

Teil III

Grundlagen der Elektrodynamik

Kapitel 6

Die Maxwell'schen Gleichungen

Konzept des elektromagnetischen Feldes Im Folgenden sollen die Grundgleichungen für das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und für das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ für den Fall beliebiger Ladungs- und Stromverteilungen

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (6.1)$$

aufgestellt werden. Als Definition der Felder benutzen wir die **Lorentz-Kraft** (4.13),

$$\mathbf{K} = q [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] . \quad (6.2)$$

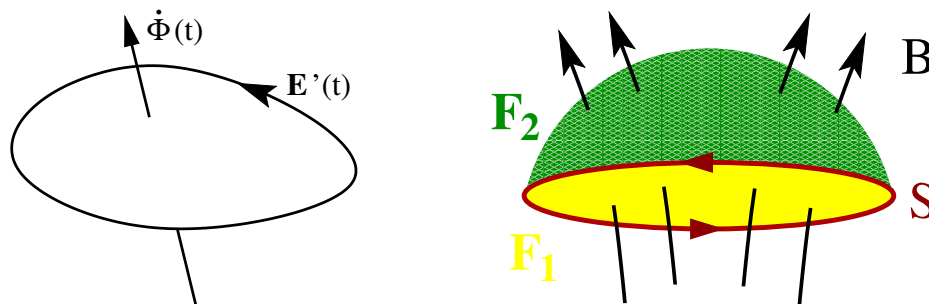
Da ρ und \mathbf{j} nun durch die Kontinuitätsgleichung (4.10)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (6.3)$$

verknüpft sind, ist klar, daß elektrisches und magnetisches Feld nicht mehr separat behandelt werden können: Die Maxwell'schen Gleichungen, welche wir nun Schritt für Schritt motivieren wollen, sind ein System gekoppelter Differentialgleichungen für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} .

6.1 Faraday'sches Induktionsgesetz

Induzierte elektrische Felder und Spannungen Wir gehen von folgender experimenteller Erfahrung aus: Wenn sich der magnetische Fluss $\Phi(t) = \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}$ durch einen geschlossenen Leiterkreis S ändert, wird längs des Leiterkreises ein elektrisches Feld $\mathbf{E}'(t)$ induziert.



Wenn wir das induzierte Feld längs der Leiterschleife integrieren, erhalten wir eine induzierte Spannung der Größe $U' = \oint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}$, welche experimentell mit der Änderung des Flusses $\dot{\Phi}(t)$ via

$$-k \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s} \quad (6.4)$$

verbunden ist. Hierbei ist F eine beliebige in den Leiterkreis S eingespannte Fläche. Die induzierte Spannung ist also nach dem *Faraday'schen Induktionsgesetz* (6.4) proportional zur zeitlichen Änderung des eingeschlossenen magnetischen Flusses.

Lenz'sche Regel Das Vorzeichen in (6.4) spiegelt die Lenz'sche Regel wieder. Das Elektrische Feld \mathbf{E}' in der Leiterschleife erzeugt einen Strom, welcher wiederum nach dem Ampère'schen Gesetz (4.14) ein Magnetfeld erzeugt, welches der Änderung des magnetischen Flusses durch die Schleife entgegenwirkt.

Bewegte Koordinatensysteme Der magnetische Fluss $\Phi(t)$ kann sich im Faraday'sche Induktionsgesetz (6.4) auf zweierlei Arten ändern:

- $\mathbf{B}(t)$ ist variabel, die Leiterschleife S ortsfest.
- $\mathbf{B}(t)$ ist zeitlich konstant, die Leiterschleife beweglich. Daher bezeichnen wir in (6.4) mit \mathbf{E}' die induzierte elektrische Feldstärke, bezogen auf ein mit dem Leiter S mitbewegtes Koordinatensystem Σ' .

Mehr hierzu im nächsten Abschnitt.

