

Teil V

Quellen elektromagnetischer  
Strahlung

# Kapitel 11

## Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen

### 11.1 Problemstellung

Bei Anwesenheit von Ladungen haben wir die inhomogenen Gleichungen (vgl. (7.9), (7.10))

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (11.1)$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.2)$$

mit der Nebenbedingung (Lorentz-Eichung)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (11.3)$$

zu lösen. Das Problem ist also die Lösung einer inhomogenen Wellengleichung

$$\square \Psi(\mathbf{r}, t) = -\gamma(\mathbf{r}, t), \quad \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (11.4)$$

wobei  $\Psi$  für  $\Phi$ ,  $A_i$  und  $\gamma$  für  $\rho/\epsilon_0$ ,  $\mu_0 j_i$  steht.

**Green'schen Funktionen** Die allgemeine Lösung von (11.4) setzt sich aus der (siehe Abschnitt 10) allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung (9.8) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Wellengleichung zusammen. Zur Konstruktion einer speziellen Lösung von (11.4) benutzen wir die Methode der *Green'schen Funktionen*. Mit der Definition der Green'schen Funktion,

$$\square G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (11.5)$$

können wir als (formale) Lösung

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \gamma(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt' \quad (11.6)$$

angeben, wie man durch Einsetzen von (11.6) in (11.4) direkt bestätigt. Dabei haben wir die Reihenfolge von Integration bzgl.  $\mathbf{r}'$ ,  $t'$  und Differentiation bzgl.  $\mathbf{r}$ ,  $t$  vertauscht.

Entsprechende Green'sche Funktionen können für alle inhomogene lineare Differentialgleichungen, wie z.B. die Schrödinger Gleichung in der Quantenmechanik, verwendet werden.

**Symmetrien und Kausalität** Die Green'sche Funktion hat zwei fundamentale Eigenschaften,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') \quad (11.7)$$

aufgrund der Invarianz von (11.5) gegen Raum- und Zeit-Translationen, sowie

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = 0 \quad \text{für } t < t' \quad (11.8)$$

wegen des Kausalitätsprinzips: Die Wirkung kann nicht vor der Ursache kommen.

## 11.2 Green'sche Funktion für den statischen Fall

Wir betrachten als Vorübung den (schon bekannten) Fall statischer Felder, z.B. des elektrostatischen Feldes. Die Coulomb Potential  $\Phi$  der Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (11.9)$$

ist mit

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} d^3r' \quad (11.10)$$

durch die Green'schen Funktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (11.11)$$

gegeben, welche die Differentialgleichung

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (11.12)$$

erfüllt.

**Beweis für  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$**  Mit  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  und  $R = |\mathbf{R}|$  finden wir

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{R}\right) &= \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{R}\right) = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right) \\ &= -\frac{1}{R^3} \nabla \cdot \mathbf{R} + \frac{3}{R^4} \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}\right) = -\frac{3}{R^3} + \frac{3}{R^3} = 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Definitionsgleichung (11.12) für die Green'sche Funktion im statischen Fall für  $R \neq 0$  erfüllt.

**Beweis für  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow 0$**  Man kann in einem Volumenintegral vom Typ

$$\int f(\mathbf{R}) \Delta\left(\frac{1}{R}\right) d^3R \quad (11.13)$$

den Integrationsbereich auf eine kleine Kugel vom Radius  $a$  mit Mittelpunkt bei  $R = 0$  beschränken,

$$\int f(\mathbf{R}) \Delta \left( \frac{1}{R} \right) d^3 R = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\text{Kugel}(a)} f(\mathbf{R}) \Delta \left( \frac{1}{R} \right) d^3 R . \quad (11.14)$$

Ist nun  $f$  stetig um 0, so kann man  $f$  aus dem Integral herausziehen

$$\int f(\mathbf{R}) \Delta \left( \frac{1}{R} \right) d^3 R = \lim_{a \rightarrow 0} f(\mathbf{R} = 0) \int_{\text{Kugel}(a)} \Delta \left( \frac{1}{R} \right) d^3 R , \quad (11.15)$$

und erhält nach dem Gauß'schen Satz

$$\begin{aligned} \int_{\text{Kugel}(a)} \Delta \left( \frac{1}{R} \right) d^3 R &= \int_{\text{Kugel}(a)} \nabla \cdot \left( \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) d^3 R \\ &= \int_{F(a)} \left( \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) \cdot d\mathbf{F} = - \int_{F(a)} \frac{1}{R^2} R^2 d\Omega = -4\pi . \end{aligned}$$

Also ist mit

$$\int f(\mathbf{R}) \Delta \left( \frac{1}{R} \right) d^3 R = -4\pi f(0) \quad (11.16)$$

die Definitionsgleichung (11.12) für die Green'sche Funktion im statischen Fall für allgemeine  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  erfüllt.

### 11.3 Green'sche Funktion für zeitabhängige Quellen

**Laufzeit** Da (11.5) die Wellengleichung für eine zeitlich und räumlich punktförmige Quelle darstellt, muss  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t')$  eine Kugelwelle darstellen, welche den Ort  $\mathbf{r}$  zur Zeit  $t = t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$  erreicht, wenn die sie auslösende Störung zur Zeit  $t'$  am Ort  $\mathbf{r}'$  stattfindet. Dabei ist

$$\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

die Zeit welche das Licht braucht um von  $\mathbf{r}'$  nach  $\mathbf{r}$  zu gelangen.

**Kugelwellen** Eine Kugelwelle ist nur vom Radius  $R = |\mathbf{R}|$  abhängig und muss quadratintegabel sein, wenn die Gesamtenergie endlich sein soll. Wir machen daher nach (9.19) den Ansatz

$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{g(\tau - R/c)}{R} , \quad (11.17)$$

mit  $\tau = t - t'$ . Hier ist also  $R/c$  die Laufzeit.

**Laplace-Operator in Kugelkoordinaten** Wir verwenden die Darstellung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \text{Winkelanteil} \quad (11.18)$$

des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten und bestimmen  $g$  in (11.17) indem wir (11.17) in (11.5) einsetzen,

$$\begin{aligned}
\Delta G &= g\Delta\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R}\Delta g + 2\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \cdot \nabla g \\
&= -4\pi g\delta(\mathbf{R}) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}g + \frac{2}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}g - \frac{2}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}g \\
&= -4\pi g\delta(\mathbf{R}) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}g.
\end{aligned} \tag{11.19}$$

Die erhaltene einfach Form ist der Grund bei der Definition der Green'sche Funktion in (11.17) den Faktor  $1/R$  explizit herauszuziehen. Wir haben

$$\nabla g = \hat{e}_r \frac{\partial g}{\partial R} + \text{Winkelanteil}, \tag{11.20}$$

verwendet, wobei  $\hat{e} = \mathbf{r}/r$  der radiale Einheitsvektor ist.

**Green'sche Funktionen für zeitabhängige Quellen** Wir setzen nun (11.19) in die Bestimmungsgleichung (11.5) für die Green'sche Funktion ein und erhalten

$$\begin{aligned}
-\delta(\mathbf{R})\delta(\tau) &\equiv \square G(R, \tau) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)G(R, \tau) \\
&= -4\pi g(\tau - R/c)\delta(\mathbf{R}) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}g(\tau - R/c) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\frac{g(\tau - R/c)}{R}.
\end{aligned} \tag{11.21}$$

Diese Bestimmungsgleichung für  $g(\tau - R/c)$  können wir lösen indem wir die  $\delta$ -Funktionen auf der linke Seite umschreiben,

$$\delta(\mathbf{R})\delta(\tau) = \delta(\mathbf{R})\delta(\tau - R/c).$$

Das ist möglich da ja  $\delta(\mathbf{R})$  auch  $R = 0$  impliziert. Damit erhalten wir

$$\delta(\mathbf{R})\left[4\pi g(\tau - R/c) - \delta(\tau - R/c)\right] = \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}g(\tau - R/c) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\frac{g(\tau - R/c)}{R}$$

für (11.21), mit der Lösung

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)g(\tau - R/c) = 0, \quad 4\pi g(\tau - R/c) = \delta(\tau - R/c).$$

Dabei ist die erste Gleichung trivialerweise erfüllt da  $g$  nur eine Funktion von  $\tau - R/c$  ist. Mit der Kausalitätsforderung  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') = 0$  für  $t < t'$  erhalten wir also

$$\boxed{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') = \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \tag{11.22}$$

für  $t > t'$

und damit nach (11.6) die allgemeine formale Lösung

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \gamma(\mathbf{r}', t')$$

für die elektromagnetischen Potentiale.

**Retardierte Green'sche Funktionen** Die Inhomogenität in (11.5) stellt eine punktförmige Quelle dar, welche zur Zeit  $t'$  am Ort  $\mathbf{r}'$  für eine (infinitesimal) kurze Zeit angeschaltet wird. Die von dieser Quelle hervorgerufene Störung breitet sich als Kugelwelle mit der Geschwindigkeit  $c$  aus. Es muss also gelten:

- Die Kugelwelle  $G$  muss für  $t < t'$  nach dem Kausalitätsprinzip verschwinden. Man nennt Green'sche Funktionen welche das Kausalitätsprinzip erfüllen auch *retardierte Green'sche Funktionen*.
- Sie muss am Ort  $\mathbf{r}$  zur Zeit  $t = t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$  ankommen, da elektromagnetische Wellen sich mit der (endlichen) Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum ausbreiten.
- Da die Energie der Welle auf einer Kugeloberfläche verteilt ist, sollte  $G$  asymptotisch wie  $R^{-1}$  verschwinden.

