

Teil II

Magnetostatik

Kapitel 4

Ampère'sches Gesetz

4.1 Elektrischer Strom und Ladungserhaltung

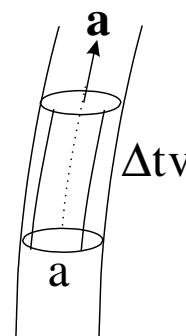
Elektrische Ströme werden durch bewegte Ladungsträger hervorgerufen. Ladungsträger können dabei z.B. sein: Ionen in einem Teilchenbeschleuniger, einem Elektrolyten oder einem Gas, Elektronen in einem Metall etc. Ursache für die Bewegung der Ladungen sind in erster Linie elektrische Felder, es kann sich aber auch um materiellen Transport von Ladungsträgern handeln.

Stromstärke Als elektrische Stromstärke I definieren wir diejenige Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt fließt,

$$I = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} .$$

Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst identische Ladungsträger.

- q Ladung
- \mathbf{v} Geschwindigkeit
- \mathbf{a} Vektor senkrecht zum Querschnitt des leitenden Mediums, mit der Querschnittsfläche $a = |\mathbf{a}|$
- n Dichte der Ladungsträger.
- Δt Zeitintervall
- $\Delta V = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\Delta t$ überstrichens Volumen
- $n\Delta V$ Anzahl Ladungsträger im Volumen ΔV



Damit folgt für die Stromstärke

$$I(a) = \frac{qn\Delta V}{\Delta t} = \frac{nq(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\Delta t}{\Delta t} = nq(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}). \quad (4.1)$$

Haben wir allgemein pro Volumeneinheit n_i Ladungsträger q_i mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_i , so wird

$$I(a) = \mathbf{a} \cdot \left(\sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i \right) . \quad (4.2)$$

Stromdichte Die Gleichungen (4.1) und (4.2) legen es nahe, die *Stromdichte* \mathbf{j} einzuführen, als

$$\mathbf{j} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i, \quad (4.3)$$

welche sich für $q_i = q$ mit der mittleren Geschwindigkeit

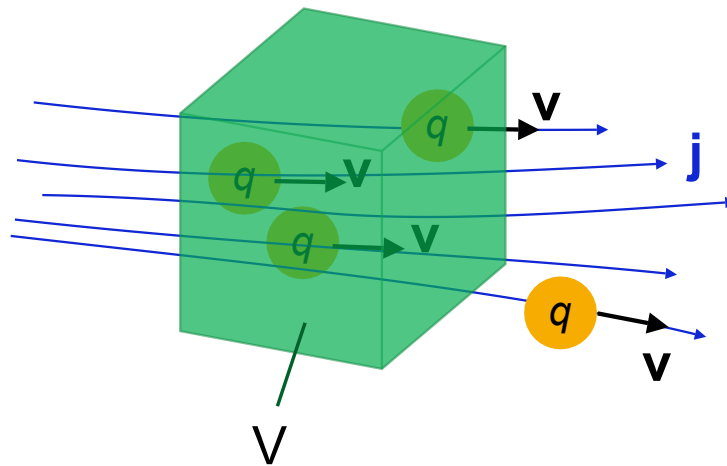
$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_i n_i \mathbf{v}_i, \quad n = \langle n_i \rangle \quad (4.4)$$

verknüpfen lässt:

$$\boxed{\mathbf{j} = nq\langle \mathbf{v} \rangle = \rho \langle \mathbf{v} \rangle}. \quad (4.5)$$

Im allgemeinen Fall ist die Ladungsträgerdichte $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ und das Geschwindigkeitsfeld $\langle \mathbf{v} \rangle$ orts- und zeitabhängig, also

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (4.6)$$



Kontinuitätsgleichung Ladung ist erhalten und kann nicht verloren gehen. Die differentielle Formulierung dieses Erhaltungssatzes ist die eminent wichtige Kontinuitätsgleichung.

- In einem kleinen Volumen V verändert sich die Ladung $Q(t)$ wie

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV, \quad Q(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (4.7)$$

- Ladungströme $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ durch die Oberfläche Volumens V verändern die Gesamtladung innerhalb von V gemäß dem Satze von Gauß,

$$\int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV. \quad (4.8)$$

- Damit lautet die Ladungsbilanz

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV. \quad (4.9)$$

Da wir das Volumen V beliebig wählen können, erhalten wir somit aus (4.8) und (4.9) die **Kontinuitätsgleichung**

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0} . \quad (4.10)$$

Während (4.9) die Ladungserhaltung in *integraler* Form beschreibt, bedeutet (4.10) die Ladungserhaltung in *differentieller* Form.

Spezialfälle der Kontinuitätsgleichung Stationäre Ladungen und Ströme zeichnen die Elektrostatik bzw. die Magnetostatik aus.

