

Teil I

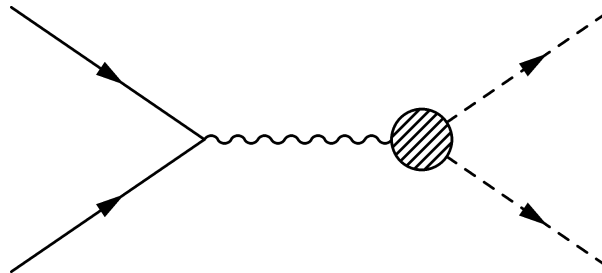
Elektrostatik

Kapitel 1

Coulomb'sches Gesetz

Erhaltungsgrößen spielen in der Physik eine zentrale Rolle. Aus der Mechanik kennen wir das Theorem von Noether, welches besagt dass es zu jeder Erhaltungsgröße eine zugeordnete Symmetrie gibt. In der Feldtheorie (siehe QM-II) wird gezeigt werden, dass die Ladungserhaltung mit der sog. $U(1)$ Eichinvarianz verbunden ist.

Erhaltung der Ladung - Paarerzeugung Ein besonders eindrucksvoller Beweis für die Ladungserhaltung ist die Paar-Erzeugung und Paar-Vernichtung. So zerstrahlen z.B. ein Elektron (e^-) und ein Positron (e^+) in ein hochenergetisches *massives* Photon (γ -Quant), welches ungeladen ist; umgekehrt entsteht bei der Paar-Erzeugung (z.B. in π^+ , π^- Mesonen) stets gleich viel positive wie negative Ladung.



$$+e + (-e) = 0 \quad q = 0 \quad +e + (-e) = 0$$

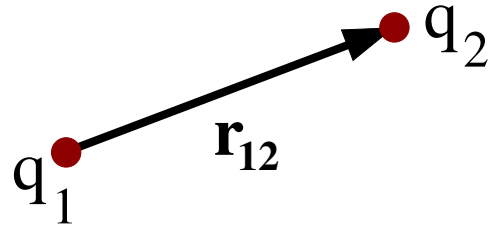
Die Ladungsinvarianz zeigt sich auch darin, dass Atome und Moleküle neutral sind, wie z.B. das Helium-Atom (${}^4\text{He}$) und das Deuterium-Molekül (D_2). Beide bestehen aus 2 Protonen und 2 Neutronen sowie 2 Elektronen und sind damit elektrisch neutral.

1.1 Coulomb-Kraft

Als experimentell gesicherte Grundlage für die Elektrostatik benutzen wir das **Coulomb'sche** Kraftgesetz zwischen 2 Punktladungen:

$$\mathbf{K}_{12} = \Gamma_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad [\mathbf{K}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \quad (1.1)$$

ist die von Ladung q_1 auf Ladung q_2 ausgeübte Kraft. Hierbei ist $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ der gerichtete Verbindungsvektor, $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$ und Γ_e eine noch zu bestimmende Proportionalitätskonstante.



Eigenschaften der Coulomb-Kraft Die Eigenschaften der Coulomb-Kraft sind identisch mit denen der Gravitation, abgesehen davon dass es keine negativen Massen gibt.

- Richtung: Anziehung (Abstoßung) für ungleichnamige (gleichnamige) Ladungen.
- Actio = Reactio: $\mathbf{K}_{12} = -\mathbf{K}_{21}$:
- Zentralkraft: Da eine Punktladung im Raum keine Richtung auszeichnet.
- Superpositionsprinzip: Es gilt

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{31} \quad (1.2)$$

für die von 2 Punktladungen q_2 und q_3 auf q_1 ausgeübte Kraft.

Messvorschrift für Ladung Vergleicht man 2 Ladungen q, q' anhand der von einer festen Ladung Q auf sie ausgeübten Kraft, so findet man für Punktladungen gemäß (1.1):

$$\frac{q}{q'} = \frac{K}{K'}. \quad (1.3)$$

Damit sind Ladungsverhältnisse durch Kraftmessung zu bestimmen: Nach Wahl einer **Einheitsladung** (Ladung des Elektrons oder Positrons) können wir Ladungen relativ zu dieser Einheitsladung messen.

Maßsysteme Für die Festlegung der Proportionalitätskonstanten Γ_e betrachten wir 2 gebräuchliche Maßsysteme.

- Gauß'sches cgs-System: Hier wählt man Γ_e als dimensionslose Konstante; speziell

$$\Gamma_e = 1, \quad (1.4)$$

dann ist über (1.1) die Dimension der Ladung bestimmt zu

$$[q] = [\text{Kraft}]^{1/2}[\text{Länge}] = \text{dyn}^{1/2} \times \text{cm} . \quad (1.5)$$

Die elektrostatische Einheit ist dann diejenige Ladung, die auf eine gleich große im Abstand von 1 cm die Kraft 1 dyn ausübt, wobei $\text{dyn} = \text{g} \cdot \text{cm}/\text{s}^2$ ist. Das Gauß'sche **cgs**-System wird in der Grundlagenphysik bevorzugt.

- **MKSA-System.** Zusätzlich zu den mechanischen Einheiten (Meter, Kilogramm, Sekunde) wird Mit **Coulomb** die Einheit für elektrische Ladungen definiert,

$$\begin{aligned} \text{Coulomb} &\equiv \text{Ampère} \cdot \text{Sekunde} \\ \text{Ladung} &= \text{Strom} \cdot \text{Zeit} \\ \text{C} &= \text{A s}, \quad (\text{Einheiten}) \end{aligned}$$

definiert. Dabei ist 1 Ampère definitionsgemäß der elektrische Strom, der aus einer Silbernitratlösung pro Sekunde 1.118 mg Silber abscheidet. Schreibt man

$$\Gamma_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \mathbf{K}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (1.6)$$

so nimmt die **Vakuum-Permittivität** (Dielektrizitätskonstante) ϵ_0 den Wert

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Newton} \cdot \text{Meter}^2} \quad (1.7)$$

an. Dabei ist $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ (Newton) die metrische Einheit für die Kraft. Die inverse Dielektrizitätskonstante hat damit die Einheit

$$\left[\frac{1}{\epsilon_0} \right] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{C}^2}$$

Das **MKSA**-System hat sich in der angewandten Elektrodynamik (Elektrotechnik) durchgesetzt.

1.2 Das elektrische Feld von Punktladungen

Die von N ruhenden Punktladungen q_i an den Orten \mathbf{r}_i auf eine Probeladung q am Ort \mathbf{r} ausgeübte Kraft ist nach (1.6) und dem Superpositionsprinzip

$$\mathbf{K} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (1.8)$$

Elektrisches Feld Mit

$$\mathbf{K} = q \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}, \quad [\mathbf{E}] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{C} \cdot \text{s}^2} \quad (1.9)$$

definieren wir das (statische) **elektrisches Feld**, welches von den Punktladungen q_i am Ort \mathbf{r} erzeugt wird.