Die Green'sche Funktion (11.22) erfüllt genau diese Forderungen. Gleichung (11.6) zeigt, wie man die Potentiale  $\mathbf{A}$ ,  $\Phi$  zu gegebener Quellen-Verteilung  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  aus den Beiträgen für punktförmige Quellen aufbauen kann.

## 11.4 Retardierte Potentiale

Mit (11.6) und (11.22) lauten die Lösungen von (11.1) und (11.2) für lokalisierte Ladungs- und Strom-Verteilungen

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}', t') \delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' dt' \quad (11.23)$$

und

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' dt'. \quad (11.24)$$

Die Lösungen (11.23) und (11.24) sind über (11.3) bzw. die Ladungserhaltung (6.3) miteinander verknüpft. Die Ausführung der Integrationen in (11.23) und (11.24) wollen wir anhand von zwei praktisch wichtigen Spezialfällen untersuchen; dabei werden wir besonders auf die im Argument der  $\delta$ -Distribution enthaltene Retardierung achten.

**Quasistationäre Felder** Vernachlässigt man die Retardierung in (11.23) und (11.24),

$$\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \rightarrow \delta(t - t'), \quad (11.25)$$

so erhält man *quasistationäre Felder*:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (11.26)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (11.27)$$

welche in der Theorie elektrischer Netzwerke und Maschinen auftreten. Die Näherung (11.25) ist gerechtfertigt, wenn  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  sich während der Zeit, die eine elektromagnetische Welle braucht, um die Distanz  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  zurückzulegen, (praktisch) nicht ändert.

**Zeitlich periodische Quellen-Verteilungen** Als erste Anwendung betrachten wir zeitlich periodische Ströme und Ladungsverteilungen, wie sie typischerweise in Antennen auftreten.

$$\rho = \rho(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t); \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t). \quad (11.28)$$

Dann folgt aus (11.23), (11.24):

$$\Phi = \Phi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t); \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (11.29)$$

mit ( $k = \omega/c$ ) und

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (11.30)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (11.31)$$

Die zugehörigen Differentialgleichungen ergeben sich aus (11.1), (11.2) und (11.28) zu:

$$(\Delta + k^2)\Psi(\mathbf{r}) = -\gamma(\mathbf{r}), \quad (11.32)$$

wo  $\Psi$  für  $\Phi, A_i$  und  $\gamma$  für  $\rho/\epsilon_0, \mu_0 j_i$  steht. Die Lösungen (11.30) und (11.31) können wir dann mit der zu (11.32) gehörenden Green'schen Funktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (11.33)$$

als

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int \gamma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) d^3r' \quad (11.34)$$

schreiben. Die Diskussion der Integrale (11.30), (11.31) werden wir später wieder aufgreifen.

## 11.5 Liénard-Wiechert Potentiale

**Potentiale bewegte Punktladungen** In vielen Anwendung ist es wichtig die retardierten Potential einer einzelnen Punktladung  $q$  zu kennen, welche sich auf der Bahn  $\mathbf{r}'(t)$  bewegt. Die bewegte Punktladung wird durch

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)); \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q \mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad (11.35)$$

beschrieben. In (11.23) kann die  $\mathbf{r}'$  - Integration ausgeführt werden,

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')) \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' dt' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} dt',\end{aligned}\quad (11.36)$$

und analog

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}(t') \delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} dt'. \quad (11.37)$$

**Rechnen mit  $\delta$ -Funktionen** Die Integrale (11.36), (11.37) haben die Form

$$\int g(x) \delta(f(x)) dx = \int g(x) \delta(f'(x_0)(x - x_0)) dx = \frac{1}{|f'(x_0)|} \int g(x) \delta(x - x_0) dx,$$

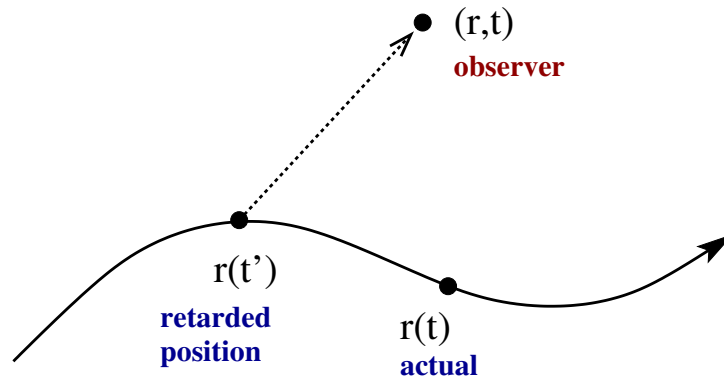
wobei wir  $f(x)$  um die Nullstelle  $x_0$  entwickelt haben,  $f(x_0) = 0$ . Falls es mehr als eine Nullstelle gibt, so ist eine Summe über alle Nullstellen durchzuführen. In unserem Falle hat

$$f(t') = (t' - t) + |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|/c \quad (11.38)$$

nur eine Nullstelle als Funktion von  $t'$ , da das Teilchen sonst an verschiedenen Orten gleichzeitig sein würde. Damit erhalten wir

$$\int g(t') \delta(f(t')) dt' = \frac{g(t'_0)}{|f'(t'_0)|}; \quad f(t'_0) = 0. \quad (11.39)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Nullstelle  $t'_0$  implizit eine Funktion der Zeit  $t$  ist.



**Nullstelle** Um die Nullstelle  $t'_0$  von  $f(t')$  zu berechnen führen wir mit (11.38) die Entwicklung um  $t'_0$  explizit durch:

$$f(t') \approx f(t'_0) + (t' - t'_0) \left[ 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')| \right],$$

wobei  $f(t'_0) = 0$  ist. Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t'); \quad \mathbf{v}(t'_0) = \dot{\mathbf{r}}(t'_0) = \left. \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{r}(t') \right|_{t'=t'_0}$$



für den Abstand  $\mathbf{R}$  lässt sich somit  $f(t')$  für  $t'$  in der Nähe von  $t'_0$  als

$$f(t') = (t' - t'_0) \left( 1 - \frac{\mathbf{R}(t'_0) \cdot \mathbf{v}(t'_0)}{c |\mathbf{R}(t'_0)|} \right) \equiv (t' - t'_0) \kappa(t'_0) \quad (11.40)$$

schreiben, mit

$$\kappa(t'_0) = 1 - \frac{\mathbf{R}(t'_0) \cdot \mathbf{v}(t'_0)}{c |\mathbf{R}(t'_0)|} = 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad (11.41)$$

wobei die Nullstelle  $t_0$  von  $t$  abhängt.

**Liénard-Wiechert Potentiale** Also erhalten wir aus (11.36) und (11.37) die elektromagnetischen Potentiale bewegter Ladungen

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t'_0)\kappa(t'_0)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t'_0) - \mathbf{R}(t'_0) \cdot \mathbf{v}(t'_0)/c} \quad (11.42)$$

und analog

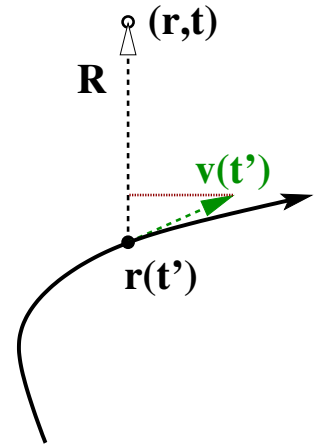
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v}(t'_0)}{R(t'_0)\kappa(t'_0)} = \mu_0\epsilon_0 \mathbf{v}(t'_0) \Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\mathbf{v}(t'_0)\Phi(\mathbf{r}, t)}{c^2}. \quad (11.43)$$

Die Ausdrücke (11.42) und (11.43) nennt man *Liénard-Wiechert Potentiale*.

**Relativistische Verkürzung** Der „effektive Abstand“ zur Ladung ist durch die Projektion der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Teilchens auf den momentanen Verbindungsvektor  $\mathbf{R}$  zum Beobachter relativistisch verkürzt,

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \left( 1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \right); \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

$\kappa(t') = 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c$  aus (11.41) ist also die relative relativistische Verkürzung.



**Statischer Grenzfall** Der Grenzfall  $v \rightarrow 0$  für die Liénard-Wiechert Potentiale (11.42) und (11.43) ergibt

$$\mathbf{A} \rightarrow 0; \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (11.44)$$

das elektrische Potential einer unbewegten Punktladung.

## 11.6 Strahlung bewegter Punktladungen

Von **Abstrahlung** elektromagnetischer Wellen durch lokalisierte Ladungs- und Strom-Verteilungen sprechen wir, wenn der Energiefluss  $\mathbf{S}$  durch die unendlich ferne Oberfläche nicht verschwindet,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{F} \neq 0; \quad \mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (11.45)$$

Das bedeutet, dass die Felder  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  nicht stärker als  $R^{-1}$  abfallen dürfen, da die Oberfläche wie  $R^2$  anwächst. Solche Felder nennt man **Strahlungsfelder**, im Gegensatz zu den **statischen** Feldern, welche mit  $R^{-2}$  abfallen.

