobi-Identität* (der Beweis erfolgt einfach durch das Einsetzen der Definition (19.18)). Da aber die Null auf der rechten Seite ganz automatisch allein durch die Definition von $F^{\mu\nu}$ herauskommt, sind die homogenen Gleichungen ohne jede weitere Annahme automatisch erfüllt!

> <u>Mit anderen Worten</u>:
> Schreibt man (19.18) hin, so sind die homogenen Gleichungen bereits impliziert und damit *trivial!*.

Beispielsweise erhält man für $\mu = 0$, $\nu = 1$ und $\lambda = 2$ die z-Komponente der Induktionsgleichung,

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B_z - \frac{\partial}{\partial x}E_y + \frac{\partial}{\partial y}E_x = -\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} + \vec{\nabla}\times\vec{E}\right]_z = 0 \;.$$

Für $\mu = 1$, $\nu = 2$, und $\lambda = 3$ ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x}B_x \;+\; \frac{\partial}{\partial y}B_y \;+\; \frac{\partial}{\partial z}B_z \;=\; \nabla\cdot\mathbf{B} \;=\; 0 \;.$$

19.5 Transformation der Felder

Es stellt sich die Frage, wie sich elektrische und magnetische Felder bzw. der Feldstärketensor unter Lorentz-Transformationen verhalten. Die universelle Transformationsvorschrift für Tensoren zweiter Stufe lautet

$$(F')^{\mu\nu} \;=\; L^{\mu}{}_{\lambda} L^{\nu}{}_{\rho} F^{\lambda\rho} \;.$$

Das gestrichene System bewege sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Richtung. Die zwischen dem Laborsystem Σ und dem bewegten Bezugssystem Σ' vermittelnde Transformation ist ein Boost der Form (19.7) und bewirkt, dass im gestrichenen System die Felder die Form

$$\begin{array}{lcllcl} E'_x &=& E_x, & B'_x &=& B_x \\ E'_y &=& (E_y - \beta B_z)/\sqrt{1-\beta^2}, & B'_y &=& (B_y + \beta E_z)/\sqrt{1-\beta^2} \\ E'_z &=& (E_z + \beta B_y)/\sqrt{1-\beta^2}, & B'_z &=& (B_z - \beta E_y)/\sqrt{1-\beta^2} \end{array} \qquad (19.26)$$

annehmen. Die Transformationsvorschrift (19.26) vermischt die elektrischen und die magnetischen Komponenten des Feldstärketensors. Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, nicht die getrennten Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$, liefert die relativistisch konsequente Beschreibung des elektromagnetischen Feldes.

Transformation der Felder Die korrekte Verallgemeinerung von (19.26) für allgemeine Geschwindigkeiten $\vec{v}$ lautet

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbf{B}' &=& \gamma\,\mathbf{B} - \dfrac{\gamma-1}{v^2}\Big(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}\Big)\mathbf{v} - \dfrac{\gamma}{c}\Big(\mathbf{v}\times\mathbf{E}\Big) \\ \mathbf{E}' &=& \gamma\,\mathbf{E} - \dfrac{\gamma-1}{v^2}\Big(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\Big)\mathbf{v} + \dfrac{\gamma}{c}\Big(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\Big) \end{array}}$$

mit

$$\gamma \;:=\; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \;.$$

Die obigen Formeln machen deutlich, dass beispielsweise ein in einem bestimmten Inertialsystem rein magnetisches Feld nicht in allen anderen Inertialsystemen auch rein magnetisch zu sein braucht. Bei der Transformation treten plötzlich elektrische Feldkomponenten auf! Das darf aber nicht zu der Annahme verführen, die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F}_l = \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

erwachse rein aus der Transformation des Magnetfeldes in das Bezugssystem eines bewegten Teilchens. Wie man sich mit Hilfe von (19.26) leicht überzeugt, gilt diese Aussage nur in niedrigster Ordnung in v/c.

Transformation der Koordinaten Zu beachten ist, dass zu einer Transformation in ein neues Bezugssystem immer auch eine Transformation der Raumzeit-Koordinaten gehört, denn andere Koordinaten hat der dortige Beobachter ja nicht zur Verfügung. In Σ' müssen also die Felder als

$$\mathbf{E}' \;=\; \mathbf{E}'(\mathbf{x}', t'); \qquad\qquad \mathbf{B}' \;=\; \mathbf{B}'(\mathbf{x}', t')$$

ausgedrückt werden. In den Formeln (19.26) wird dieses impliziet vorrausgesetzt.