

Selbstkonsistente In-Medium-Massen leichter,
skalärer und vektorieller Mesonen in einem
linearen σ -Modell

Diplomarbeit
von
Stefan Strüber

vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang von Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

Frankfurt am Main, Oktober 2005

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	5
1.1	Vorwort	5
1.2	Quantenchromodynamik	9
1.2.1	Die Lagrangedichte der QCD	11
1.2.2	Chirale Symmetrien der QCD	12
1.3	Spontane Symmetriebrechung	16
1.4	Endliche Temperaturen	22
1.5	Effektive Wirkung und CJT-Formalismus	28
1.5.1	Effektive Wirkung	28
1.5.2	CJT-Formalismus	32
2	Das effektive Modell	37
2.1	Konstruktion der Lagrangedichte	37
2.2	Effektives Potential und Gapgleichungen	51
2.2.1	Potential und Gapgleichungen	51
2.2.2	Matsubarasummation typischer Terme	58
2.3	Resultate	63
2.4	Zusammenfassung und Ausblick	72
A	Identifikation der Mesonen	77

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Vorwort

Die meisten gegenwärtig bekannten mikroskopischen Phänomene können auf zwei fundamental anmutende Wechselwirkungen zurückgeführt werden, genannt Elektroschwache Wechselwirkung und Starke Wechselwirkung. Diese beiden Wechselwirkungen finden ihre mathematische Beschreibung in ein paar wenigen Symmetrieprinzipien unterworfenen Quantenfeldtheorien, welche als Eichtheorie der Elektroschwachen Wechselwirkung und Quantenchromodynamik bezeichnet werden. Letztere Theorie ist entscheidend für das Verständnis des Aufbaus der uns umgebenden kondensierten nukleonischen Materie; geht in ihrer Gültigkeit jedoch weit über diesen Bereich hinaus zu Energien, das heißt Temperaturen und Dichten, wie sie an den Großbeschleunigern in ultrarelativistischen Schwerionenkollisionen generiert werden, um das Verhalten der hadronischen Materie unter extremen Bedingungen zu studieren.

Das Verständnis der Eigenschaften der Materie unter solchen extremen Bedingungen ist aus vielerlei Gründen wichtig. Zunächst geht es darum, die Neugier des Forschers zu befriedigen, wie sich die Natur in Bereichen verhält, die sich dem direkten Erfahrungsbereich des Menschen entziehen. Zum anderen ist die Formulierung der materiellen Modifikationen von bedeutendem theoretischen Interesse. Darüberhinaus trägt die Kenntnis des Verhaltens der Materie bei hohen Temperaturen und Dichten entscheidend zum kosmologischen Verständnis unseres Universums bei. Im Inneren von kompakten stellaren Objekten, beispielsweise, erwartet man derart hohe Dichten, daß die hadronische Materie dort in einer farbsupraleitenden Phase vorliegt. Das ganz junge, wenige Mikrosekunden alte sogenannte primordiale Universum – so glaubt man – habe als eine

Plasmaphase vorgelegen, in welcher Quarks, Gluonen, Photonen und Leptonen ungebunden existierten. Solche Quark-Gluon-Plasmaphasen hofft man auch im Labor erzeugen zu können, um den Phasenübergang zur hadronischen Materie und damit den Strukturbildungsprozess des Universums besser zu verstehen. Durch Veränderung der experimentellen Bedingungen wie der Schwerpunktsenergie der Kollision, des Stoßparameters oder der Systemgröße versucht man, einen möglichst breiten Bereich von Temperaturen und Baryondichten zu erforschen. Am Alternating-Gradient-Synchrotron (AGS) wurden Experimente bei Schwerpunktsenergien von $\sqrt{s} \sim 5 \text{ AGeV}$ und am CERN Super-Proton-Synchrotron (SPS) von $\sqrt{s} \sim 20 \text{ AGeV}$ durchgeführt. Der zur Zeit größte Beschleuniger, der Relativistic Heavy-Ion Collider (RHIC), ist in der Lage Schwerpunktsenergien von $\sqrt{s} \sim 200 \text{ AGeV}$ zu erzeugen. Von dem noch im Bau befindlichen CERN Large-Hadron-Collider (LHC) erwartet man Daten bei hohen Temperaturen und niedrigen Dichten, und die neue Ausbaustufe der GSI (SIS 300) soll Daten bei hohen Dichten liefern. Einer der wichtigsten Zwecke all dieser Experimente ist es zu, einem besseren Verständnis des Phasendiagramms (Abbildung 1.1) der stark wechselwirkenden Materie zu gelangen.