**Fernfelder** Wir sind nun an dem Verhalten der elektromagnetischen Felder bewegter Ladungen im Limes großer Distanzen interessiert. Dort breitet sich die Strahlung frei aus und werden ebenen Wellen immer ähnlicher, für welche nach (9.36)

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{n} \times \mathbf{E}}{c}$$

gilt, wobei  $\hat{n}$  die Ausbreitungsrichtung ist. Daher betrachten wir bis auf weiteres nur das elektrische Feld.

**Integraldarstellung der Felder bewegter Punktladungen** Wir wollen nun zeigen, dass beschleunigte Punktladungen strahlen. Dazu müssen wir die zu den Liénard-Wiechert Potentialen (11.42) und (11.43) gehörenden Felder über

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (11.46)$$

berechnen, wobei wir für  $\Phi, \mathbf{A}$  die Form (11.36), (11.37) benutzen wollen. Mit den Abkürzungen

$$\nabla f(R) = \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial R}; \quad \mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t'); \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (\equiv \hat{e}_r)$$

erhält man

$$\begin{aligned} -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}} \int \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} dt' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left\{ \frac{\mathbf{n}(t')}{R^2(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) - \frac{\mathbf{n}(t')}{cR(t')} \delta'\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{-\mu_0 q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{v}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}{c}\right) dt' \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\mathbf{v}(t')}{R(t')} \delta'\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right). \end{aligned}$$

Dabei bedeutet  $\delta'(t' - t + R(t')/c)$  die Ableitung nach ihrem Argument  $\xi = t' - t + R(t')/c$ . Mit  $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$  erhalten wir für das elektrische Feld

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left\{ \frac{\mathbf{n}(t')}{R^2(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) + \frac{\mathbf{v}(t')/c - \mathbf{n}(t')}{cR(t')} \delta'\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \right\} \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\mathbf{v}(t')/c - \mathbf{n}(t')}{cR(t')} \delta'\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right),\end{aligned}\quad (11.47)$$

wobei der Term  $\sim 1/R^2$  nicht zur Abstrahlung beiträgt.

**Felder bewegter Punktladungen** Zur Ausführung der  $t'$  - Integration in den Integraldarstellungen (11.47) benutzen wir

$$\delta'(\xi) = \frac{1}{\kappa(t')} \frac{d}{dt'} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right), \quad \xi = t' - t + R(t')/c \quad (11.48)$$

mit  $\kappa(t') = 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c$  aus (11.41). Somit wird der Ausdruck (11.47) für das elektrische Feld im Fernfeld mit Hilfe einer partiellen Integration zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dt'} \left( \frac{\mathbf{v}(t')/c - \mathbf{n}(t')}{\kappa(t')R(t')} \right) \quad (11.49)$$

im Fernfeld. Um die Differentiation nach  $t'$  auszuführen bilden wir

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt'} = \frac{d}{dt'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} = \frac{\mathbf{R}}{R^2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) - \frac{\mathbf{v}}{R} = \frac{1}{R} ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v}). \quad (11.50)$$

Also können wir  $\dot{\mathbf{n}}$  vernachlässigen, da es wie  $\sim 1/R$  abfällt. Weiterhin haben wir

$$\frac{d}{dt'}(\kappa R) = \frac{d}{dt'} \left( R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) = \frac{v^2}{c} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - \frac{R}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})$$

mit  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|$  und der Beschleunigung  $\mathbf{b}$  und

$$\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{v}}{dt'}; \quad \dot{R} = \frac{1}{R} \mathbf{R} \cdot (-\mathbf{v}) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}.$$

Somit finden wir den führenden Term

$$\frac{d}{dt'} \frac{1}{\kappa(t')R(t')} \approx \frac{-1}{\kappa^2 R^2} \frac{-R}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}}{c\kappa^2 R} \quad (11.51)$$

im Fernfeld.

**Entwicklung der Felder nach großen Entfernungen** Setzen wir (11.50), (11.51) in (11.49) ein und ordnen wir nach Potenzen von  $R^{-1}$ , so erhalten wir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{c^2 \kappa^3 R} \left( \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) - \kappa \mathbf{b} \right) \right\}_{ret} + O(R^{-2}). \quad (11.52)$$

Die letzteren Terme sind im Hinblick auf die Ausstrahlungsbedingung (11.45) uninteressant. Dieser Ausdruck lässt sich mit Hilfe der Identität

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \left( \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{b} \right) &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) - \mathbf{b} \left( \mathbf{n}^2 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right) \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) - \kappa \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (11.53)$$

umformen, wobei wir  $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$  benutzt haben.

**Energiestromdichte** Wie Eingangs erwähnt erhalten wir die magnetische Induktion aus der Relation

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{c}, \quad (11.54)$$

welche generell für den asymptotischen Bereich gilt. Wir finden dann für den Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})}{\mu_0 c} = \frac{1}{\mu_0 c} (\mathbf{n} E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})) = \frac{\mathbf{n}}{\mu_0 c} E^2, \quad (11.55)$$

da  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$  im Fernfeld. Mit (11.52) und (11.53):

$$\mathbf{S} = \frac{q^2 \mathbf{n}}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 \kappa^6 R^2} \left( \mathbf{n} \times \left[ \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{b} \right] \right)^2. \quad (11.56)$$

Hier haben wir  $1/(\epsilon_0^2 \mu_0) = c^2/\epsilon_0$  verwendet. Da  $|\mathbf{S}| \sim R^{-2}$ , ist die Ausstrahlungsbedingung (11.45) erfüllbar.

**Nur beschleunigte Ladungen strahlen** Unser Ergebnis (11.56) besagt, dass nur beschleunigte Punktladungen mit  $\mathbf{b} \neq 0$  strahlen.

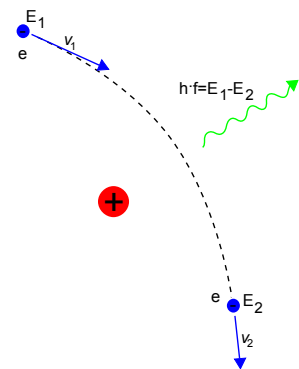
Dass gradlinig, gleichförmig bewegte Punktladungen ( $\mathbf{b} = 0$ ) nicht strahlen, folgt ohne jede Rechnung aus dem Relativitätsprinzip: Das Ruhe-System der Punktladung ist dann ein Inertialsystem, in dem das elektrische Feld das Coulomb-Feld ist und das magnetische Feld, per Definition, verschwindet, so dass  $\mathbf{S} = 0$  wird.

**Anwendungen** Unser Ergebnis (11.56) für die Strahlung beschleunigter Ladungen für viele Phänomene und Anwendungen von Bedeutung.

### • Bremsstrahlung

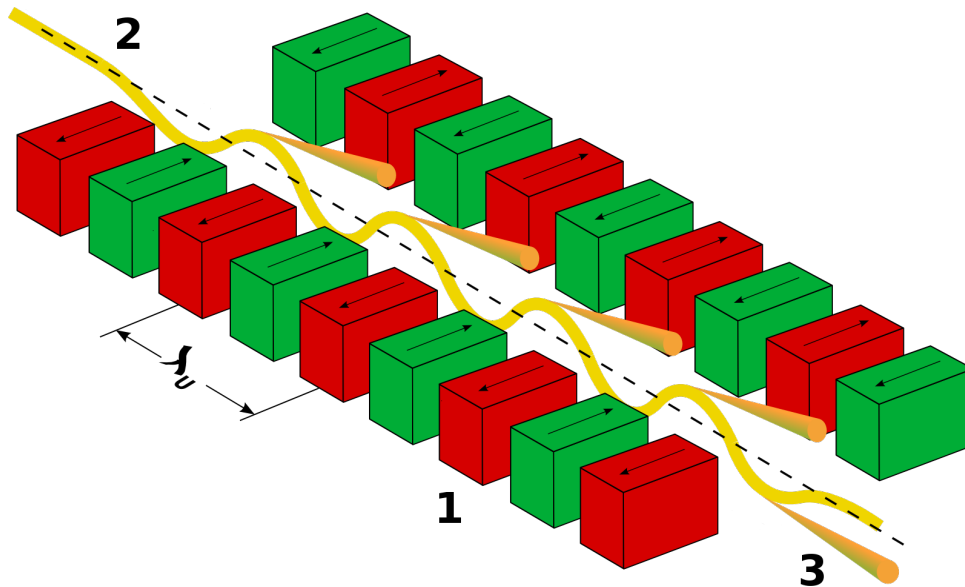
Wenn ein geladenes Teilchen (z.B. Elektron) in einem äußeren Feld abgebremst wird (z.B. beim Aufprall auf ein Target), dann entsteht Bremsstrahlung. Daraus resultiert das kontinuierliche **Röntgenspektrum**.

Mikroskopische entsteht der ‘Aufprall’ dadurch, dass das Teilche durch die Ladungen abgelenkt wird.



