

## Teil VI

# Das elektromagnetische Feld in Materie

# Kapitel 14

## Makroskopische Felder

Im Prinzip erlauben die Maxwell-Gleichungen von Teil III das elektromagnetische Feld beliebiger Materieanordnungen zu berechnen, sobald die Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}, t)$  und die Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  exakt bekannt sind. In einer solchen *mikroskopischen* Theorie wird die gesamte Materie in dem betrachteten Raumbereich in Punktladungen (Elektronen und Atomkerne) zerlegt, deren Bewegungszustand dann Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}, t)$  und Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  definiert. Für Materieanordnungen von *makroskopischen* Dimensionen (z.B. Kondensator mit Dielektrikum oder stromdurchflossene Spule mit Eisenkern) ist eine *mikroskopische* Rechnung in der Praxis weder durchführbar noch erstrebenswert, da experimentell doch nur räumliche und zeitliche Mittelwerte der Felder kontrollierbar sind. Wir werden uns daher im Folgenden mit raum-zeitlichen Mittelwerten befassen.

### 14.1 Makroskopische Mittelwerte

Integrale der Form

$$\langle f(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta T} \int d^3\xi d\tau f(\mathbf{r} + \vec{\xi}, t + \tau) \quad (14.1)$$

sind *makroskopische Mittelwerte*, wobei

- $\Delta V$  das Volumen und  $\Delta T$  das Zeitintervall angibt, über das gemittelt wird,
- $f$  für die Ladungs- oder Stromdichte und die Komponenten der Feldstärken steht.

Wir wollen im Folgenden Zusammenhänge zwischen den Mittelwerten (14.1) für Ladungs- und Stromdichte einerseits und den Feldern andererseits herstellen. Ausgangspunkt sind die *mikroskopischen* Maxwell-Gleichungen.

**Mikroskopische Maxwell-Gleichungen** Homogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (14.2)$$

Inhomogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}} \quad (14.3)$$

**Makroskopische Felder** Wenn wir annehmen, dass in (14.1) Differentiationen nach  $\mathbf{r}$  und  $t$  unter dem Integral ausgeführt werden dürfen,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle; \quad \frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle; \quad \text{etc.}, \quad (14.4)$$

so erhalten wir aus (14.2) und (14.3) folgende Gleichungen für die Mittelwerte:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0; \quad \nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = 0 \quad (14.5)$$

und

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}; \quad \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t} = \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle. \quad (14.6)$$

Die homogenen Gleichungen (14.5) bleiben beim Übergang von den *mikroskopischen* Feldern  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  zu den *makroskopischen* Feldern

$$\vec{\mathcal{E}} \equiv \langle \mathbf{E} \rangle; \quad \vec{\mathcal{B}} \equiv \langle \mathbf{B} \rangle \quad (14.7)$$

erhalten. In den inhomogenen Gleichungen (14.6) müssen wir nun  $\langle \rho \rangle$  und  $\langle \mathbf{j} \rangle$  geeignet aufteilen, die eigentliche Herausforderung.

## 14.2 Freie und gebundene Ladungsträger

Wir befassen uns zunächst in (14.6) mit dem Zusammenhang zwischen dem makroskopischen elektrischen Feld  $\vec{\mathcal{E}}$  und seinen Quellen. Dazu zerlegen wir die gemittelte Ladungsdichte,

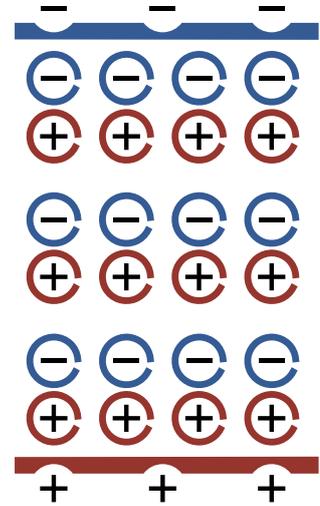
$$\langle \rho \rangle = \rho_b + \rho_f, \quad (14.8)$$

wobei  $\rho_b$  die im Sinne von (14.1) gemittelte Dichte der *gebundenen* Ladungsträger ( $b$  steht für 'bound') darstellt,  $\rho_f$  die gemittelte Dichte der *freien* Ladungsträger ( $f$  steht für 'free').

- Gebundene Ladungsträger,  $\rho_b$ , sind z.B. die Gitterbausteine eines Ionen-Kristalls (wie *NaCl* mit den Gitterbausteinen  $Na^+$  und  $Cl^-$ ) oder die Elektronen von Atomen und Molekülen. Gebunden bedeutet dabei nicht, dass die Ladungsträger total unbeweglich sind, sondern nur, dass sie durch starke rücktreibende Kräfte an bestimmte Gleichgewichtslagen gebunden sind, um die herum kleine Schwingungen möglich sind.
- Frei bewegliche Ladungsträger,  $\rho_f$ , sind z.B. Leitungselektronen in Metallen, Ionen in Gasen oder Elektrolyten. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie unter dem Einfluß eines äußeren Feldes einen makroskopischen Strom bilden.

**Polarisations-Ladungen** Die Dichte der freien Ladungsträger,  $\rho_f$ , ist eine im Experiment direkt kontrollierbare Größe. Z.B. können die Ladungen auf den Platten eines Kondensators von außen vorgegeben werden. Sie erzeugen ein elektrisches Feld, welches in einem Dielektrikum zwischen den Platten elektrische Dipole erzeugen oder ausrichten kann.

- Die elektrischen Dipole im Dielektrikum werden dabei durch mikroskopische Verschiebungen der gebundenen Ladungsträger erzeugt.
- Der Effekt für den Beobachter sind *Polarisationsladungen* auf den Oberflächen des Dielektrikums, welche von den speziellen Gegebenheiten (Art des Dielektrikums, Temperatur der Umgebung, Stärke des  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feldes) abhängen.



**Dielektrische Polarisation** Es liegt daher nahe, das von den (gebundenen) Polarisationsladungen resultierende zusätzliche elektrische Feld mit dem Feld zusammenzufassen, welches von den Ladungen  $\rho_f$  auf den Platten herrührt. Das Zusatzfeld  $\vec{\mathcal{P}}$ , die *dielektrische Polarisation* wählen wir so, dass

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} = -\rho_b} \quad (14.9)$$

und

$$\vec{\mathcal{P}} = 0 \quad \text{wenn} \quad \rho_b = 0. \quad (14.10)$$

Der Ausdruck (14.9) entspricht, bis auf einen Faktor  $-1/\epsilon_0$ , dem Gauss'schen Gesetz. Dann wird mit (14.6)

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}) = (\rho_b + \rho_f) - \rho_b = \rho_f \quad (14.11)$$

oder nach Einführung der **dielektrischen Verschiebung**,  $\vec{\mathcal{D}}$ ,

$$\boxed{\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}} \quad ; \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f} \quad (14.12)$$

Wir werden weiter unten zeigen, dass das *Hilfsfeld*  $\vec{\mathcal{P}}$  gerade die Dichte des (makroskopischen) Dipolmoments des betrachteten Dielektrikums ist (*dielektrische Polarisation*).

### 14.3 Mikro- und Makroskopische Ströme

Wir wollen nun noch die zweite inhomogene Gleichung in (14.6) umformen. Analog zu (14.8) teilen wir auf:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b, \quad \text{mit} \quad \mathbf{j}_b = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M. \quad (14.13)$$

Dabei ist:

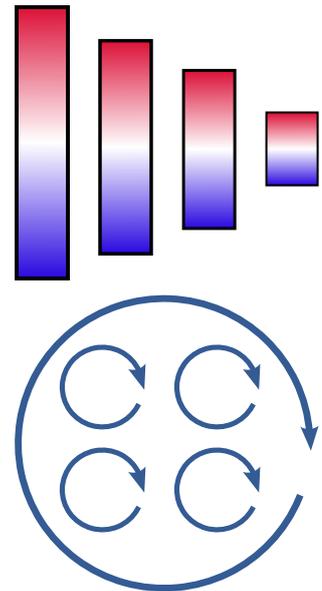
$\mathbf{j}_f$  die von der Bewegung der freien Ladungsträger herrührende, gemäß (14.1) gemittelte, Stromdichte.

$\mathbf{j}_b$  die von der Bewegung der gebundenen Ladungsträger herrührende (gemittelte) Stromdichte. Es ist zweckmäßig  $\mathbf{j}_b$  nochmals aufzuteilen:

$\mathbf{j}_P$  Nach (14.6) erzeugt ein zeitlich veränderliches makroskopisches elektrisches Feld einen Strom, nach (14.12) auch die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  bzw.  $\vec{P}$ :

$$\mathbf{j}_P \equiv \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (14.14)$$

$\mathbf{j}_M$  Molekulare Kreisströme, d.h. solche welche *magnetische Dipole* erzeugen. Wir diskutieren diesen Anteil später.



**Magnetfeld und magnetische Induktion** Wir betrachten nun die Kontinuitätsgleichung für die freien Ladungsträger,

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0. \quad (14.15)$$

Dann folgt aus (14.12) und (14.15)

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_f \right) = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D} - \rho_f) = 0, \quad (14.16)$$

so dass der Vektor  $\partial \vec{D} / \partial t + \mathbf{j}_f$  sich als Rotation eines Vektors darstellen lässt, dem **makroskopischen Magnetfeld**  $\vec{H}$ ,

$$\nabla \times \vec{H} \equiv \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_f. \quad (14.17)$$

**Magnetfeld und magnetische Induktion** Mit (14.12), (14.13) und (14.14) schreiben wir die zweite inhomogene Gleichung (14.6) wie folgt um:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{D}} &= \nabla \times \vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}) \\ &= \mu_0 (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M) - \mu_0 \mathbf{j}_P = \mu_0 (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_M) .\end{aligned}\quad (14.18)$$

Mit (14.17) und (14.18) finden wir den Zusammenhang von  $\vec{\mathcal{B}}$  und  $\vec{\mathcal{H}}$ :

$$\nabla \times (\vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \vec{\mathcal{H}}) = \nabla \times \vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \mathbf{j}_f \right) = \mu_0 \mathbf{j}_M . \quad (14.19)$$

Analog zur dielektrischen Verschiebung  $\vec{\mathcal{P}}$  führen wir hier die **Magnetisierung**  $\vec{\mathcal{M}}$  ein:

$$\boxed{\mu_0 \vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \vec{\mathcal{H}}} , \quad (14.20)$$

so dass entsprechend (14.9):

$$\boxed{\nabla \times \vec{\mathcal{M}} = \mathbf{j}_M} ; \quad \vec{\mathcal{M}} = 0 \quad \text{wenn} \quad \mathbf{j}_M = 0 . \quad (14.21)$$

$\vec{\mathcal{M}}$  lässt sich also konsistent als Dichte des (makroskopischen) magnetischen Dipolmoments (Magnetisierung) interpretieren, erzeugt durch die mikroskopischen Kreisströme  $\mathbf{j}_M$ . Einige Bemerkungen:

- Ein mikroskopisches Analogon besitzen nur die Felder  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{B}}$ , nämlich  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  (vgl. (14.7)).  $\vec{\mathcal{D}}$  und  $\vec{\mathcal{H}}$  sind nur *Hilfsfelder*, die wir einführen, um komplizierte elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie pauschal zu erfassen.
- Eine makroskopische Polarisation (oder Magnetisierung) kann durch zweierlei Mechanismen zustande kommen.
  - Schon vorhandene (permanente) elektrische (oder magnetische) Dipole werden in einem elektrischen (magnetischen) Feld ausgerichtet.
  - Das äußere elektrische (magnetische) Feld induziert elektrische (magnetische) Dipole.