Maßsysteme In (6.4) ist k eine vom Maßsystem abhängige Konstante,

$$k = 1 \quad \text{im MKSA-System;} \quad k = \frac{1}{c} \quad \text{im cgs-System.} \quad (6.5)$$

Wir bemerken noch, dass die Lorentz-Kraft (6.2) sich auf das MKSA-System bezieht und im cgs-System durch

$$\mathbf{K} = q \left(\mathbf{E} + (\vec{\beta} \times \mathbf{B}) \right) \quad (6.6)$$

zu ersetzen ist, mit $\vec{\beta} = \mathbf{v}/c$. Alle folgenden Formeln beziehen sich auf das MKSA-System.

Quellenfreiheit von \mathbf{B} Die Fläche F , welche die Leiterschleife S einspannt ist beliebig im Faraday'schen Induktionsgesetz. Daraus folgt auch für zeitabhängige Felder die Quellenfreiheit

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (6.7)$$

der magnetischen Induktion, welche wir schon in der Magnetostatik gefunden hatten.

Zum Beweis betrachten wir mit F_1 und F_2 irgendwelche in S eingespannte Flächen. Somit folgt aus (6.4)

$$\frac{d}{dt} \int_{F_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}_1 = \frac{d}{dt} \int_{F_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}_2. \quad (6.8)$$

Unter Beachtung der Orientierung der Flächen ergibt der Satz von Gauß für das durch F_1 und F_2 definierte Volumen V

$$\text{const} = \int_{F_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}_1 - \int_{F_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}_2 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV .$$

Diese Beziehung gilt auch für $F_1 = F_2$ und somit muss die Konstante auf der linken Seite verschwinden. Die universelle Gültigkeit von $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ war schon aufgrund der in Abschnitt 5.1 gegebenen Interpretation (Nicht-Existenz magnetischer Monopole) zu erwarten.

6.2 Diskussion des Induktionsgesetzes

Wir diskutieren nun zwei Möglichkeiten den magnetischen Fluss $\Phi(t)$ im Induktionsgesetz (6.4) zu verändern.

Zeitlich veränderliches \mathbf{B} -Feld bei ruhendem Leiterkreis S Dann ist $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ die induzierte Feldstärke im Laborsystem Σ und es folgt nach der Formel von Stokes

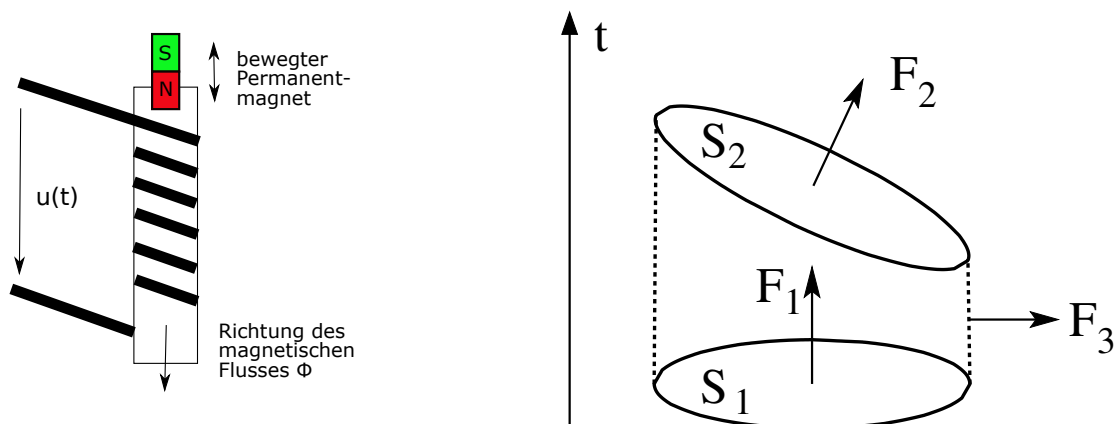
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_F (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{F} = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} , \quad (6.9)$$

oder

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (6.10)$$

da eingeschlossener Fläche F beliebig ist. Gleichung (6.10) zeigt die erwartete Verknüpfung der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} .