- **Synchrotron-Strahlung**

Die Bewegung geladener Teilchen auf Kreisbahnen ist auch eine beschleunigte Bewegung. Die dabei entstehende Strahlung ist ein wesentliches Problem bei zyklischen Teilchenbeschleunigern (Synchrotron); ein Teil der zugeführten Energie geht durch Strahlung verloren. Wiederholt man das Verfahren periodisch erhält man einen **Undulator**.



- **Strahlungsdämpfung**

Im klassischen Atommodell bewegen sich die gebundenen Elektronen auf Kreis- bzw. Ellipsenbahnen um den Atomkern. Dabei strahlen sie als beschleunigte Ladungen kontinuierlich elektromagnetische Wellen ab. Der resultierende Energieverlust führt zu instabilen Bahnen und schließlich zum Kollaps des Atoms im klassischen Modell. Dieser Widerspruch zur experimentellen Beobachtung wird erst in der Quantentheorie bzw. Quantenelektrodynamik (QED) aufgelöst.

# Kapitel 12

## Multipolstrahlung

### 12.1 Langwellen-Näherung

Antennen emittieren Strahlung aufgrund zeitlich oszillierender Ströme. Wir sind nun daran interessiert zu berechnen in welche Richtung abgestrahlt wird. Wir beschränken uns also auf harmonisch oszillierende Strahlungsquellen.

**Lorentz Eichung für oszillierende Quellen** Für eine Quellen-Verteilung der Form

$$\rho = \rho(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t); \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (12.1)$$

hatten wir in Abschnitt 11.4

$$\Phi = \Phi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t); \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (12.2)$$

gefunden, sowie (mit  $k = \omega/c$ )

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (12.3)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'.$$

Bei der Diskussion von (12.3) können wir uns im Folgenden auf  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  beschränken, da  $\mathbf{A}$  und  $\Phi$  direkt über die Lorentz-Konvention

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (12.4)$$

zusammenhängen. Also, zusammen mit (12.2),

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{c^2}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (12.5)$$

Alternativ können wir für die Felder auch die Beziehungen

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{E}}{c}; \quad \mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e} \quad (12.6)$$

benutzen, welche allg. für Strahlungsfelder in der Lorentz-Eichung gelten, wobei  $\mathbf{e}$  die Ausbreitungsrichtung ist.

**Langwellen - Näherung** Zur weiteren Behandlung von (12.3) machen wir die Langwellen - Näherung

$$d_0 \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (12.7)$$

wobei  $d_0$  den Radius einer Kugel angibt, welche die Ladungs- und Stromverteilung umfasst.

- Für die optische Strahlung von Atomen ist

$$d_0 \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}; \quad \lambda \approx 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

- Für die  $\gamma$ -Strahlung von Atomkernen:

$$d_0 \approx 10^{-15} \text{ m}; \quad \lambda \approx 10^{-13} \text{ m} .$$

Bei der Diskussion von (12.3) sind nun die Längen  $d$ ,  $\lambda$  und  $r$  wesentlich.

**Nahzone:**  $d_0 < r \ll \lambda$  In der Nahzone gilt

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{2\pi}{\lambda}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll 1, \quad (12.8)$$

und wir erhalten:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'; \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (12.9)$$

Der Ortsanteil der Potentiale zeigt nach (12.9) die gleiche Struktur wie in Elektro- und Magnetostatik.

Angesichts der Zeitabhängigkeit (12.2) spricht man von **quasistatischen Feldern**, für die  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  wie  $R^{-2}$  abfallen, so dass die Ausstrahlungsbedingung (11.45) nicht erfüllt ist.

Das bedeutet nur, dass die Nahfelder nicht zur Abstrahlung beitragen, und nicht dass es keine Abstrahlung gäbe, welche durch die Fernfelder zustande kommt.

**Fernzone:**  $d_0 \ll \lambda \ll r$  Wegen

$$kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1 \quad (12.10)$$

können wir dann die Taylor-Reihe in  $(\mathbf{r}'/r)$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sum_n \frac{(-)^n}{n!} (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n r \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} = r \left( 1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) \quad (12.11)$$

in (12.3) benutzen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \dots & (12.12) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{\exp(ikr)}{r} \underbrace{\exp(-ik\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r)}_{1 - i\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}k} \underbrace{\left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right)^{-1}}_{1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \underbrace{\left\{1 + \left(\frac{1}{r} - ik\right) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}') + \dots\right\}}_{\approx \left\{1 - i\frac{\omega}{c}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}')\right\}}
\end{aligned}$$

mit  $k = \omega/c$  und dem Richtungsvektor

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (12.13)$$

**Multipole** Zu beachten ist, daß für das Strahlungsfeld nur der Term  $\sim O(r^{-1})$  für das Vektorpotential relevant ist. Dieser Term hat viele Beiträge mit jeweils unterschiedlichen Winkelabhängigkeiten, den sog. *Multipolen*. Wir analysieren nun die wichtigsten Multipole und werden in Kapitel 13 dann die systematische Gruppierung der einzelnen Term in der Form von Multipolen diskutieren.

## 12.2 Elektrische Dipol-Strahlung

**Inversionssymmetrie** Zum ersten Term in (12.12)

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (12.14)$$

trägt nur die Komponente des Stromes bei, welche inversionssymmetrisch ist.

$$j_s(r') = \frac{1}{2}(j(r') + j(-r')); \quad j_a(r') = \frac{1}{2}(j(r') - j(-r')),$$

mit

$$j_s(r') = j_s(-r'); \quad j_a(r') = -j_a(-r'). \quad (12.15)$$

Zum Integral in (12.14) trägt nur der inversionssymmetrische Anteil  $j_s$  der Stromverteilung bei.

**Elektrisches Dipolmoment** Analog zu der Diskussion im Abschnitt 5.4 formen nun (12.14) um. Allerdings gilt nun  $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\dot{\rho} \neq 0$ , mit der Konsequenz, dass  $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$  nicht mehr verschwindet.

$$\begin{aligned}
\int_V j_i d^3r' &= \int_V \nabla' \cdot (x'_i \mathbf{j}) d^3r' - \int_V x'_i (\nabla' \cdot \mathbf{j}) d^3r' & (12.16) \\
&= \int_F x'_i (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}') - \int_V x'_i (-\dot{\rho}) d^3r' = -i\omega \int_V x'_i \rho(\mathbf{r}') d^3r',
\end{aligned}$$



Da die Ladungs- und Stromverteilung räumlich begrenzt sind sowie unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} - i\omega\rho = 0. \quad (12.17)$$

Mit der Definition

$$\mathbf{d} = \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3r$$

für das elektrische Dipolmoment wird  $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$  dann zu

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \mathbf{d}, \quad (12.18)$$

der Strahlung welche durch einen oszillierenden elektrischen Dipol erzeugt wird.

**Felder der elektrischen Dipolstrahlung** Für die Felder folgt mit

$$\nabla \times \frac{\mathbf{d}}{r} = \frac{-1}{r^2} \nabla \times (r\mathbf{d}) = \frac{-1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{d}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

(da  $\epsilon_{ijk}\partial_j r d_k = \epsilon_{ijk}r_j d_k/r$ ) und

$$\nabla \times \exp(ikr) \mathbf{d} = ik \exp(ikr) \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{d} = i\frac{\omega}{c} \exp(ikr) \mathbf{e} \times \mathbf{d},$$

und somit

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi c} \omega^2 \frac{\exp(ikr)}{r} (\mathbf{e} \times \mathbf{d}), \quad (12.19)$$

wobei wir uns auf die Terme  $\sim r^{-1}$  beschränkt haben.

**Energiestromdichte** Das entsprechende elektrische Feld für die elektrische Dipolstrahlung (12.19) folgt aus (12.6),

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = c (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{e}). \quad (12.20)$$

Damit können wir nun die Energiestromdichte  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$  für die elektrische Dipolstrahlung zu

$$\mathbf{S}_0 = \frac{c}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{e}) \times \mathbf{B}_0 = \frac{c}{\mu_0} (\mathbf{e}(\mathbf{B}_0)^2 - \mathbf{B}_0(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{e})) = \frac{c}{\mu_0} \mathbf{e}(\mathbf{B}_0)^2 \quad (12.21)$$

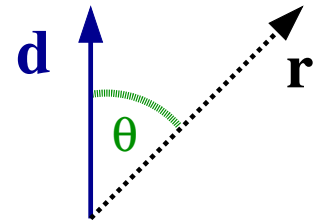
berechnen (vergl. (11.55)), wobei wir benutzt haben dass  $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{e} = 0$  im Strahlungsfeld ist. Wir benutzen  $|\mathbf{e} \times \mathbf{d}| = d \sin \theta$ , den Realteil von (12.19) und finden mit (12.21)

$$\mathbf{S}_0 = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \omega^4 d^2 \sin^2 \theta \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} \mathbf{e}, \quad (12.22)$$

wobei  $\theta$  der von  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{d}$  eingeschlossene Winkel ist.