- Vektorfeld: Es ist gemäß (1.8) ein Vektorfeld. D.h. es gilt die Zuordnung

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in R^3 .$$

- Messvorschrift: Bei vorgegebener Ladung q zeigt (1.8), wie man ein elektrisches Feld messen kann. Dabei ist darauf zu achten, dass die Probeladung q so klein ist, dass man ihren Einfluß auf das auszumessende Feld vernachlässigen kann.

Elektrisches Potential Analog dem Fall der Gravitationstheorie in der Mechanik kann man die Vektor-Funktion $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus dem (skalaren) elektrischen Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (1.10)$$

durch Differentiation gewinnen:

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla\Phi \quad (1.11)$$

Die Einheit des elektrischen Potentials ist das **Volt V**

$$V = \frac{\text{kg m}^2}{\text{C s}^2} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^3} = \frac{\text{J}}{\text{A s}} = \frac{\text{W}}{\text{A}} ,$$

mit den beiden

$$\begin{array}{llll} \text{Energie} & \mathbf{Joule} & \text{Kraft} \times \text{Länge} & : \quad \text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \\ \text{Leistung} & \mathbf{Watt} & \text{Energie pro Zeit} & : \quad \text{J} = J/s = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3 \end{array}$$

aus der Mechanik bekannten Einheiten für die Energie und Leistung.

Potentielle Energie Die potentielle Energie $U(\mathbf{r})$ der Probeladung q in einem elektrischen Potential ist

$$U(\mathbf{r}) \equiv q\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (1.12)$$

wobei $\Phi(\mathbf{r}_i)$ das Potential am Ort \mathbf{r}_i ist, welches die Ladungen dort erzeugen.

1.3 Kontinuierliche Ladungsverteilungen

Streng genommen gibt es nur Punktladungen, da alle bekannten Elementarteilchen Punktladungen sind. Es ist jedoch unpraktisch alle 10^{23} Elektronen in einem Kupferdraht einzeln zu zählen.

Ladungsdichte Die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ entspricht der Anzahl Ladungen pro Volumen, mit der Einheit

$$[\rho] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Meter}^3} = \frac{\text{C}}{\text{m}^3} .$$

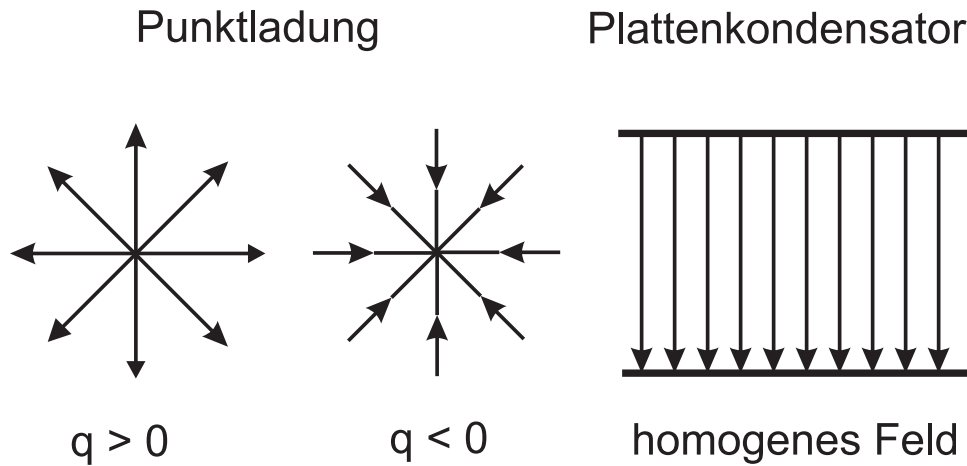


Abbildung 1.1: Beispiele für statische elektrische Felder.

Übergang zu kontinuierlichen Ladungsdichten Wir ersetzen

$$\sum_i q_i \dots \longrightarrow \int dV \rho(\mathbf{r}) \dots, \quad (1.13)$$

wobei $\rho(\mathbf{r})$ die Ladungsdichte am Ort \mathbf{r} ist, mit der Gesamtladung

$$Q = \sum_i q_i = \int dV \rho(\mathbf{r}). \quad (1.14)$$

Damit tritt anstelle von (1.9) und (1.10),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.15)$$

und

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.16)$$

Beispiel: Homogen geladene Kugelschale Wir betrachten eine Kugelschale mit homogener Ladungsverteilung,

$$\rho(\mathbf{r}') = \sigma_0 \delta(R - r')$$

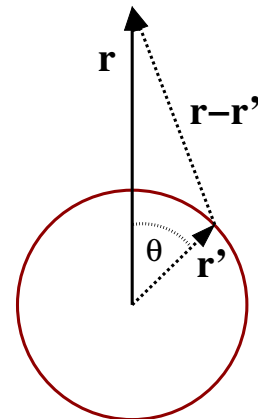
und der Gesamtladung $Q = 4\pi\sigma_0 R^2$. Für die Integration von (1.16) verwenden wir Kugelkoordinaten mit

$$\int dx dy dz = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty (r')^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Der Verbindungsvektor ist durch

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta}$$

gegeben.



Die Integration über den Azimutwinkel φ liefert 2π , die Integration über den Polarwinkel θ ergibt

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta}} = \frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta} \Big|_{\theta=0}^\pi = \frac{|r + r'| - |r - r'|}{rr'},$$

wobei nur noch die Beträge r und r' der Vektoren vorkommen. Zudem gilt $r' \rightarrow R$, aufgrund der Integration über den Radius r' . Wir finden

$$|r + r'| - |r - r'| = \begin{cases} r + r' - (r' - r) = 2r & \text{for } r < r' \\ r + r' - (r - r') = 2r' & \text{for } r > r' \end{cases}$$

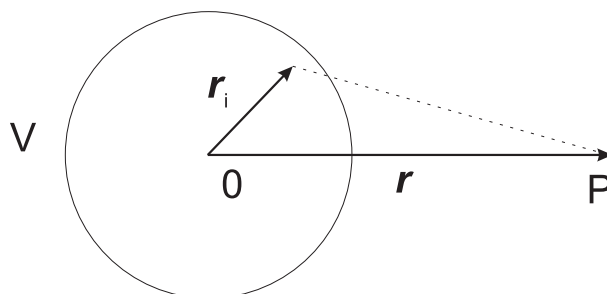
und somit

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} & \text{for } r < r' \\ \frac{4\pi\sigma_0 R^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{for } r > r' \end{cases} \quad (1.17)$$

für das Potential einer homogen geladenen Kugelschale. Außerhalb der Kugelschale ist das Potential also identisch mit dem einer Gesamtladung, nach dem Coulomb Gesetz (1.10), innerhalb konstant. Das elektrische Feld verschindet daher innerhalb der Kugelschale.

1.4 Multipolentwicklung

Wir betrachten eine auf ein endliches Volumen V begrenzte Ladungsverteilung und wollen eine Näherungsmethode entwickeln um das Potential Φ in einem Punkt P weit außerhalb von V zu bestimmen.