- Elektrostatik: Stationäre Ladungen mit

$$\mathbf{j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = \rho(\mathbf{r}) . \quad (4.11)$$

- Magnetostatik: Stationäre Ströme mit

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 , \quad (4.12)$$

denn für einen stationären Strom ist $\nabla \cdot \mathbf{j}$ zeitlich konstant, und diese Konstante muss überall Null sein, da Ladung auch lokal nicht erzeugt oder vernichtet wird.

4.2 Ampère'sches Gesetz

Naturgesetze Die Grundlagen der Elektrodynamik, welche wir uns Schritt für Schritt erarbeiten, sind die Maxwell-Gleichungen. Wie alle fundamentalen Naturgesetze kann man diese nicht herleiten sondern nur motivieren und experimentell überprüfen.

Wir werden nun Grundgleichungen der Magnetostatik als experimentell gegebene Beziehungen aufschreiben und diese dann nach und nach physikalisch untersuchen.

Lorentz-Kraft und magnetische Induktion Um Felder definieren zu können, muss man diese auch messen können. Für das elektromagnetische Feld haben wir hierzu die experimentell gut bestätigte *Lorentz-Kraft*,

$$\boxed{\mathbf{K} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]} . \quad (4.13)$$

Den ersten Teil kennen wir aus der Elektrostatik. Der zweite Teil in (4.13) beschreibt die Kraft, welche auf eine Probeladung q wirkt, wenn diese mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v} durch ein Magnetfeld \mathbf{B} fliegt. Dabei nennen wir \mathbf{B} präzise die **magnetische Induktion**, umgangssprachlich einfach das Magnetfeld.

Ampère'sches Gesetz Magnetfelder werden durch bewegte Ladungen erzeugt, also durch Ströme \mathbf{j} . Wir betrachten hier stationäre Ströme, also $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$.

Experimentell finden wir das *Ampère'sche Gesetz*, mit

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \Gamma_m \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'} \quad , \quad (4.14)$$

analog zur Grundgleichung (1.15) der Elektrostatik,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \Gamma_e \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' . \quad (4.15)$$

Die Lorentz-Kraft (4.13) stellt dabei die Messvorschrift für das elektrostatische Feld \mathbf{E} wie auch für die magnetische Induktion \mathbf{B} dar.

Superpositionsprinzip Gleichung (4.14) enthält - wie (4.15) - das Superpositionsprinzip: Die Felder zweier Stromverteilungen \mathbf{j}_1 und \mathbf{j}_2 überlagern sich linear, da $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$ die resultierende Stromverteilung ist.

Maßsysteme Mit Γ_e wird auch die Einheitsladung festgelegt, siehe Abschnitt 1.1. Dann sind auch alle in (4.13) und (4.14) auftretenden Größen bzgl. ihrer Einheiten fixiert. Γ_m kann also nicht mehr frei gewählt werden. Wir erhalten:

- cgs-System:

$$\Gamma_e = 1, \quad \Gamma_m = \frac{1}{c^2} \quad (4.16)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c .

- MKSA-System:

$$\Gamma_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \Gamma_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (4.17)$$

mit

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{m kg}}{\text{C}^2}. \quad (4.18)$$

μ_0 ist die *magnetische Permeabilität*.

Dimensionsanalyse Unabhängig vom Maßsystem ist das Verhältnis Γ_m/Γ_e eine Konstante, da das Verhältnis der beiden Terme in der Lorentz-Kraft (4.13),

$$\frac{q |\mathbf{E}|}{q |\mathbf{v} \times \mathbf{B}|} = \frac{1}{v} \frac{E}{B}, \quad [E] = [v][B] \quad (4.19)$$

dimensionslos ist. Hier bezeichnen die eckigen Klammern $[.]$ die Einheiten für die jeweilige physikalische Größe. Mit den Dimensionen für die Ladungsdichte ρ und der Stromdichte $j = |\mathbf{j}|$,

$$[\rho] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3}, \quad [j] = [\rho] \cdot [v] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}}$$

finden wir für die Dimensionsanalyse der Felder (4.15) und (4.14)

$$[E] = [\Gamma_e] \cdot [\rho] \cdot [r] = [\Gamma_e] \cdot \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, \quad [B] = [\Gamma_m] \cdot [j] \cdot [r] = [\Gamma_m] \cdot \frac{\text{C}}{\text{m s}},$$

und somit

$$\frac{[E]}{[B]} = \frac{[\Gamma_e]}{[\Gamma_m]} \cdot \frac{s}{m} = \frac{[\Gamma_e]}{[\Gamma_m]} \cdot \frac{1}{[v]}$$

für das Verhältnis der Felder. Zusammen mit 4.19 haben wir

$$[v] = \frac{[E]}{[B]} = \frac{[\Gamma_e]}{[\Gamma_m]} \cdot \frac{1}{[v]}, \quad \frac{[\Gamma_e]}{[\Gamma_m]} = [v^2]. \quad (4.20)$$

Relativistische Invarianz Mit den Festlegungen (4.16) und (4.17) für das cgs- und das MKSA-System erhalten wir die Beziehung

$$\frac{\Gamma_e}{\Gamma_m} = c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}, \quad \boxed{\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}, \quad (4.21)$$

in Einklang mit unserer Dimensionsanalyse (4.20). Hierbei ist c eine Geschwindigkeit, welche sich als die Lichtgeschwindigkeit herausstellen wird.