Für den zeitlichen Mittelwert folgt:

$$\bar{\mathbf{S}}_0 = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \omega^4 d^2 \frac{\sin^2 \theta}{2r^2} \mathbf{e}. \quad (12.23)$$



Der Dipol strahlt also nicht in Richtung von  $\mathbf{d}$  ( $\theta = 0$ ), sondern maximal senkrecht zu  $\mathbf{d}$  ( $\theta = 90^\circ$ ). Die  $\sin^2 \theta$  - Abhängigkeit ist charakteristisch für Dipolstrahlung.

### Bemerkungen

- Charakteristisch für Strahlungsfelder ist ihre Eigenschaft, dass  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{S}$  ein orthogonales Dreibein bilden (vgl. Abschnitt 9.3).
- Ein (mit der Frequenz  $\omega$ ) oszillierender Dipol ist nur durch beschleunigte Punktladungen realisierbar. (12.23) ist also konform mit der allgemeinen Aussage (11.56).
- Die Strahlung niedrigster Multipolarität ist Dipol-Strahlung ( $l=1$ ), nicht Monopol-Strahlung ( $l=0$ )! In der Quantentheorie wird gezeigt, wie die Multipolarität der Strahlung und der Drehimpuls der Photonen zusammenhängen. Da Photonen einen Eigendrehimpuls haben (*Spin* 1), gibt es keine *drehimpuls-freie* Strahlung, d.h. Monopol-Strahlung. Der Spin der Photonen ist direkt mit der Tatsache verknüpft, dass Strahlungsfelder Vektor-Felder sind.

## 12.3 Magnetische Dipol-Strahlung

Der 2. Term der Entwicklung (12.12) lautet

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}') d^3r'; \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (12.24)$$

In diesem Fall trägt nur der antisymmetrische Anteil  $j_a(\mathbf{r}') = (j(\mathbf{r}') - j(-\mathbf{r}'))/2$  der Stromverteilung, siehe (12.15), bei.

**Magnetisches Dipolmoment vs. elektrisches Quadrupolmoment** Das verbleibende Integral in (12.24) ist durch das magnetische Dipolmoment und den elektrischen Quadrupoltensor bestimmt. Diese Namensgebung wird sich in Kapitel 13 klären, wenn wir die systematische Entwicklung des Fernfeldes nach Kugelfunktionen diskutieren.

An dieser Stelle benutzen wir die Identität,

$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) \times \mathbf{e} + \frac{1}{2}\{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}'\}, \quad (12.25)$$

und stellen fest, daß sich die Integranden in (12.24) bei einer formellen Vertauschung  $\mathbf{r}' \leftrightarrow \mathbf{j}(\mathbf{r}')$  in einen antisymmetrischen und symmetrischen Anteil aufteilen.

**Magnetischer Dipol** Mit der Definition

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV$$

(4.39) des magnetischen Dipolmoments wird der antisymmetrische Anteil zu

$$\mathbf{A}_1^{(m)}(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} (\mathbf{m} \times \mathbf{e}). \quad (12.26)$$

Der magnetische Dipol-Anteil des Vektorpotentials geht formal in den elektrischen Dipol-Anteil (12.18) über, wenn man

$$\frac{1}{c}(\mathbf{m} \times \mathbf{e}) \rightarrow \mathbf{d} \quad (12.27)$$

ersetzt. Damit kann man aus (12.19) und (12.20) für die Feldstärken sofort ablesen,

$$\mathbf{B}_1^{(m)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \omega^2 \frac{\exp(ikr)}{r} (\mathbf{e} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e})) \quad (12.28)$$

und

$$\mathbf{E}_1^{(m)}(\mathbf{r}) = c (\mathbf{B}_1^{(m)} \times \mathbf{e}). \quad (12.29)$$

Wir beachten, dass analog zu (12.21)

$$\mathbf{S}_1^{(m)} = \frac{c}{\mu_0} \mathbf{e} (\mathbf{B}_1^{(m)})^2$$

gilt, da das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  im Fernfeld weiterhin senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{r}$  steht.

**Abstrahlung und Vergleich** Analog zu (12.23) findet man für die im Zeitmittel abgestrahlte Energie

$$\bar{\mathbf{S}}_1^{(m)} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \omega^4 m^2 \frac{\sin^2 \theta}{2r^2} \mathbf{e}, \quad (12.30)$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{e}$  ist. Das kommt daher, dass  $\mathbf{e}$  senkrecht zu  $\mathbf{m} \times \mathbf{e}$  steht und daher für (12.28)

$$|\mathbf{e} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e})|^2 = |\mathbf{m} \times \mathbf{e}|^2 = m^2 \sin^2 \theta$$

ist.

- Der Vergleich von (12.30) und (12.23) zeigt, dass sich elektrische und magnetische Dipol-Strahlung in ihrer Frequenz- und Winkelabhängigkeit nicht unterscheiden.
- Der einzige Unterschied zwischen elektrischer und magnetischer Dipol-Strahlung liegt in der **Polarisation**:

- Für einen elektrischen Dipol liegt der Vektor des elektrischen Feldes

$$\mathbf{E} \parallel (\mathbf{e} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{e} = \mathbf{e}^2 \mathbf{d} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{e}$$

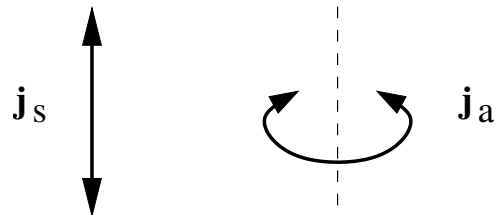
in der von  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{d}$  aufgespannten Ebene.

- Für einen magnetischen Dipol liegt der Vektor des elektrischen Feldes

$$\mathbf{E} \parallel (\mathbf{e} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e})) \times \mathbf{e} = (\mathbf{e}^2 \mathbf{m} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{e}) \times \mathbf{e} = \mathbf{m} \times \mathbf{e}$$

senkrecht zu der von  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{m}$  aufgespannten Ebene.

- Die elektrische Dipolstrahlung wird durch oszillierende inversionssymmetrische Ströme hervorgerufen, die magnetische Dipolstrahlung typischerweise durch oszillierende Kreisströme.



**Elektrische Quadrupol-Strahlung** Der 2. Term in (12.25) hat die Form

$$\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\exp(ikr)}{2r} \int \{ \mathbf{j}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}) \} d^3 r' . \quad (12.31)$$

Ohne auf die Einzelheiten einzugehen bemerken wir, dass sich (12.31) wie folgt umschreiben läßt:

$$\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \omega^2 \frac{\exp(ikr)}{2r} \int (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 r' . \quad (12.32)$$

Dieses Integral hat die Form von Quadrupolmomenten, vgl. (1.26)), d.h. der Integrand ist proportional zur Ladungsdichte und quadratisch in den Ortskoordinaten. Für die Systematik verweisen wir auf Kapitel 13.

**Anwendung in der Atom- und Kernphysik** Atome und Kerne können unter Emission bzw. Absorption von elektromagnetischer Strahlung ihren Zustand ändern. Die Multipolentwicklung ist die für diese Situation passende Beschreibung des elektromagnetischen Feldes. In der Atomphysik dominiert in der Regel die elektrische Dipolstrahlung:

- Die Energieflüsse der elektrischen Dipolstrahlung  $\bar{\mathbf{S}}_0$ , siehe (12.23), und der magnetischen Dipolstrahlung  $\bar{\mathbf{S}}_1^{(m)}$  skalieren wie

$$\bar{\mathbf{S}}_0 \sim \omega^4 \frac{d^2}{c}; \quad \bar{\mathbf{S}}_1^{(m)} \sim \omega^4 \frac{m^2}{c^3}.$$

Da das magnetische Dipolmoment  $m$  durch bewegte Ladungen bewirkt wird, ist somit die Abstrahlung der magnetischen Dipolstrahlung um den Faktor  $(v/c)^2$  kleiner als die Abstrahlung der elektrischen Dipolstrahlung.

- Berechnet man den Energiefluss  $\bar{\mathbf{S}}_1^{(e)}$  der elektrischen Quadrupolstrahlung so findet man im Vergleich

$$\bar{\mathbf{S}}_0 \sim \frac{\omega^4 d^2}{c}; \quad \bar{\mathbf{S}}_1^{(e)} \sim \frac{\omega^6 Q^2}{c^3},$$

wobei das elektrische Dipolmoment linear zu den atomaren Abmessungen  $d_0$  ist, das elektrische Quadrupolmoment dagegen  $\sim d_0^2$ . Somit ist

$$\frac{\bar{\mathbf{S}}_1^{(e)}}{\bar{\mathbf{S}}_0} \sim \frac{\omega^2 d_0^2}{c^2} = k^2 d_0^2 = (2\pi)^2 \left(\frac{d_0}{\lambda}\right)^2 \ll 1.$$

Die Verhältnisse sind in der Kernphysik komplizierter. Eine genaue Diskussion ist hier nur im Rahmen der Quantentheorie möglich.

