

Teil IV

**Elektromagnetische Strahlung im
Vakuum**

Kapitel 9

Das elektromagnetische Feld im Vakuum

9.1 Homogene Wellengleichungen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.1)$$

im Vakuum ($\rho = 0$; $\mathbf{j} = 0$).

Entkopplung von magnetischem und elektrischem Feld Im Vakuum lassen sich elektrisches Feld \mathbf{E} und magnetische Induktion \mathbf{B} vollständig entkoppeln. Wir bilden die zeitliche Ableitung des Induktionsgesetzes $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$,

$$\begin{aligned} -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \times \mathbf{E} \\ &= \nabla \times \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \underbrace{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})}_{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}} \end{aligned}$$

und daher, zusammen mit $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$,

$$\Delta \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

Wir erhalten also die homogene Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0; \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0, \quad (9.2)$$

wobei c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist. Analog verfährt man mit dem \mathbf{E} -Feld.

D'Alambert Operator Mit der Abkürzung

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (9.3)$$

für den **d'Alambert-Operator** \square lassen sich die Maxwell-Gleichung (9.1) im Vakuum äquivalent als

$$\begin{aligned} \square \mathbf{B} &= 0; & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \square \mathbf{E} &= 0; & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (9.4)$$

darstellen. Für die zugehörigen Potentiale findet man nach Kapitel 7.3

$$\square \mathbf{A} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (9.5)$$

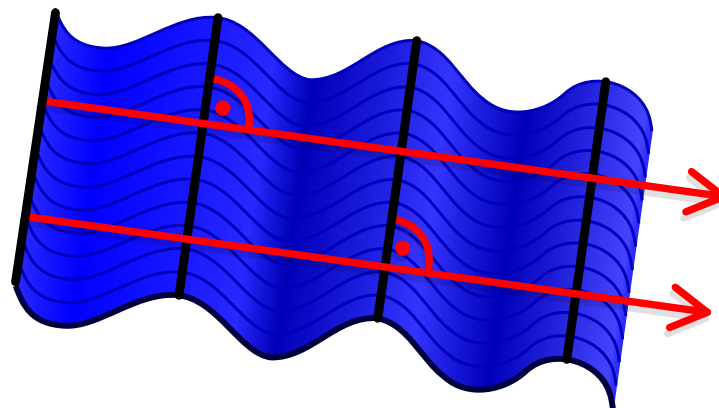
$$\Phi = 0 \quad (9.6)$$

in der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Hierzu braucht man nur in den Bestimmungsgleichungen (7.17) und (7.19) für die elektromagnetischen Potentiale für verschwindenden Quellen ρ und \mathbf{j} zu betrachten.

Wellengleichungen Wir haben also Differentialgleichungen vom Typ

$$\square f(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9.7)$$

zu lösen, wobei f für irgendeine Komponente von \mathbf{E} , \mathbf{B} oder \mathbf{A} steht. Die Lösungen für \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{A} sind dann noch der Nebenbedingung unterworfen, dass die Divergenz verschwindet (Transversalitätsbedingung).



9.2 Elektromagnetische Wellen

Ebene Wellen Ein wichtiger Lösungstyp der Wellengleichung (9.7) sind *ebene Wellen*, welche durch einen *Wellenvektor* \mathbf{q} gekennzeichnet sind,

$$f = f(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \mp ct); \quad |\mathbf{q}| = 1, \quad (9.8)$$

wobei $f()$ eine beliebige Funktion ist, welche mindestens zweifach differenzierbar ist.

Nachweis Zum Nachweis, daß (9.8) die Wellengleichung (9.7) erfüllt, verwenden die Abkürzung

$$\xi = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \mp ct \quad (9.9)$$

und bilden:

$$\nabla f = \mathbf{q} \frac{df}{d\xi}; \quad \Delta f = \mathbf{q}^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2}; \quad \mp \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \quad (9.10)$$

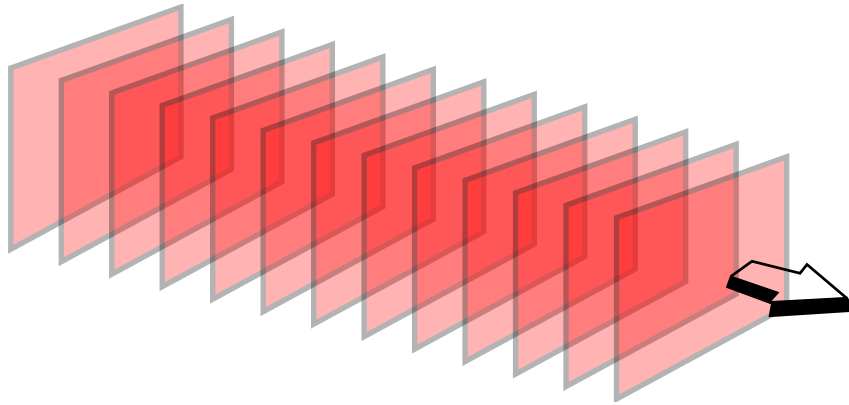
und somit

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}. \quad (9.11)$$

Damit ist

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 f(\mathbf{r}, t) \quad (9.12)$$

Lösung von (9.2); analog für \mathbf{E} und \mathbf{A} . Wir diskutieren nun die Eigenschaften der Lösung (9.8).