1/r-Entwicklung Solange die $r_i \ll r$, können wir das Potential (1.10) durch eine Taylor-Reihe in $1/r$ darstellen,

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots, \quad (1.18)$$

mit $\Phi_n \sim O((1/r)^{n+1})$. Um diese Entwicklung herzuleiten benutzen wir die Formulierung

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i + r_i^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - (2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i - r_i^2)/r^2}} \\ &\equiv \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - x}}, \quad x = \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i - r_i^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + O(x^3) \right] \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{(2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i - r_i^2)}{r^3} + \frac{3}{8} \frac{(2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i - r_i^2)^2}{r^5} + \dots \end{aligned} \quad (1.20)$$

Wenn wir nun noch die Terme geeignet nach Potenzen von x_i/r zusammenfassen, finden wir

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i)^2 - r_i^2 r^2}{r^5} + \dots \quad (1.21)$$

Für das elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ finden wir somit

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{r^k Q_{kl} r^l}{r^5} + \dots \quad (1.22)$$

Wir diskutieren nun die einzelnen Terme.

Elektrischer Monopol Der erste Term in der $1/r$ Entwicklung des Potentials (1.22) ist

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.23)$$

Die Gesamtladung, auch das **Monopolmoment** genannt,

$$Q = \sum_i q_i$$

erzeugt in 0. Näherung der Taylor-Entwicklung ein Feld, welches aus genügend großer Entfernung dem einer im Ursprung lokalisierten Punktladung entspricht.

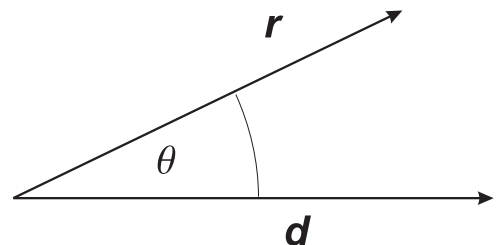
Elektrischer Dipol Der zweite Term in der $1/r$ Entwicklung des Potentials (1.22) ist

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{d \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.24)$$

mit dem **Dipolmoment** \mathbf{d} ,

$$\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$$

und dem Winkel θ zwischen \mathbf{r} und \mathbf{d} ,



Abhängigkeit des Dipolmoments vom Koordinatenursprung Verschiebt man den Ursprung um \mathbf{a} , so wird

$$\mathbf{d}' = \sum_i q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) = \mathbf{d} - Q\mathbf{a} \quad (1.25)$$

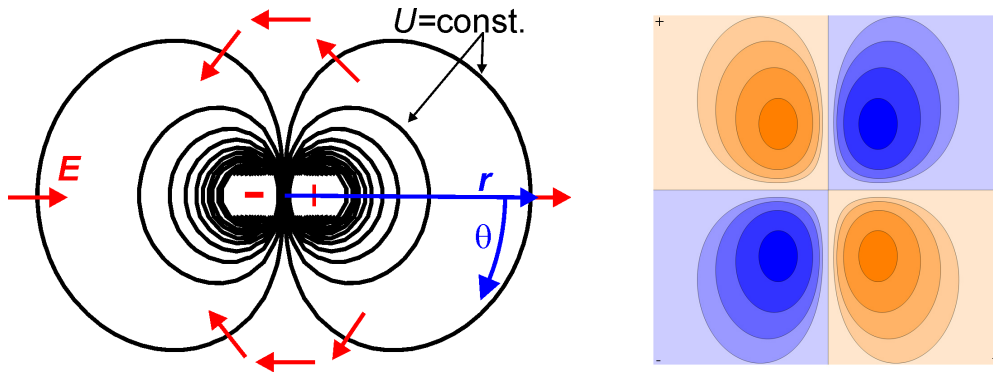
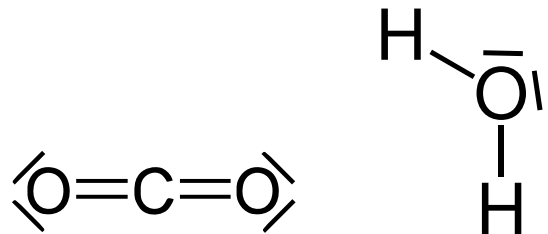


Abbildung 1.2: Das Potential eines elektrischen Dipols und Quadrupols.

Falls $Q \neq 0$, kann man \mathbf{a} so wählen, dass $\mathbf{d}' = 0$ wird. Wenn dagegen $Q = 0$ ist, so wird $\mathbf{d} = \mathbf{d}'$ unabhängig vom Ursprung und das Dipolmoment beschreibt eine echte *innere* Eigenschaft des betrachteten Systems. Dem entsprechend hat das Wassermolekül H_2O ein endliches Dipolmoment, nicht aber Kohlendioxidmolekül CO_2 .



Quadrupol-Moment Der dritte Term in der $1/r$ Entwicklung des Potentials (1.22) ist

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{r^k Q_{kl} r^l}{r^5}, \quad r^k Q_{kl} r^l = \sum_i q_i \left[3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i)^2 - r_i^2 r^2 \right]. \quad (1.26)$$

Für die Elemente Q_{kl} des **Quadrupoltensors** Q finden wir

$$Q_{kl} = \sum_i q_i \left(3r_i^k r_i^l - \delta_{kl} r_i^2 \right). \quad (1.27)$$

Einige Bemerkungen.

- **Indizes:** In (1.27) sind die Indizes $k, l = x, y, z$, mit $\mathbf{r} = (r^x, r^y, r^z)$ und $\mathbf{r}_i = (r_i^x, r_i^y, r_i^z)$.
- **Einstein'sche Summenkonvention:** Die Einstein'sche Summenkonvention gilt in (1.26), d.h. über gleiche Indizes wird automatisch summiert.
- **Symmetrie:** Der Quadrupol-Tensor Q ist symmetrisch und reell und kann daher stets diagonalisiert werden.

Es besteht hier eine weitgehende Analogie zum Trägheitstensor in der Mechanik.

Hauptachsensystem Mittels einer unitären Transformation lässt sich der Quadrupol-Tensor diagonalisieren, dann ist $Q_{kl} = Q_k \delta_{kl}$. Man spricht auch, analog zur Mechanik, von

einer Transformation ins Hauptachsensystem. Im Hauptachsensystem ist der Quadrupol-Tensor diagonal,

Wir finden, z.B. für $Q_x \equiv Q_{11}$,

$$Q_x = \sum_i q_i (3x_i^2 - r_i^2) = \sum_i q_i (2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2) . \quad (1.28)$$

(1.28) zeigt, dass die Eigenwerte Q_k die Abweichungen von der Kugelsymmetrie beschreiben, denn für sphärische Ladungsverteilungen wird

$$\sum_i q_i x_i^2 = \sum_i q_i y_i^2 = \sum_i q_i z_i^2 \quad \rightarrow \quad Q_m = 0 . \quad (1.29)$$

Spezialfall: Axialsymmetrie Wir betrachten im Hauptachsensystem Rotationsinvarianz um die z -Achse. Dann wird nach (1.28)

$$Q_x = Q_y = \sum_i q_i (x_i^2 - z_i^2), \quad Q_z = \sum_i q_i (2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2) = 2 \sum_i q_i (z_i^2 - x_i^2) .$$

und somit

$$Q_x = Q_y = -\frac{1}{2}Q_z, \quad (1.30)$$

d.h. der Quadrupol-Anteil $\Phi_2(\mathbf{r})$ ist durch eine Zahl, das **Quadrupolmoment** $Q_0 \equiv Q_z/2$, bestimmt.