Ohne äußeres Feld sind *permanente* Dipole statistisch verteilt und ergeben nach Mittelung über ein makroskopisches Volumen keine Polarisation (oder Magnetisierung).

- Aus der Linearität der Kontinuitätsgleichung  $\nabla \cdot \mathbf{j} + \dot{\rho} = 0$  und der (postulierten) Kontinuitätsgleichung (14.16) für die freien Ladungsträger gilt auch die Kontinuitätsgleichung für die gebundenen Ladungsträger:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_b + \frac{\partial \rho_b}{\partial t} = 0 .$$

**Makroskopischen Feldgleichungen** Wir fassen nun die Ergebnisse unserer Analysen zusammen.

- Homogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0 \quad (14.22)$$

- Inhomogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \mathbf{j}_f \quad (14.23)$$

- Verknüpfungen

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}; \quad \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}} \quad (14.24)$$

Die Gleichungen (14.22), (14.23) haben formal die gleiche Struktur wie die Maxwell Gleichungen (14.2), (14.3). Sie können daher mit den gleichen Methoden gelöst werden.

**Materialgleichungen** Die Gleichungen (14.22), (14.23) reichen nicht aus, um - bei gegebenen  $\rho_f, \mathbf{j}_f$  - die vier Felder  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{H}}$  eindeutig zu bestimmen. Dazu müssen wir die formalen Verknüpfungen (14.24) mit Hilfe spezieller Modelle für die betrachtete Materie in explizite *Materialgleichungen* umwandeln. Einfache Beispiele werden in den nächsten Kapiteln dazu diskutiert. Formell könnte man auch die konstituierenden Definitionen

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{\mathcal{M}} = \mathbf{j}_M \quad (14.25)$$

für die Ströme  $\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M$  gebundenen der gebundenen Ladungsträger verwenden. Da jedoch im Allgemeinen weder  $\mathbf{j}_P$  noch  $\mathbf{j}_M$  direkt bekannt sind lässt sich (14.25) i.A. nicht direkt verwenden.

# Kapitel 15

## Energie und Impuls des makroskopischen Feldes

In Kap. 8 haben wir Energie, Impuls und Drehimpuls des mikroskopischen Feldes eingeführt und dieses Konzept in Teil IV auf das Strahlungsfeld im Vakuum angewendet. Wir wollen im Folgenden die Betrachtungen von Kap. 8 auf das makroskopische Feld übertragen.

### 15.1 Energie makroskopischer Felder

Ausgangspunkt für die Energiebilanz in Kap. 8 war die von einem (mikroskopischen) Feld  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  an einem System geladener Massenpunkte pro Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$\frac{dW_M}{dt} = \int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dV . \quad (15.1)$$

Grundlage von (15.1) ist die Lorentz-Kraft, z.B. für eine Punktladung  $q$ :

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) , \quad (15.2)$$

deren magnetischer Anteil zu (15.1) keinen Beitrag liefert. Aus (15.2) erhält man, mit Mittelung der Felder(14.1), für die vom makroskopischen Feld  $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$  auf eine mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegte Probeladung  $q$  ausgeübte (mittlere) Kraft

$$\vec{\mathcal{K}} = q(\vec{\mathcal{E}} + (\mathbf{v} \times \vec{\mathcal{B}})) . \quad (15.3)$$

**Arbeit der freien Ladungen** Arbeit wird sowohl an den gebundenen wie an den freien Ladungen verrichtet, wir betrachten hier nur die an den freien Ladungen, mit der Dichte  $\rho_f$ , vom makroskopischen Feld pro Zeiteinheit geleistete Arbeit, vergleiche (15.1),

$$\frac{dW_M}{dt} = \int (\mathbf{j}_f \cdot \vec{\mathcal{E}}) dV . \quad (15.4)$$

Die rechte Seite von (15.4) können wir mit Hilfe der inhomogenen makroskopischen Maxwell-Gleichung (14.23),  $\mathbf{j} = \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \partial \vec{\mathcal{D}} / \partial t$ , zu

$$\frac{d\mathcal{W}_M}{dt} = \int \left( \vec{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) - \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \right) dV \quad (15.5)$$

umformen. Wie in Kap. 8 können wir (15.5) symmetrisieren, indem wir die Identität

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = \nabla \cdot (\vec{\mathcal{H}} \times \vec{\mathcal{E}}) + \vec{\mathcal{H}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) = -\nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) - \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (15.6)$$

benutzen sowie die homogene makroskopische Maxwell-Gleichung (14.22),  $\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\partial \vec{\mathcal{B}} / \partial t$ . Wir erhalten

$$\frac{d\mathcal{W}_M}{dt} = - \int dV \left\{ \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \right\}. \quad (15.7)$$

Der Vergleich mit dem entsprechenden Ausdruck (8.6) für die mikroskopischen Felder zeigt, dass

$$\boxed{\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}} \quad (15.8)$$

als Energiestromdichte des makroskopischen Feldes (Poynting-Vektor) zu deuten ist.

**Lineare, isotrope Medien** Zur Interpretation der restlichen Terme betrachten wir die Näherung linearer, isotroper Medien,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}; \quad \vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}, \quad (15.9)$$

wobei  $\epsilon$  die Dielektrizitätskonstante und  $\mu$  Permeabilität ist. Diese beiden Konstanten werden wir im Kapitel 16 noch ausführlich besprechen. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \frac{2}{\epsilon} \vec{\mathcal{D}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = 2 \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

und somit

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}) \quad (15.10)$$

und wir können analog zu (8.9) die Größe

$$\boxed{\frac{1}{2} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}})} \quad (15.11)$$

als Energiedichte des makroskopischen Feldes interpretieren.

## 15.2 Impuls makroskopischer Felder

Aus der Newton'schen Bewegungsgleichung und der Lorentz-Kraft (15.3) wird die Änderung des Impulses der Probeladung  $q$  in den Feldern  $\vec{\mathcal{E}}$  und  $\vec{\mathcal{B}}$  durch

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = q(\vec{\mathcal{E}} + (\mathbf{v} \times \vec{\mathcal{B}})) \quad (15.12)$$

gegeben. Für die Impulsänderung eines Systems freier Ladungen, beschrieben durch  $\rho_f$  und  $\mathbf{j}_f$ , in den Feldern  $\vec{\mathcal{E}}$  und  $\vec{\mathcal{B}}$ , folgt somit

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int dV (\rho_f \vec{\mathcal{E}} + (\mathbf{j}_f \times \vec{\mathcal{B}})). \quad (15.13)$$

Analog zu Abschnitt 8.2 formen wir (15.13) mit Hilfe der inhomogenen makroskopischen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \mathbf{j}_f \quad (15.14)$$

um und gelangen zu

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int dV \left\{ \vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) + (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \times \vec{\mathcal{B}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \times \vec{\mathcal{B}} \right\}. \quad (15.15)$$

Wir symmetrisieren (15.15) mit Hilfe der homogenen makroskopischen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (15.16)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int dV \left\{ \vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) + \vec{\mathcal{H}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) + (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \times \vec{\mathcal{B}} + (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \times \vec{\mathcal{D}} \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}) \right\}. \end{aligned} \quad (15.17)$$

Wie in Kap. 8 lässt sich dann

$$\boxed{\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}} \quad (15.18)$$

als Impulsdichte des makroskopischen elektromagnetischen Feldes interpretieren (vgl. (8.30)).

## 15.3 Die Kirchhoff'schen Regeln

Die elektromagnetischen Felder in elektrischen Leitern, wie z.B. Kupferdrähten, sind für alle Belange der Elektrotechnik makroskopischer Natur. Die Theorie elektrischer Schaltkreise beruht auf einigen einfachen Regeln.

### 1. Kirchhoff'scher Satz (Knotenregel)

An einer Stromverzweigung gilt für stationäre und quasistationäre Ströme

$$\boxed{\sum_{i=1}^N I_i = 0}, \quad (15.19)$$

d.h. die Summe der fließenden Ströme verschwindet, eine Konsequenz der Ladungserhalten.