- Gleichung (6.10) gilt unabhängig davon, ob der Leiterkreis tatsächlich vorhanden ist, er dient nur zum Nachweis des induzierten Feldes!
- In dem von einem zeitlich veränderlichen \mathbf{B} -Feld induzierten elektrischen Feld \mathbf{E} werden geladene Teilchen beschleunigt (Betatron), bzw. ein Strom induziert wenn die Leiterschleife vorhanden ist (Spule).



Bewegter Leiterkreis S bei zeitlich konstantem \mathbf{B} -Feld F_1 und F_2 seien beliebige in S_1 bzw. in S_2 eingespannte Flächen, F_3 die Mantelfläche, welche S_1 und S_2 verbindet. Dann gilt nach der Formel von Gauß

$$-\int_{F_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}_1 + \int_{F_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}_2 + \int_{F_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}_3 = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0, \quad (6.11)$$

wenn man (6.7) beachtet.

Elektromotorische Kraft

Wir betrachten nun eine infinitesimale Bewegung. Für die zeitliche Änderung des Flusses folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{F_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}_2 - \int_{F_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}_1 \right\} \\ &= - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{F_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}_3 = \oint_S \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}), \end{aligned}$$

da der Normalenvektor auf die Mantelfläche durch $(-\mathbf{v} \times d\mathbf{s})$ gegeben ist. Das Induktionsgesetz (6.4) nimmt somit die Form

$$\oint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s} = - \oint_S \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) = \oint_S d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.12)$$

an. $\oint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}$ bezeichnet man in diesem Zusammenhang auch als *elektromotorische Kraft*, als Quellenspannung der bewegten Leiterschleife (Wechselstrom-Generator).

Transformation elektrischer Felder Wir betrachten nun den allg. Fall einer beweglichen Leiterschleife in einem zeitlich veränderlichen Feld. Die elektromotorische Kraft hat daher zwei Komponenten, jeweils durch (6.9) und (6.12) gegeben,

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s} &= - \int_F \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} + \oint_S d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \oint_S d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \oint_S [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{s}, \end{aligned}$$

wobei wir mit $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{B}$ das Induktionsgesetz in differentieller Form benutzt haben sowie den Satz von Stokes $\int [\nabla \times \mathbf{E}] \cdot d\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$. Da die Leiterschleife S beliebig gewählt werden kann, folgt:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.13)$$

Dieser Zusammenhang zwischen der (induzierten) elektrischen Feldstärke \mathbf{E}' im mitbewegten System Σ' und der (induzierten) Feldstärke \mathbf{E} sowie der magnetischen Induktion \mathbf{B} im Laborsystem Σ lässt sich für $v \ll c$ im Rahmen des Galilei'schen Relativitätsprinzips verstehen.

Transformation der Kraft Um den Zusammenhang (6.13) nicht-relativistisch (in niedrigster Näherung in v/c) zu motivieren, betrachten wir die Kraft K , welche auf einen Ladungsträger q des Leiterkreises S im Laborsystem Σ wirkt,

$$\mathbf{K} = q [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]. \quad (6.14)$$

Im mitbewegten System Σ' gilt dagegen

$$\mathbf{K}' = q\mathbf{E}', \quad (6.15)$$

da q in Σ' ruht, also $\mathbf{v}'_q = 0$. Für $\mathbf{v} = \text{const}$ ist der Zusammenhang von Σ und Σ' durch eine Galilei-Transformation gegeben und es ist ($\cancel{\neq}$ Scheinkräfte)

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}', \quad (6.16)$$

woraus direkt (6.13) folgt.

6.3 Erweiterung des Ampère'schen Gesetzes

Das Ampère'sche Gesetz der Magnetostatik (5.15)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.17)$$

gilt nur für stationäre Ströme. Denn aus (6.17) folgt mit $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$

$$\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0. \quad (6.18)$$

Die Ströme sind also quellenfrei und somit nach der Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ stationär.

Kontinuitätsgleichung Wir wollen nun (6.17) so erweitern, dass diese allg. gültig wird. Hierzu gehen wir von der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (6.19)$$

aus und verwenden das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$,

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (6.20)$$

Ersetzt man daher in (6.17)

$$\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6.21)$$

so erfüllt

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.22)$$

die Kontinuitätsgleichung (6.19) für allg. zeitliche Ladungs- und Stromverteilungen.