Ebene Wellen Funktionen vom Typ (9.8) beschreiben Wellen, deren Wellenfronten Ebenen sind: Die Punkte \mathbf{r} , in denen $f(\mathbf{r}, t)$ zu einer festen Zeit t den gleichen Wert annimmt, liegen auf einer Ebene (Hesse'sche Normalform)

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = \text{const}, \quad (9.13)$$

welche senkrecht zu \mathbf{q} steht. Je nach Wahl des Vorzeichens in (9.8) erhält man Wellen, die in $\pm \mathbf{q}$ -Richtung laufen.

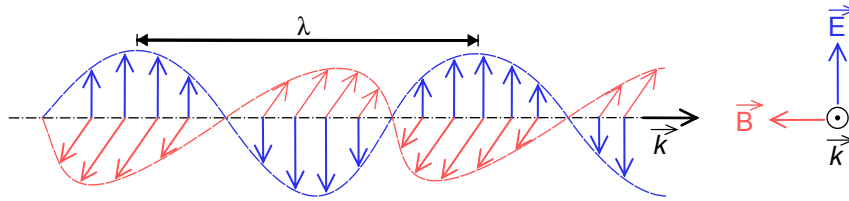
Transversalität elektromagnetischer Wellen Aus $\nabla \cdot \mathbf{B}$ folgt mit $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 f(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 f(\xi)$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla f(\xi) = (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{q}) \frac{df}{d\xi}; \quad \xi = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \pm ct, \quad (9.14)$$

also

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{q} = 0; \quad (9.15)$$

entsprechend für \mathbf{E} und \mathbf{A} . Das elektrische und das magnetische Feld einer ebenen Welle steht also senkrecht zur der Ausbreitungsrichtung \mathbf{q} .



Orthogonalität von \mathbf{E} und \mathbf{B} Aus

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.16)$$

folgt für die ebenen Wellenlösungen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 f(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - ct); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 g(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - ct) \quad (9.17)$$

die Beziehung

$$(\mathbf{q} \times \mathbf{E}_0) \frac{df}{d\xi} = c\mathbf{B}_0 \frac{dg}{d\xi}, \quad (9.18)$$

also $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ mit der Transversalitätsbedingung (9.15). \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{q} bilden also ein orthogonales Dreiein.

Elektromagnetische Wellen und das Durchflutungsgesetz Die Existenz von elektromagnetischen Wellen (z.B. Lichtwellen, Radiowellen, Mikrowellen, γ -Strahlung etc.) beweist die Richtigkeit des Durchflutungsgesetzes

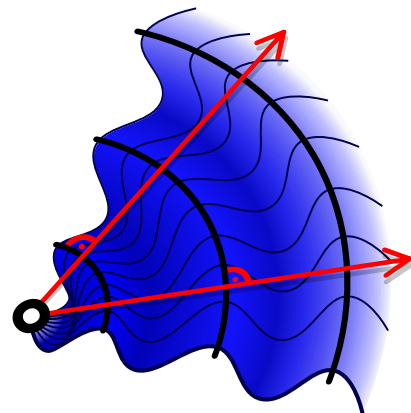
$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

im Vakuum, welches entscheidend in die Herleitung der Wellengleichungen eingegangen ist. Sie stellt die experimentelle Bestätigung für das Maxwell-Ampère-Gesetz (6.22) dar.

Kugelwellen Neben den ebenen Wellen sind Kugelwellen wichtige Lösungstypen der Wellengleichung (9.7); sie haben die Form

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{g(r - ct)}{r}, \quad (9.19)$$

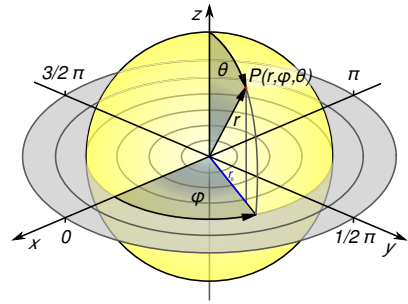
wobei f eine beliebige (mindestens zweifach differenzierbare) Funktion ist. Der Beweis verläuft analog zu (9.10) in Kugelkoordinaten.



Kugelkoordinaten Von den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x} = (x, y, z)$ geht man via

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (9.20)$$

zu den Kugelkoordinaten (r, φ, θ) über, mit dem Radius r , den Azimutwinkel φ und dem Polwinkel θ .



Der Laplace Operator hat die Form

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} . \quad (9.21)$$

Kugelwellen Lösung Damit gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{g(r - ct)}{r} \right) = \frac{g'}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{g(r - ct)}{r} \right) = rg' - g$$

für Kugelwellen der Form (9.19) und somit

$$\Delta \left(\frac{g(r - ct)}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (rg' - g) = \frac{1}{r^2} (g' + g'' - g') = \frac{g''}{r} .$$

Also erfüllt $f(\mathbf{r}, t) = g(r - ct)/r$ die Wellengleichung (9.7).

9.3 Monochromatische ebene Wellen

Dispersionsrelation Eine spezielle Form der ebenen Welle (z.B. für die elektrische Feldstärke) sind in Zeit und Raum periodisch harmonische Lösungen der Gestalt

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t)) . \quad (9.22)$$

Dabei ist

$$\mathbf{k} = k \mathbf{q}, \quad |\mathbf{q}| = 1 \quad (9.23)$$

und ω und \mathbf{k} hängen über die *Dispersionsrelation*

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c^2} \quad (9.24)$$

zusammen, wie man durch Einsetzen von (9.22) in die Wellengleichung (9.4) sofort sieht, (9.11). Eine ebene Welle vom Typ (9.22) nennt man *monochromatisch* (zu deutsch *einfarbig*).