Für stationäre und quasistationäre Ströme folgt aus

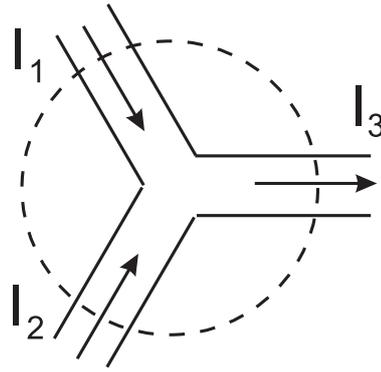
$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \mathbf{j}_f,$$

siehe (14.17), dass  $\partial \vec{\mathcal{D}}/\partial t$  vernachlässigt werden darf. Damit gilt

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = \nabla \cdot \mathbf{j}_f. \quad (15.20)$$

Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes folgt

$$\int_F \mathbf{j}_f \cdot d\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N I_i = 0. \quad (15.21)$$



### 2. Kirchhoff'sche Regel (Maschenregel)

Die Summe der Spannungsabfälle längs eines geschlossenen Weges in einem Schaltkreis (*Masche*) verschwindet,

$$\boxed{\sum_j U_j = 0}. \quad (15.22)$$

Dabei kann  $U_j$  für eine Batteriespannung stehen, oder für

- Ohm'schen Spannungsabfall (**Widerstand**  $R$ )

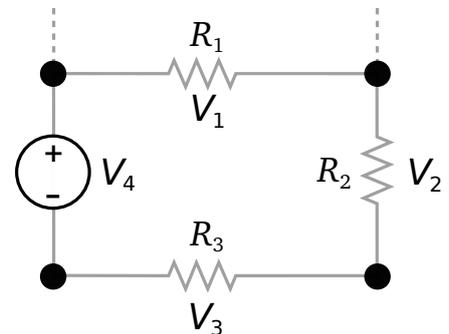
$$U_R = IR, \quad (15.23)$$

- Kondensatorspannung (**Kapazität**  $C$ )

$$U_C = \frac{1}{C} \int Idt, \quad (15.24)$$

- induzierte Spannung (**Induktivität**  $L$ )

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (15.25)$$



Zum Nachweis der Maschenregel (15.22) verwenden wir die homogene makroskopische Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}. \quad (15.26)$$

Mit dem Stoke'schen Integralsatz folgt

$$\int_F (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot d\mathbf{F} = \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \vec{\mathcal{B}} \cdot d\mathbf{F}. \quad (15.27)$$

Die rechte Seite von (15.27) verschwindet, wenn durch die Masche kein zeitlich veränderliches Magnetfeld dringt.

**Bemerkung** Grundlage der 2. Kirchhoff'schen Regel ist das Induktionsgesetz bzw. der Energiesatz. Führt man nämlich eine Ladung  $q$  auf einem geschlossenen Weg durch den Schaltkreis, so ist (15.22) nach Multiplikation mit  $q$  gerade die Energiebilanz.

# Kapitel 16

## Elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie

### 16.1 Materialgleichungen

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0 \quad (16.1)$$

und

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \mathbf{j}_f \quad (16.2)$$

reichen (wie in Abschnitt 14.3 schon erwähnt) nicht aus, um die Felder  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{D}}$  und  $\vec{\mathcal{H}}$  zu bestimmen, solange nicht explizite *Materialgleichungen* zur Verfügung stehen, welche  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{D}}$  und  $\vec{\mathcal{H}}$  untereinander verknüpfen. Oft sind auch die makroskopischen Quellen  $\rho_f$  und  $\mathbf{j}_f$  nicht als Funktion von  $\mathbf{r}$  und  $t$  vorgegeben, sondern funktional von den zu berechnenden Feldern abhängig.

**Überblick** Es ist üblich  $\rho_f, \mathbf{j}_f, \vec{\mathcal{P}}$  und  $\vec{\mathcal{M}}$  als Funktionale der Felder  $\vec{\mathcal{E}}$  und  $\vec{\mathcal{B}}$  darzustellen. Sie können auch von äußeren Parametern wie z.B. der Temperatur  $T$  abhängen,

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}[\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}, T], \quad (16.3)$$

entsprechend für  $\vec{\mathcal{M}}$  und  $\mathbf{j}_f$ . Über die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (16.4)$$

ist dann  $\rho_f$  durch  $\mathbf{j}_f$  bestimmt. In seiner allgemeinen Form (16.3) beinhaltet das Funktional u.a. folgende Effekte:

- Depolarisationsfelder

An der Oberfläche eines Dielektrikums in einem äußeren elektrischen Feld wird im Allgemeinen lokal begrenzte Polarisation induziert, das Depolarisationsfeld. Analog hierzu ist die Oberflächenladung eines Leiters in einem Feld.

- Nicht-lokale Effekte

Die Polarisation  $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{x})$  kann eine nicht-lokale Abhängigkeit

$$\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = \epsilon_0 \int d\mathbf{y} \hat{\chi}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{y}) \quad (16.5)$$

vom makroskopischen Feld  $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{y})$  haben. Dabei ist der Integralkern  $\hat{\chi}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , die **elektrische Suszeptibilität**, eine 3 Matrix.

- Nicht-lineare Effekte

Der funktionale Zusammenhang (16.5) war zwar nicht-lokal aber linear. Ein allgemeiner lokaler, aber nicht-linearer Zusammenhang lässt sich als

$$\mathcal{P}_i/\epsilon_0 = \chi_{ij} \mathcal{E}_j + \chi_{ijk} \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k + \chi_{ijkl} \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k \mathcal{E}_l + \dots$$

schreiben. Dabei ist  $\chi_{ij}$  der lineare Suszeptibilitätstensor (2ter Stufe) und  $\chi_{ijk}$  bzw.  $\chi_{ijkl}$  die nicht-linearen Suszeptibilitätstensoren 3ter- und 4ter Stufe. Sie beschreiben verschiedene optische Effekte wie die SHG (second-harmonic-generation): Erzeugung von Licht mit der Frequenz  $2\omega$  mit einem Laserstrahl der Frequenz  $\omega$ , etc.

Im Folgenden werden wir für eine Reihe einfacher Modelle lineare und lokale Materialgleichungen diskutieren.

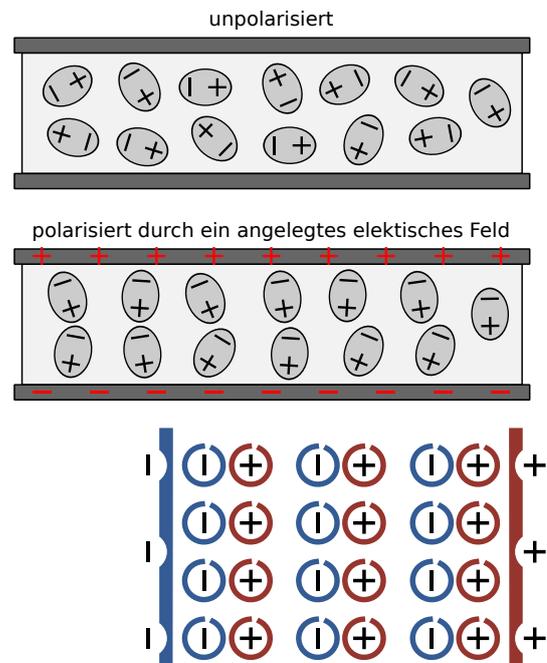
## 16.2 Dielektrika

Unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes  $\vec{\mathcal{E}}$  stellt sich in einem nichtleitenden, polarisierbaren Medium (einem *Dielektrium*) eine Polarisation  $\vec{\mathcal{P}}$  ein. Wir unterscheiden zwei Typen.

**Orientierungspolarisation** Schon vorhandene (permanente) elektrische Dipole werden im  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld ausgerichtet, denn die Energie eines elektrischen Dipols  $\mathbf{d}$  im Feld ist  $-\mathbf{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ , siehe (2.33).

Dem ordnenden Einfluss des Feldes wirkt die thermische Bewegung entgegen und die resultierende makroskopische Polarisation ist temperaturabhängig. Für  $\vec{\mathcal{E}} = 0$  sind die Richtungen der elementaren Dipole statistisch verteilt und es ist  $\vec{\mathcal{P}} = 0$ .

**Induzierte Polarisation** Durch das  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld können Elektronen und Kerne in Atomen oder Molekülen relativ zueinander verschoben und Dipole in Feldrichtung erzeugt (induziert) werden. Auf diese Weise entsteht eine temperaturunabhängige Polarisation.



**Elektrische Suszeptibilität** Bei niedrigen Feldstärken und/oder hohen Temperaturen ist die lineare Beziehung

$$\vec{\mathcal{P}} = \chi_e \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \quad (16.6)$$

eine gute Näherung für die Materialgleichung (16.3); dabei ist die *elektrische Suszeptibilität*  $\chi_e$  im Allgemeinen temperaturabhängig. Mit (14.12)

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \equiv \epsilon \vec{\mathcal{E}} \quad (16.7)$$

für die dielektrische Verschiebung, gilt dann für die **Dielektrizitätskonstante**  $\epsilon$

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (16.8)$$

Einige Bemerkungen:

- (16.6) und (16.7) setzen ein isotropes Material voraus. Für anisotrope Medien ist  $\chi_e$  bzw.  $\epsilon$  durch entsprechende Tensoren zu ersetzen.
- Für Wasser,  $H_2O$ , gilt bei Raumtemperatur  $\epsilon/\epsilon_0 \approx 40$ , wenn man für  $\omega$  die Frequenz der gelben *Na*-Linie wählt.
- Für schnell oszillierende Felder erweist sich  $\epsilon$  (bzw.  $\chi_e$ ) als frequenzabhängig,

$$\epsilon = \epsilon(\omega) \quad (16.9)$$

wobei  $\omega$  die Frequenz des angelegten Feldes ist.

**Lorentz-Modell** Die Frequenzabhängigkeit von  $\epsilon(\omega)$ , auch **Dispersion** genannt, lässt sich anhand des folgenden (vereinfachten) Modells für die Struktur von Atomen und Molekülen verstehen, dem Lorentz-Modell.