Die fundamentale Beziehung (4.21) weist bereits auf einen Zusammenhang mit der speziellen Relativitätstheorie hin. In der Tat hatte Lorentz zuerst festgestellt, dass die sog. Lorentz-Transformationen die Maxwell-Gleichung invariant lassen, später hat dann Einstein dieselben Transformationen aus dem Relativitätsprinzip hergeleitet. Das ist nicht verwunderlich, denn das Relativitätsprinzip beruht auf der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und die Ausbreitung des Lichtes wird durch die Maxwell Gleichungen beschrieben.

4.3 Formel von Biot-Savart

Im Folgenden soll das Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für verschiedene einfache Stromverteilungen berechnet werden.

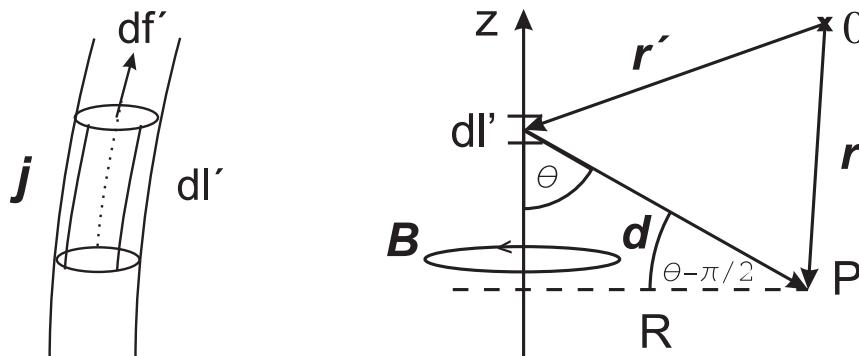
Magnetfeld dünner Leiter Für einen dünnen Leiter können wir über den Leitungsquerschnitt f integrieren und erhalten aus (4.14)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.22)$$

mit

$$I = \int_f \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F}' \quad (4.23)$$

als die Stromstärke.



Ist der Leiter weiterhin gerade, so folgt aus (4.22) oder auch (4.14), dass die Feldlinien von \mathbf{B} konzentrisch um den Leiter verlaufen. Wir brauchen also nur noch den Betrag B zu berechnen, da alle Beiträge zum Integral (4.22) für einen geraden Leiter die gleiche Richtung haben:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{\sin\theta}{d^2} dz . \quad (4.24)$$

Die verbleibende Integration führen wir für einen unendlich langen Leiter aus. Mit

$$\sin\theta = \frac{R}{d}, \quad \tan\theta = \frac{R}{z} \quad z = R \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

folgt für das Differential

$$dz = R \left[-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - 1 \right] = \frac{-R}{\sin^2\theta} d\theta = \frac{-d^2}{R} d\theta$$

folgt

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\pi}^0 \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (4.25)$$

für die Feldstärke im Punkt P . Dieses ist die **Formel von Biot und Savart** für das Magnetfeld um einen dünnen, geraden, unendlich langen Leiter.

4.4 Kraft und Drehmoment auf einen Strom im Magnetfeld

Kraft auf Ströme Die Lorentzkraft

$$\mathbf{K}_i = q_i [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)] \quad (4.26)$$

beschreibt die Kraft, welche eine bewegte Ladung q_i erfährt, die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_i im Magnetfeld \mathbf{B} bewegt.

Da Ströme nichts anderes als bewegte Ladungen sind, erhält man somit für die Kraft auf einen Strom mit der Stromdichte \mathbf{j}

$$\mathbf{K} = \sum_i q_i n_i [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)] = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV . \quad (4.27)$$

Das Volumen V ist so zu wählen, daß es den Strom vollständig erfasst.

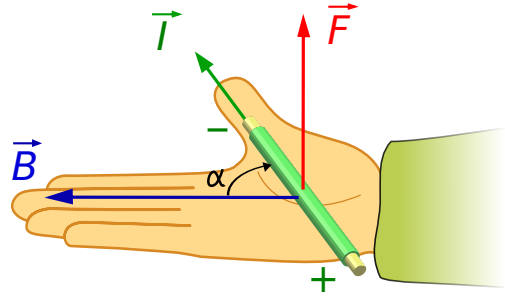
Kraft auf einen dünnen Draht Wir betrachten einen dünnen Draht, über dessen Querschnitt sich das \mathbf{B} -Feld nicht (wesentlich) ändert. Somit können wir (wie in Kap. 4.3) 2 der 3 Integrationen in (4.27) ausführen,

$$\mathbf{K} = I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B} . \quad (4.28)$$

Das verbleibende Kurvenintegral längs des Leiters L lässt sich für einen geraden Leiter ausführen, wenn \mathbf{B} sich längs L nicht ändert:

$$\boxed{\mathbf{K} = (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) L} \quad (4.29)$$

wobei L die Länge des Leiters angibt. Die Kraft ist also senkrecht zur Stromrichtung und zum \mathbf{B} -Feld; sie ist maximal, wenn \mathbf{I} senkrecht zu \mathbf{B} verläuft und verschwindet, wenn \mathbf{I} parallel zu \mathbf{B} ist.