Komplexe vs. reelle Felder \mathbf{E} , \mathbf{A} und \mathbf{B} sind als Messgrößen reelle Vektorfelder. Die komplexe Schreibweise in Gleichung (9.22) ist verabredungsgemäß so zu verstehen, dass

das physikalische Vektorfeld durch den Realteil von (9.22) beschrieben wird. Die komplexe Schreibweise ist oft (z.B. beim Differenzieren) bequemer als die reelle; sie ist problemlos, solange nur lineare Operationen durchgeführt werden.

Zeitliche Mittelwerte Häufig ist man an zeitlich gemittelten Größen interessiert, wie z.B. die im Mittel auftreffenden Energie elektromagnetischer Strahlung. Für eine Funktion $z(t)$ definiert man den zeitlichen Mittelwert \bar{z} als

$$\bar{z} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z(t) dt . \quad (9.25)$$

Bei der Berechnung physikalischer Größen wie etwa der Energiestromdichte treten Produkte von Vektorfeldern auf. Zeitliche Mittelwerte $\overline{\dots}$ solcher Produkte kann man in komplexer Schreibweise wie folgt berechnen: Für zwei Vektorfelder

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t); \quad \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (9.26)$$

gilt für den zeitlichen Mittelwert des Produktes

$$\boxed{\overline{(Re\mathbf{a}) \cdot (Re\mathbf{b})} = \frac{1}{2} Re(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^*)} , \quad (9.27)$$

denn in

$$(Re\mathbf{a}) \cdot (Re\mathbf{b}) = \frac{1}{4} (\mathbf{a}_0 \exp(-i\omega t) + \mathbf{a}_0^* \exp(i\omega t)) (\mathbf{b}_0 \exp(-i\omega t) + \mathbf{b}_0^* \exp(i\omega t))$$

verschwinden die gemischten Terme mit den Zeitfaktoren $\exp(\pm 2i\omega t)$ nach Zeitmittelung und es bleibt

$$\overline{(Re\mathbf{a}) \cdot (Re\mathbf{b})} = \frac{1}{4} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^* + \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b}) = \frac{1}{2} Re(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^*) . \quad (9.28)$$

Terminologie Monochromatische ebene Wellen sind so wichtig, daß es für alle Größen feste Begriffe gibt.

Wellenvektor	\mathbf{k}	
Wellenzahl	k	$k = \mathbf{k} $
Kreisfrequenz	ω	$\omega = ck$
Frequenz	ν	$\nu = \omega/(2\pi)$
Wellenlänge	λ	$\lambda = (2\pi)/k$
Schwingungsdauer	T	$T = (2\pi)/\omega$

Anhand von (9.22) sieht man, dass die Schwingungsdauer T die zeitliche Periodizität der Welle bei festgehaltenem Ort \mathbf{r} beschreibt,

$$\exp(i\omega(t+T)) = \exp(i\omega t + 2\pi i) = \exp(i\omega t); \quad (9.29)$$

analog gibt die Wellenlänge λ die räumliche Periodizität an:

$$\exp(ik(z + \lambda)) = \exp(ikz + 2\pi i) = \exp(ikz) \quad (9.30)$$

für eine Welle in z -Richtung zu fester Zeit t .

Phasengeschwindigkeit Die Größe

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (9.31)$$

nennt man die **Phase** der Welle. Unter der Phasengeschwindigkeit v_{ph} versteht man die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenpunkt mit vorgegebener fester Phase bewegt. Um v_{ph} zu bestimmen, betrachten wir wieder eine ebene Welle in z -Richtung und bilden das totale Differential von $\phi(z, t)$:

$$d\phi = kdz - \omega dt. \quad (9.32)$$

Für $\phi = \text{const.}$ folgt dann:

$$v_{ph} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = c; \quad (9.33)$$

die Phasengeschwindigkeit ist also gleich der Lichtgeschwindigkeit c .

Beziehung zwischen \mathbf{E} und \mathbf{B} Feld Ausgehend von der Definition (9.22) für das Vektorpotential findet man für monochromatische ebene Wellen die Felder, siehe (7.1) und (7.3):

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \quad (9.34)$$

Im Vakuum verschwindet das skalare Potential, $\Phi \rightarrow 0$, für die Coulomb Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Die Coulomb Eichung ist für $\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ erfüllt, siehe (9.22). Damit erhalten wir

$$\mathbf{B} = i(\mathbf{k} \times \mathbf{A}); \quad \mathbf{E} = i\omega \mathbf{A}. \quad (9.35)$$

Mit $\omega = ck$ finden wir die einprägsame Beziehung

$$\mathbf{B} = i \left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{E}}{i\omega} \right) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \hat{n} \times \mathbf{E}, \quad (9.36)$$

wobei $\hat{n} = \mathbf{k}/k$ die Ausbreitungsrichtung ist.

Energiedichte Der zeitliche Mittelwert der Energiedichte (reelle Darstellung) ist:

$$\bar{\omega}_F = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \omega_F dt, \quad (9.37)$$

wobei die Energiedichte ω_F (mit $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$) durch

$$\omega_F = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\epsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2) \quad (9.38)$$

gegeben ist. Mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0$ finden wir:

$$\bar{\omega}_F = \frac{\epsilon_0}{4} \text{Re}(\omega^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* + c^2 k^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*) = \frac{\epsilon_0}{2} \omega^2 |\mathbf{A}_0|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0|^2, \quad (9.39)$$

wobei der extra Faktor $1/2$ durch die zeitliche Mittelung, siehe (9.27) zustande kommt.

