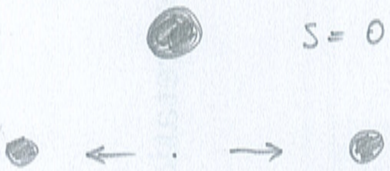
EPRB



$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle \right) \quad \text{spin-singlett}$$

1) Measurement in the same direction :

$$S_1^z = +1 \quad \Rightarrow \quad S_2^z = -1$$

The same for the x, y - directions.

$\Rightarrow$ S_i^x, S_i^y, S_i^z are elements of the reality.

2) Reorient the apparatus while the atoms are still in flight.

$\Rightarrow$ definite (not predictable) value of the spin Component in any direction that he chooses.

If there is no disturbance & S_i^x, S_i^y, S_i^z are the elements of reality

$\Rightarrow$ QM is not Complete because the wave function can specify at most only one of these Components at the time with Complete precision.

$\Rightarrow$ the wave function does not provide a Complete description of reality

0/7

BELLSCHE UNGLEICHUNG

Ausgangspunkt : EPR-Gedankenexperiment nach Bohm
Lokalitätsforderung $\Leftrightarrow$ es gibt keine Fernwirkung
$\Leftrightarrow$ Messung an Teil I kann den möglichen Ausgang der Messung an II nicht beeinträchtigen

$\Rightarrow$ Ausgang lag bereits vorher fest
$\Rightarrow$ $\exists$ "verborgener Variablen"

B. U. für verschränkte Teilchen mit Spin 1/2

(Lokale Theorie verborgener Variablen)

EPRB-Anordnung mit Spin-Messungen entlang 3 verschiedener Richtungen $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

Annahme: Verborgene Variable: Spin-Ausrichtung in a, b, c-Richtung

Drehimpulserhaltung: Teilchen 1 a+ $\Rightarrow$ Teilchen 2 a-

$\Rightarrow \underset{\overset{\uparrow}{+,-}}{2}^{3 \leftarrow \text{Richtungen}} = 8$ Klassen

Anzahl (Häufigkeit einer Konfiguration)	Teilchen 1 (a, b, c)	Teilchen 2 (a, b, c)
N_1	+ + +	− − −
N_2	+ + −	− − +
N_3	+ − +	− + −
N_4	+ − −	− + +
N_5	− + +	+ − −
N_6	− + −	+ − +
N_7	− − +	+ + −
N_8	− − −	+ + +

2 Messungen: An jedem Teilchen eine M. in verschiedenen Richtungen

z.B. Teilchen 1 Messung a-Richt. +
Teilchen 2 Messung b-Richt. +
$\hat{=}$ $(++|ab)$

$\Rightarrow$ Der Ausgang der Messung ist für $N_3 + N_4$ Konfigurationen möglich.

$$\Rightarrow N_3 + N_4 \leq (N_2 + N_4) + (N_3 + N_7)$$

Wahrscheinlichkeiten (≈ relative Häufigkeit)

$$P(++|ab) = \frac{N_3+N_4}{\sum_i N_i}$$

$$P(++|ac) = \frac{N_2+N_4}{\sum_i N_i} \quad , \quad P(++|cb) = \frac{N_3+N_7}{\sum_i N_i}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P(++|ab) \leq P(++|ac) + P(++|cb) \quad \text{Bellsche Ungleichung}}$$

Unterschied zu EPR: Hier wird auf beide Systeme gemessen.

Bells Originalpaper

zweier Spinmessungen an einem EPR-Paar entlang derselben Richtung.
(Messung $A = +1 \Rightarrow$ Messung $B = -1$)

Da der Ausgang der B-Messung aber tatsächlich nach einer A-Messung vorausgesagt werden kann, müssen die Messergebnisse unter dieser Voraussetzung schon vorher festgelegt sein.

Wellenfkt der Q.M. legt den Ausgang individueller Messungen nicht fest
$\Rightarrow$ Annahme zusätzlicher Parameters λ

Spinmessung $\sigma_1 \cdot a$ an Teil A durch a und λ festgelegt

$$A(a,\lambda) = \pm 1 \qquad B(b,\lambda) = \pm 1$$

Ergebnis einer Messung in QM $\Leftrightarrow$ Erwartungswert von Observablen $\langle x \rangle = \int dx\, \psi^\dagger(x)\, x\, \psi(x)$
Hier: Observable AB, d.h. Produkt zweier Observablen $\Rightarrow$ Korrelationsfkt. $\langle AB \rangle$

$$\langle AB(a,b) \rangle = \int d\lambda\, P(\lambda)\, A(a,\lambda)\, B(b,\lambda)$$

Verteilung d. verborgenen Parameter (Dichtefkt)

Betrachten wir nun eine dritte Richtung c.