Wir nehmen an, dass die Elektronen in einem Atom oder Molekül gedämpfte harmonische Schwingungen ausführen. Dann lautet die Bewegungsgleichung für das  $n$ -te Elektron eines Atoms (oder Moleküls) unter dem Einfluss eines periodischen  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feldes  $\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t)$

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_n + \gamma_n \frac{d}{dt} \mathbf{r}_n + \omega_n^2 \mathbf{r}_n = \frac{e}{M} \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) \quad (16.10)$$

wobei  $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(t)$  die Ortskoordinate des  $n$ -ten Elektrons ist. Mit dem Ansatz

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n^0 \exp(-i\omega t) \quad (16.11)$$

findet man als Lösung der Bewegungsgleichung (16.10)

$$\mathbf{r}_n(t) = \frac{1}{M} \frac{e}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_n} \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) \quad (16.12)$$

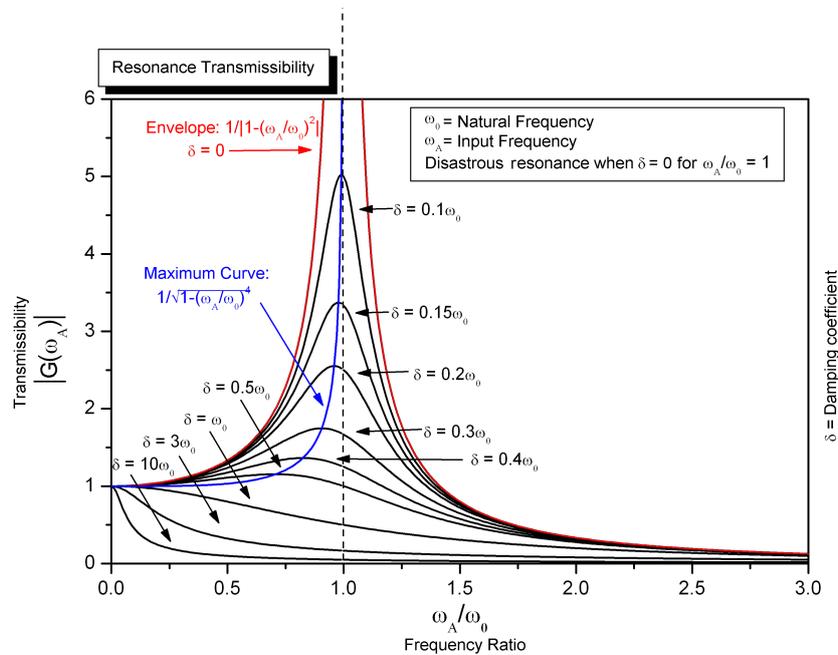
und daraus für das Dipolmoment  $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d} = \sum_{n=1}^Z e \mathbf{r}_n = \frac{e^2}{M} \underbrace{\vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t)}_{=\vec{\mathcal{E}}(t)} \sum_{n=1}^Z \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_n)}, \quad (16.13)$$

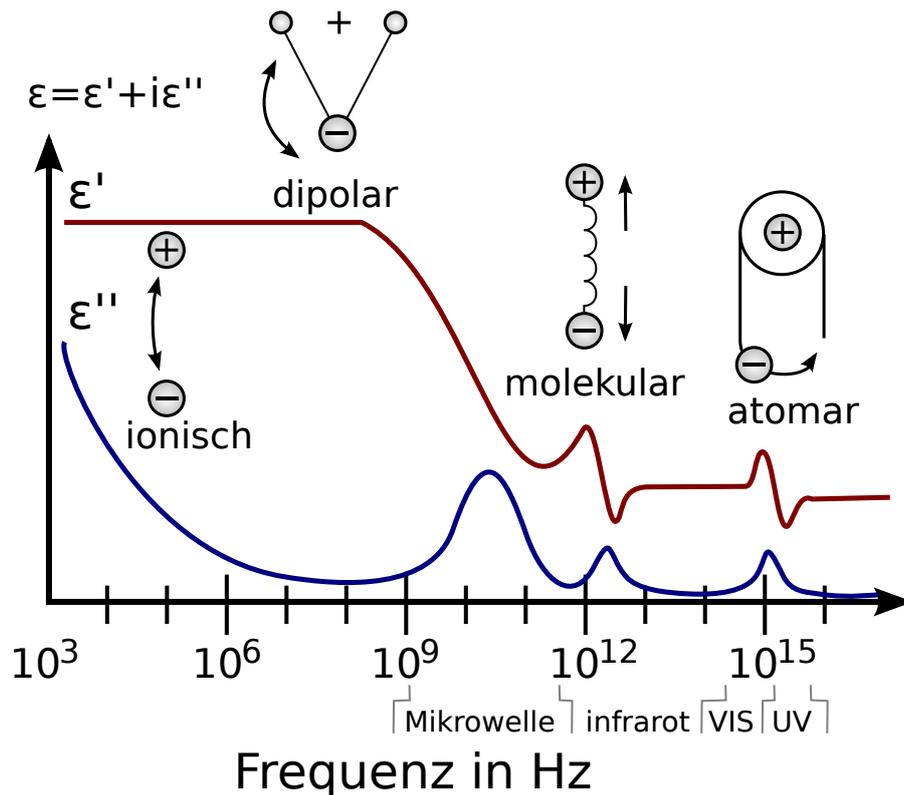
wenn  $Z$  Elektronen im Atom (Molekül) sind. Mit  $\vec{\mathcal{P}} = n\mathbf{d}$  und  $\vec{\mathcal{P}} = \chi_e \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$  folgt somit

$$\chi_e = \frac{ne^2}{\epsilon_0 M} \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_n} \quad (16.14)$$

für die elektrische Suszeptibilität, wobei  $n$  die Dichte der Atome (Moleküle) ist.



- Für  $\omega \rightarrow \omega_n$  kommt es zu **Resonanzen**, welche man mit Infrarot-Spektroskopie direkt beobachten kann.
- Der Dämpfungsterm in (16.10) trägt pauschal der Tatsache Rechnung, daß die atomaren Oszillatoren durch Stöße zwischen den Atomen oder Molekülen Energie verlieren. Dies hat zur Folge, dass  $\chi_e$  bzw.  $\epsilon$  komplex werden. Als Beispiel werden wir im nächsten Kapitel die Absorption elektromagnetischer Wellen in Materie betrachten.



Wir bemerken, dass die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$  nach (16.14) i.A. einen Realteil  $\epsilon'$  und einen Imaginärteil  $\epsilon''$  aufweist,  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ . Die Bedeutung der beiden Komponenten wird in den Abschnitten 16.4 und 17.4. noch weiter diskutiert werden.

**Meta-Materialien** Für Frequenzen  $\omega$  knapp oberhalb einer Resonanz  $\omega_n$  kann die Dielektrizitätskonstante nach dem Lorentz-Modell (16.14)

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e), \quad \chi_e \sim \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_n} \quad (16.15)$$

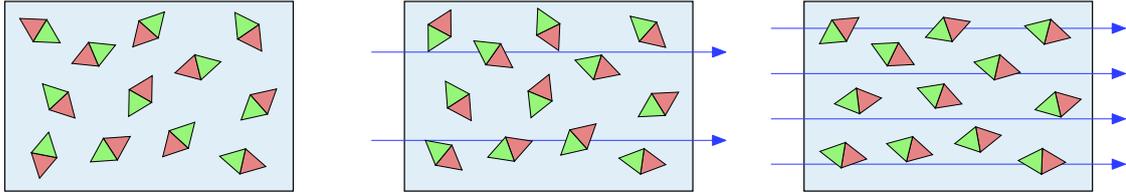
auch negativ werden, falls die Dämpfung  $\gamma_n$  klein ist. In diesem Fall sind dielektrische Verschiebung und das elektrische Feld entgegengesetzt,

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \sim -\vec{E}.$$

Ein solches Verhalten wird in natürlich vorkommenden Materialien nicht beobachtet kann aber in künstlichen *Meta-Materialien* erzeugt werden. Beispiele von Meta-Materialien sind Packungen dielektrischer Kugel oder von Resonatoren. Analog kann man auch negative Permeabilitäten  $\mu < 0$  erreichen. Meta-Materialien mit  $\epsilon < 0$  and  $\mu < 0$  haben effektiv einen negativen Brechungsindex.

### 16.3 Para- und Diamagnetismus

Eine Magnetisierung  $\vec{M}$  kann (analog dem Fall der Polarisation  $\vec{P}$ ) auf folgende Weise entstehen:



- **Orientierungsmagnetisierung (Paramagnetismus)**  
 Permanente elementare magnetische Dipole werden in einem äußeren Magnetfeld gegen die thermische Bewegung ausgerichtet und führen zu einer makroskopischen Magnetisierung  $\vec{\mathcal{M}}$ . Ohne Magnetfeld sind die elementaren Dipolmomente  $\mathbf{m}$  bzgl. ihrer Richtung statistisch verteilt und man erhält im makroskopischen Mittel  $\vec{\mathcal{M}} = 0$ .
- **Induzierte Magnetisierung (Diamagnetismus)**  
 Im Magnetfeld ändern sich die Bahnen der Elektronen, insbesondere ihr Drehimpuls. Eine solche Änderung des Drehimpulses ist nach (5.27) mit einer Änderung des magnetischen Dipolmoments des Atoms verbunden. Atome, die kein permanentes magnetisches Dipolmoment haben, erhalten also im äußeren Magnetfeld ein induziertes Dipolmoment. Diese induzierten molekularen Ringströme sind *dissipationsfrei*. Aufgrund der Lenz'schen Regel erzeugen sie ein induziertes Moment welches dem des äußeren Feldes entgegengesetzt ist.

Die Magnetisierung  $\vec{\mathcal{M}}$  hängt also im Allgemeinen vom äußeren Feld und der Temperatur ab. Da das fundamentale Feld das  $\vec{\mathcal{B}}$ -Feld ist, sollten wir entsprechend (16.3) eigentlich

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}[\vec{\mathcal{B}}, T] \quad (16.16)$$

betrachten. Es ist jedoch üblich, (16.16) durch

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}[\vec{\mathcal{H}}, T] \quad (16.17)$$

zu ersetzen, da  $\vec{\mathcal{H}}$  über die Stromdichte  $\mathbf{j}_f = \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \partial \vec{\mathcal{D}} / \partial t$  praktisch leichter kontrollierbar ist als  $\vec{\mathcal{B}}$ .

**Vergleich mit elektrischem Fall** Im elektrischen Fall betrachtet man - im Einklang mit der mikroskopischen Theorie -

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}[\vec{\mathcal{E}}, T], \quad (16.18)$$

da Potentialdifferenzen bequemer kontrollierbar sind als  $\rho_f = \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}$  und das damit verbundene  $\vec{\mathcal{D}}$ -Feld.

**Magnetische Suszeptibilität** Für genügend schwache Felder und/oder hohe Temperaturen ist zu erwarten, dass

$$\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{\mathcal{H}} \quad (16.19)$$

eine gute Näherung von (16.17) ist; dabei ist  $\chi_m$  die *magnetische Suszeptibilität*. Mit (16.19) und der Definition (14.24),  $\vec{\mathcal{B}} = \mu_0 (\vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{M}})$  wird dann

$$\boxed{\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}} \quad , \quad (16.20)$$

wobei die Permeabilität  $\mu$  mit  $\chi_m$  über

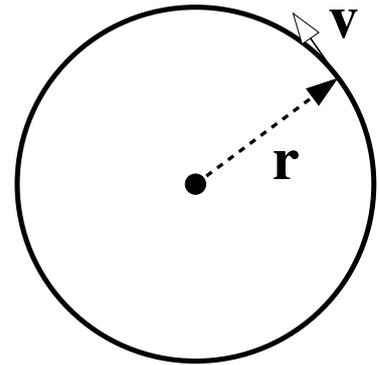
$$\boxed{\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)} \quad (16.21)$$

zusammenhängt.