Gleichung (6.22) nennt man das *Durchflutungsgesetz* oder auch das *Maxwell-Ampère-Gesetz*.

6.4 Übersicht über die Maxwell'schen Gleichungen

Wir haben nun alle Grundgleichungen der Elektrodynamik zusammen, die vier Maxwell-Gleichungen.

Homogene Gleichungen Die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen sind

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.23)$$

welche dem Fehlen magnetischer Monopole entspricht und

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (6.24)$$

welche dem Faraday'schen Induktionsgesetz entspricht.

Inhomogene Gleichungen Die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen sind

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (6.25)$$

welche dem Gauß'schen Gesetz entspricht und

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (6.26)$$

welche dem Ampère-Maxwell'schen Gesetz entspricht.

In (6.25) und (6.26) ist die Ladungserhaltung (6.19) schon implizit enthalten. Gleichungen (6.24) und (6.26) zeigen, daß ein zeitlich sich änderndes Magnetfeld \mathbf{B} ein elektrisches Feld \mathbf{E} bedingt und umgekehrt.

Lorentz-Kraft Die Gleichungen (6.23) – (6.26) beschreiben zusammen mit der Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K} = q \left[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \quad (6.27)$$

vollständig die elektromagnetische Wechselwirkung geladener Teilchen im Rahmen der klassischen Physik. Die Elektrodynamik ist nichts anderes als die Lösungstheorie für die Maxwell-Gleichungen.

Kapitel 7

Die elektromagnetischen Potentiale

7.1 Skalares Potential und Vektorpotential

Statt die gekoppelten Differentialgleichungen (6.23) - (6.26) für \mathbf{E} und \mathbf{B} direkt zu lösen, ist es meist bequemer - analog dem Vorgehen in der Elektrostatik und Magnetostatik - elektromagnetische Potentiale einzuführen.

Das Vektorpotential Wir erinnern uns an die Magnetostatik. Die Quellenfreiheit der magnetischen Induktion, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ erlaubt die Darstellung (5.3)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7.1)$$

mit dem Vektorpotential $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

Das skalare Potential Wir schreiben das Induktionsgesetz (6.24) mit Hilfe des Vektorpotentials (7.1) als

$$0 = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

Hieraus folgt, daß sich die Vektorfunktion $\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$ als Gradient einer skalaren Funktion $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$ darstellen lässt,

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi, \quad (7.2)$$

oder

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \quad (7.3)$$

Damit sind \mathbf{E} und \mathbf{B} auf das Vektorpotential \mathbf{A} und das skalare Potential Φ zurückgeführt.

Bestimmungsgleichungen für Φ Wir müssen nun die Differentialgleichungen aufstellen, aus denen \mathbf{A} und Φ berechnet werden können, wenn die Quellen ρ und \mathbf{j} vorgegeben sind.

Um die Bestimmungsgleichung für das skalare Potential herzuleiten benutzen wir das Gauß-Gesetz sowie (7.3),

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \Phi ,$$

also

$$\boxed{\Delta \Phi + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} . \quad (7.4)$$

Wir können also das skalare Potential Φ i. Allg. erst dann bestimmen, wenn das Vektorpotential \mathbf{A} bekannt ist.

Bestimmungsgleichungen für \mathbf{A} Um die Bestimmungsgleichung für das Vektorpotential herzuleiten, benutzen wir das Ampère-Maxwell Gesetz (6.26) sowie (7.3),

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi \right) ,$$

wobei wir (7.1) und (7.3): verwendet haben. Mit der Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

erhalten wir

$$\boxed{\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)} . \quad (7.5)$$

Damit haben wir die 8 Maxwell-Gleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{B} überführt in 4 Gleichungen, (7.4) und (7.5), für die Potentiale \mathbf{A} und Φ , die jedoch untereinander gekoppelt sind.