Für diesen Fall ist die Winkelabhängigkeit von Φ_2 leicht anzugeben (wir verwenden $Q_z = 2Q_0$, $Q_x = Q_y = -Q_0$):

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_x x^2 + Q_y y^2 + Q_z z^2}{2r^5} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2r^5} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3z^2 - r^2)}{2r^5} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3} . \end{aligned} \quad (1.31)$$

Gleichung (1.31) zeigt die für den Quadrupol-Anteil charakteristische r -Abhängigkeit; die Winkelabhängigkeit ist deutlich verschieden von der des Dipol-Terms (1.24).

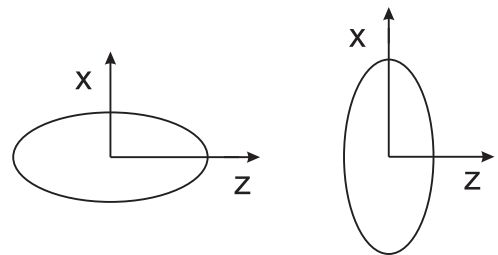
Kontinuierliche Ladungsverteilungen Analog zu Abschnitt 1.4 ergibt sich das Dipolmoment für eine kontinuierliche (räumlich begrenzte) Ladungsverteilung zu

$$\mathbf{d} = \int dV \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} . \quad (1.32)$$

Analog für die Quadrupol Momente, z.B. wird Gleichung (1.28) zu

$$Q_x = \int dV \rho(\mathbf{r}) (2x^2 - y^2 - z^2) . \quad (1.33)$$

Beispiel Eine ganze Reihe von Atomkernen ist (axialsymmetrisch) deformiert und elektrostatisch durch ein Quadrupolmoment charakterisiert. Die Abweichungen von der Kugelsymmetrie können dabei sowohl *positiv*, $Q_0 > 0$, als auch *negativ*, $Q_0 < 0$, sein, was anschaulich einer *Zigarre* bzw. einer *Scheibe* entspricht.



Kapitel 2

Grundlagen der Elektrostatik

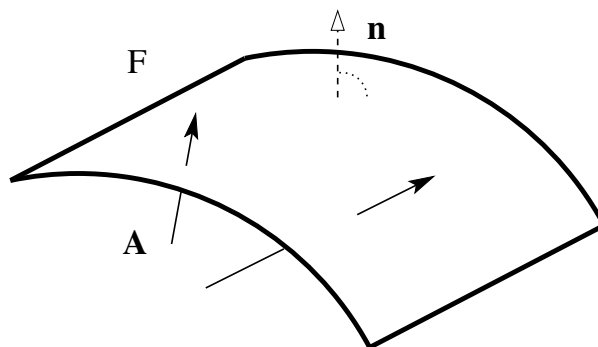
2.1 Satz von Gauß

Elektromagnetische Felder sind Vektorfelder; in jedem Punkt des Raumes gibt es ein gerichtetes elektrisches und magnetisches Feld. Zentral für die Mathematik von Vektorfeldern ist der Satz von Gauß, welcher vor allem in der Elektrostatik zur Anwendung kommt, sowie der Satz von Stokes, welcher für die Magnetostatik wichtig ist. Wir beschäftigen uns daher nun zuerst mit der Mathematik von Vektorfeldern.

Der Fluss von Vektorfeldern Den **Fluß** Φ des Vektorfeldes \mathbf{A} durch die Fläche F definieren wir als das Oberflächenintegral

$$\Phi = \int_F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} = \int_F A_n dF, \quad (2.1)$$

wobei $A_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ die Komponente von \mathbf{A} in Richtung der Flächennormalen \mathbf{n} ist. Das gerichtete Flächenelement $d\mathbf{F}$ ist parallel zu \mathbf{n} , $dF = |d\mathbf{F}|$.



Fluss von Strömungen Zur Interpretation von (2.1) verlassen wir kurzzeitig die Elektrodynamik und betrachten eine Flüssigkeitsströmung mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und der Dichte $\rho(\mathbf{r})$. Die Stromdichte \mathbf{j} ist dann

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

und somit ist

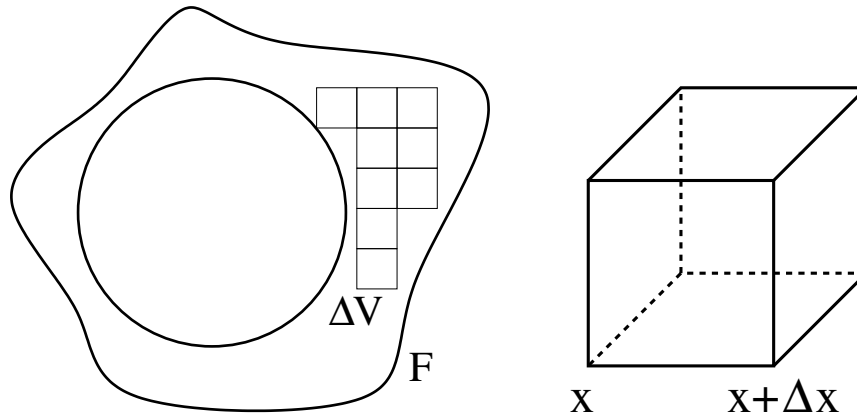
$$\int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = \int_F \rho(\mathbf{r}) [\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{F}] \quad (2.3)$$

die pro Zeiteinheit durch F fließende Menge Flüssigkeit. Wegen des Skalarproduktes $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{F}$ in (2.3) ist nur die senkrecht zur Strömung stehende Fläche wirksam.

Der Satz von Gauß Wir wählen nun für F eine **geschlossene** Fläche, welche ein Volumen V umschließt. Dann gilt für den Fluss $\Phi = \int_F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F}$ der **Satz von Gauß**:

$$\boxed{\int_F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV} . \quad (2.4)$$

Beweis des Satzes von Gauß Für den Beweis des Satzes von Gauß teilen wir den Raum in ein Summe von vielen kleinen Würfeln auf und beweisen den Satz für einen kleinen (infinitesimalen) Würfel. Dieses genügt, da sich die Flüsse an den gemeinsamen Würfelflächen wegheben.