Energiestromdichte Entsprechend zur Zeit-gemittelten Energiedichte (9.39) gilt (mit $\hat{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ für die Zeit-gemittelte Energiestromdichte $\bar{\mathbf{S}}$, siehe (8.13),

$$\bar{\mathbf{S}} = \overline{(\mathbf{E} \times \mathbf{B})/\mu_0} = \frac{\omega}{2\mu_0} |\mathbf{A}_0|^2 \mathbf{k} = \frac{\omega \mathbf{k}}{2\mu_0} \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\omega^2} = \frac{\mathbf{k}}{2\mu_0} \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{ck} = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \hat{n}, \quad (9.40)$$

wobei wir $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ verwendet haben. Vergleicht man (9.39) mit (9.40), so findet man

$$|\bar{\mathbf{S}}| = c \bar{\omega}_F; \quad (9.41)$$

die Energie des elektromagnetischen Feldes wird also mit der Lichtgeschwindigkeit c transportiert.

Impulsdichte Die Impulsdichte $\vec{\pi}_F$ lässt sich direkt über die Beziehung (8.28) aus dem Poynting-Vektor \mathbf{S} herleiten.

$$\vec{\pi}_F = \frac{1}{c^2} \bar{\mathbf{S}} = \frac{\epsilon_0}{2c} |\mathbf{E}_0|^2 \hat{n}, \quad c |\vec{\pi}_F| = \bar{\omega}_F. \quad (9.42)$$

Die Beziehung rechter Hand ist mit der relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}, \quad (E = cp)_{m_0=0}$$

für Ruhemasse-lose Teilchen (Photonen) konsistent.

Ebene Wellen als Approximationen Streng genommen ist eine ebene Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung unendlich ausgedehnt; jede praktisch realisierbare Welle ist dagegen begrenzt. Die ebene Welle ist jedoch eine sinnvolle Approximation, wenn die Ausdehnung der realen Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung groß ist im Vergleich zu irgendwelchen Hindernissen (z.B. Spalte), durch die sie gestört werden kann.

9.4 Polarisation

Orthogonales Dreibein Wegen der Transversalität und der Orthogonalität von \mathbf{E} und \mathbf{B} können wir eine monochromatische ebene Welle der Form (9.22) durch

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)); \quad \mathbf{B} = \mathbf{e}_2 B_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \quad (9.43)$$

beschreiben. Da nach (9.36) bilden \mathbf{k} , \mathbf{E} und \mathbf{B} mit $\mathbf{B} = \hat{n} \times \mathbf{E}/c$ ein orthogonales Dreibein, also gilt

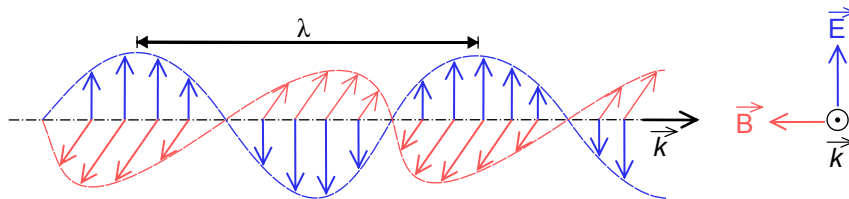
$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (9.44)$$

Eine solche Welle nennt man *linear polarisiert*. Eine zu (9.43) gleichberechtigte, linear unabhängige ebene Welle zu gleichem Wellenvektor \mathbf{k} erhält man, indem man \mathbf{E} in \mathbf{e}_2 -Richtung und \mathbf{B} in \mathbf{e}_1 -Richtung wählt.

Allgemeine Polarisation Der allgemeine Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen Welle ergibt sich nach dem Superpositionsprinzip, z.B. für das elektrische Feld,

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1 E_1 + \mathbf{e}_2 E_2) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)); \quad E_l = |E_l| \exp(i\phi_l), \quad (9.45)$$

mit E_l ($l = 1,2$) als beliebigen komplexen Zahlen. Gleichung (9.45) beschreibt alle möglichen Polarisationszustände, welche wir nun diskutieren.



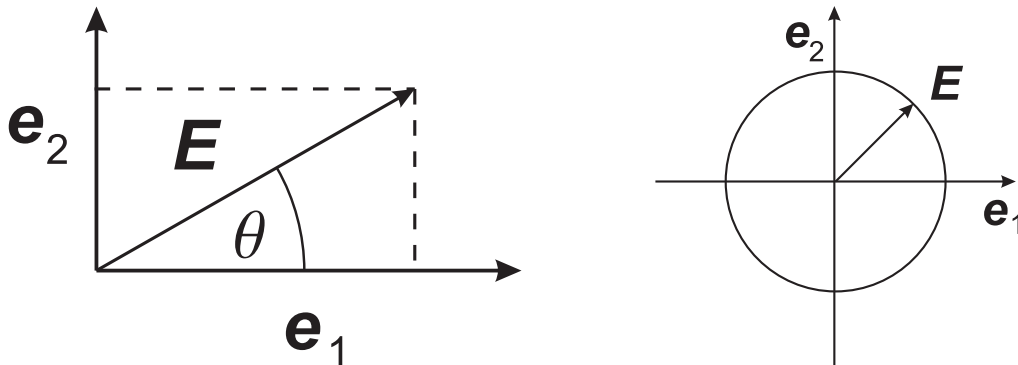
Lineare Polarisation Die elektromagnetische Welle ist linear polarisiert wenn in (9.45)

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (9.46)$$

der Fall ist. Richtung und Betrag von \mathbf{E} sind dann durch

$$\theta = \arctan\left(\frac{E_2}{E_1}\right); \quad E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \quad (9.47)$$

gegeben.