Eichinvarianz Zur Entkopplung der Bestimmungsgleichungen ((7.4) und (7.5)) für die elektromagnetischen Potentiale machen wir im Folgenden davon Gebrauch, dass die Maxwell-Gleichungen unter den Eichtransformationen

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (7.6)$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (7.7)$$

invariant sind, denn die physikalischen Felder bleiben unter (7.6) und (7.7) invariant.

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} ,$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \phi' = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla \chi}{\partial t} - \nabla \phi + \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi = \mathbf{E} . \end{aligned}$$

Hierbei ist $\chi(\mathbf{r}, t)$ eine beliebige (2-mal stetig differenzierbare) Funktion.

7.2 Lorentz-Eichung

Die Bestimmungsgleichung für das Vektorpotential (7.5) legt nahe, χ so zu wählen, daß

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0}, \quad (7.8)$$

was der **Lorentz-Konvention** entspricht. Man erhält dann aus (7.5) und (7.4) entkoppelte Gleichungen,

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (7.9)$$

$$\Delta \Phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.10)$$

welche jeweils die gleiche mathematische Struktur inhomogener Wellengleichungen besitzen.

- Für zeitunabhängige Felder vereinfachen sich (7.9) und (7.10) zu den Poisson-Gleichungen (2.12) und (5.22) der Elektrostatik bzw. Magnetostatik.
- Im Vakuum mit $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$ beschreiben (7.9) und (7.10) die Ausbreitung von Licht. Daher muss $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$ sein.
- Die Lorentz-Eichung (7.8) wird bei der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik unter Verwendung von $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$ benutzt.

Wir werden in späteren Kapiteln die Lösungstheorie für die Gleichungen (7.9) und (7.10) ausführlich besprechen.

Konstruktion von χ Wie erreichen wir die Lorentz-Eichung wenn die aktuellen elektromagnetischen Potentiale diese noch nicht erfüllen? Falls

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0 \quad (7.11)$$

ist, so führen wir eine Eichtransformation

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

durch und fordern

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta \chi + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad (7.12)$$

Gleichung (7.12) ist eine inhomogene, partielle Differentialgleichung 2. Ordnung der Form

$$\Delta \chi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t), \quad (7.13)$$

für die Eichfunktion $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$, mit einer gegebenen Inhomogenität

$$f(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} . \quad (7.14)$$

Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung (7.13) ist mehrdeutig, da zu jeder Lösung von (7.13) noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta \chi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (7.15)$$

addiert werden kann.

7.3 Coulomb Eichung

In der Atom- und Kernphysik wird χ meist so gewählt, dass

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} . \quad (7.16)$$

Dann geht die Bestimmungsgleichung (7.4) für das skalare Potential in die Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.17)$$

über, mit der schon bekannten (partikulären) Lösung:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (7.18)$$

aus (7.5) wird

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t) / \partial t}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \\ &= -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t))(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' , \end{aligned} \quad (7.19)$$

wobei wir die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ verwendet haben. Diese Gleichung ist damit eine Bestimmungsgleichung für das Vektorpotential \mathbf{A} , in Abhängigkeit der Stromverteilung $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$.

Konstruktion von χ Erfüllt das Vektorpotential \mathbf{A} nicht die Eichbedingung (7.16), so führen wir die Eich-Transformationen (7.6), (7.7) durch und fordern

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \chi) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta \chi , \quad (7.20)$$

oder

$$\Delta\chi = -\nabla \cdot \mathbf{A} . \quad (7.21)$$

Dieses ist die Poisson-Gleichung mit $-\nabla \cdot \mathbf{A}$ als Inhomogenität. Wie gewohnt ist die Lösung für χ mehrdeutig. Zu jeder Lösung von (7.21) kann man noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\chi = 0 \quad (7.22)$$

addieren.

Kapitel 8

Energie und Impuls elektromagnetischer Felder

8.1 Energie

In Abschnitt 2.4 hatten wir dem elektrostatischen Feld eine Energie zugeordnet, charakterisiert durch die Energiedichte

$$\omega_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2. \quad (8.1)$$

Analog kann man dem magnetostatischen Feld eine Energie zuordnen. Wir wollen diesen Schritt überspringen und direkt die Energiebilanz für ein beliebiges elektromagnetisches Feld aufstellen.