Drehmoment Auf eine einzelne Ladung q_i mit Geschwindigkeit \mathbf{v}_i im Feld \mathbf{B} wirkt das Drehmoment

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{K}_i = \mathbf{r}_i \times [q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)] , \quad (4.30)$$

und entsprechend auf einen Strom der Stromdichte \mathbf{j}

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times [n_i q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)] = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV . \quad (4.31)$$

Wir werden diesen allg. Ausdruck nun in eine handlichere Form bringen.

Homogenes Magnetfeld Für die praktische Auswertung ist es zweckmäßig (4.31) mit der Identität ('bac-cab Regel')

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (4.32)$$

umzuformen,

$$\mathbf{N} = \int_V [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{j} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})\mathbf{B}] dV . \quad (4.33)$$

Diese Darstellung ist besonders nützlich im Falle eines räumlich homogenen Magnetfeldes, welches sich dann aus dem Integral herausnehmen läßt.

Räumlich begrenzte stationäre Ströme Für einen stationären, räumlich begrenzten Strom verschwindet der 2. Term in (4.33). Zunächst formulieren wir eine allgemeine Beziehung, für $n, m = 1, 2, 3$,

$$\nabla \cdot (x_n x_m \mathbf{j}) = x_m j_n + x_n j_m + x_n x_m \nabla \cdot \mathbf{j} = x_m j_n + x_n j_m , \quad (4.34)$$

wobei wir verwendet haben, dass nach (4.12) die Divergenz der Stromdichte $\nabla \cdot \mathbf{j}$ für stationäre Ströme verschwindet. Wir integrieren nun (4.34) über ein Volumen V ,

$$0 = \int_F x_n x_m \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \nabla \cdot (x_n x_m \mathbf{j}) dV = \int_V x_n j_m dV + \int_V x_m j_n dV ,$$

wobei wir den Satz von Gauß verwendet haben und die Voraussetzung, dass die Ströme räumlich begrenzt sind, das Oberflächenintegral also für ein genügend großes Volumen V verschwindet. Damit haben wir

$$\int_V x_n j_m dV = - \int_V x_m j_n dV \quad (4.35)$$

gefunden. Summieren wir nun diese Ergebnisse über $n = m$ so erhalten wir

$$\int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) dV = - \int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) dV = 0, \quad (4.36)$$

so dass für ein homogenes Feld in (4.33) der 2. Term verschwindet.

Magnetisches Dipolmoment Wir multiplizieren (4.35) mit B_n , summieren über n , und erhalten

$$\int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{j} dV = - \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{r} dV, \quad (4.37)$$

und mit der bac-cab Regel (4.32)

$$\int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j} dV = \frac{1}{2} \int_V [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}] dV = -\frac{1}{2} \mathbf{B} \times \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV.$$

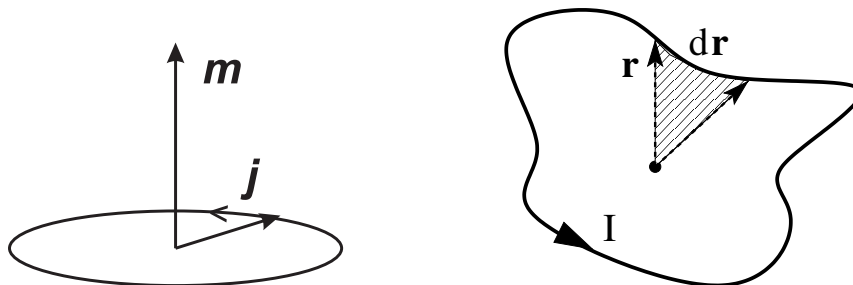
Das Drehmoment N auf die Stromverteilung hat also die Form

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}}, \quad (4.38)$$

mit dem **magnetischen Dipolmoment**

$$\boxed{\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV}. \quad (4.39)$$

Für einen ebenen Strom (z.B. Kreisstrom) steht \mathbf{m} senkrecht zur Stromebene.



Magnetisches Dipolmoment für eine dünne Schlaufe Ist der stromführende Leiter dünn, so erhalten wir für das magnetische Dipolmoment nach Integration über den Leiterquerschnitt

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_L \mathbf{r} \times d\mathbf{l}. \quad (4.40)$$

Da nun $|\mathbf{r} \times d\mathbf{l}|$ gleich 2-mal der Flächeninhalt des von \mathbf{r} und $d\mathbf{l}$ aufgespannten Dreieckes ist, entspricht das Integral in (4.40) dem doppelten Flächeninhalt F , welcher von der Leiterschleife aufgespannt wird,

$$\boxed{m = IF}, \quad (4.41)$$

wobei I die Stromstärke ist.