Für einen einzelnen kleinen Würfel gilt mit $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$

$$\begin{aligned} \int_F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} &\approx (A_x(x + \Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)) \Delta y \Delta z \\ &+ (A_y(x, y + \Delta y, z) - A_y(x, y, z)) \Delta x \Delta z \\ &+ (A_z(x, y, z + \Delta z) - A_z(x, y, z)) \Delta x \Delta y \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V \approx \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV , \end{aligned}$$

wobei wir die Definition der Ableitung $f'(x)$ und des ∇ -Operators

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

verwendet haben.

2.2 Differentialgleichungen für das elektrische Feld

Wir wenden nun den Satz von Gauß auf das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ an, um die Beziehung zur Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ in differentieller Form zu gewinnen.

Divergenz des Feldes einer Punktladung Als Vorbetrachtung berechnen wir die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{E}$ des elektrischen Feldes

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

einer Punktladung q . Wir finden mit $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ und $\nabla \mathbf{r}^2 = 2\mathbf{r}$

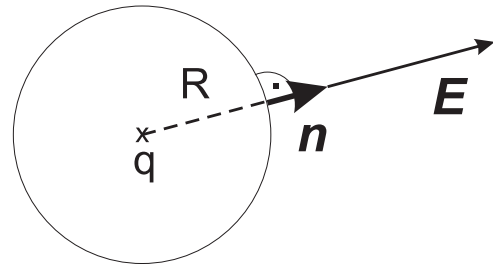
$$\frac{4\pi\epsilon_0}{q} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{3}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{3}{2} \frac{1}{|\mathbf{r}|^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} 2 = \frac{3}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{3}{|\mathbf{r}|^3} = 0. \quad (2.5)$$

Somit verschwindet die Divergenz des elektrischen Feldes überall dort wo es keine Ladung gibt

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = 0} \quad \forall \mathbf{r} \quad \text{mit} \quad \rho(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.6)$$

denn die Herleitung (2.5) ist natürlich nicht am Ursprung gültig, wo \mathbf{E} divergiert. Die Verallgemeinerung von dem Fall einer Punktladung zu dem Fall einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ ist nach dem Superpositionsprinzip trivial.

Fluß einer Punktladung Wie ist (2.6) für Orte \mathbf{r} zu modifizieren an denen $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$ ist? Dazu betrachten wir eine Kugel mit Radius R um eine Punktladung q . Für den Betrag von $E = |\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ gilt



$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Somit finden wir für den Fluss Φ durch die Oberfläche der Kugel

$$\Phi = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} R^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (2.7)$$

unabhängig vom Radius R der Kugel.

Ladungen als Quellen des elektrischen Feldes Nun ist nach dem Satz von Gauß (2.4) der Fluss (2.7) gleich dem Volumenintegral der Divergenz,

$$\Phi = \int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Für einen sehr kleinen Radius $R \rightarrow 0$ finden wir daher

$$\frac{q}{\epsilon_0} \approx (\nabla \cdot \mathbf{E}) \Delta V, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} \approx \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{\Delta V} \approx \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

wobei ΔV hier das Volumen $4\pi R^3/3$ der kleinen Kugel ist. Damit haben wir die **Gauß'sche Gleichung in differentieller Form**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$

hergeleitet. Sie belegt, dass die Ladungsverteilung $\rho = \rho(\mathbf{r})$ die Quelle des elektrischen Feldes ist.

Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes Eine weitere differenzielle Beziehung für \mathbf{E} erhalten wir aus (vgl. (1.11))

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (2.9)$$

wobei Φ hier das elektrische Potential ist. Gleichung (2.9) ist über die Vektoridentität

$$\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad (\nabla \times \nabla)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k = 0, \quad (2.10)$$

äquivalent zur **Wirbelfreiheit**

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.11)$$

des elektrischen Feldes. Wie wir später sehen werden, gilt die dieses Aussage nur wenn zusätzlich keine zeitabhängigen Magnetfelder auftreten.

Poisson'sche Gleichung Aus dem Gauss'schen Gesetz (2.8) gewinnt man zusammen mit (2.9) direkt eine Differentialgleichung für das elektrische Potential,

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot (\nabla\Phi) = \Delta\Phi \quad (2.12)$$

die *Poisson'sche Gleichung* mit der Abkürzung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.13)$$

für den **Laplace-Operator** Δ .

Laplace Gleichung Hat man eine Lösung von (2.12) gefunden, so kann man dazu eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung, der *Laplace-Gleichung*,

$$\Delta\Phi = 0 \quad (2.14)$$

addieren und erhält eine neue Lösung von (2.12). Diese Mehrdeutigkeit kann man durch Vorgabe von Randbedingungen beseitigen. Für die weitere Diskussion sei auf Kapitel 3 verwiesen.

2.3 Anwendungen des Gauß'schen Satzes

Für symmetrische Ladungsverteilungen bietet (2.12) die Möglichkeit, das Potential Φ und die Feldstärke $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ mit geringem Aufwand zu berechnen. Wir betrachten 2 Beispiele.

Feld einer homogen raumgeladenen Kugel Sei

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho(r) & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}, \quad (2.15)$$

mit $r = |\mathbf{r}|$. Aufgrund der Kugelsymmetrie ist \mathbf{E} radial gerichtet, mit

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_r}{\epsilon_0}, \quad Q_r = 4\pi \int_0^r (r')^2 \rho(r') dr', \quad (2.16)$$

wobei Q_r die in einer konzentrischen Kugel mit Radius r enthaltene Ladung ist.

Für $r \geq R$ ist $Q_r = Q$ die Gesamtladung und es folgt aus (2.16):

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{für } r \geq R. \quad (2.17)$$

Für $r \leq R$ hängt das Ergebnis von der speziellen Form von $\rho(r)$ ab. Als Beispiel wählen wir

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{const}, \quad (2.18)$$

dann wird:

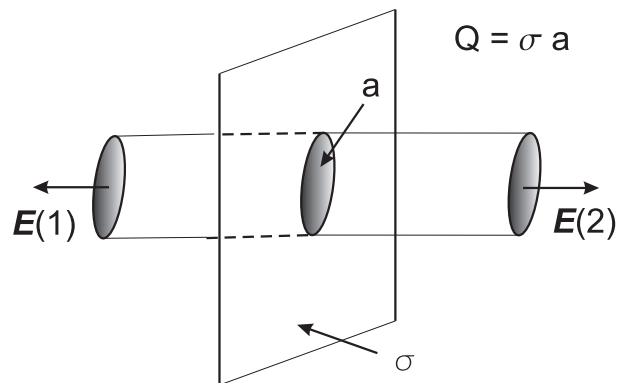
$$Q_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0,$$

also

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_r}{r^2} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r. \quad (2.19)$$

Diese Ergebnis erhält man auch wenn man das Potential (1.17) für eine Kugelschale über die radiale Ladungsverteilung integrieren würde.