- Für Paramagnete ist  $\chi_m > 0$ , für Diamagnete  $\chi_m < 0$ .
- Ein Supraleiter verdrängt aktiv das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  aus seinem Inneren und ist daher durch  $\mu = 0$  und  $\chi_m = -1$  charakterisiert. Supraleiter sind also *perfekte* Diamagnete.

### Modellrechnung für Diamagnetismus

Abschließend wollen wir das Zustandekommen des Diamagnetismus quantitativ näher formulieren. Als einfachstes, klassisches Modell betrachten wir ein um den Atomkern kreisendes Elektron mit Ladung  $q$ , unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . Zur Vereinfachung betrachten wir eine kreisförmige Bahn.



Wenn die Geschwindigkeit des Elektrons  $v$  ist, dann ist die gesamte Zentripetalkraft  $K$

$$K = \frac{mv^2}{r} = K_0 - qvB \quad , \quad (16.22)$$

wobei  $K_0$  die Anziehungskraft (Coulomb-Kraft) des Kernes ist und  $qvB$  der Betrag der Lorentz-Kraft. Wir sind an der Änderung der Geschwindigkeit  $v$  des Elektrons durch das Magnetfeld interessiert,

$$\frac{2mv}{r} \frac{\partial v}{\partial B} = -qB \frac{\partial v}{\partial B} - qv; \quad \frac{\partial v}{\partial B} = -\frac{rq}{2m} + O(B) \quad ,$$

wobei wir angenommen haben, dass die Anziehung des Kernes nicht vom Magnetfeld beeinflusst wird,  $\partial K_0 / \partial B = 0$ . Ein kleines Magnetfeld  $B$  induziert daher eine Änderung  $\Delta \mathbf{L} = (0, 0, \Delta L_z)$  des Bahndrehimpulses  $L_z = mrv$  von

$$\Delta L_z = mr \Delta v \approx mr \left( \frac{\partial v}{\partial B} \Big|_{B=0} \right) B = -\frac{r^2 q B}{2} \quad (16.23)$$

Mit einem Bahndrehimpuls  $\mathbf{L}$  ist nach (5.27) ein magnetisches Moment  $\mathbf{m} = q\mathbf{L}/(2m)$  verbunden. Daher induziert das Magnetfeld  $B$  nach (16.23) ein zusätzliches Moment  $\Delta\mathbf{m} = (0, 0, \Delta m_z)$

$$\Delta m_z = \frac{q}{2m} \Delta L_z = -\frac{r^2 q^2}{4m} B; \quad \Delta\mathbf{m} = -\frac{r^2 q^2}{4m} \mathbf{B}.$$

Nun ist die induzierte Magnetisierung  $\mathbf{M}$  nichts anderes als die induzierte Dichte magnetischer Momente, also

$$\mathbf{M} \approx -\frac{a_0^2 q^2 n}{4m} \mathbf{B}, \quad (16.24)$$

wobei wir den Radius  $r$  durch den Bohr'schen Radius  $a_0$  genähert haben;  $n$  ist die Elektronendichte. Nach der Lenz'schen Regel steht die induzierte Magnetisierung dem Einfluss des äußeren Feldes entgegen.

## 16.4 Ohm'sches Gesetz; elektrische Leitfähigkeit

In Metallen ist die Leitfähigkeit auf die Existenz freier Elektronen zurückzuführen. Die Bewegungsgleichung für Leitungselektron  $i$  mit der Masse  $m$  und der Ladung  $e$  lautet

$$m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \xi \mathbf{v}_i = e \mathbf{E}_i, \quad (16.25)$$

wobei  $\mathbf{E}_i$  das auf das Elektron  $i$  wirkende elektrische Feld ist und der Reibungsterm  $\xi \mathbf{v}_i$  der Tatsache (pauschal) Rechnung tragen soll, dass die Leitungselektronen durch Stöße mit den Schwingungen der Gitterionen (Phononen) Energie verlieren.

Aus (16.25) folgt mit  $\mathbf{j}_f = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i$  und  $n = \sum_i n_i$  für die Stromdichte  $\mathbf{j}_f$

$$\frac{d\mathbf{j}_f}{dt} + \frac{\xi}{m} \mathbf{j}_f = n \frac{e^2}{m} \vec{\mathcal{E}}, \quad (16.26)$$

wobei wir den Mittelwert über  $\mathbf{E}_i$  mit dem makroskopischen Feld  $\vec{\mathcal{E}}$  identifiziert haben.

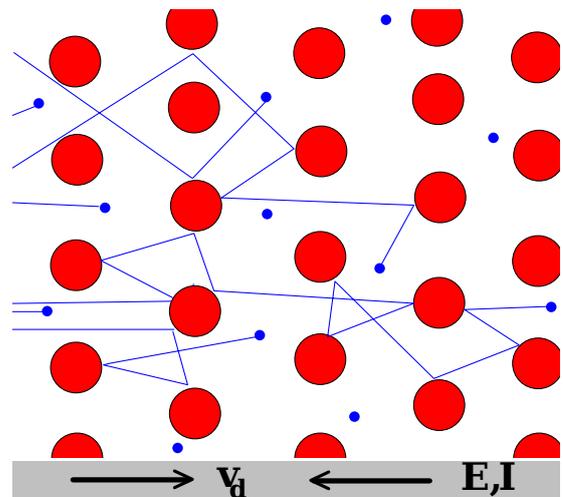
**Gleichstrom-Leitfähigkeit** Für statische  $\vec{\mathcal{E}}$ -Felder besitzt (16.26) die stationäre Lösung:

$$\mathbf{j}_f = \sigma_0 \vec{\mathcal{E}} \quad (16.27)$$

mit der *Gleichstrom-Leitfähigkeit* (auf engl: *DC conductance*)

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{\xi}. \quad (16.28)$$

Die Leitfähigkeit ist also proportional zur Dichte  $n$  der Ladungsträger und inverseproportional zur Dämpfung  $\xi$  der Elektronen.



**Wechselstrom-Leitfähigkeit** Für ein zeitlich periodisches Feld

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) \quad (16.29)$$

erwarten wir als Lösung von (16.26)

$$\mathbf{j}_f = \mathbf{j}_0 \exp(-i\omega t) . \quad (16.30)$$

Gleichung (16.26) ergibt dann die Beziehung

$$\mathbf{j}_f = \sigma(\omega)\vec{\mathcal{E}} \quad (16.31)$$

mit der **Drude Formel** für die frequenzabhängigen Leitfähigkeit (auf engl: *AC conductance*)

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} . \quad (16.32)$$

Dabei ist die Dämpfungskonstante  $\tau$  durch

$$\tau = \frac{m}{\xi} \quad (16.33)$$

bestimmt.

- Für niedrige Frequenzen  $\omega\tau \ll 1$  wird  $\sigma(\omega)$  reell,  $\sigma(\omega) \approx \sigma_0$ .
- Für hohe Frequenzen,  $\omega\tau \gg 1$ ,  $\sigma(\omega)$  wird die Leitfähigkeit rein imaginär, so dass  $\mathbf{j}_f$  und  $\vec{\mathcal{E}}$  um  $\pi/2$  gegeneinander phasenverschoben sind. Die Elektronen schaffen es nicht mehr dem schnellen Wechsel des elektrischen Feldes zu folgen.

**Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante** Wenn die Ladungsträger unter dem Einfluss einer Wechselspannung in einem Metall oszillieren, dann bewegen sie sich nur über kurze Distanzen hin und her. Der Beitrag gebundener und freier Ladungsträger kann dann nicht mehr eindeutig getrennt werden.

Nach (14.14),  $\mathbf{j}_P = \partial\vec{\mathcal{P}}/\partial t$ , ist jeder zeitlich variablen Polarization  $\vec{\mathcal{P}}$  eine Stromdichte  $\mathbf{j}_P$  zuzuordnen. Im Frequenzraum ergibt sich somit

$$\mathbf{j}_P = -i\omega\vec{\mathcal{P}}; \quad \mathbf{j}_P = \frac{\partial\vec{\mathcal{P}}}{\partial t}; \quad \vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}_0 \exp(-i\omega t) . \quad (16.34)$$

Mit der Definition (16.7) der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$ ,

$$\vec{\mathcal{P}} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{\mathcal{E}}$$

erhalten wir mit  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_P$

$$\sigma\vec{\mathcal{E}} = \mathbf{j} = -i\omega\vec{\mathcal{P}} = -i\omega(\epsilon - \epsilon_0)\vec{\mathcal{E}} .$$

Die Frequenz-abhängige Dielektrizitätskonstante  $\epsilon = \epsilon(\omega)$  hängt also mit der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$  via

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega} \quad (16.35)$$

zusammen.

- Der Realteil der Dielektrizitätskonstante verändert die **Dispersion** des Lichtes in Materie, also die Ausbreitungsgeschwindigkeit, siehe Abschnitt 17.3.  
Der Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante beschreibt dagegen die **Absorption** von Licht, siehe Abschnitt 17.4.
- Da man die Dielektrizitätskonstante mittels Infrarotmessungen direkt bestimmen kann, lässt sich dann mittels (16.35) auch die AC-Leitfähigkeit bestimmen.
- Isolatoren mit  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma(\omega) = 0$  und Leiter mit  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma(\omega) = \sigma_0 > 0$  haben ein unterschiedliches Verhalten der Dielektrizitätskonstante für kleine Frequenzen, sie divergiert nach (16.35) für leitfähige Materialien.

# Kapitel 17

## Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

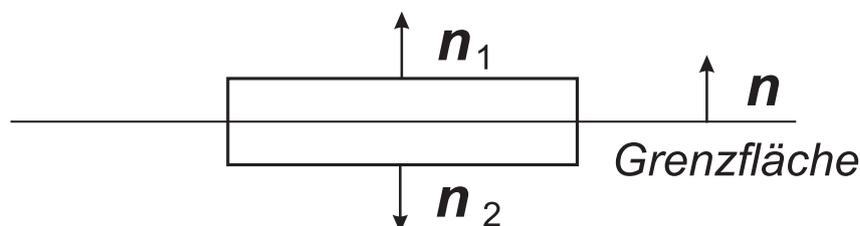
### 17.1 Allgemeine Stetigkeitsbedingungen

Aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen ergeben sich eine Reihe von Konsequenzen für das Verhalten der Felder an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedenen elektrischen und magnetischen Eigenschaften. Der Einfachheit halber sei im Folgenden angenommen, dass die Grenzfläche eben sei.