Arbeit an äußeren Ladungen Wir betrachten dazu zunächst eine Punktladung q , die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in einem elektromagnetischen Feld $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ bewegt. Die an dieser Ladung vom Feld geleistete Arbeit ist durch

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = q [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot \mathbf{v} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (8.2)$$

gegeben, da das Magnetfeld keine Arbeit leistet. Entsprechend gilt für einen Strom der Stromdichte \mathbf{j} :

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV. \quad (8.3)$$

Die an den bewegten Punktladungen vom Feld geleistete Arbeit geht auf Kosten des elektromagnetischen Feldes.

Energiedichte Um den allgemeinen Ausdruck für die Energiedichte eines elektromagnetischen Feldes herzuleiten, müssen wir die Stromdichte \mathbf{j} in (8.3) in die Maxwellgleichungen einbeziehen, mit Hilfe des Ampère-Maxwell'schen Gesetzes (6.26)

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Wir eliminieren in (8.3) zunächst die Stromdichte \mathbf{j} ,

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV = \int_V \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV. \quad (8.4)$$

Diesen Ausdruck, der nur noch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} enthält, können wir bzgl. \mathbf{E} und \mathbf{B} symmetrisieren. Wir verwenden

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= \partial_i \epsilon_{ijk} E_j B_k = \epsilon_{ijk} (\partial_i E_j) B_k + \epsilon_{ijk} E_j (\partial_i B_k) \\ &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) ,\end{aligned}$$

sowie das Induktionsgesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ und finden

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) . \quad (8.5)$$

Setzen wir nun (8.5) in (8.4) ein, so erhalten wir:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV = - \int_V \left(\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right) dV . \quad (8.6)$$

Wir betrachten nun die zwei Fälle von endlich/unendlich großem Volumen V .

Enendlich großes Volumen, Feldenergie Für $V \rightarrow \infty$ verschwindet, unter Verwendung des Satzes von Gauß(siehe unten), der dritte Term in (8.6) und somit erhalten wir für die *Feldenergie* W

$$\boxed{W = \int_V \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) dV} . \quad (8.7)$$

Voraussetzung ist, dass die Felder asymptotisch schnell genug abfallen, so dass der $\nabla \cdot$ -Term in (8.6) verschwindet. Mit Hilfe des Satzes von Gauß,

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = \int_F (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{F} , \quad (8.8)$$

mit F als Oberfläche des (zunächst als endlich angenommenen) Volumens V , findet man, dass die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} stärker als $1/R$ abfallen müssen, da dF mit R^2 anwächst. (vgl. Abschnitt 2.4). Für statische Felder ist die obige Voraussetzung erfüllt, nicht dagegen für Strahlungsfelder, wie wir später noch diskutieren werden.

Energiedichte In (8.7) können wir nun die *Energiedichte* ω_F des elektromagnetischen Feldes

$$\omega_F = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (8.9)$$

eingeführen, welche sich aus einem elektrischen Anteil (vgl. (8.1))

$$\omega_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (8.10)$$

und einem magnetischen Anteil

$$\omega_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (8.11)$$

zusammensetzt.

Endliches Volumen, Poynting Vektor Wir behalten die Interpretation von (8.9) als Energiedichte bei und schreiben, da V beliebig wählbar ist, (8.6) als (differentielle) Energiebilanz,

$$\boxed{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \omega_F}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0}, \quad (8.12)$$

mit dem *Poynting-Vektor*

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}. \quad (8.13)$$

Gl. (8.12) ist die grundlegende Kontinuitätsgleichung für die Energiedichte elektromagnetischer Felder.

Energieerhaltung Die Feldenergie in einem Volumen V kann sich via Gl. (8.12) dadurch ändern,

- dass Energie in Form elektromagnetischer Strahlung hinein- (hinaus-) strömt, beschrieben durch den Term $\nabla \cdot \mathbf{S}$, und/oder
- dass an Punktladungen Arbeit geleistet wird, beschrieben durch $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$.