Homogen geladene, unendlich ausgedehnte Ebene Aus Symmetriegründen steht \mathbf{E} senkrecht zur Ebene, der Betrag E ist gleich für die Punkte 1 und 2, welche von der Ebene den Abstand r haben mögen. Der Gauß'sche Satz ergibt dann



$$\Phi = \int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{F} = aE(1) + aE(2) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0}, \quad (2.20)$$

wenn a die Zylindergrundfläche ist und σ die Flächenladungsdichte. Vom Zylinder-Mantel erhält man keinen Beitrag, da \mathbf{E} keine Komponente in Richtung der Normalen auf dem Zylinder-Mantel hat. Das Ergebnis

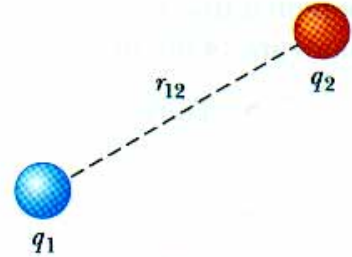
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.21)$$

ist unabhängig von r , wie von der Theorie des Kondensators bekannt.

2.4 Energie des elektrostatischen Feldes

Um eine Punktladung q_1 aus dem Unendlichen an eine Ladung q_2 auf den Abstand r_{12} heranzubringen, benötigt (oder gewinnt) man die Energie

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} . \quad (2.22)$$



Will man aus N Punktladungen q_i eine bestimmte (durch die Abstände der Ladungen q_i charakterisierte) Ladungsanordnung aufbauen, so benötigt (oder gewinnt) man entsprechend die Energie

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} ; \quad (2.23)$$

der Faktor $1/2$ sorgt dafür, dass Doppelzählungen vermieden werden, die Einschränkung $i \neq j$ schließt *Selbstenergien* der Punktladungen aus.

Punktladungen vs. Feldenergie Stellt man das Bild der Punktladungen in den Mittelpunkt der Betrachtungen, so interpretiert man U als die *potentielle Energie* eines Systems von geladenen Massenpunkten. Man kann auch das Bild des elektrischen Feldes in den Mittelpunkt stellen. Dann ist die zum Aufbau des elektrischen Feldes benötigte Energie U im elektrischen Feld *gespeichert* in Form von *Feldenergie*. Da die Coulomb-Kraft konservativ ist, geht die beim Aufbau des Feldes (also der Herstellung einer bestimmten Ladungsanordnung) geleistete Arbeit nicht verloren.

Energie des elektrischen Feldes Um den Zusammenhang der beiden Betrachtungsweisen quantitativ zu fassen, formen wir (2.23) um (vgl. Kapitel 1):

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dV , \quad (2.24)$$

wobei $\Phi(\mathbf{r}_i)$ das Potential am Ort \mathbf{r}_i der i -ten Punktladung ist, welches die anderen Punktladungen dort erzeugen. Gleichung (2.24) können wir mit der Poisson Gleichung $\Delta\Phi = -\rho/\epsilon_0$, siehe (2.12), umschreiben zu:

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \Phi(\mathbf{r}) \Delta\Phi(\mathbf{r}) dV . \quad (2.25)$$

Gleichung (2.26) beschreibt die Energie U vollständig durch das Potential Φ , d.h. durch das elektrostatische Feld ohne Bezug auf die Ladungen, die dieses Feld erzeugt haben. Man kann U , statt durch das Potential Φ , durch die Feldstärke \mathbf{E} ausdrücken, wenn man die Identität

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = (\nabla f) \cdot (\nabla g) + f \Delta g \quad (2.26)$$

für $f = g = \Phi$ benutzt:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\nabla \Phi(\mathbf{r}))^2 dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\nabla \Phi(\mathbf{r}))^2 dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int_F \Phi \nabla \Phi \cdot d\mathbf{F}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

wobei wir den Satz von Gauß (2.4) verwendet haben, mit F als Oberfläche von V .

Wenn sich nun alle Ladungen im Endlichen befinden, so verschwindet in (2.27) das Oberflächenintegral mit zunehmendem Volumen V , da $\Phi \nabla \Phi$ mit wachsendem Abstand vom Ladungszentrum wie R^{-3} abfällt, während die Oberfläche nur mit R^2 anwächst. Im Limes $V \rightarrow \infty$ bleibt also:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\nabla \Phi(\mathbf{r}))^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV \quad (2.28)$$

als die im Feld gespeicherte Energie.

$$\frac{\epsilon_0}{2} E^2(\mathbf{r})$$

ist somit die **Energiedichte** des elektrischen Feldes.

2.5 Multipole im elektrischen Feld

Wir betrachten eine räumlich lokalisierte Ladungsverteilung ρ in einem äußeren elektrostatischen Feld, erzeugt durch das Potential Φ_a . Die Energie der Ladungsverteilung ist dann, entsprechend den Überlegungen von Abschnitt 2.4),

$$U = \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi_a(\mathbf{r}) dV. \quad (2.29)$$

Dabei sollen die Ladungen, welche das äußere Feld Φ_a hervorrufen sich außerhalb des Gebietes V befinden, auf welches ρ beschränkt ist. Damit erklärt sich das Fehlen des Faktors $1/2$ in (2.29) verglichen mit (2.24).

Taylor Entwicklung Weiter sei Φ_a in V langsam veränderlich, so dass wir Φ_a bzgl. des Ladungsschwerpunktes von $\rho(\mathbf{r})$ in eine Taylor-Reihe entwickeln können:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \Phi_a(0) + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial \Phi_a(0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi_a(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \quad (2.30)$$

Da im Gebiet V für das äußere Feld

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_a = 0, \quad \mathbf{E}_a = -\nabla \Phi_a \quad (2.31)$$

nach Annahme gilt, können wir (vgl. Abschnitt 1.4) Gleichung (2.30) wie folgt umformen:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \Phi_a(0) - \sum_{i=1}^3 x_i E_{ia}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_{ia}(0)}{\partial x_j} + \dots \quad (2.32)$$

Die ersten beiden Terme (Monopol und Dipol) ergeben sich direkt aus dem Vergleich mit (2.30). Den dritten Term (Quadrupol) haben wir erzeugt indem wir eine Null hinzugefügt haben:

$$\sum_{i,j} (-r^2) \delta_{ij} \frac{\partial E_{ia}}{\partial x_j} = -r^2 \sum_i \frac{\partial E_{ia}}{\partial x_i} = -r^2 \nabla \cdot \mathbf{E}_a = 0 .$$

Die Kombination von (2.29) und (2.32) ergibt zusammen mit

$$Q = \int_V dV \rho(\mathbf{r}), \quad \mathbf{d} = \int dV \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}, \quad Q_{ij} = \int_V dV \rho(\mathbf{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{kl}) ,$$

siehe (1.14), (1.32) und (1.27), erhalten wir

$$U = Q\Phi_a(0) - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_a(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{\partial E_{ia}(0)}{\partial x_j} + \dots \quad (2.33)$$

Gleichung (2.33) zeigt, wie die Multipolmomente einer Ladungsverteilung ρ mit einem äußeren Feld \mathbf{E}_a in Wechselwirkung treten.