Das Diagramm zeigt die verschiedenen Phasen der stark wechselwirkenden Materie; hadronische Phase, Quark-Gluon-Plasma-Phase und die farbsupraleitende Phase, in Abhängigkeit von der Temperatur, T , und dem quark-chemischen Potential μ . Der Grundzustand der (unendlich ausgedehnten) Kernmaterie ist bei $(T = 0, \mu = 308) \text{ MeV}$ als Punkt dargestellt. Die von diesem Punkt ausgehende Linie deutet einen Phasenübergang erster Ordnung zwischen der gasförmigen Phase (linksseits) und der flüssigen Phase (rechtsseits) der Kernmaterie an. Der Endpunkt der Linie, bei etwa $T = 10 \text{ MeV}$, steht für einen Phasenübergang zweiter Ordnung. Für höhere Temperaturen als $T = 10 \text{ MeV}$ kann nicht mehr zwischen der flüssigen und gasförmigen Phase unterschieden werden. Unterhalb eines chemischen Potentials von etwa $\mu = 350 \text{ MeV}$ und einer Temperatur von $T = 160 \text{ MeV}$ befindet sich die hadronische Phase der stark wechselwirkenden Materie. Sie wird von der Plasmaphase durch eine Linie getrennt, die einen Phasenübergang erster Ordnung anzeigt, und bei $\mu = 120 \text{ MeV}$ und $T = 160 \text{ MeV}$ in einem Punkt endet, in welchem der Phasenübergang von zweiter Ordnung ist. In diesem Temperaturbereich findet für kleinere chemische Potentiale ein Crossover-Phasenübergang statt, was bedeutet, daß in diesem Bereich nicht zwischen der hadronischen Phase und der Phase des Quark-Gluon-Plasmas (QGP) unterschieden werden kann. Bei relativ kleinen Temperaturen und sehr großen chemischen Potentialen geht die Kernmaterie in eine farbsupra-

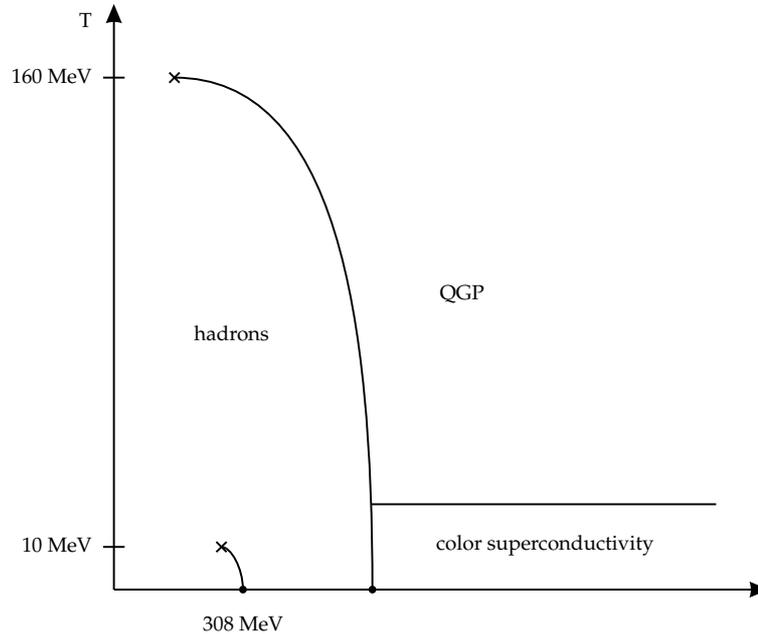


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung des Phasendiagramms der stark wechselwirkenden Materie.

leitende Phase über. Diese Phase ist hier schematisch einheitlich dargestellt, tatsächlich aber gibt es in diesem Bereich eine Vielzahl von farbsupraleitenden Phasen, welche von den Symmetrieeigenschaften des Ordnungsparameters der Cooper-Paar-Kondensation abhängen¹. Abgesehen von den Werten zum Grundzustand der Kernmaterie ($T = 0, \mu = 308$) und des kritischen Endpunktes des Plasma-Hadron-Phaseübergangs ($T = 160, \mu = 120$) hängen die hier genannten Zahlen allerdings mehr oder weniger sensitiv von den Parametern, über deren genaue Werte Unklarheit herrscht, der zugrundegelegten Modelle ab, stecken die Bereiche des Phasendiagramms also eher qualitativ ab.