**Normalkomponente von  $\vec{\mathcal{B}}$**  Wir verwenden

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (17.1)$$

und wenden den Gauß'schen Integralsatz auf  $\vec{\mathcal{B}}$  an, siehe Skizze.



Die Deckflächen ( $F_1, F_2$ ) einer *Schachtel* mit Volumen  $V$  und Oberfläche  $F$  mögen symmetrisch zur Grenzfläche liegen; Größe und Gestalt der Deckflächen seien beliebig. Macht man die Höhe  $h$  der Schachtel beliebig klein, so folgt aus (17.1)

$$0 = \int_V (\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) dV = \int_F \vec{\mathcal{B}} \cdot d\mathbf{F} = \int_{F_1} (\vec{\mathcal{B}}_n^{(1)} - \vec{\mathcal{B}}_n^{(2)}) \cdot d\mathbf{F}, \quad (17.2)$$

da für die Flächennormalen gilt  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} = -\mathbf{n}_2$ . Da  $F_1$  beliebig gewählt werden kann, muss für den Normalkomponente

$$\boxed{\mathcal{B}_n^{(1)} = \mathcal{B}_n^{(2)}} \quad (17.3)$$

gelten. Die Normalkomponente von  $\vec{\mathcal{B}}$  geht also stetig durch die Grenzfläche hindurch.

**Normalkomponente von  $\vec{\mathcal{D}}$**  Wir verwenden

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f$$

und wenden den Gauß'schen Integralsatz nun auf  $\vec{\mathcal{E}}$  an. Wir erhalten

$$Q_f = \int_V \rho_f dV = \int_V (\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) dV = \int_F \vec{\mathcal{D}} \cdot d\mathbf{F} = \int_{F_1} (\vec{\mathcal{D}}_n^{(1)} - \vec{\mathcal{D}}_n^{(2)}) \cdot d\mathbf{F},$$

wobei  $Q_f$  die Ladung in der Schachtel ist. Für die Normalkomponente von  $\vec{\mathcal{D}}$  gilt somit

$$\boxed{\mathcal{D}_n^{(1)} - \mathcal{D}_n^{(2)} = \sigma_f}, \quad (17.4)$$

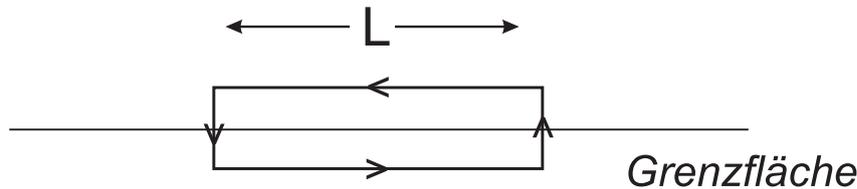
wobei  $\sigma_f$  die Flächenladungsdichte freier Ladungsträger in der Grenzfläche ist.

- Für Dielektrika mit  $\sigma_f = 0$  ist die Normalkomponente von  $\vec{\mathcal{D}}$  stetig.
- Beim Übergang Leiter–Nichtleiter springt  $\vec{\mathcal{D}}_n$  dagegen um  $\sigma_f$ .

**Tangentialkomponente von  $\vec{\mathcal{E}}$**  Wir benutzen

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

und wenden den Integralsatz von Stokes auf  $\vec{\mathcal{E}}$  an (siehe Skizze).



Eine Rechteckschleife  $S$  habe Kanten der Länge  $L$  parallel zur Grenzfläche und der Länge  $h$  senkrecht dazu. Da die magnetische Induktion  $\vec{\mathcal{B}}$  und  $\partial \vec{\mathcal{B}}/\partial t$  überall endlich ist gilt im Limes  $h \rightarrow 0$

$$0 = -\int_F \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} = \int_F (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot d\mathbf{F} = \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^L ds \cdot (\vec{\mathcal{E}}_t^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}_t^{(2)}) = 0$$

bei Integration über die in  $S$  eingespannte ebene Fläche  $F$ . Da  $L$  beliebig gewählt werden kann, folgt mit

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}_t^{(1)} = \vec{\mathcal{E}}_t^{(2)}} \quad (17.5)$$

di Stetigkeit der Tangentialkomponente von  $\vec{\mathcal{E}}$ .

**Tangentialkomponente von  $\vec{\mathcal{H}}$**  Wir betrachten

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \mathbf{j}_f$$

und wenden den Integralsatz von Stokes auf  $\vec{\mathcal{H}}$  an. Der Beitrag von  $\partial \vec{\mathcal{D}} / \partial t$  zum Flächenintegral verschwindet wieder im Limes  $h \rightarrow 0$ . Wir definieren mit

$$I_f = \int_F \mathbf{j}_f \cdot d\mathbf{F} = \int_0^L ds \left( \vec{\mathcal{H}}_t^{(1)} - \vec{\mathcal{H}}_t^{(2)} \right) \quad (17.6)$$

die Stromstärke  $I_f$  der in der Grenzfläche fließenden (freien) Ströme, senkrecht zur Tangentialkomponente  $\vec{\mathcal{H}}_t$  von  $\vec{\mathcal{H}}$ , und via

$$I_f = \int_0^L i_f dl \quad (17.7)$$

die Dichte der Oberflächenströme  $i_f = I_f/L$  (die Flächenstromdichte). Aus (17.6) folgt dann

$$\boxed{\mathcal{H}_t^{(1)} - \mathcal{H}_t^{(2)} = i_f} \quad (17.8)$$

Die Tangentialkomponente  $\vec{\mathcal{H}}_t$  springt in Anwesenheit von Oberflächenströmen.

## 17.2 Lineare, isotrope Medien

Medien werden als linear und isotrop bezeichnet falls

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}; \quad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \quad (17.9)$$

gilt. Man findet dann

$$\boxed{\mu_1 \mathcal{H}_n^{(1)} = \mu_2 \mathcal{H}_n^{(2)}} \quad \boxed{\epsilon_1 \mathcal{E}_n^{(1)} - \epsilon_2 \mathcal{E}_n^{(2)} = \sigma_f} \quad (17.10)$$

und

$$\boxed{\frac{\vec{\mathcal{D}}_t^{(1)}}{\epsilon_1} = \frac{\vec{\mathcal{D}}_t^{(2)}}{\epsilon_2}} \quad \boxed{\frac{\vec{\mathcal{B}}_t^{(1)}}{\mu_1} - \frac{\vec{\mathcal{B}}_t^{(2)}}{\mu_2} = i_f} \quad (17.11)$$

aus (17.3), (17.5), (17.4) und (17.8). Wir betrachten nun verschiedene Typen von Grenzflächen.

**Grenzfläche zwischen Metallen** Gilt das Ohm'sche Gesetz,

$$\mathbf{j}_f = \sigma \vec{\mathcal{E}}, \quad (17.12)$$

mit der Leitfähigkeit  $\sigma$ , so folgt aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente von  $\vec{\mathcal{E}}$ , siehe (17.5),

$$\vec{\mathcal{E}}_t^{(1)} = \vec{\mathcal{E}}_t^{(2)}, \quad \frac{\mathbf{j}_{ft}^{(1)}}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{j}_{ft}^{(2)}}{\sigma_2} \quad (17.13)$$

für die Tangentialkomponente  $\mathbf{j}_{ft}$  von  $\mathbf{j}_f$ . Für die Normalkomponente folgt über die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (17.14)$$

bei Anwendung des Gauß'schen Satzes

$$j_{fn}^{(1)} - j_{fn}^{(2)} = -\frac{\partial \sigma_f}{\partial t}, \quad (17.15)$$

wobei  $\sigma_f$  die Flächenladungsdichte ist. Speziell für stationäre Ströme gilt  $\nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0$  und  $\dot{\sigma}_f = 0$  und somit

$$\mathbf{j}_{fn}^{(1)} = \mathbf{j}_{fn}^{(2)}. \quad (17.16)$$

Die Normalkomponente der Stromdichte ist für stationäre Ströme an der Grenzfläche zwischen zwei Metallen stetig.

**Übergang Leiter (1) - Nichtleiter (2)** Da im Nichtleiter kein Strom fließen kann, gilt nach (17.16)

$$\mathbf{j}_{fn}^{(1)} = \mathbf{j}_{fn}^{(2)} = 0, \quad (17.17)$$

für den stationären Fall. Auch im Leiter muss im stationären Fall die Normalkomponente  $\mathbf{j}_{fn}^{(1)}$  der Stromdichte verschwinden sonst würde sich eine immer größer Flächenladungsdichte  $\sigma_f$  aufbauen. Aufgrund des Ohm'schen Gesetzes (17.12) gilt daher

$$\mathbf{j}_f^{(1)} = \sigma^{(1)} \vec{\mathcal{E}}^{(1)}, \quad \vec{\mathcal{E}}_n^{(1)} = 0, \quad (17.18)$$

da die Leitfähigkeit im Metall  $\sigma^{(1)} \neq 0$  nicht verschwindet. Die normalkomponenten des makroskopischen elektrischen Feldes verschwindet also im Metall und muss daher im Dielektrikum endlich sein falls eine nicht-verschwindende Oberflächenladungsdichte  $\sigma_f$  vorhanden ist. Daher folgt für  $\vec{\mathcal{E}}_n^{(2)}$  aus (17.10):

$$\epsilon_1 \mathcal{E}_n^{(1)} - \epsilon_2 \mathcal{E}_n^{(2)} = \sigma_f, \quad \epsilon_2 \mathcal{E}_n^{(2)} = -\sigma_f. \quad (17.19)$$

Insbesondere verschwinden in der Elektrostatik, alle Ströme,  $\mathbf{j}_f = 0$ , und somit folgt aus (17.18)

$$\vec{\mathcal{E}}_t^{(1)} = 0 \quad (17.20)$$

dass auch die Tangentialkomponente des makroskopischen elektrischen Feldes im Leiter verschwindet. Wegen der allgemeinen Stetigkeitsbedingung (17.5) für die tangentialkomponente folgt daher

$$\vec{\mathcal{E}}_t^{(1)} = \vec{\mathcal{E}}_t^{(2)}, \quad \vec{\mathcal{E}}_t^{(2)} = 0. \quad (17.21)$$

Somit steht das  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld senkrecht zur Leiteroberfläche und verschwindet innerhalb des Leiters.