In Analogie zur Ladungserhaltung (Abschnitt 4.1) nennen wir \mathbf{S} die *Energiestromdichte*, bzw. den Poynting-Vektor. Die Energiebilanz zeigt, dass die Energie des abgeschlossenen Systems (Punktladungen plus elektromagnetisches Feld) eine Erhaltungsgröße ist.

8.2 Impuls

Dem elektromagnetischen Feld kann man außer Energie auch einen Impuls zuordnen. Wir beginnen mit der Impulsbilanz für eine Punktladung q mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} .

Impulsbilanz von Ladungen Nach Newton gilt dann für die Änderung des Impulses \mathbf{p}_M der Punktladung:

$$\frac{d\mathbf{p}_M}{dt} = q [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})], \quad (8.14)$$

wobei wir hier der Index M für mechanisch steht. Für N Punktladungen, charakterisiert durch eine Stromdichte \mathbf{j} und Ladungsdichte ρ erhalten wir entsprechend

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V [\rho \mathbf{E} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})] dV \quad (8.15)$$

für den Gesamtimpuls \mathbf{P}_M der Ladungen.

Impulsbilanz der Felder Analog zu Abschnitt 8.1 versuchen wir ρ und \mathbf{j} zu eliminieren, so daß die rechte Seite in (8.15) nur noch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} enthält. Wir benutzen dazu das Gauß'sche Gesetz

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (8.16)$$

und das Ampère-Maxwell Gesetz

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (8.17)$$

Wir finden mit

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V \left[\epsilon_0 \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \right] dV \quad (8.18)$$

einen noch recht unübersichtlichen Ausdruck.

Symmetrisierung der Impulsbilanz Wir können die Impulsbilanz (8.18) noch deutlich schöner schreiben indem wir bzgl. \mathbf{E} und \mathbf{B} symmetrisieren.

Zunächst addieren wir in (8.18) den verschwindenden Term

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} = 0$$

und formen den letzten Term um,

$$\begin{aligned} -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \epsilon_0 \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})) , \end{aligned}$$

wobei wir das Induktionsgesetz

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8.19)$$

benutzt haben. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_M}{dt} &= \int_V \left\{ \epsilon_0 \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right. \\ &\quad \left. - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right\} dV . \end{aligned} \quad (8.20)$$

Maxwell'scher Spannungstensor und Impulsdichte Wir verwenden die Abkürzung $\partial_m \equiv \partial/\partial x_m$ und fassen für die Interpretation von (8.20) einige Terme wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right]_i &= E_i \partial_m E_m - \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} E_j \partial_l E_m = \\ &= E_i \partial_m E_m - (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) E_j \partial_l E_m = E_i \partial_m E_m - E_m \partial_i E_m + E_m \partial_m E_i \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_i E_m^2 + \partial_m E_m E_i = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} \left(E_i E_m - \frac{1}{2} E^2 \delta_{im} \right). \quad (8.21)$$

Entsprechend verfahren wir für die **B**-Terme. Wir erhalten also

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_M + \mathbf{P}_F)_i + \int_V \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} T_{im} dV = 0}, \quad (8.22)$$

wobei der **Maxwellsch'sche Spannungstensor** T_{im} durch

$$\boxed{T_{im} = \epsilon_0 \left(\frac{E^2}{2} \delta_{im} - E_i E_m \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B^2}{2} \delta_{im} - B_i B_m \right)} \quad (8.23)$$

gegeben ist. Der Gesamtimpuls \mathbf{P}_F des elektromagnetischen Feldes ist $\mathbf{P}_F = \int_V \vec{\pi}_F dV$ mit der **Impulsdichte**

$$\boxed{\vec{\pi}_F = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}. \quad (8.24)$$

Wir unterscheiden wieder, wie im Falle der Energiebilanz, die Fälle von endlichem/unendlichem Volumen V .

