Einführung in die Elektrodynamik

0.1 Elektrische Ladung

Während in der Mechanik die Eigenschaft *Masse* im Vordergrund steht, ist die *Ladung* von Massenpunkten Ausgangspunkt der Elektrodynamik. Sie besitzt eine Reihe von fundamentalen Eigenschaften, die durch vielfältige experimentelle Messungen gesichert sind:

Vorzeichen Es gibt 2 Sorten (Typen) von *Ladungen*. Es hat sich eingebürgt diese als **positiv** und **negativ** zu bezeichnen. Man hätte auch auch andere Bezeichnungen wählen können, wie z.B. Hänsel und Gretel.

Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab, Ladungen verschiedenen Vorzeichens ziehen sich an.

Transformationseigenschaften Die Gesamtladung eines Systems von Massenpunkten ist die algebraische Summe der Einzelladungen; die Ladung ist ein **Skalar**. Diese Bezeichnung leitet sich aus den Transformationseigenschaften der Ladung im euklischen Raum ab.

Ladungserhaltung Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems ist konstant, d.h. eine **Erhaltungsgröße**. Ihr Zahlenwert unabhängig vom Bewegungszustand (Geschwindigkeit, Beschleunigung, etc) des Systems.

Quantisierung Ladung kommt nur als Vielfaches der **Elementarladung** e (eines Elektrons) vor,

$$q \;=\; ne; \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Der klassischer Nachweis für die Quantisierung der Ladung ist der **Millikan-Versuch** (1910). Die Steig-/Fallgeschwindigkeit geladener Öltröpchen wird mit ein-/ausgeschaltetem elektrischem Feld gemessen.

Den Elementarteilchen *Quarks* ordnet man zwar drittelzahlige Ladungen zu, d.h. $q = \pm(1/3)e$ bzw. $q = \pm(2/3)e$, jedoch sind diese *Quarks* im uns hier interessierenden Energiebereich nicht als freie Teilchen beobachtbar.

0.2 Elektrostatik

Elektrostatik Behandelt das einfachste Problem der Elektrodynamik, der Fall ruhender Ladungen,

Elektrische Kräfte Bringt man in die Umgebung einer (oder mehrerer) räumlich fixierter Punktladungen eine *Probeladung* q, so wirkt auf diese Probeladung eine Kraft $\mathbf{K}$, welche im allgemeinen vom Ort $\mathbf{r}$ der Probeladung abhängt:

$$\mathbf{K} \;=\; \mathbf{K}(\mathbf{r})\ .$$

Ersetzt man q durch eine andere Probeladung q', so findet man für die auf q' wirkende Kraft $\mathbf{K}'$:

$$\mathbf{K}'/q' \ = \ \mathbf{K}/q \ ,$$

d.h. die Kraft is proportional zur Größe der Probeladung.

Elektrisches Feld Diese Erfahrung legt es nahe, den Begriff des elektrischen Feldes

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \ = \ \frac{1}{q}\mathbf{K}(\mathbf{r})$$

einzuführen. Dieses von den ruhenden Punktladungen erzeugte Feld ordnet jedem Raumpunkt $\mathbf{r}$ ein Tripel reeller Zahlen zu, welches sich wie ein Vektor transformiert.

Aufgabe der Elektrostatik Gegeben eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$: Finde das elektrischem Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

0.3 Magnetostatik

Magnetostatik Behandelt stationärer Ströme. Bewegte Ladungen sind i.A. der Ursprung magnetostatischer Felder, da es keine magnetischen Ladungen gibt.

Lorentz-Kraft Bringt man in die Umgebung eines von einem stationären Strom durchflossenen Leiters eine Probeladung q, so kann die auf q am Ort $\mathbf{r}$ wirkende Kraft geschrieben werden als

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) \ = \ q\Big(\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})\Big) \ .$$

Dabei ist $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit der Probeladung und $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ein (von $\mathbf{v}$ unabhängiges) Vektorfeld, der **magnetischen Induktion**, hervorgerufen durch den vorgegebenen stationären Strom.

Aufgabe der Magnetostatik Gegeben eine stationären Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$: Finde das magnetischen Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

0.4 Konzept des elektromagnetischen Feldes

Das elektrische und das magnetische Feld sind keine von einander unabhängige Größen. Beispiele:

Lorentz-Transformation Alle gleichmäßig bewegten Referenzsysteme nenn man Inertialsysteme da sich die Form der Naturgesetze nicht bei einer Transformation zwischen ihnen ändert.

Eine ruhende Punktladung Q in einem Inertialsystem Σ erzeugt für einen Beobachter in Σ nur ein elektrisches Feld $\mathbf{E} \neq 0$, jedoch kein Magnetfeld.

Für einen anderen Beobachter in einem gegenüber Σ bewegten Inertialsystem Σ' ist die Ladung bewegt. Der Beobachter in Σ' misst daher sowohl ein elektrisches Feld $\mathbf{E}' \neq 0$ als auch ein magnetisches Feld $\mathbf{B}' \neq 0$.