Zirkuläre Polarisation Gibt es eine Phasendifferenz von $\pm\pi/2$ in (9.45),

$$E_1 = E_2; \quad \phi_1 - \phi_2 = \pm\frac{\pi}{2}, \quad (9.48)$$

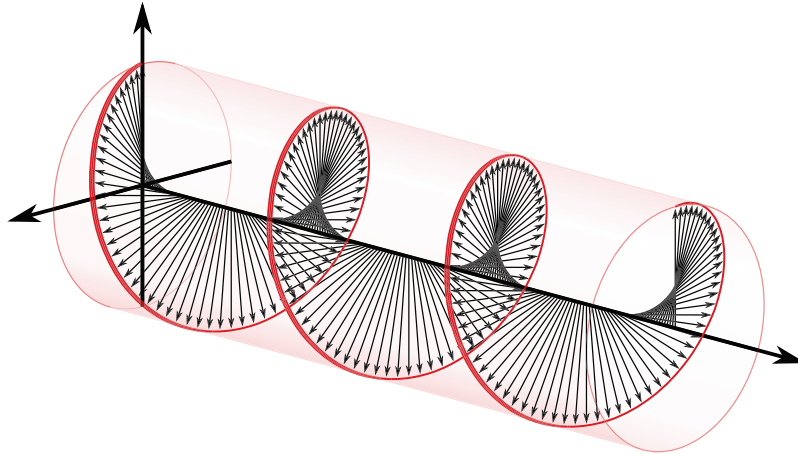
dann wird das elektrische Feld zu

$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)). \quad (9.49)$$

In reeller Darstellung

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t); \quad E_y = \mp E_0 \sin(kz - \omega t), \quad (9.50)$$

wenn \mathbf{k} in z -Richtung zeigt. Der Drehsinn ist durch die Wahl des Vorzeichens in (9.49) festgelegt; man erhält links- bzw. rechts-zirkulare Polarisation.



Elliptische Polarisation Für allgemeine Koeffizienten

$$E_1 \neq E_2; \quad \phi_1 - \phi_2 \neq 0 \quad (9.51)$$

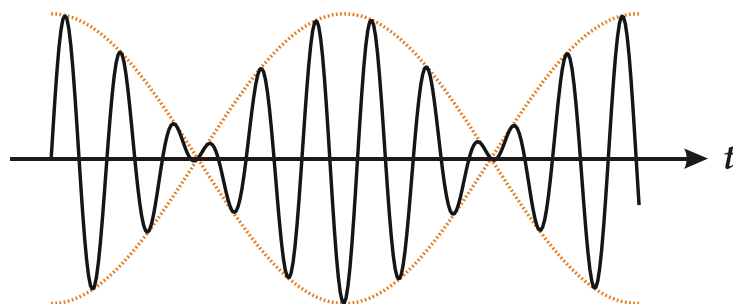
haben wir elliptische Polarisation. Das elektrische Feld \mathbf{E} beschreibt dann für festes z eine Ellipsenbahn, deren Lage relativ zu \mathbf{e}_1 durch $\phi_1 - \phi_2$ und deren Hauptachsenverhältnis durch E_1/E_2 bestimmt wird.

Kapitel 10

Wellenpakete im Vakuum

10.1 Informationsübertragung durch elektromagnetische Wellen

Ein wichtiger Anwendungsbereich elektromagnetischer Strahlung ist die Informationsübertragung. Monochromatische ebene Wellen sind dazu ungeeignet, da sie keine Information außer ihrer Periode, oder der Frequenz, vermitteln können.



Amplitudenmodulation Man kann monochromatische ebene Wellen jedoch modulieren und so Information übertragen. Im einfachsten Fall bildet man eine Überlagerung aus 2 monochromatischen Wellen,

$$f(t) = f_0 \cos(\omega_1 t) + f_0 \cos(\omega_2 t) = f_0 [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] . \quad (10.1)$$

Mit

$$\begin{aligned} \omega_m &= (\omega_1 - \omega_2)/2 & \omega_1 &= \omega_0 + \omega_m \\ \omega_0 &= (\omega_1 + \omega_2)/2 & \omega_2 &= \omega_0 - \omega_m \end{aligned}$$

und $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ kann (10.1) alternativ auch als *amplitudenmodulierte* Schwingung dargestellt werden:

$$f(t) = 2f_0 \cos(\omega_m t) \cos(\omega_0 t) , \quad (10.2)$$

Wenn $\omega_1 \approx \omega_2$ gewählt wird, dann ist (10.2) eine fast harmonische Schwingung der **Trägerfrequenz** ω_0 deren Amplitude sich mit der **Modulationsfrequenz** ω_m ändert. Man erhält das Bild einer **Schwebung**.

Kompliziertere Schwingungsformen und damit mehr Möglichkeiten zur Informationsübertragung ergeben sich durch Überlagerung mehrerer Schwingungen verschiedener Frequenzen.

Gruppengeschwindigkeit

Wir betrachten nun die Überlagerung zweier orts- und zeitabhängiger ebener Wellen mit einer allg. Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$,

$$f(x, t) = f_0 \cos(k_1 x - \omega(k_1) t) + f_0 \cos(k_2 x - \omega(k_2) t) . \quad (10.3)$$

Analog zu (10.2) benutzen wir die Darstellung

$$f(x, t) = 2f_0 \cos(k_m x - \omega_m t) \cos(k_0 t - \omega_0 t) , \quad (10.4)$$

mit

$$\omega_m = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{2}; \quad \omega_0 = \frac{\omega(k_1) + \omega(k_2)}{2}$$

und

$$k_m = \frac{k_1 - k_2}{2}; \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2} .$$

Für $k_1 \approx k_2$ bewegt sich das Maximum $k_m x - \omega_m t = 0$ der Einhüllenden mit der *Gruppengeschwindigkeit* v_g fort,

$$v_g \equiv \frac{x}{t} = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} \approx \left. \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right|_{k=k_0} . \quad (10.5)$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist somit auch die Geschwindigkeit der Informationsübertragung.