Anwendungen, Kräfte zwischen Strömen Die hier hergeleiteten Gleichungen sind die Basis aller Elektromotoren, welche i.W. aus rotierenden Leiterschleifen in äußeren Magnetfeldern bestehen. Dabei kann das äußere Magnetfeld von Permanentmagneten erzeugt werden, oder durch Spulen.

Allgemein üben zwei Strom-führende Leiter aufeinander gegenseitig Kräfte aus. Dazu muss man nur in den Ausdruck (4.27) für die Kraft \mathbf{K} auf eine Stromverteilung \mathbf{j} in einem Magnetfeld \mathbf{B} die Formel (4.22) für das Magnetfeld einsetzen, welches von einem anderen Leiter erzeugt wird.

Kapitel 5

Grundgleichungen der Magnetostatik

5.1 Divergenz der magnetischen Induktion

Vektor Potential Das Amperè'sche Gesetz (4.14))

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (5.1)$$

kann mit

$$\left[\nabla_r \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla_r \right] \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

wie folgt umgeschrieben werden:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla_r \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \times \left(\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right). \quad (5.2)$$

Also können wir das Magnetfeld \mathbf{B} in der Form

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.3)$$

schreiben, mit dem **Vektor-Potential** $\mathbf{A}(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (5.4)$$

Divergenz der magnetischen Induktion Mit (5.3) erhalten wir

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \quad (5.5)$$

da die Divergenz einer Rotation immer verschwindet. Mit dem antisymmetrischen Tensor ϵ_{ijk} , $\partial_i = \partial/\partial x_i$ und der Summenkonvention gilt

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k, \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & ijk \text{ nicht alle verschieden} \\ 1 & ijk \text{ gerade Permutation von 123} \\ -1 & ijk \text{ ungerade Permutation von 123} \end{cases}$$

und somit

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_i B_i = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0,$$

da $\epsilon_{ijk} + \epsilon_{jik} = 0$.

Gauss'schen Gesetz des Magnetismus Gleichung (5.5) entspricht formal

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.6)$$

und zeigt, dass es keine *magnetischen Ladungen* gibt. Bilden wir nämlich die zu (5.5) korrespondierende integrale Aussage

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = 0, \quad (5.7)$$

so sehen wir, dass der Fluss der magnetischen Induktion durch eine geschlossene Fläche F verschwindet. Der Vergleich mit

$$\int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{F} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (5.8)$$

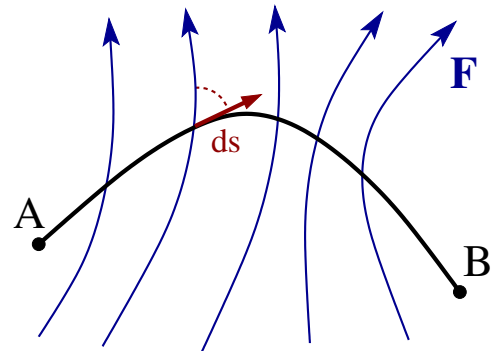
erklärt die obige Aussage.

5.2 Rotation von B

Kurvenintegrale Mit

$$I = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$$

definiert man ein Kurvenintegral, entlang eines Pfades von A nach B , über ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Dabei ist $d\mathbf{s}$ ein gerichtetes Linienelement entlang des Pfades.



Kurvenintegrale werden ausgewertet indem die Kurve parametrisiert,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_B, \quad t \in [0, 1].$$

Damit wird aus dem Kurvenintegral ein gewöhnliches Integral,

$$\int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} dt, \quad d\mathbf{s} = \dot{\mathbf{r}} dt$$

da $\dot{\mathbf{r}}$ parallel zur lokalen Tangenten ist.

Beispiel Das elektrische Feld \mathbf{E} ist in der Elektrostatik als negativer Gradient des Potentials Φ definiert,

$$\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^1 \nabla \Phi(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = -[\Phi(\mathbf{x}_B) - \Phi(\mathbf{x}_A)], \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi.$$

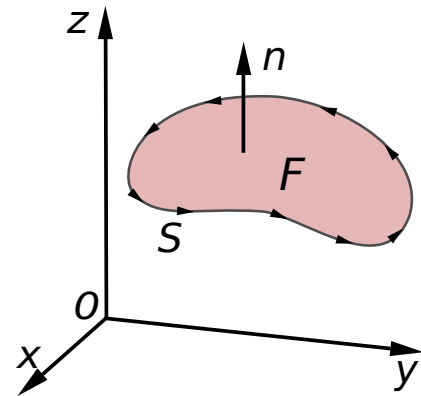
Mit \oint_S bezeichnet man Integrale über eine geschlossene Kurven, mit $\mathbf{x}_A = \mathbf{x}_B$. Daher gilt $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$, wie für alle Gradienten-Felder. Dieses Ergebnis wurde schon im Abschnitt 3.4 aufgeführt.