Es gilt $\quad A(a,\lambda) = -B(a,\lambda) \qquad (1)$

$\qquad \wedge \; [A(a,\lambda)]^2 = 1 \qquad (2)$

$$\Rightarrow \; \langle AB(a,b)\rangle - \langle AB(a,c)\rangle = \int d\lambda\, \varrho(\lambda) \left[A(a,\lambda)\,B(b,\lambda) - A(a,\lambda)\,B(c,\lambda) \right]$$

$$\overset{(1)}{=} -\int d\lambda\, \varrho(\lambda) \left[A(a,\lambda)\,A(b,\lambda) - A(a,\lambda)\,A(c,\lambda) \right]$$

$$= -\int d\lambda\, \varrho(\lambda)\, A(a,\lambda) \left[A(b,\lambda) - A(c,\lambda) \right]$$

weil $A(b,\lambda)\cdot A(b,\lambda) = 1$

$$= -\int d\lambda\, \varrho(\lambda)\, A(a,\lambda)\,A(b,\lambda) \left[1 - A(b,\lambda)\,A(c,\lambda) \right]$$

$A(\alpha,\lambda) = \pm 1 \quad , \alpha \in \{a,b,c\} \Rightarrow |A(\alpha,\lambda)| \leq 1$

$$= \int d\lambda\, \varrho(\lambda)\, \underbrace{A(a,\lambda)\,B(b,\lambda)}_{|A|,|B| \,\leq\, 1} \left[1 - A(b,\lambda)\,A(c,\lambda) \right]$$

$$\Rightarrow \; \left| \langle AB(a,b)\rangle - \langle AB(a,c)\rangle \right| \leq \int d\lambda\, \varrho(\lambda) \left[1 - A(b,\lambda)\,A(c,\lambda) \right]$$

$$\underset{\int d\lambda\, \varrho(\lambda) = 1}{\leq} \quad 1 + \langle AB(b,c)\rangle$$

QUANTENMECHANISCHE BETRACHTUNG

In der üblichen Formulierung der Q.M. gibt es keine verborgene Variablen.
Das System ist durch einen Singulettzustand beschrieben:

$$|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$

Der Singulettzustand zeichnet keine Raumrichtung aus. Deshalb bezieht sich die obige Notation auf jede beliebige Richtung.

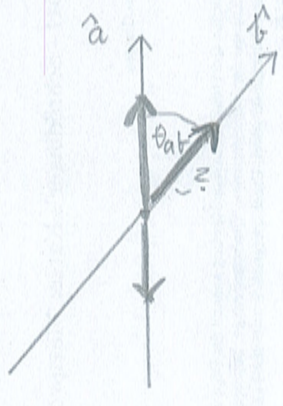
Nun möchten wir folgende Wahrscheinlichkeiten nach den Regeln der Q.M. berechnen:

$P(++|ab)$: Wahrscheinlichkeit, dass, nach einer Messung am Teichen 1 in a-Richtung mit dem Ausgang +1, ich nach der Messung am Teichen 2 in b-Richtung den Wert +1 bekomme.

$P(++|ac)$: Wahrscheinlichkeit, dass, nach der Messung am Teilchen 1 in a Richtung mit dem Ausgang +1, ich nach der Messung am Teilchen 2 in c-Richtung den Wert +1 bekomme.

$P(++|cb)$: Wahrscheinlichkeit, dass, nach der Messung am Teilchen 1 in c-Richtung mit dem Ausgang +1, ich nach der Messung am Teilchen 2 in b-Richtung den Wert +1 bekomme.

Betrachten wir $P(++|ab)$



Teilchen 1: $S_1\cdot\hat{a} = +1$

$\Rightarrow$ Teilchen 2: $S_2\cdot\hat{a} = -1$

Frage: Wie wahrscheinlich ist, dass $S_2\cdot\hat{b} = +1$?