Im Vakuum fällt für Licht die Gruppengeschwindigkeit $v_g = \omega'(k)$ mit der Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \omega/k$, siehe (9.33), zusammen, dank der linearen Dispersionsrelation $\omega(k) = ck$. Wenn sich Licht in Materie ausbreitet gilt i.Allg. $v_g < c = v_{ph}$.

10.2 Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Die Überlagerung elektromagnetischer Wellen läßt sich systematisch mit dem jeweiligen Fourierspektrum beschreiben. Wir wiederholen daher hier die grundlegenden Begriffen und betrachten eine periodische Funktion,

$$f(t); \quad f(t) = f(t + T) . \quad (10.6)$$

Alternativ können wir jede Funktion auf dem Intervall $t \in [0, T]$ periodisch forsetzen, so daß (10.6) erfüllt ist.

Fourier-Reihen Jede periodische Funktion läßt sich nun in eine **Fourier-Reihe**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(-i\omega_n t) \quad \omega_n = n\omega \quad \omega = \frac{2\pi}{T} . \quad (10.7)$$

entwickeln.

- Man nennt $\omega = 2\pi/T$ die **Grundfrequenz**. Es gilt $f(t) = f(t + T)$, da

$$\exp(-i\omega_n(t + T)) = \exp(-i\omega_n t) \exp(-i(2n\pi/T)T) = \exp(-i\omega_n t)$$

für jeden Koeffizienten.

- Die Fourier-Reihe (10.7) konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise), wenn $f(t)$ periodisch mit der Periode T und stückweise glatt (beliebig oft differenzierbar) ist.
- Die (schwächere) Forderung der Konvergenz im quadratischen Mittel ist erfüllt für periodische, in $[0, T]$ stetige Funktionen $f(t)$.
- Die ebenen Wellen $\exp(i\omega_n t)/\sqrt{T}$ bilden ein vollständiges orthonormales Funktionensystem auf dem Intervall $[0, T]$, siehe weiter unten. Die Fourier-Reihe (10.7) ist damit nichts anderes als eine Entwicklung nach den Basisfunktionen $\exp(-i\omega_n t)/\sqrt{T}$.

Skalarprodukt Für zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ auf $[-T/2, T/2]$ können wir das Skalarprodukt

$$(f, g) \equiv \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t)g(t) dt \quad (10.8)$$

definieren, als direkte Verallgemeinerung des üblichen Skalarproduktes $\sum_j x_j^* y_j$ zweier komplexer Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$. Insbesondere sind die Basisfunktionen

$$e_n(t) = \frac{\exp(-i\omega_n t)}{\sqrt{T}}, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad (10.9)$$

im Intervall $[-T/2, T/2]$ orthonormiert bezüglich des des Skalarproduktes (10.8). Wie für jedes Skalarprodukt gilt, dass $(f, f) \geq 0$. Es ist positiv definit.

Orthogonalitätsrelationen Um die Orthogonalitätsrelation

$$(e_m, e_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i\omega(m-n)t) dt = \delta_{mn} \quad (10.10)$$

zu beweisen, brauchen wir nur die Fälle $m = n$ und $m \neq n$ zu unterscheiden,

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i\omega(m-n)t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = 1 \quad (m = n),$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i\omega(m-n)t) dt &= \frac{1}{T} \frac{1}{i\omega_n(m-n)} \exp(i\omega(m-n)t) \Big|_{t=-T/2}^{t=T/2} dt \\ &= \frac{1}{i\omega_n T(m-n)} \left[\exp\left(i \frac{2\pi}{T} (m-n) \frac{T}{2}\right) - \exp\left(-i \frac{2\pi}{T} (m-n) \frac{T}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2i}{i\omega_n T(m-n)} \sin\left(\pi(m-n)\right) = 0 \end{aligned}$$

für $m \neq n$.

Funktionsräume Die Menge aller (komplexwertigen) Funktionen $f(t)$ auf dem Intervall $[-T/2, T/2]$ bildet einen (komplexen) Funktionenraum \mathcal{F} .

- \mathcal{F} ist linear abgeschlossen, da mit $g, f \in \mathcal{F}$ auch jede Linearkombination $c_1 f(t) + c_2 g(t)$ in \mathcal{F} ist, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.
- \mathcal{F} ist normiert, da mit der bilinearen Abbildung (f, g) , dem Skalarprodukt, eine Norm auf \mathcal{F} definiert ist.

Fourier-Koeffizienten Die Fourier-Koeffizienten f_n in (10.7) sind durch

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(i\omega_n t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(i\omega_n t) dt \quad (10.11)$$

gegeben, wobei wir die Periodizität von $f(t)$ verwendet haben. Für den Beweis verwenden wir die Orthogonalitätsrelation (10.10) und finden

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{T}}(e_m, f) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i\omega_m t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_n f_n \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i\omega_m t) \exp(-i\omega_n t) dt \\ &= \sum_n f_n \underbrace{(e_m, e_n)}_{\delta_{m,n}} = f_m. \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe ist schlussendlich nichts anderes als die Entwicklung nach einer speziellen Menge vollständiger Basis-Funktionen. In anderen Zusammenhängen ist es günstiger

andere Basis-Funktionen zu verwenden, wie z.B. Legendre Funktionen oder die Kugelflächenfunktionen.