Die gesamte komplexe Analysis beruht auf Linienintegralen, wie z.B. der Residuensatz $\oint_S dz/(z - z_0) = 2\pi i$, für jede geschlossene Kurve S um den Pol z_0 herum.

Satz von Stokes Zwei Integralsätze sind von zentraler Bedeutung in der Elektrodynamik. Den Satz von Gauss für Oberflächenintegrale, welchen wir im Abschnitt 2.1 kennengelernt haben.

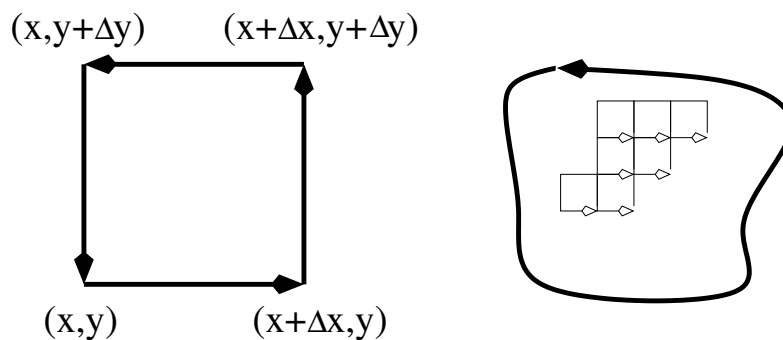
Für Kurvenintegrale kommt der *Satz von Stokes* zu tragen,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_F (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{F} \quad (5.9)$$



welcher besagt, dass das geschlossene Linienintegral \oint_S eines Vektorfeldes \mathbf{B} gleich dem Flächenintegral \int_F seiner Rotation ist.

Beweis Jedes beliebige Kurvenintegral kann in eine Summe kleiner Schleifen aufgeteilt werden, da sich die Randbeiträge gegenseitig wegheben. Daher genügt es ein kleines quadratisches Kurvenintegral in zwei Dimensionen zu betrachten.



Wir nähern die vier Teil-Integrale durch die jeweiligen Mittelwert,

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &\approx \Delta x B_x(x + \Delta x/2, y) + \Delta y B_y(x + \Delta x, y + \Delta y/2) \\ &\quad - \Delta x B_x(x + \Delta x/2, y + \Delta y) - \Delta y B_y(x, y + \Delta y/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta x \Delta y \frac{B_y(x + \Delta x, y + \Delta y/2) - B_y(x, y + \Delta y/2)}{\Delta x} \\
&- \Delta x \Delta y \frac{B_x(x + \Delta x/2, y + \Delta y) - B_x(x + \Delta x/2, y)}{\Delta y} \\
&\approx \Delta x \Delta y \left[\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right] \approx \Delta x \Delta y \nabla \times \mathbf{B} \Big|_z \approx \int_F \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} ,
\end{aligned}$$

wobei die Richtung der 4 Teil-Kurvenintegrale in die jeweiligen Vorzeichen eingegangen sind.

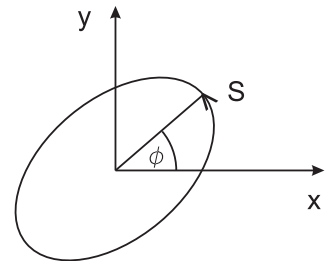
Langer, dünner Leiter Wir betrachten nun das Linienintegral entlang der magnetischen Feldlinien eines unendlich langen, dünnen, geraden Leiters. Dafür hatten wir in Abschnitt 4.3

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I\mu_0}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad (5.10)$$

für die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ gefunden, wobei r der Abstand vom Leiter ist, I die Stromstärke und \mathbf{e}_ϕ die Richtung angibt; die Feldlinien laufen konzentrisch um den Leiter.

Als Weg S betrachten wir zunächst eine geschlossene Kurve in der Ebene senkrecht zum Leiter, welche den Leiter umfasst. Dann wird mit $|ds| = r d\phi$ das Linienintegral

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I\mu_0}{2\pi} \oint_S \frac{\mathbf{e}_\phi \cdot d\mathbf{s}}{r} = \frac{I\mu_0}{2\pi} \oint d\phi = I\mu_0 . \quad (5.11)$$



Wenn S den Strom nicht umfasst, so gilt:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 , \quad (5.12)$$

Der Beweis dieser Beziehung erfolgt analog zum Beweis des Satzes von Stokes indem man ein beliebiges Wegintegral in kleine Teil-Integrale aufteilt und sich überlegt dass sich die Wegstücke mit entgegengesetzter Richtung gegenseitig kompensieren.

Allgemeine Stromverteilung Die obigen Ergebnisse lassen sich verallgemeinern, indem man Ströme vom oben diskutierten Typ superponiert und geschlossene Raumkurven S aus ebenen Wegstücken zusammensetzt. Ohne auf Beweis-Details einzugehen - was Aufgabe der Mathematik ist - halten wir als generelles Ergebnis

$$\boxed{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I} \quad (5.13)$$

fest, wobei I die Stromstärke des von S umschlossenen Stromes ist.