- die Gesamtladung Q mit dem Potential Φ_a ,
- das Dipolmoment \mathbf{d} mit der Feldstärke \mathbf{E}_a ,
- der Quadrupoltensor Q_{ij} mit dem Feldgradienten $\partial E_{ia}/\partial x_j$, etc.

Anwendungsbeispiele Atomare Dipole in äußeren elektrischen Feldern, Wechselwirkung des Kern-Quadrupolmoments mit der Elektronenhülle.

Kapitel 3

Randwertprobleme der Elektrostatik

3.1 Eindeigkeitstheorem

Im Kapitel 2.2 haben wir darauf hingewiesen, dass die Poisson- bzw. die Laplace Gleichung

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \Delta\Phi = 0 ,$$

für das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ keine eindeutigen Lösungen besitzen. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, dass wir für diese die Anfangsbedingungen spezifizieren müssen, damit die Lösungen eindeutig werden. Für partielle Differentialgleichung sind es analog die Randbedingungen.

Randbedingungen Wir wollen im folgenden zeigen, dass die Poisson-Gleichung bzw. die Laplace-Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt, wenn eine der beiden folgenden Randbedingungen erfüllt ist.

- Dirichlet - Bedingung

$$\Phi \text{ ist auf einer geschlossenen Fläche } F \text{ vorgegeben .} \quad (3.1)$$

- von Neumann-Bedingung

$$\nabla\Phi \text{ ist auf einer geschlossenen Fläche } F \text{ vorgegeben .} \quad (3.2)$$

Beweis für die Eindeutigkeit Wir nehmen an, dass es 2 Lösungen Φ_1 bzw. Φ_2 von

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.3)$$

gibt, die beide die gleichen Randbedingungen, (3.1) oder (3.2), erfüllen. Dann gilt für die Differenz $U = \Phi_1 - \Phi_2$:

$$\Delta U = 0 \quad (3.4)$$

in dem von F umschlossenen Volumen V . Weiter gilt wegen der Randbedingungen

$$U = 0 \quad \text{auf } F \quad (3.5)$$

oder

$$\nabla U = 0 \quad \text{auf } F . \quad (3.6)$$

Mit der Kettenregel

$$\nabla \cdot (U \nabla U) = (\nabla U)^2 + U \Delta U \quad (3.7)$$

und (3.4) wird

$$\int_V (\nabla U)^2 dV = \int_V \left(\nabla \cdot (U \nabla U) - \underbrace{U \Delta U}_{=0} \right) dV = \int_F \underbrace{U \nabla U}_{=0} \cdot d\mathbf{F} = 0 \quad (3.8)$$

mit Hilfe der Formel von Gauß, falls eine der beiden Bedingungen (3.5) oder (3.6) gilt. Also:

$$\int_V (\nabla U)^2 dV = 0 , \quad (3.9)$$

d.h. es ist in V :

$$\nabla U = 0 , \quad (3.10)$$

da $(\nabla U)^2 \geq 0$. Damit wird

$$U = \text{const} \quad (3.11)$$

und Φ_1 und Φ_2 unterscheiden sich höchstens um eine (physikalisch unwesentliche) Konstante, dem Energie-Nullpunkt.

Sonderfall $V \rightarrow \infty$ Wenn V der gesamte R_3 ist, so ist die Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig, falls ρ auf einen endlichen Bereich beschränkt ist und $\Phi(\mathbf{r})$ asymptotisch so schnell abfällt, dass

$$r^2 \Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty , \quad (3.12)$$

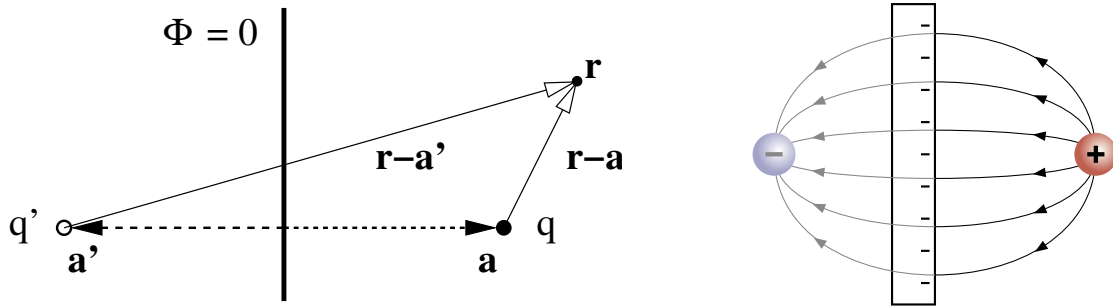
wo $\partial \Phi / \partial n$ die Normalen-Ableitung von Φ bezeichnet. Der obige Beweis überträgt sich direkt, wenn man beachtet, dass die Oberfläche bei festem Rauminhalt wie r^2 wächst.

Die Bedingung (3.12) ist für eine Punktladung erfüllt, für welche $\Phi \sim 1/r$ und $E \sim 1/r^2$. Nach dem Superpositionsprinzip ist daher auch (3.12) für alle Ladungsverteilungen mit einer endlichen Gesamtladung erfüllt.

3.2 Spiegelungsmethode

Diese Methode zur Lösung des Randwertproblems besteht darin, außerhalb des zu untersuchenden Bereichs sogenannte *Spiegel-Ladungen* geeigneter Größe so anzubringen, dass mit ihrer Hilfe gerade die geforderten Randbedingungen erfüllt werden. Dieses Verfahren ist deshalb erlaubt, weil man zur Lösung der (inhomogenen) Poisson-Gleichung jede Lösung der (homogenen) Laplace-Gleichung addieren darf (vgl. Abschnitt 2.2). Durch die Spiegelungsmethode wird diejenige Lösung der Laplace-Gleichung ausgewählt, die zusammen mit der gewählten speziellen Lösung der Poisson-Gleichung die geforderten Randbedingungen erfüllt.

Punktladung vor leitender Ebene Als einfaches Beispiel betrachten wir eine Punktladung q im Abstand a von einer leitenden Ebene (der yz -Ebene), welche geerdet sei (d.h. $\Phi = 0$ auf der Ebene). Die Spiegelladung q' denken wir uns bzgl. der Ebene spiegelsymmetrisch zu q angebracht.



Die Positionen der Ladung und die Spiegelladung seien also

$$\mathbf{a} = (a, 0, 0), \quad \mathbf{a}' = (-a, 0, 0) .$$

Dann beträgt das Potential im Punkt \mathbf{r}

$$(4\pi\epsilon_0) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{a}'|} \quad (3.13)$$

und wir erhalten wie gefordert $\Phi = 0$ für alle Punkte der leitenden Ebene, $x = 0$, wenn wir

$$q' = -q \quad (3.14)$$

wählen. In dem (uns interessierenden) Bereich $x > 0$ ist $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ eine spezielle Lösung der Poisson-Gleichung, $q'/(4\pi\epsilon_0 r')$ eine Lösung der Laplace-Gleichung, die gerade dafür sorgt, dass für $x = 0$ die geforderte Randbedingung gilt.