Fourier-Integrale Wir betrachten nun Funktionen $f(t)$ welche nicht periodisch sind. Formell können wir dazu in der Darstellung (10.7) für die Fourier-Reihe, zusammen mit (10.11) für die Koeffizienten, die Periode T divergieren lassen.

Für den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ betrachten wir mit $\Delta\omega = 2\pi/T$ den Abstand benachbarter Frequenzen ω_n ,

$$f(t) = \sum_n \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega} f_n \exp(-i\omega_n t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_n) \exp(-i\omega_n t) \Delta\omega \quad (10.12)$$

mit

$$\tilde{f}(\omega_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{f_n}{\Delta\omega} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{T}{2\pi} f_n \right). \quad (10.13)$$

Also kann man (10.12) als Riemann-Summe des *Fourier-Integrals*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (10.14)$$

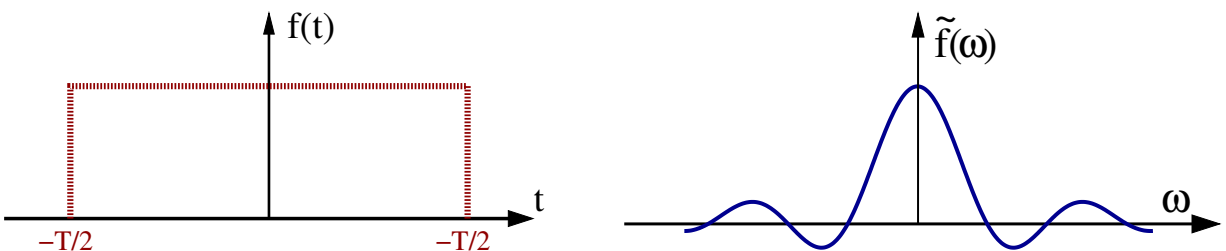
auffassen. Für die Umkehrung von (10.14) zeigt der Vergleich von (10.11) und (10.13):

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (10.15)$$

$\tilde{f}(\omega)$ heißt die **Fourier-Transformierte** zu $f(t)$. Sie existiert und (10.14) konvergiert im quadratischen Mittel für alle quadratintegrablen Funktionen $f(t)$, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty; \quad (10.16)$$

$\tilde{f}(\omega)$ dann auch quadratintegrabel ist.



Rechteckimpuls - Unschärferelation Wir berechnen nun die Fourier-Transformierte für den Rechteckimpuls

$$f(t) = 1 \quad \text{für} \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}; \quad f(t) = 0 \quad \text{sonst} . \quad (10.17)$$

Dann wird

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i\omega t) dt = \frac{1}{\pi\omega} \frac{\exp(i\omega t)}{2i} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{\sin(\omega T/2)}{\pi\omega}. \quad (10.18)$$

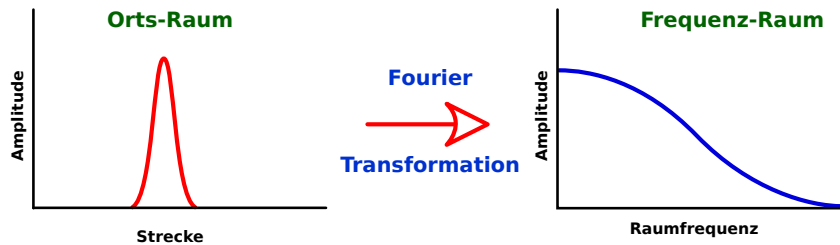
Die Breite $\Delta\omega$ von $\tilde{f}(\omega)$ schätzt man aus obiger Figur ab zu:

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{T} \quad \text{oder} \quad \Delta\omega \Delta t \approx 2\pi. \quad (10.19)$$

Je schmaler (breiter) das Signal $f(t)$ werden soll, desto breiter (schmaller) ist das Frequenzspektrum, das man benötigt.

Die *Unschärferelation* (10.19) ist nicht an das Beispiel (10.17) gebunden, sondern ist ein charakteristisches Merkmal der Fourier-Transformation.

Die Unschärferelation (10.19) wird sich in der Quantenmechanik (mit einem Faktor \hbar verziert) als ein Spezialfall der Heisenberg'schen Unschärferelation wiederfinden.



Bemerkung Jede andere Variable kann eine Fourier-Transformation verwendet werden, z.B. Funktionen $f(x)$ des Ortes.

Oft wird die Fourier-Transformation in der symmetrischen Form

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (10.20)$$

mit

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (10.21)$$

benutzt. Die Koeffizienten $\tilde{f}(\omega)$ sind entsprechend zu reskalieren.