# Kapitel 13

## Systematik der Multipolentwicklung

### 13.1 Eigenschaften der Kugelfunktionen

Wir wollen ein vollständiges Funktionensystem in den Kugelkoordinaten  $(r, \vartheta, \varphi)$ , mit

$$\mathbf{r} = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) \quad (13.1)$$

entwickeln. Dieses Funktionensystem, die Kugelfunktionen, ist für viele Problemstellungen von essentieller Bedeutung, wie z.B. für

- die systematische Entwicklung des elektromagnetischen Fernfelds;
- die Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms in der Quantenmechanik;
- die Formulierung von Streuprozessen in der Kern- und Teilchenphysik;

und vieles mehr.

**Kugelflächenfunktionen** Die Lösungen von Differentialoperatoren bilden i.Allg. ein vollständiges Funktionensystem. Warum dieses so ist wird in der Quantenmechanik näher besprochen werden.

Wir betrachten Ansätze  $\psi(r, \theta, \varphi)$  der Form

$$\psi^{(l)} \sim \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi); \quad \psi_{(l+1)} \sim r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad l = 0, 1 \dots, \quad (13.2)$$

wobei sich die  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  als die *Kugelflächenfunktionen* herausstellen werden.

- Mit den  $\psi^{(l)}$  lassen sich die Fernfelder beschreiben und entwickeln.
- Mit den  $\psi_{(l+1)}$  lassen sich Funktionen, welche im Ursprung regulär sind, nach Kugelfunktionen entwickeln.

Die Lösungsansätze (13.2) sollen die Laplace-Gleichung  $\Delta\psi = 0$  erfüllen,

$$\Delta \left( \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \right) = 0; \quad \Delta \left( r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \right) = 0. \quad (13.3)$$

**Laplace-Operator** Der Laplace-Operator hat in Kugelkoordinaten die Form

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{=\Delta_r} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}_{=\Delta_{\vartheta, \varphi}}, \quad (13.4)$$

wobei  $\Delta_r$  und  $\Delta_{\vartheta, \varphi}$  den radialen und den Winkel-abhängigen Anteil des Laplace Operators bezeichnen. Führt man die  $r$ -Differentiationen in (13.2) aus, siehe unten, so bleibt in beiden Fällen

$$\left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \right\} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = 0 \quad ; \quad (13.5)$$

dieses ist der Grund für die Wahl der  $r$ -Abhängigkeiten in (13.2). Mit (13.4) kann man (13.5) auch als

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (13.6)$$

schreiben<sup>1</sup>.

**Radialer Laplace-Operator** Wie holen die radiale Differentiation nach:

$$\Delta_r r^l = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] r^l = [l(l-1) + 2l] r^{l-2} = l(l+1) r^{l-2}$$

und

$$\Delta_r r^{-l-1} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] r^{-l-1} = [(l+1)(l+2) - 2(l+1)] r^{-l-3} = (l+1)l r^{-l-3}$$

**Separation des Azimutwinkels** Mit dem Separationsansatz<sup>2</sup>

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \exp(im\varphi) F_{lm}(\vartheta) \quad (13.7)$$

für die Kugelflächenfunktionen (sphärisch Harmonischen)  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  reduziert sich (13.5) auf

$$\left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} + l(l+1) \right\} F_{lm} = 0. \quad (13.8)$$

Der Index  $m$  in (13.7) muss ganzzahlig sein, da  $\varphi$  eine eindeutige Funktion ist

$$\varphi(r, \vartheta, \varphi) = \varphi(r, \vartheta, \varphi + 2\pi) \quad \rightarrow \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13.9)$$

<sup>1</sup>In der Quantenmechanik wird sich  $\hbar^2 l(l+1)$  als Eigenwert von  $\mathbf{L}^2$  herausstellen, wobei  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  der Drehimpulsoperator ist.

<sup>2</sup> $\hbar m$  entspricht in der Quantenmechanik dem Drehimpuls für Rotationen um die  $z$ -Achse.

Die erlaubten Werte für  $m$  werden wir noch bestimmen.

**Lösung via Rekursion** Zur Lösung von Gleichung (13.8) führen wir

$$\xi = \cos \vartheta; \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} = -\frac{d}{d\xi} \quad (13.10)$$

ein, so dass (13.8) in

$$\left\{ \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \right) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} + l(l + 1) \right\} F_{lm} = 0. \quad (13.11)$$

übergeht.

- Für  $l = m$  kann man die Lösung (bis auf einen Normierungsfaktor) sofort angeben,

$$\boxed{F_{ll} \propto (1 - \xi^2)^{l/2} = (\sin \vartheta)^l}, \quad (13.12)$$

denn dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \right) (1 - \xi^2)^{l/2} &= \frac{l}{2} \frac{d}{d\xi} (1 - \xi^2)^{l/2} (-2\xi) \\ &= l^2 \frac{(1 - \xi^2)^{l/2}}{1 - \xi^2} (\xi^2 - 1 + 1) - l(1 - \xi^2)^{l/2} \\ &= \left[ (-l^2 - l) + \frac{l^2}{1 - \xi^2} \right] (1 - \xi^2)^{l/2} \end{aligned}$$

und (13.11) ist erfüllt.

- Die Lösungen (13.7) zu  $m \neq l$  erhält man dann rekursiv (bis auf einen Normierungsfaktor) aus

$$\begin{aligned} Y_{l,m-1} &= e^{-i\varphi} \left( -\frac{d}{d\vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{lm} \equiv A_- Y_{lm} \\ F_{l,m-1} &= \left( -\frac{d}{d\vartheta} - m \cot \vartheta \right) F_{lm} \end{aligned} \quad (13.13)$$

Der Beweis (durch Einsetzen von (13.13) in (13.8)) ist ebenso elementar wie langwierig. Alternativ kan man zeigen (ausrechnen), dass der **Absteigeoperator**  $A_-$  und der Drehimpulsoperator  $\Delta_{\vartheta,\varphi}$  vertauschen (d.h. die Reihenfolge ist egal),

$$A_- \Delta_{\vartheta,\varphi} = \Delta_{\vartheta,\varphi} A_- ,$$

womit für die Laplace Gleichung in Kugelkoordinaten (13.6)

$$\Delta_{\vartheta,\varphi} Y_{l,m-1} = \Delta_{\vartheta,\varphi} A_- Y_{lm} = A_- \Delta_{\vartheta,\varphi} Y_{lm} = \frac{-l(l+1)}{r^2} A_- Y_{lm}$$

folgt. Somit ist mit  $Y_{l,m}$  auch  $A_- Y_{l,m}$  eine Lösung der Laplace Gleichung, aber mit einer Potenz von  $\exp(im\varphi)$  weniger.

Mit(13.13) sind die  $F_{lm}$  Polynome in  $\cos \vartheta$  und  $\sin \vartheta$  der Ordnung  $l$ , da die Differentiation nach  $\vartheta$  und Multiplikation mit  $\cot \vartheta$  die Ordnung von  $F_{ll}$  nicht ändern.



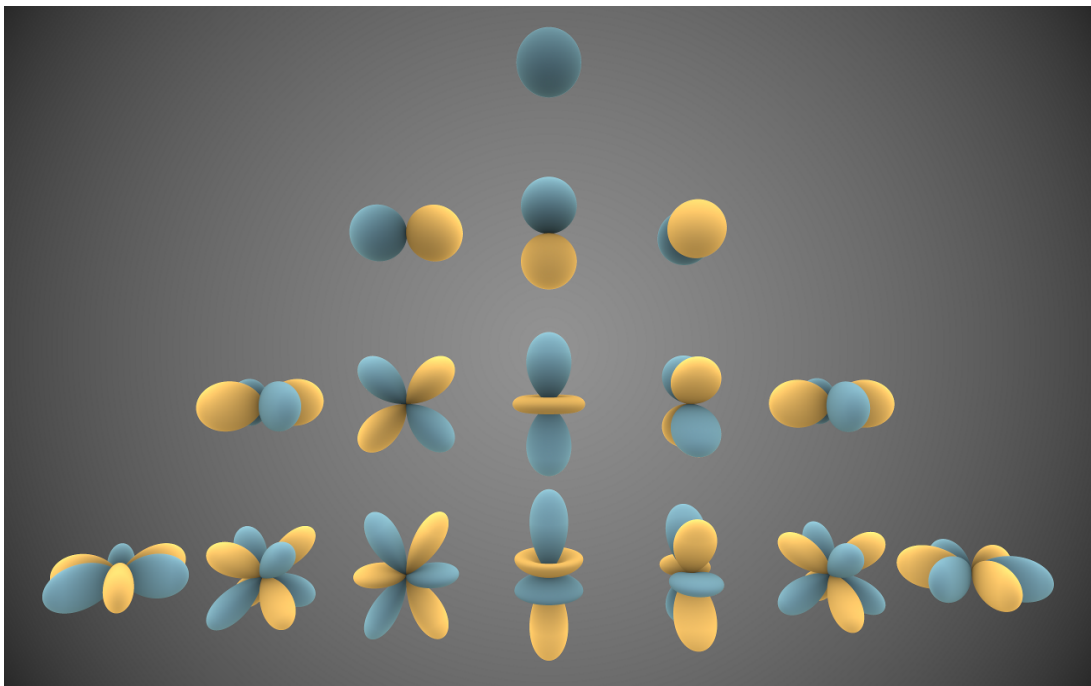
- Man kann mit analogen Methoden zeigen, daß  $F_{lm}$  für alle  $m$ -Werte mit  $|m| > l$  verschwindet. Also folgt

$$-l \leq m \leq l$$

**Einige Kugelfunktionen niedriger Ordnung** Zur Illustration führen wir die ersten Kugelfunktionen explizit auf,

$$\begin{aligned}
 Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
 Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi} \\
 Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \\
 Y_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi} \\
 Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} \\
 Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{13.14}$$

mit  $Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) = (-)^m Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi)$ .