Betrachte eine Drehung um die y-Achse um den Winkel ϕ.
Wenn der Zustand des Systems vor der Drehung $|\alpha\rangle$ war, nach der Drehung ist

$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-\frac{i S_y \phi}{\hbar}\right)|\alpha\rangle \qquad (1)$$

Mit Hilfe der Pauli-Matrizen $(\sigma_i \in \mathbb{R}^{2\times 2})$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

können wir $S_k = \frac{\hbar}{2}\sigma_k$ schreiben. Für die up- bzw. down-Zustände können wir schreiben:

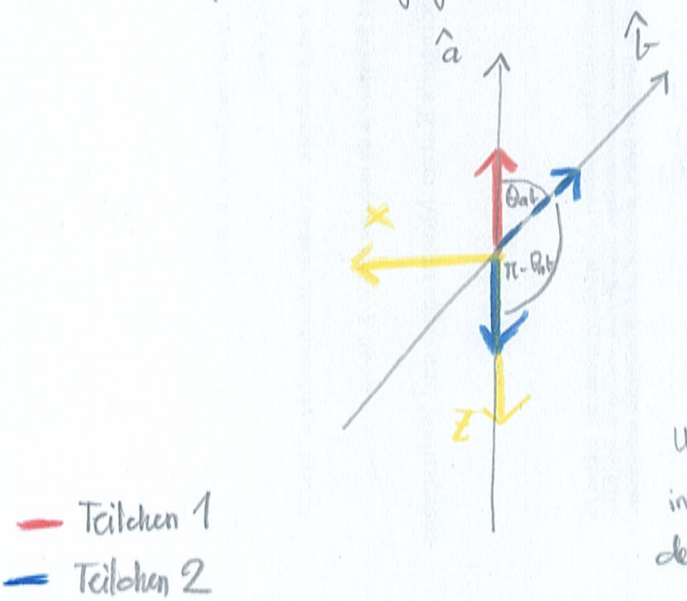
$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenschaften der Pauli-Matrizen erlauben uns zu schreiben:

$$\exp\left(-\frac{i\underline{\sigma}\cdot\hat{n}\,\phi}{2}\right) = \mathbb{1}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\,\underline{\sigma}\cdot\hat{n}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i n_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & (-i n_x - n_y)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ (-i n_x + n_y)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i n_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

wobei $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ und $\hat{n}$ ein Einheitsvektor ist.

Wir können ein kartesischen Koordinatensystem immer so legen, dass $\hat{a}$ mit der negative z-Achse zusammenfällt und $\hat{b}$ durch eine Drehung der y-Achse um den Winkel $\pi - \theta$ gegeben wird:



In dem kartesischen Koordinatensystem können wir den Zustand vom Teilchen 2 nach der Messung am Teichen 1 (die in $\hat{a}$-Richtung +1 ergeben hat) als $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Also

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Wahrscheinlichkeit anzugeben, dass Teilchen 2 in der $\hat{b}$-Richtung den Wert +1 hat, brauchen wir den Zustand nach der Drehung:

$$|\alpha_R\rangle = \exp\left(-\frac{i S_y \phi}{\hbar}\right)|\alpha\rangle$$

$$\Leftrightarrow |\alpha_R\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\left(\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten liefern uns die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\cos^2\left(\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\theta_{ab}}{2}\right) = P(++|ab)$$

Für die andere Wahrscheinlichkeiten $P(++|cb)$ und $P(++|ac)$ erfolgt die Rechnung analog.

Einsetzen in die Bellsche Ungleichung

$$P(++|ab) \leq P(++|ac) + P(++|cb)$$

liefert

$$\sin^2\left(\frac{\theta_{ab}}{2}\right) \leq \sin^2\left(\frac{\theta_{ac}}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta_{cb}}{2}\right)$$

Für die Winkel wählen wir

$$\theta_{ab} = 2\theta, \quad \theta_{ac} = \theta_{cb} = \theta, \quad \theta := \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 0.5 \leq 2.292$$

Die QM verletzt die Bellsche Ungleichung!

LITERATURHINWEIS

D. Bohm "Quantum Theory" S. 611 ff.

O. Passon "Bohmsche Mechanik" S. 57 ff.

J.J. Sakurai "Modern Quantum Mechanics" S. 158 ff. S. 223 ff.