10.3 δ -Distribution

Distributionen Die Fourier-Transformation (10.14), (10.15) führt auf das folgende mathematische Problem: Setzt man (10.15) in (10.14) ein, so muss (nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-i\omega(t-t')) d\omega dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta(t-t') dt' \quad (10.22)$$

mit

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega(t-t')) d\omega \quad (10.23)$$

für beliebige quadratintegrale Funktionen $f(t)$ gelten. Die hier eingeführte Größe $\delta(t-t')$ ist offensichtlich keine gewöhnliche Funktion, sondern eine *Distribution*, welche streng genommen nicht für sich alleine stehen darf, sondern nur in Verbindung mit der Integration in (10.22) erklärt ist. Mathematisch gesehen entspricht die Deltafunktion $\delta(t)$ der Abbildung

$$f(t) \rightarrow f(0) .$$

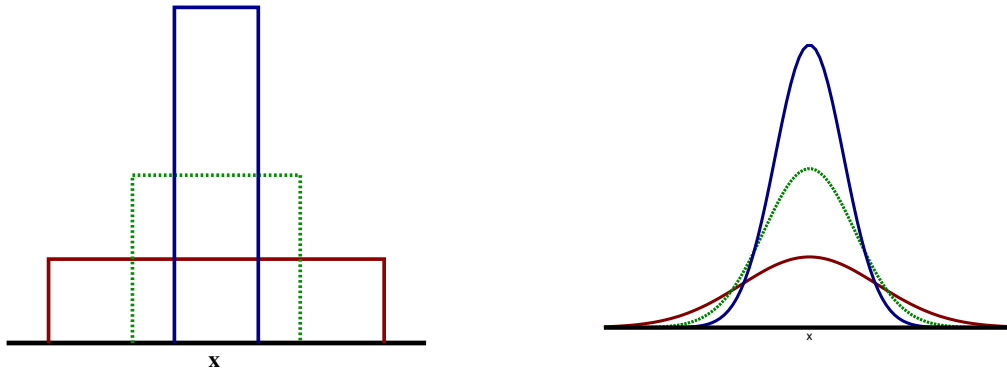
Regularisierung Ein Integral wie (10.23) ist nur dann definiert, wenn es vorher regularisiert wurde. Man das entweder direkt über die Integrationsgrenzen machen, siehe (10.28), oder durch eine exponentielle Dämpfung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} e^{-\epsilon|\omega|} d\omega = \int_{-\infty}^0 e^{i\omega t} e^{\epsilon\omega} d\omega + \int_0^{\infty} e^{i\omega t} e^{-\epsilon\omega} d\omega = \frac{1}{it + \epsilon} - \frac{1}{it - \epsilon} .$$

Somit ist

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} e^{-\epsilon|\omega|} d\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} = \delta(t) , \quad (10.24)$$

da das Integral über die Lorentz Funktion $\int dt \epsilon / (t^2 + \epsilon^2) = \pi$ ergibt.



Darstellungen der Delta-Funktion Die δ -Distribution (als deren Definition wir im folgenden (10.22) betrachten wollen), kann durch jede Folge stetiger Funktionen δ_n , für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta_n(t - t') dt' = f(t) \quad (10.25)$$

gilt, dargestellt werden. Beispiele:

- Rechteck

$$\delta_n(t) = n \quad \text{für} \quad |t| < \frac{1}{2n}; \quad \delta_n(t) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (10.26)$$

- Gauß-Funktion („Glockenkurve“)

$$\delta_n(t) = n \exp(-\pi t^2 n^2). \quad (10.27)$$

- Die Darstellung

$$\delta_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nt)}{t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \exp(i\omega t) d\omega \quad (10.28)$$

führt direkt auf die Schreibweise (10.23).

Vorsicht: Die Gleichungen (10.25) - (10.28) sind so zu verstehen, dass die t' -Integration vor der Limes-Bildung $n \rightarrow \infty$ auszuführen ist!

Rechenregeln für die Delta-Funktion Wie man sich leicht selber überzeugen kann gelten die Beziehungen

1.) $\delta(t) = \delta(-t)$,

2.) $\delta(at) = \delta(t)/|a|$ und

3.) $\delta(t^2 - a^2) = [\delta(t + a) + \delta(t - a)] / (2|a|)$; $a \neq 0$.

10.4 Fourier-Transformation der Maxwell Gleichungen

Als eine Anwendung betrachten wir mit

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \int d^3q d\omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})} \quad (10.29)$$

die Fourierentwicklung des magnetischen Feldes sowohl nach der Frequenz ω und dem Impuls \mathbf{q} . Analog verfahren wir mit dem elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x}, t)$ und der Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$.

Fouriertransformation des Induktionsgesetz Die Fourierdarstellung (10.29) können auf die Maxwell Gleichungen anwenden. Für das Faraday'schen Induktionsgesetz (6.23) erhalten wir

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \int d^3q d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int d^3q d\omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})} \\ \int d^3q d\omega e^{-i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})} [i\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}, \omega)] &= \int d^3q d\omega e^{-i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})} [i\omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}, \omega)] .\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird durch

$$\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}, \omega) = \omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}, \omega) \quad (10.30)$$

erfüllt, was wir schon bei der Diskussion ebener Wellen mit (9.36) erhalten haben.

Maxwell Gleichungen im Fourierraum Analog zu zum Faraday'schen Induktionsgesetz können wir alle vier Maxwell Gleichungen transformieren und erhalten

$$\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}, \omega) = 0, \quad \mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}, \omega) - \omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}, \omega) = 0 \quad (10.31)$$

für die homogenen Gleichungen (6.23) und (6.24), sowie

$$\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{q}, \omega)}{i\epsilon_0}, \quad \mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}, \omega) + \epsilon_0 \mu_0 \omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\mu_0}{i} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{q}, \omega) \quad (10.32)$$

für die inhomogenen Gleichungen (6.25) und (6.26). Hierbei ist zu beachten, dass $\tilde{\rho}(\mathbf{q}, \omega)$ und $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{q}, \omega)$ durch die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \omega \tilde{\rho}(\mathbf{q}, \omega) = \mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{q}, \omega) \quad (10.33)$$

verknüpft sind.