## 17.3 Reflexion und Brechung von Licht

Wir betrachten nun die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in linearen und isotropen Medien mit

$$\boxed{\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}} \quad \boxed{\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}}, \quad (17.22)$$

In Abwesenheit freier Ladungen lauten die makroskopischen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

und nehmen mit (17.22) die Gestalt

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

an. Wie in Kap. 9, lassen sich die Gleichungen bezüglich des elektrischen und magnetischen Anteils entkoppeln. Man erhält die Wellengleichungen

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} = 0, \quad (17.23)$$

wobei  $c'$  die Phasengeschwindigkeit im Medium ist (vgl. Abschnitt 9.3):

$$\boxed{\frac{1}{c'^2} = \epsilon \mu}. \quad (17.24)$$

**Ebene Wellen** Da wir im Folgenden das Verhalten des elektromagnetischen Feldes an ebenen Grenzflächen untersuchen wollen, betrachten wir spezielle Lösungen von (17.23) in Form ebener Wellen, z.B.:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}, \quad (17.25)$$

wobei zwischen  $\omega$  und  $\mathbf{k}$  die Beziehung

$$\omega = c' k = \frac{k}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (17.26)$$

gelten muss. Wie in Kap. 9, findet man, dass  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  und  $\mathbf{k}$  senkrecht zueinander stehen.

- Gleichung (17.26) unterscheidet sich von der Dispersionrelation im Vakuum  $\omega = ck$ , siehe (9.24), dadurch, dass dort  $c$  eine Konstante ist, während  $c'$  von  $\omega$  abhängt, via  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ . Siehe (16.8) und die Modellrechnung (16.14) sowie den entsprechenden Ausdruck (16.35) für Metalle.

- Die Komponenten verschiedener Frequenzen  $\omega$  in einem Wellenpaket laufen also mit verschiedener Geschwindigkeit  $c' = c'(\omega)$ ; das Wellenpaket behält seine Form im Laufe der Zeit nicht bei, die Wellenpakete **zerfließen**. Vgl. hierzu Abschnitt 10.1).

**Phasen- vs. Gruppengeschwindigkeit** Je nach Verlauf von  $\epsilon(\omega)$  kann  $c' > c$  werden. Dies bedeutet keinen Widerspruch zur Relativitätstheorie, da die *Phasengeschwindigkeit*  $v_{ph} = c'$  nicht identisch ist mit der *Gruppengeschwindigkeit*, siehe (10.5),

$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \quad (17.27)$$

eines Wellenpaketes, dessen Amplitude auf die Umgebung der Wellenzahl  $k_0$  konzentriert ist; der Energietransport in einem solchen Wellenpaket ist durch  $v_g$  und nicht durch  $v_{ph}$  bestimmt.

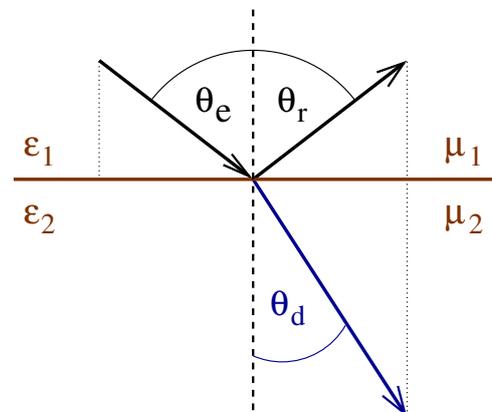
**Lichtwellen an Grenzflächen** Wir untersuchen nun das Verhalten einer Lichtwelle, beschrieben durch (17.25), an einer ebenen Grenzfläche.

Die Grenzfläche sei die  $(x, y, 0)$ -Ebene, das elektrische Feld ist dann

$$\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \vec{\mathcal{E}}_{e0} e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t)} + \vec{\mathcal{E}}_{r0} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)} & (z > 0) \\ \vec{\mathcal{E}}_{d0} e^{i(\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r} - \omega_d t)} & (z < 0) \end{cases}, \quad (17.28)$$

für einen beliebigen Ortsvektor  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

- $\vec{\mathcal{E}}_e$ : elektrische Feldstärke der einfallenden Lichtwelle, mit der Amplitude  $\vec{\mathcal{E}}_{e0}$ .
- $\vec{\mathcal{E}}_r$ : Feldstärke des reflektierten Lichts.
- $\vec{\mathcal{E}}_d$ : Feldstärke der durchgehenden (transmittierten) Lichtwelle.



**Erhaltung der Frequenz** Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente  $\vec{\mathcal{E}}_t$  des elektrischen Feldes (17.5) folgt

$$\vec{\tau} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_e + \vec{\mathcal{E}}_r) = \vec{\tau} \cdot \vec{\mathcal{E}}_d; \quad \vec{\tau} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_{e0} + \vec{\mathcal{E}}_{r0}) = \vec{\tau} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{d0} \quad (17.29)$$

für alle Zeiten  $t$ , für alle Vektoren  $\vec{\tau} = (x, y, 0)$  der Grenzfläche, die wir hier als die  $xy$ -Ebene gewählt haben.

Da die Tangentialkomponente für alle Zeiten  $t$  stetig sind, so folgt aus (17.29) und (17.28), z.B. für  $\mathbf{r} = 0$ , die Erhaltung der Frequenz

$$\omega_e = \omega_r = \omega_d; \quad k_e = k_r; \quad \frac{k_e}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{k_d}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}, \quad (17.30)$$

wobei wir die Dispersionsrelation  $\omega = c'k = k/\sqrt{\epsilon\mu}$  verwendet haben.

**Koplanarität** Für  $t=0$  ergibt sich ( $\forall \vec{\tau}$  in der Grenzfläche) aus der Phasengleichheit (17.29) der stetigen Tangentialkomponente

$$\mathbf{k}_e \cdot \vec{\tau} = \mathbf{k}_r \cdot \vec{\tau} = \mathbf{k}_d \cdot \vec{\tau} \quad (17.31)$$

dass die Projektionen von  $\mathbf{k}_e$ ,  $\mathbf{k}_r$  und  $\mathbf{k}_d$  auf die Grenzfläche übereinfließen. D.h. diese drei  $\mathbf{k}$ -Vektoren können sich nur durch eine Komponente senkrecht zur Grenzfläche (hier die  $xy$ -Ebene) unterscheiden:

$$\mathbf{k}_e = (k_x, k_y, k_z^e), \quad \mathbf{k}_r = (k_x, k_y, k_z^r), \quad \mathbf{k}_d = (k_x, k_y, k_z^d). \quad (17.32)$$

Damit müssen  $\mathbf{k}_e$ ,  $\mathbf{k}_r$  und  $\mathbf{k}_d$  in einer Ebene liegen. Sie sind also koplanar.

**Reflexionsgesetz** Da  $\mathbf{k}_e$  und  $\mathbf{k}_r$  nach (17.30) die gleiche Länge haben, muss nach (17.32)

$$k_z^r = -k_z^e, \quad k_e \sin \theta_e = k_r \sin \theta_r, \quad \boxed{\theta_e = \theta_r} \quad (17.33)$$

gelten. Das ist das *Reflexionsgesetz*.

**Brechungsgesetz** Nach (17.30) gilt  $k_e/\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} = k_d/\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ , also

$$\frac{k_e}{k_d} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2} \quad \boxed{n = \sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (17.34)$$

wobei wir mit  $n$  den Brechungsindex definiert haben. Da nach (17.32) die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{k}_e$  und  $\mathbf{k}_d$  identisch sind, gilt  $k_e \sin \theta_e = k_d \sin \theta_d$  (d.h. die Projektionen stimmen überein). Damit folgt das *Brechungsgesetz*

$$\boxed{\frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_d} = \frac{n_2}{n_1}}. \quad (17.35)$$

- Wertet man die in (17.29) noch enthaltenen Bedingungen für die Amplituden aus, so erhält man
  - die **Fresnel'schen Formeln** (Berechnung der Amplitudenverhältnisses von  $\vec{\mathcal{E}}_e$  und  $\vec{\mathcal{E}}_d$ , in Abhängigkeit der Polarisation des einfallenden Lichts)
  - das **Brewster'sche Gesetz** (Erzeugung linear polarisierten Lichts) und
  - die **Totalreflexion** (Faser-Optik).

Die Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes bestimmt also vollständig die relative Intensität von Reflektion und Transmission, sowie die zugehörigen Polarisierungsrichtungen.

- Nach (16.35) ist  $\epsilon(\omega)$  im Allgemeinen komplex, also auch  $k$  komplex. Eine elektromagnetische Welle wird also im Medium geschwächt (Absorption), wie wir im nächsten Abschnitt diskutieren werden.

## 17.4 Elektromagnetische Wellen in leitenden Materialien

Wir betrachten einen Ohm'schen Leiter mit ebener Grenzfläche und Leitfähigkeit  $\sigma$ . Solange kein Ladungstau auftritt, ist  $\rho_f = 0$  (vgl. Abschnitt 4.2) und es existiere eine stationäre Stromverteilung

$$\mathbf{j}_f = \sigma \vec{\mathcal{E}} \neq 0. \quad (17.36)$$

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (14.22) und (14.23) lauten dann

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} &= 0; & \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} &= 0; & \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} - \sigma \vec{\mathcal{E}} &= 0. \end{aligned} \quad (17.37)$$

Dabei ist  $\mu = \mu_0$ , das wir die magnetische Response des Materials vernachlässigen. Weiterhin wählen wir  $\epsilon = \epsilon_0$ , und nicht den Ausdruck (16.35), da wir zulassen, dass die Leitfähigkeit nach (16.32) komplex werden kann.

**Gedämpfte ebene Wellen** Als Lösung von (17.37) setzen wir

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}; \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \quad (17.38)$$

an, mit  $\mathbf{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$  und  $\mathbf{k} \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0$  (folgt aus  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 = \nabla \cdot \vec{\mathcal{H}}$ ). Wir erhalten

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu\omega}(\mathbf{k} \times \vec{\mathcal{E}}); \quad i(\mathbf{k} \times \vec{\mathcal{H}}) + i\epsilon\omega \vec{\mathcal{E}} - \sigma \vec{\mathcal{E}} = 0. \quad (17.39)$$

Benützt man  $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \vec{\mathcal{E}}) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}}k^2 = -\vec{\mathcal{E}}k^2$  und eliminiert man im letzten Ausdruck von (17.39)  $\vec{\mathcal{E}}$  oder  $\vec{\mathcal{H}}$ , so erhält man:

$$\frac{-ik^2}{\mu\omega} + i\epsilon\omega - \sigma = 0, \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right). \quad (17.40)$$

Wir sehen, dass nicht sowohl die Kreisfrequenz  $\omega$  als auch die Wellenzahl  $k$  reel sein kann. Da  $\omega$  von außen vorgegeben ist, haben wir es demnach komplexe Wellenzahlen, welche zu einer Dämpfung der Welle im Leiter führen.