**Skalarprodukt** Eine wichtige Eigenschaft der Kugelfunktionen ist die Orthogonalität. Um sie zu formulieren müssen wir ein *Skalarprodukt* definieren.

Wir betrachten zwei quadrat-integrable Funktionen  $f_n(x)$  und  $f_m(x)$  auf dem Intervall  $[a, b]$ . Wir definieren dann durch

$$(f_m, f_n) = \int_a^b f_m^*(x) f_n(x) dx \tag{13.15}$$

das Skalarprodukt  $(f_n, f_m)$ . Als **Norm** von  $f_n$  wird

$$(f_n, f_n) = \int_a^b |f_n(x)|^2 dx \geq 0 \quad (13.16)$$

wie üblich definiert. Das Skalarprodukt im Raum der quadrat-integrablen Funktionen hat dieselben Eigenschaften wie das Skalarprodukt in Vektorräumen mit endlichen Dimensionen.

- Linearität

Das Skalarprodukt ist linear im zweiten Argument und anti-linear im ersten Argument,

$$(f_1 + \lambda f_2, g) = (f_1, g) + \lambda^*(f_2, g); \quad (f, g_1 + \lambda g_2) = (f, g_1) + \lambda(f, g_2) .$$

- Orthogonalität

Man nennt 2 Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  *orthogonal* wenn

$$(f, g) = 0 . \quad (13.17)$$

**Hilberträume** Ein Funktionenraum mit einem Skalarprodukt nennt man auch einen *Hilbertraum*. Mehr hierzu in der Quantenmechanik.

- Abgeschlossenheit

Ein Hilbertraum ist abgeschlossen. Wenn zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  Elemente des Hilbertraumes sind, dann auch jede Linearkombination

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) .$$

- Null-Element

Die Norm einer Funktion  $f(x)$

$$(f, f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \equiv 0$$

verschwindet dann und nur dann wenn die Funktion selber verschwindet. Jeder Hilbertraum hat ein Null-Element.

- Orthonormalsystem

Eine Menge von Funktionen  $f_n(x)$  bilden ein vollständiges Orthonormalsystem wenn

$$(f_n, f_m) = \delta_{nm}$$

gilt und wenn jede Funktion  $f(x)$  als Linearkombination

$$f(x) = \sum_n c_n f_n(x) \quad (13.18)$$

der **Basisfunktionen**  $f_n(x)$  dargestellt werden kann. Dabei nennt man die  $c_n$  die **Entwicklungskoeffizienten**. Diese sind durch

$$(f_m, f) = \sum_n c_n (f_m, f_n) = \sum_n c_n \delta_{mn} = c_m \quad (13.19)$$

bestimmt.

**Orthogonalität der Kugelfunktionen** Die Kugelfunktionen sind auf der Einheitskugel orthonormiert,

$$(Y_{lm}, Y_{l'm'}) \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \quad (13.20)$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \exp(i(m - m')\varphi) = \begin{cases} 2\pi & \text{für } m = m' \\ 0 & \text{für } m \neq m' \end{cases} \quad (13.21)$$

ist die Orthogonalität bzgl.  $m$  sofort klar. Die normierten Funktionen auf dem Einheitskreis sind entsprechend

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi) . \quad (13.22)$$

Unter Zuhilfenahme der Bestimmungsgleichung (13.11) für die  $F_{lm}(\vartheta)$  kann man leicht deren Orthogonalität bzgl.  $\theta$  nachweisen. Wir verzichten hier auf den expliziten Nachweis. Damit sind dann die Kugelfunktionen  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \exp(im\varphi) F_{lm}(\vartheta)$ , siehe (13.7) vollständig normiert.

**Entwicklung nach Kugelfunktionen** Die Kugelfunktionen sind auf der Einheitskugel vollständig, d.h. jede Funktion

$$f(\vec{r}, r = 1) = f(r = 1, \vartheta, \varphi) = g(\vartheta, \varphi) . \quad (13.23)$$

lässt sich nach Kugelfunktionen entwickeln. Analog zu (13.18) und (13.19) gilt daher die Darstellung

$$g(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) , \quad (13.24)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten  $a_{lm}$

$$a_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi) \equiv (Y_{lm}, g) . \quad (13.25)$$

In (13.24) haben wir verwendet, daß  $l = 0, 1, \dots$  ist, siehe (13.2).

**Allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung** Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta\psi(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (13.26)$$

können wir daher in sphärischen Koordinaten durch eine Reihenentwicklung in Kugelfunktionen darstellen

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-l-1}] Y_{lm}(\vartheta, \varphi) . \quad (13.27)$$

## 13.2 Legendre Polynome

Die Legendre Polynome bilden ein wichtiges Basissystem auf dem Intervall  $x \in [-1, 1]$ . Es gibt viele Darstellungsmöglichkeiten für die Legendre Polynome, hier interessieren wir uns für den Zusammenhang mit den Kugelfunktionen. Dafür betrachten wir die Variabeltransformation

$$x = \cos \theta; \quad dx = -\sin \theta d\theta, \quad \int_{-1}^1 \dots dx = \int_0^\pi \dots \sin \theta d\theta,$$

mit  $\theta \in [0, \pi]$ .

**Legendre- und Kugelfunktionen** Wir betrachten nun Funktionen  $g(\vartheta, \varphi)$  auf der Einheitssphäre, welche nicht vom Azimutwinkel  $\varphi$  abhängen,

$$g(\vartheta, \varphi) \equiv g(\vartheta).$$

Dieses ist für die Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}$  für  $m = 0$  der Fall. Wir definieren mit

$$Y_{l0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta). \quad (13.28)$$

die Legendre Polynome  $P_l(\cos \vartheta)$ . Diese sind nicht auf eins normiert, es gilt

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta P_l(\cos \vartheta) P_{l'}(\cos \vartheta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (13.29)$$

was sofort aus der Orthonormalität  $(Y_{lm}, Y_{l'm'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$  der Kugelfunktionen folgt. Eine allgemeine Funktion  $g(\vartheta)$  läßt sich daher in Legendre Polynome entwickeln,

$$g(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} a_{l0} P_l(\cos \theta) \quad (13.30)$$

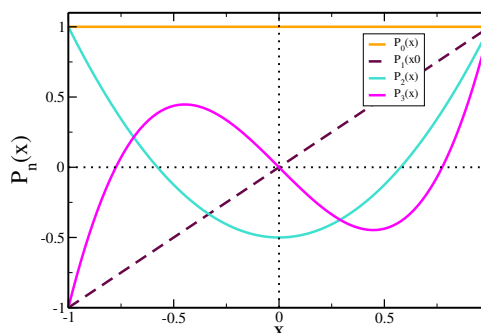
mit den Entwicklungskoeffizienten

$$a_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega P_l(\cos \vartheta) g(\vartheta, \varphi). \quad (13.31)$$

### Einige Legendre-Polynome niedriger

**Ordnung** Mit  $x = \cos \theta$  haben die ersten Legendre-Polynome die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= (3x^2 - 1)/2 \\ P_3(x) &= (5x^3 - 3x)/2 \end{aligned} \quad (13.32)$$



Diese Polynome kann man sich in niedrigster Ordnung schnell selber rekursiv ausrechnen. Man geht von  $P_0(x) = 1$  aus und verwendet die Orthonormierung (13.29) um  $P_1(x)$  zu bestimmen, usw.

**Entwicklung von  $1/r$  nach Legendre Polynomen** Wir betrachten nun die Entwicklung von

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}}; \quad \frac{r'}{r} \ll 1, \quad (13.33)$$

nach Potenzen von  $r'/r$ , welche die Grundlage für die Multipolentwicklung darstellt. Wir verwenden Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi & y &= r \sin \vartheta \sin \varphi & z &= r \cos \vartheta \\ x &= r' \sin \vartheta' \cos \varphi' & y &= r' \sin \vartheta' \sin \varphi' & z &= r' \cos \vartheta' \end{aligned} \quad (13.34)$$

und legen den Beobachtungspunkt  $\mathbf{r}$  auf die  $z$ -Achse,

$$\mathbf{r} = (0, 0, r); \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos \theta'.$$

Damit wird (13.33) zu

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon)^{-1/2}; \quad \epsilon = \frac{r'}{r} \left( \frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right). \quad (13.35)$$

Wir betrachten nun die Terme niedrigster Ordnung,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{r'}{r} \left( \frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \left( \frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} \left( \frac{r'}{r} \right)^3 \left( \frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^3 \dots \right] \end{aligned}$$

und ordnen nach Potenzen von  $r'/r$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta' + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{r'}{r} \right)^3 \frac{5 \cos^3 \theta' - 3 \cos \theta'}{2} + \dots \right] \\ &\equiv \frac{1}{r} \left[ P_0(\cos \theta') + \frac{r'}{r} P_1(\cos \theta') + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta') + \dots \right], \end{aligned} \quad (13.36)$$

wie ein Vergleich mit (13.32) zeigt. Damit finden wir mit

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma)} \quad (13.37)$$

die Entwicklung des Coulomb-Potentials nach Legendre Polynomen  $P_n(x)$ , wobei nun allg.  $\gamma$  der Winkel zwischen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  ist, also

$$\begin{aligned}\cos(\gamma) &= \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r r'} = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi') \\ &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') ,\end{aligned}\quad (13.38)$$

siehe (13.34).