Rotation von \mathbf{B} Der Satz von Stokes (5.9) gestattet das obige Linienintegral (5.13) in ein Oberflächenintegral umzuformen,

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} , \quad (5.14)$$

wobei F eine beliebige, in dem geschlossenen Weg S eingespannte, Fläche ist. Da nun F beliebig gewählt werden kann, erhalten wir

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}} \quad (5.15)$$

Im Gegensatz zum elektrostatischen Feld \mathbf{E} mit $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ist also das \mathbf{B} -Feld *nicht wirbelfrei*. Die Beziehung (5.15) besagt, dass die Stöme die Quellen des magnetischen Feldes sind.

5.3 Vektor-Potential und Eichung

Man kann die magnetische Induktion \mathbf{B} bei gegebener Stromverteilung \mathbf{j} direkt mittels (5.1) berechnen. Dieses ist jedoch i.Allg. aufwendig. Analog zur Poisson-Gleichung (2.12) für das elektrische Potential Φ wollen wir nun eine Bestimmungsgleichung für das Vektorpotential \mathbf{A} herleiten, welche erlaubt dieses direkt aus einer gegebenen Verteilung von Strömen zu berechnen.

Eichtransformationen Das Vektorpotential \mathbf{A} ist über (5.3), $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, nicht eindeutig definiert. Das Feld \mathbf{B} ändert sich nicht, wenn man die *Eichtransformation*

$$\boxed{\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi} \quad (5.16)$$

durchführt, wobei $\chi = \chi(\mathbf{r})$ eine beliebige (mindestens 2-mal partiell differenzierbare) skalare Funktion ist. Denn

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} . \quad (5.17)$$

Die Lorentz-Kraft (4.13) kommt nur durch die magnetische Induktion \mathbf{B} zustanden, welches damit das physikalisch wirksame Feld ist. Die Freiheit Eichtransformationen durchzuführen ist jedoch für viele theoretische Überlegungen von eminenter Bedeutung und auch von praktischer Relevanz, wie wir nun sehen werden.

Coulomb-Eichung Mit $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ und $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ erhalten wir mit

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (5.18)$$

die Ausgangsgleichung unserer weiteren Überlegungen. Denn

$$\epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m = \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk}}_{\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} \partial_j \partial_l A_m = \partial_i (\partial_m A_m) - (\partial_l \partial_l) A_i .$$

Ist nun

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0 , \quad (5.19)$$

so wählen wir das **Eichpotential** χ in (5.16) so, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla \chi) \equiv 0 \quad (5.20)$$

wird. Diese Wahl von χ nennt man die **Coulomb-Eichung**. Das gesuchte χ finden wir also durch Lösen von (5.20), also von

$$\Delta \chi = -\nabla \cdot \mathbf{A} . \quad (5.21)$$

Dieses ist eine Laplace-Gleichung (2.14) für χ , wobei $-\nabla \cdot \mathbf{A}$ als eine gegebene Inhomogenität anzusehen ist.

Bestimmungsgleichung für das Vektorpotential in Coulomb-Eichung Es lässt sich also stets erreichen (ohne die Physik, d.h. das **B**-Feld in irgendeiner Weise einzuschränken), dass der erste Term auf der rechten Seite von (5.18) wegfällt. Damit gilt

$$\boxed{\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}} \quad (5.22)$$

Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

in Coulomb-Eichung. Die vektorielle Gleichung (5.22) zerfällt in ihre 3 Komponenten, welche mathematisch gesehen wieder vom bekannten Typ der Poisson-Gleichung (2.14) sind.

5.4 Multipolentwicklung

Analog zu der in Abschnitt 1.4 besprochenen Multipolentwicklung für das elektrische Potential Φ interessieren wir uns nun für das **B**-Feld in großer Entfernung einer räumlich lokalisierten Stromverteilung \mathbf{j} .

Entwicklung des Vektor-Potentials Dann empfiehlt es sich, das Vektor-Potential \mathbf{A} (analog zur Entwicklung von Φ in der Elektrostatik) in eine Taylorreihe zu entwickeln. Unter Verwendung von (5.4) und (1.21), $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 1/r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r^3 + \dots$, erhalten wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots \right) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \dots \quad (5.23)$$

mit den entsprechenden Multipolen $\mathbf{A}_n(\mathbf{r})$.

Magnetischer Monopol Der Term $\propto 1/r$ in der Taylor-Entwicklung (5.23),

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \equiv 0 , \quad (5.24)$$

verschwindet, da es keine magnetischen Monopole gibt. Um das zu sehen betrachten wir die l te Komponente von (5.24), $l = 1, 2, 3$, und erhalten

$$\int_V j_l(\mathbf{r}') dV' = \int_V \nabla' \cdot (x'_l \mathbf{j}(\mathbf{r}')) dV' = \oint_F x'_l \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{F}' = 0 ,$$

mit $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, da die Ströme räumlich begrenzt sein sollen, da $\mathbf{j} \neq 0$ nur innerhalb von V ist, und auf der Oberfläche von V verschwindet.