Da die Naturgesetzte jedoch in Σ wie in Σ' die gleich Form haben müssen (Postulat der Forminvarianz), muss dass elektrisches und magnetisches Feld als eine Einheit ansehen werden, als **elektromagnetisches** Feld.

Kontinuitätsgleichung Die wechselseitige Abhängigkeit von elektrischem und magnetischem Feld tritt unvermeidbar dann zu Tage, wenn wir beliebige Ladungs- und Stromverteilungen $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ zulassen. Die Forderung der Ladungserhaltung ergibt dann die Verknüpfung von ρ und $\mathbf{j}$ via der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \ = \ 0 \ ,$$

da die Ladung in einem bestimmten Volumen V nur ab(zu)-nehmen kann, indem ein entsprechender Strom durch die Oberfläche von V hinaus(hinein)-fließt. Dann können aber $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ nicht mehr unabhängig voneinander berechnet werden.

0.5 Maxwell'sche Gleichungen

Maxwell-Gleichungen Sind die allgemeinen dynamischen Bewegungsgleichungen des elektromagneitschem Feld $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ in Zusammenhang mit den *Quellen* des elektromagnetischen Feldes (Ladungen, Ströme).

Formulierung Die Maxwell-Gleichungen werden Schritt für Schritt in der Vorlesung eingeführt, formulieren und experimentell begründet.

Transformationseigenschaften Licht wird als propagierendes elektromagnetisches Feld beschrieben, die Invarianzeigenschaft der Maxwell-Gleichungen unter Lorentz-Transformationen ist daher äquivalent mit der speziellen Relativitätstheorie ergibt.

Erhaltungsgrößen Aus der Energie-, Impuls- und Drehimpuls-Bilanz für ein System geladener Massenpunkte im elektromagnetischen Feld lassen sich dem elektromagnetischen Feld Energie, Impuls und Drehimpuls zuzuordnen.

Lösungstheorie der Maxwell-Gleichungen Beispiele sind die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen oder die Strahlung eines schwingenden elektrischen Dipols (Antenne).

0.6 Materie im elektromagnetischen Feld

Die Maxwell-Gleichungen bestimmen im Prinzip die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ vollständig, wenn die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}, t)$ und die Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ bekannt sind. Diese sind jedoch i.A. nicht berechenbar.

mikro- vs. makroskopisch Für ein System von N geladenen Massenpunkten müsste man die Newton'schen Bewegungsgleichungen lösen, um $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ mikroskopisch berechnen zu können.

Für ein Stück Materie von makroskopischen Dimensionen haben wir es mit $N \approx 10^{20} - 10^{25}$ Massenpunkten zu tun.

Variabilität Die mikroskopisch berechneten Funktionen $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ werden im allgemeinen starke Schwankungen über kleine räumliche und zeitliche Distanzen aufweisen.

Gemittelte Felder Der Übergang von der mikroskopischen zur makroskopischen Formulierung findet über gemittelte Felder statt. Wir verzichten auf die Kenntnis des elektromagnetischen Feldes in mikroskopischen Dimensionen
(Volumina von $10^{-24} cm^3$, Zeiten von $10^{-8} sec$) und geben uns mit Mittelwerten in
(Volumina von $10^{-6} cm^3$, Zeiten von $10^{-3} sec$) zufrieden.
Anstelle von $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ treten dann Mittelwerte der Form

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int d^3x d\tau \; \rho(\mathbf{r} + \mathbf{x}, t + \tau)$$

und entsprechend für $\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rangle$, $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle$ und $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle$. Aus den Maxwell-Gleichungen der mikroskopischen Felder ergeben sich dann Gleichungen ähnlicher Struktur für das makroskopische elektromagnetische Feld.

Matieralgleichung Der Zusammenhang zwischen den gemittelten Feldern wird dann durch die Materialkonstanten ϵ, μ und σ bestimmt.

$$\begin{aligned} \textit{Dielektrizitätskonstante} &: \epsilon \\ \textit{magnetischen Permeabilität} &: \mu \\ \textit{elektrischen Leitfähigkeit} &: \sigma \end{aligned}$$

0.7 Literatur

An begleitender Literatur werden die folgenden Monographien empfohlen:

1. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics,*
   (Wiley, New York, 1962)

2. W. Greiner, *Klassische Elektrodynamik,*
   (Harri Deutsch, Thun, 1982)

3. D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics,*
   (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999)

4. W. Nolting, *Elektrodynamik,*
   (Zimmermann-Neufang, Ulmen, 1993)

5. G. Ludwig, *Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Band 2: Elektrodynamik, Zeit, Raum, Kosmos,*
   (Bertelsmann, Düsseldorf, 1974)

6. W. Panofsky, M. Phillips, *Classisal Electricity and Magnetism,*
   (Addison-Wesley, Reading, 1962)

7. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie,*
   (Akademie-Verlag, Berlin, 1973)

8. E. Rebhan, *Theoretische Physik*
   (Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1999)