**Additionstheorem** Aus (13.38) folgt, dass man die Legendre Polynome  $P_l(\cos \gamma)$  nach Kugelfunktionen in  $(\theta, \varphi)$  und  $(\theta', \varphi')$  entwickeln kann. Das wichtige *Additionstheorem*

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (13.39)$$

wollen wir an dieser Stelle nicht beweisen. Wir merken nur an, dass der Beweis darüber erfolgt, dass man  $P_l(\cos \gamma)$  zunächst als Funktion von  $(\theta, \varphi)$  ansieht und in  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  entwickelt und dann zeigt, dass die Koeffizienten dieser Entwicklung proportional zu den  $Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$  sind.

### 13.3 Multipolentwicklung statischer Felder

Wir können nun unsere Kenntnisse der Kugelfunktionen und der Entwicklung (13.37) benutzen um in einem ersten Schritt die Entwicklung elektrostatischer Felder, wie wir sie schon in Abschnitt 1.4 in niedrigster Ordnung betrachtet haben, zu systematisieren.

**Entwicklung des elektrischen Potentials** Für eine lokalisierte Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  können wir das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (13.40)$$

mit Hilfe der Multipolentwicklung (13.37) des Coulomb Potentials und des Additionstheorems (13.39) nach Legendre Polynomen entwickeln,

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \gamma) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &\equiv \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) ,\end{aligned}\quad (13.41)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$q_{lm} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (r')^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') . \quad (13.42)$$

Die Entwicklung (13.41) ist mit (13.42) die Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials einer lokalisierten Ladungsverteilung.

- Der Index  $l \geq 0$  klassifiziert das asymptotische Verhalten der einzelnen Terme in der Taylor-Reihe für große Abstände  $r$ .
- Der Index  $m$  numeriert die Komponenten der Multipolmomente zu festem  $l$ . Zu jedem  $l$  treten  $2(l+1)$  Werte  $-l, -l+1, \dots, l-1, l$  von  $m$  auf.
- Es gilt

$$Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) = (-)^m Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) . \quad (13.43)$$

Die in (13.41) auftretende Kombination

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') + Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) Y_{l-m}^*(\vartheta', \varphi')$$

ist somit reell und bzgl.  $(\vartheta, \varphi)$  und  $(\vartheta', \varphi')$  symmetrisch.

**Entwicklungskoeffizienten** Die niedrigsten Entwicklungskoeffizienten  $q_{lm}$  für die Multipolentwicklung des Potentials lauten, siehe (13.42) und (13.14),

$l = 0$  :

$$q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} Q$$

mit

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (13.44)$$

als der Gesamtladung.

$l = 1$  :

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (x' + iy') = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (d_x + id_y);$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') z' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} d_z,$$

wobei  $d_x, d_y, d_z$  die Komponenten des Dipolmoments  $\mathbf{d}$  sind.

$l = 2$  :

$$q_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (x' - iy')^2 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (Q_{11} - Q_{22} - 2iQ_{12}) ;$$

$$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') z' (x' - iy') = \frac{-1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23}) ;$$

$$q_{20} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (z'^2 - \frac{r'^2}{3}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33} ,$$

mit den Komponenten des Quadrupoltensors  $Q_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Ein Vergleich mit Kapitel 1.4 zeigt, dass wir mit diesen Ergebnissen die Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials damit auf systematische Weise reproduziert haben.

## 13.4 Multipolentwicklung des Strahlungsfeldes

Wir betrachten zeitlich periodische Felder  $A(\mathbf{r}, t) = \exp(i\omega t)A(\mathbf{r})$  und die Wellengleichung im quellenfreien Raum,

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0, \quad (13.45)$$

mit der Dispersionsrelation des Lichtes  $\omega = ck$ . In Abschnitt 9.2 haben wir mit den ebenen Wellen ein vollständiges Funktionensystem beschrieben, welches (13.45) löst.

**Kugelwellen im freien Raum** Außer den ebenen Wellen besitzt die Wellengleichung (13.45) auch Kugelwellen als Lösungen. Wir machen den Ansatz

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_{lm} \frac{g_l(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (13.46)$$

wobei  $\mathbf{a}_{lm}$  ein Koeffizienten-Vektor ist und die radialen Funktionen  $g_l(r)$  noch zu bestimmen sind. Mit (13.4) und (13.6)

$$\Delta = \Delta_r + \Delta_{\vartheta, \varphi}; \quad \Delta_{\vartheta, \varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

geht (13.45) mit (13.46) in

$$\begin{aligned} -k^2 \frac{g_l(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= (\Delta_r + \Delta_{\vartheta, \varphi}) \frac{g_l(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\ &= \left( \Delta_r \frac{g_l(r)}{r} \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) + \frac{g_l(r)}{r} \Delta_{\vartheta, \varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\ &= \left( \Delta_r \frac{g_l(r)}{r} \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) - \frac{g_l(r)}{r} \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

über. Der erste Term auf der rechten Seite formen wir zu

$$\begin{aligned} \Delta_r \frac{g_l}{r} &= \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \frac{g_l}{r} \\ &= \frac{d}{dr} \left( \frac{g_l'}{r} - \frac{g_l}{r^2} \right) + \frac{2}{r} \left( \frac{g_l'}{r} - \frac{g_l}{r^2} \right) = \frac{1}{r} g_l'' \end{aligned}$$

um. Damit finden wir mit

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} g_l(r) = 0 \quad (13.47)$$



die Laplace Gleichung für den Radialanteil einer Kugelwelle.

**Othonormale Funktionensysteme** Für  $l = 0$  sind die Lösungen  $g_0(r)$  von (13.47) sofort ersichtlich,

$$g_0(r) \propto \sin(kr); \quad g_0(r) \propto \cos(kr); \quad g_0(r) \propto \exp(\pm ikr) . \quad (13.48)$$

Aus diesen drei Ansätzen kann man rekursiv die  $g_l(r)$  konstruieren und so drei Funktionensysteme gewinnen. Dafür verwendet man meist die dimensionslose Variable  $\rho = kr$ .

$g_0(\rho)$	$(-)^l g_l(\rho)/\rho$	Symbol
$\sin \rho$	sphärische Bessel-Funktionen	$j_l(\rho)$
$-\cos \rho$	sphärische Neumann-Funktionen	$n_l(\rho)$
$\exp(\pm i\rho)$	sphärische Hankel-Funktionen	$h_l^\pm(\rho)$

Die sphärischen Bessel- und Neumann-Funktionen sind Lösungen von (13.45) bei endlichen Volumina und entsprechenden Randbedingungen.

**Allgemeine Lösung** Die allgemeine Lösung der Wellengleichung (13.45) für Kugelwellen im freien Raum kann nun als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \left\{ \mathbf{a}_{lm} h_l^+(\rho) + \mathbf{b}_{lm} h_l^-(\rho) \right\} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (13.49)$$

geschrieben werden. Für Abstrahlungsprobleme ist  $\mathbf{b}_{lm} = 0$ , da  $h_l^-$  eine *einlaufende* Kugelwelle beschreibt. Die Koeffizienten  $\mathbf{a}_{lm}$  der *auslaufenden* Kugelwelle  $h_l^+$  werden bestimmt aus den Multipolmomenten durch Vergleich von (13.49) und (12.12) für  $\rho = kr \gg 1$ .

**Entwicklung einer ebenen Welle nach Kugelfunktionen** Die Funktionen

$$h_l^\pm(\rho) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

bilden wie die ebenen Wellen  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  eine vollständige Basis. Welche Basis man wählt, hängt von der Problemstellung ab.

Da beide Funktionensysteme vollständig sind, lassen sich ebene Wellen nach Kugelfunktionen entwickeln. Der Einfachheit halber wählen wir  $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ , dann tritt in

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(ikz) = \exp(ikr \cos \vartheta) \quad (13.50)$$

der Winkel  $\varphi$  nicht mehr auf und die Entwicklung hat die Form

$$\boxed{\exp(ikz) = \sum_l a_l j_l(kr) Y_{l0}(\vartheta)} , \quad (13.51)$$

wobei die  $j_l$  die sphärischen Bessel-Funktionen sind. Die Koeffizienten lauten

$$a_l = i^l (2l + 1) \sqrt{\frac{4\pi}{2l + 1}} .$$

Die Beziehung (13.51) ist von zentraler Bedeutung für die Formulierung von Streuexperimenten in der Atom-, der Kern- und der Teilchenphysik. Eine ebene Welle (Licht, Elektron, Teilchen) streut an einer lokalisierten Ladungs-/Masseverteilung, welche durch ihre Multipolmomente beschrieben wird.