Magnetischer Dipol Der Term $\propto 1/r^2$ in der Taylor-Entwicklung (5.23) ist

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' . \quad (5.25)$$

Das Integral in (5.25) formen wir gemäß (4.37) um (mit $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{r}$),

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' &= \frac{1}{2} \int_V \{ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \mathbf{r}' \} dV' \\ &= \frac{1}{2} \int_V \{ \mathbf{r} \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}') \} dV' \\ &= -\mathbf{r} \times \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) dV' = -\mathbf{r} \times \mathbf{m} , \end{aligned}$$

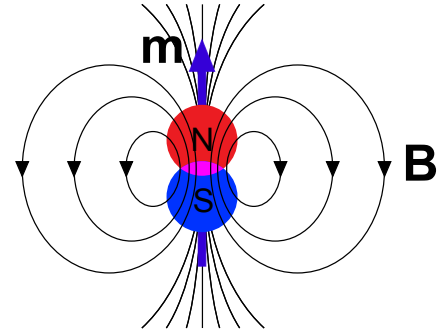
mit dem magnetischen Dipolmoment $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV$, siehe (4.39). Damit erhalten wir für den magnetische Dipolanteil \mathbf{A}_1 des Vektorpotentials

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) . \quad (5.26)$$

Man vergleiche das Ergebnis mit dem entsprechenden Ausdruck (1.24), $\Phi_1(\mathbf{r}) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{r} / (4\pi\epsilon_0 r^3)$, für den Dipolanteil des elektrischen Potentials.

Feldlinien des magnetischen Dipols Differenzieren wir (5.26) so erhalten wir

$$\mathbf{B}_r(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) .$$



Zur Herleitung betrachtet man die i -te Komponente,

$$\epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kls} \frac{m_l r_s}{r^3} = \underbrace{m_i \partial_s \frac{r_s}{r^3}}_{=0} - (m_l \partial_l) \frac{r_i}{r^3} .$$

Magnetisches Moment vs. Bahndrehimpuls Es gibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen dem magnetischen Moment \mathbf{m} , welches von bewegten Ladungen erzeugt wird, und deren Bahndrehimpuls \mathbf{L} . Wir betrachten Punktladungen der Masse m_i und Geschwindigkeiten \mathbf{v}_i ,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV = \frac{1}{2} \sum_i q_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) , \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) .$$

Seien nun alle Teilchen identisch, mit Massen $m_i = m$ und Ladungen $q_i = q$, dann folgt

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m} \mathbf{L} , \quad \mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) . \quad (5.27)$$

Mit dem Bahndrehimpuls \mathbf{L} eines Systems geladener (identischer) Teilchen ist also ein magnetisches Moment in Richtung von L verknüpft. Diese Aussage gilt auch im atomaren Bereich, z.B. für die Elektronen eines Atoms.

Magnetisches Moment und der Spin der Elektronen Umgekehrt lässt sich jedoch nicht jedes magnetische Moment auf einen Bahndrehimpuls gemäß (5.27) zurückführen. Elementarteilchen (wie z.B. Elektronen) besitzen ein inneres magnetisches Dipolmoment, welches nicht mit dem Bahndrehimpuls, sondern mit dem **Spin** \mathbf{s} dieser Teilchen durch

$$\mathbf{m}_s = g \frac{q}{2M} \mathbf{s}, \quad (5.28)$$

verknüpft ist, wobei g das **gyromagnetische Verhältnis** ist. Es ist $g \approx 2.0024$ für Elektronen.

Energie eines Dipols in einem Magnetfeld Für die Kraft \mathbf{K} auf einen magnetischen Dipol \mathbf{m} in einem räumlich schwach veränderlichen Feld \mathbf{B} findet man

$$\mathbf{K} = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}). \quad (5.29)$$

Zum Beweis greife man zurück auf (4.27) und verfähre entsprechend der Berechnung von \mathbf{N} in Abschnitt 4.4. Aus (5.29) ergibt sich für die potentielle Energie des Dipols im \mathbf{B} -Feld

$$U = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}), \quad (5.30)$$

analog zu $-(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E})$ als Energie eines elektrischen Dipols im elektrostatischen Feld (2.33). Der Dipol wird sich also bevorzugt in Feldrichtung einstellen, da dies der niedrigst möglichen Energie entspricht.

5.5 Übersicht über die Magnetostatik

1.) Ampère'sches Gesetz (Basis)

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

für stationäre Ströme, wobei $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t = 0$.

2.) Feldgleichungen: Aus

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

folgt

a) differentiell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

b) integral

$$\int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = 0; \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

3.) Vektor-Potential:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

für $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (Coulomb-Eichung).