Elektrisches Feld Das elektrische Feld \mathbf{E} erhält man dann aus (3.13) und (3.14)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{a}}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|^3} \right) . \quad (3.15)$$

Für die Ebene $x = 0$ gilt mit $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2 = |\mathbf{r} + \mathbf{a}|^2 = a^2 + y^2 + z^2 \equiv r^2$$

und somit

$$\mathbf{E}(x = 0) = -\frac{2q\mathbf{a}}{4\pi\epsilon_0 r^3} . \quad (3.16)$$

Das elektrische Feld steht somit senkrecht auf die leitende Ebene, da $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$. Die Komponenten des elektrischen Feldes in der $x = 0$ Ebene verschwinden, andernfalls würde ein Strom in der Ebenenoberfläche fließen bzw. das Potential auf der Fläche nicht konstant sein.

Flächenladungsdichte Das das elektrische Feld im linken Halbraum $x < 0$ verschwindet bedeutet Gleichung (3.16) nach dem Gauß'schen Satz, und dem Ergebnis (2.21), dass in der Ebene $x = 0$ eine ortsabhängige Flächendichte

$$\sigma = \epsilon_0 E_x(x = 0) = -\frac{qa}{2\pi r^3} \quad (3.17)$$

durch die Anwesenheit der Punktladung q induziert wird. Beachte den Faktor 2 zwischen (3.17), und (2.21), da im Falle der Spiegelladung $\mathbf{E}(x < 0) = 0$ ist, und in der Anwendung des Satzes von Gauss damit nur die Hälfte des elektrischen Flusses auftritt.

3.3 Trennung der Variablen

Eine Trennung der Variablen kann für viele Differentialgleichungen durchgeführt werden, für welche die einzelnen Freiheitsgrade entkoppelt sind.

Laplace-Gleichung Wir suchen nach Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \quad (3.18)$$

und nehmen dabei der Einfachheit halber an, daß Φ von z nicht abhängt,

$$\Phi = \Phi(x, y) . \quad (3.19)$$

Dann vereinfacht sich (3.18) in kartesischen Koordinaten zu:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y) = 0 . \quad (3.20)$$

Separationsansatz In (3.20) sind die Freiheitsgrade x und y nicht gekoppelt, es gibt keine Mischterme wie $\partial^2/\partial x\partial y\Phi$. Daher können wir den *Separationsansatz*

$$\Phi(x, y) = f(x)g(y) \quad (3.21)$$

machen. Damit geht (3.20) über in:

$$g(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + f(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(y) = 0 . \quad (3.22)$$

Mit Ausnahme der Nullstellen von f und g ist (3.22) äquivalent zu:

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 . \quad (3.23)$$

Der erste Term in (3.23) hängt nur von x , der zweite nur von y ab; da x und y unabhängige Variablen sind, folgt aus (3.23):

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \text{const} = -\frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} . \quad (3.24)$$

Wählen wir die Konstante in (3.24) z.B. positiv reell ($= k^2$), so erhalten wir folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k^2 f(x) = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + k^2 g(y) = 0 \quad (3.25)$$

mit den Lösungen

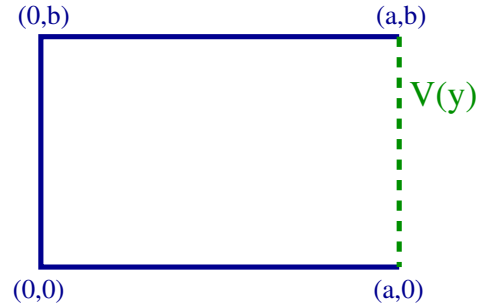
$$f(x) = a_k \exp(kx) + b_k \exp(-kx); \quad g(y) = c_k \sin(ky) + d_k \cos(ky) . \quad (3.26)$$

Die Integrationskonstanten a_k, b_k, c_k, d_k und die Separationskonstante k werden durch Randbedingungen festgelegt.

Rechteck-Zylinder Als Beispiel betrachten wir einen in z -Richtung unendlich ausgehenden Rechteck-Zylinder (mit den Kantenlängen x_0 und y_0) mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \Phi(x, b) &= 0 & \Phi(a, y) &= V(y) \\ \Phi(0, y) &= 0 & \Phi(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Hierbei ist $V(y)$ eine beliebige, vorgegebene Funktion.



Wir müssen nun die Parameter der Lösungen (3.26) von $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$ so wählen dass die Randbedingungen (3.27) erfüllt werden.

- Aus $\Phi(x, 0) = 0$ folgt $g(y = 0) = 0$ und somit $d_k = 0$. Wir können also auch $c_k = 1$ wählen.
- Aus $\Phi(x, b) = 0$ folgt $g(y = b) = 0$ und somit $\sin(kb) = 0$. Also

$$k = \frac{n\pi}{b} \equiv k_n . \quad (3.28)$$

- Aus $\Phi(0, y) = 0$ folgt $f(y = 0) = 0$ und somit $b_k = -a_k$. Also

$$f(x) = a_k \{ \exp(k_n x) - \exp(-k_n x) \} = 2a_k \sinh(k_n x) . \quad (3.29)$$

Fourier Transformation Der Wellenvektor k_n in (3.29) ist beliebig. Um die Bedingung $\Phi(b, y) = V(y)$ auch noch zu erfüllen, entwickeln wir nach Fourier,

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\sinh(k_n x)}_{f(x)} \underbrace{\sin(k_n y)}_{g(y)} \quad A_n = 2a_k \quad k_n = n\pi/b , \quad (3.30)$$

und bestimmen die Koeffizienten A_n aus der Forderung

$$\Phi(a, y) = V(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(k_n a) \sin(k_n y) . \quad (3.31)$$

Nach dem Umkehrtheorem für Sinus-Fourier-Reihen erhält man:

$$A_n = \frac{2}{b \sinh(k_n a)} \int_0^b V(y) \sin(k_n y) dy . \quad (3.32)$$

Allgemeine Randbedingungen Nicht für alle Geometrien kann man die Lösungen so einfach lösen wie beim Rechteck, i.A. muss man auf numerische Methoden zurückgreifen. Hat man Randbedingungen von sphärischer Symmetrie, so wird man die Laplace-Gleichung lösen durch einen Separationsansatz in Kugelkoordinaten; entsprechend verfährt man bei axialer Symmetrie.

3.4 Übersicht Elektrostatik

1.) Coulomb-Gesetz (die Basis)

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

2.) Feldgleichungen:

a) integral:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0; \quad \int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{F} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

b) differentiell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

3.) Elektrostatisches Potential:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad \rightarrow \quad \Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} : \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

4.) Feldenergie:

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi dV \quad \rightarrow \quad \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV$$

Potentielle Energie der Punktladungen \rightarrow elektrostatische Feldenergie