**Komplexe Wellenzahlen** Man spaltet den Wellenvektor via Setzt man

$$k = \alpha + i\beta; \quad k^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \quad (17.41)$$

in einen Realteil  $\alpha$  und einen Imaginärteil  $\beta$  auf. Somit folgt aus (17.40)

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = \omega^2 \mu \epsilon \left( 1 + i \frac{\sigma' + i\sigma''}{\omega \epsilon} \right); \quad \sigma = \sigma' + i\sigma'',$$

wobei  $\sigma'$  und  $\sigma''$  der Real- und der Imaginärteil der dynamischen Leitfähigkeit ist.

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mu \epsilon \omega^2 - \omega \mu \sigma''; \quad 2\alpha\beta = \mu \omega \sigma'; \quad \alpha = \frac{\mu \omega \sigma'}{2\beta}. \quad (17.42)$$

Wir betrachten zunächst reele Leitfähigkeiten  $\sigma = \sigma'$ , was für kleine Frequenzen  $\omega$  i.A. der Fall ist. Eliminiert man in der ersten Gleichung  $\alpha$  mit Hilfe der dritten Gleichung, so erhalten wir dann

$$\left( \frac{\mu \omega \sigma'}{2\beta} \right)^2 - \beta^2 - \mu \epsilon \omega^2 = 0; \quad \beta^4 + (\mu \epsilon \omega^2) \beta^2 - \frac{1}{4} (\mu \omega \sigma')^2 = 0. \quad (17.43)$$

Da  $\beta$  reell sein soll, kommt als Lösung für  $\beta^2$  nur

$$\beta^2 = \frac{\mu \epsilon \omega^2}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma'}{\epsilon \omega} \right)^2} - 1 \right) \quad (17.44)$$

in Frage. Analog:

$$\alpha^2 = \frac{\mu \epsilon \omega^2}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma'}{\epsilon \omega} \right)^2} + 1 \right). \quad (17.45)$$

Für  $\sigma' \rightarrow 0$  folgt:

$$\beta \rightarrow 0; \quad \alpha^2 \rightarrow \mu \epsilon \omega^2 \quad (17.46)$$

in Einklang mit (17.26),  $\omega = k/\sqrt{\epsilon \mu}$ .

**Exponentielle Dämpfung** Da  $\mu \omega \sigma' \geq 0$ , müssen  $\alpha$  und  $\beta$  nach (17.42) gleiches Vorzeichen haben. Für  $\beta \neq 0$  (d.h.  $\sigma' \neq 0$ ) wird eine auf eine Metalloberfläche einfallende Lichtwelle im Metall exponentiell gedämpft, mit einer Eindringtiefe  $\sim 1/\beta$ . Für eine in positiver  $x$ -Richtung laufende ebene Welle wird nämlich

$$\exp\{i(kx - \omega t)\} = \exp\{i(\alpha x - \omega t)\} \exp\{-\beta x\}, \quad (17.47)$$

wobei mit  $\alpha > 0$  auch  $\beta > 0$  sein muss.

- Hohe Leitfähigkeit ( $\sigma' \rightarrow \infty$ ).

Die Lichtwelle wird praktisch total reflektiert, da die Eindringtiefe  $d \sim \beta^{-1} \sim 1/\sqrt{\sigma'}$  verschwindet (Spiegel).

- Hohe Frequenzen ( $\omega \rightarrow \infty$ ).

Nach der Drude Formel  $\sigma(\omega) = \sigma_0/(1 - i\omega\tau)$ , siehe (16.32), ist die Leitfähigkeit  $\sigma$  frequenzabhängig und komplex.  $\sigma$  wird für  $\omega \rightarrow \infty$  rein imaginär, also  $k^2$  in (17.40) reell; das Material wird *durchsichtig*. Diesen Effekt kann man mit harter Röntgenstrahlung nachweisen.

- Skin-Effekt

Als Folge der Dämpfung  $\beta$  können wegen (17.36) Wechselströme nur in einer Oberflächenschicht des Leiters fließen, deren Dicke durch  $\beta^{-1}$  bestimmt ist (**Skin-Effekt**).

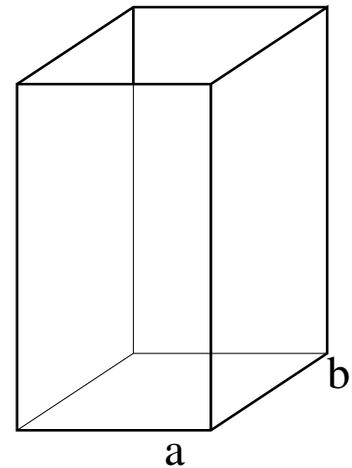
## 17.5 Wellen in einem metallischen Hohlleiter

Wir betrachten die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem unendlich langen leeren Rohr mit rechteckigem Querschnitt (Seiten  $a$  und  $b$ ).

Die Rohrwand bestehe aus ideal leitendem Material ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). Die Lösung der Feldgleichungen ist von der Form einer propagierenden Welle, also pro Komponente wie

$$g(\mathbf{r}, t) = f(x, y)e^{i(kz - \omega t)},$$

wobei  $f$  eine noch zu bestimmende Funktion ist und  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .



**Randbedingungen** Die Randbedingungen für die Komponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  an den Wänden folgen aus der Tatsache, dass im Metall kein elektrisches Feld existieren kann.

- Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes sind nach (17.5) stetig und im Metall nicht vorhanden. Demzufolge muss die Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}$  verschwinden.
- Die Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  muss nach (17.3) stetig sein. Da es aber im Metall kein elektrisches Feld gibt, kann dort das Magnetfeld allenfalls statisch sein, und das ist bei einer sich ausbreitenden Welle nicht möglich. Also verschwindet auch die Normalkomponente von  $\mathbf{B}$ .

Wir erhalten also die Randbedingungen

$$\begin{aligned} E_y = E_z = B_x = 0 & \quad \text{für} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases} \\ E_x = E_z = B_y = 0 & \quad \text{für} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = b \end{cases} \end{aligned}$$

Für die einzelnen Komponenten macht man jetzt einen Ansatz, dessen Berechtigung durch Einsetzen in die Maxwell-Gleichungen und Bestimmung von freien Konstanten entsteht:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \beta \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \gamma \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \quad (17.48)$$

und

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \beta' \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \gamma' \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \quad (17.49)$$

$$m, n \in N_0; \quad \epsilon = \epsilon_0; \quad \mu = \mu_0 .$$

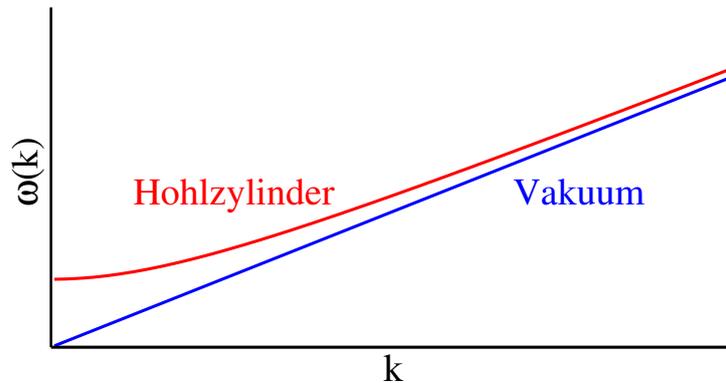
Innerhalb des Hohlleiters herrsche Vakuum.

**Minimale Frequenz** Die Ansätze (17.48) und (17.49) müssen die Wellengleichung

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g(\vec{r}, t) = 0 \quad (17.50)$$

erfüllen, und zwar für jede einzelne Komponente  $g(\vec{r}, t)$  von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ . Durch Einsetzen lässt sich bestätigen, dass die Ansätze wirklich (17.50) erfüllen, und zwar unter der Bedingung

$$\left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} .$$



Aus dieser Gleichung kann man sofort eine "Ausbreitungsbedingung" für Wellen im Hohlleiter herleiten:  $k$  ist nur dann reell, wenn

$$\omega > \omega_{nm}, \quad \text{mit} \quad \omega_{nm} = c \sqrt{\left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2}$$

gilt. Man sieht, dass sich die Dispersionsbeziehung im Hohlleiter von jener im freien Vakuum unterscheidet, solange  $a$  und  $b$  endlich sind. Das war zu erwarten. Unterhalb einer gewissen Grenzfrequenz  $\omega_{10}$  (für  $a > b$ ) ist überhaupt keine Wellenausbreitung möglich! Diese Frequenz geht mit wachsendem  $a$  gegen 0.

**Ausbreitungs-Moden** Für ebene Wellen im Vakuum ist sowohl das elektrische, als auch das magnetische Feld transversal zur  $\mathbf{k}$ , also zur Ausbreitungsrichtung, siehe Abschnitt 9.2. Dieses ist, aufgrund der Randbedingungen, für die Ausbreitung von Mikrowellen im Hohlleiter nicht mehr der Fall.

Man spricht von Ausbreitungs-Moden, welche sich aus der Bestimmung der Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  und  $\gamma'$  in (17.48) und (17.49) ergeben. Man findet:

- TM-Welle

Das Magnetfeld ist transversal,  $B_z = 0$ . Die niedrigste ausbreitungsfähige Frequenz für eine TM-Welle im Hohlleiter ist durch

$$\omega_{TM} = c\pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

gegeben.

- TE-Welle

Das elektrische Feld ist transversal,  $E_z = 0$ . In diesem Fall hat man schon nichttriviale Lösungen, falls einer der beiden Indizes  $n$  und  $m$  von Null verschieden ist. Die niedrigste ausbreitungsfähige Frequenz ist

$$\omega_{TE} = \frac{c\pi}{a},$$

falls  $a > b$ .

- TEM-Welle

In Hohlleitern sind Wellen, die transversal als auch im elektrischem sowie im magnetischen Anteil (TEM-Wellen) sind, nicht ausbreitungsfähig.

Allg. ist die Bestimmung der propagierenden Moden in Wellenleitern, wie Hohlleiter für Mikrowellen oder Glasfaser für Licht, für technische Anwendungen essentiell.