Fall 1 : $V \rightarrow \infty$

Wie unter Abschnitt 8.1, überzeugt man sich, dass der dritte Term in (8.22) verschwindet, falls die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} schneller als $1/R$ abfallen. Dann lautet die Impulsbilanz

$$\mathbf{P}_M + \mathbf{P}_F = \text{const}. \quad (8.25)$$

Gleichung (8.25) legt nahe, \mathbf{P}_F als Impuls des elektromagnetischen Feldes zu interpretieren. Für das abgeschlossene System (Punktladungen plus Feld) ist dann der Gesamtimpuls, der sich additiv aus Teilchen- und Feldimpuls zusammensetzt, eine Erhaltungsgröße.

Fall 2 : allg. Volumen

Da das Volumen V in (8.22) beliebig ist, finden wir für $(\underline{T})_{im} \equiv T_{im}$ die differentielle Impulserhaltung

$$\boxed{\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{\partial \vec{\pi}_F}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{T} = 0}, \quad (8.26)$$

wobei wir (8.15) für $\dot{\mathbf{p}}_M = q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]$ verwendet haben.

Fall 3 : V endlich

Wir formen die rechte Seite in (8.22) mit dem Gauß'schen Satz um:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_M + \mathbf{P}_F)_i = - \int_F \sum_{m=1}^3 T_{im} dF_m, \quad (8.27)$$

wobei $df_m = n_m dA$ das gerichtete Oberflächen-Element und F die Oberfläche von V sind. Da auf der linken Seite von (8.27) nach Newton eine Kraft steht, können wir $T_{im}n_m$ als *Druck* des Feldes (**Strahlungsdruck**) interpretieren. Das elektromagnetische Feld überträgt auf einen Absorber also nicht nur Energie, sondern auch Impuls.

Der Strahlungsdruck des Lichts wurde von Lebedev und Hull direkt an einer Drehwaage nachgewiesen. An den Balkenenden angebrachte Metallplättchen wurden im Takt der Eigenschwingung jeweils belichtet; es wurden in Resonanz gut beobachtbare Ausschläge erhalten.

Bemerkung Die Tatsache, dass sich die Impulsdichte $\vec{\pi}_F$ und die Energiestromdichte \mathbf{S} nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, siehe Gl. (8.13),

$$\vec{\pi}_F = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}, \quad (8.28)$$

ist kein Zufall, sondern ergibt sich zwangsläufig im Rahmen der relativistischen Formulierung. Für ein einzelnes Teilchen mit der Ruhemasse m gilt nach der speziellen Relativitätstheorie die Energie-Impuls Beziehung

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

und damit die Beziehung $(Ec)/c^2 = p$ für ein Teilchen mit verschwindender Ruhemasse $m \rightarrow 0$, zwischen dem Energiestrom Ec und dem Impuls p .

8.3 Zusammenfassung - Photonen

Bei Abwesenheit anderer Kräfte gelten für das abgeschlossene System (Punktladungen plus Feld) die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls. Für Energie und Impuls haben wir das in den beiden vorherigen Abschnitten gezeigt, für den Drehimpuls geht man analog vor.

Da sich Energie, Impuls und Drehimpuls der Punktladungen zeitlich ändern, müssen wir dem Feld selbst Energie, Impuls und Drehimpuls zuordnen, um die Erhaltungssätze für das Gesamtsystem zu garantieren. Die Grundgrößen

- **Energiedichte**

$$\omega_F = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (8.29)$$

- **Impulsdichte**

$$\vec{\pi}_F = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (8.30)$$

- Drehimpulsdichte

$$\vec{\lambda}_F = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{r} \times \vec{\pi}_F \quad (8.31)$$

findet man aus den jeweiligen Bilanzen unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen. Die Tatsache, daß man dem Maxwell-Feld mechanische Größen wie Energie, Impuls und Drehimpuls zuordnen kann, bietet die Grundlage für die im atomaren Bereich benutzte Beschreibung elektromagnetischer Phänomene durch **Teilchen**, welche als **Photonen** bezeichnet werden.