Im Fokus dieser Arbeit steht das Verhalten von stark wechselwirkenden, leichten, skalaren und vektoriellen Mesonen bei endlichen Temperaturen, insbesondere im Bereich des Phasenübergangs zum QGP. Zur Beschreibung der Physik in diesem Bereich wird jedoch nicht die Quantenchromodynamik direkt herangezogen, da diese für die hier verfolgten Zwecke zu kompliziert ist. Statt-

¹Eine ausführliche Diskussion zu Aspekten des hier präsentierten Phasendiagramms findet sich in diversen Übersichtsartikeln wie zum Beispiel:

Rischke, The Quark-Gluon Plasma in Equilibrium, Prog.Part.Nucl.Phys.52:197-296,2004

dessen werden die relevanten Symmetrien der Quantenchromodynamik in einem effektiven Modell per Konstruktion, dem sogenannten linearen Sigma-Modell, mit zwei Flavour-Freiheitsgraden inkorporiert. Dazu werden in den folgenden beiden Abschnitten die relevanten Eigenschaften der Quantenchromodynamik rekapituliert. Im darauf folgenden Abschnitt werden die notwendigen technischen Mittel erörtert, um das mesonische System als thermisches Medium im Gleichgewicht zu realisieren. Im letzten Abschnitt des einleitenden Kapitels wird das als Näherungsverfahren verwendete Vielteilchenresummationsschema diskutiert. Das zweite Kapitel widmet sich der Konstruktion und Durchführung des effektiven Modells in der sogenannten Doppelblasennäherung. Die numerische Auswertung des mit Hilfe des Vielteilchenresummationsschemas aufgestellten selbstkonsistenten Integralgleichungssystems liefert die thermischen Mesonenmassen und das chirale Kondensat, welchem die Rolle des Ordnungsparameters der chiralen Symmetrierestauration zukommt, welche hier als effektive Manifestation des Übergangs von der hadronischen Phase zur Plasmaphase interpretiert wird. Diese Ergebnisse werden in Kapitel 2.3 präsentiert und diskutiert. In Kapitel 2.4 folgt dann die Zusammenfassung dieser Arbeit und ein Ausblick auf mögliche zukünftige Projekte, die auf diese Arbeit aufbauen.

1.2 Quantenchromodynamik

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist mittlerweile als die weitgehend vollständige Theorie der starken Wechselwirkung anerkannt. Die reichhaltige Phänomenologie der starken Wechselwirkung in der uns umgebenden Welt der Baryonen und Mesonen auf eine lokale $SU(3)_c$ -Eichsymmetrie der Quarks und Gluonen zurückzuführen, bedurfte grundlegender Rechtfertigung. Ursprünglich wurde die Farbe (chromos) als innerer Freiheitsgrad bereits 1964 eingeführt, um das verallgemeinerte Pauliprinzip zu retten², weil der von Pauli bewiesene Zusammenhang zwischen Spin und Statistik³ als so fundamental angesehen wurde, daß er auch auf Teilchen angewendet wurde, die man nicht frei beobachten konnte. Lange Zeit wurde diese Idee von den meisten Physikern als künstlich angesehen, bis sich in den 70er Jahren experimentelle und theoretische Befunde häuften, die das Quarkmodell untermauerten:

Für das Quark-Partonenmodell beispielsweise erwartet man für das Verhältnis der Elektron-Positronvernichtung

$$R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = N_c \sum_{2m_q < E_{CM}} e_q^2.$$

Die Daten erfordern einen Faktor $N_c = 3$ vor der Summe, d.h. man muß jede Quarksorte dreifach zählen. Einen weiteren wichtigen Hinweis auf drei Farbfreiheitsgrade lieferte der τ -Leptonzerfall

$$\tau \rightarrow \nu_\tau + \begin{cases} e^- \bar{\nu}_e \\ \mu^- \bar{\nu}_\mu \\ d' \bar{u} \end{cases}.$$

Da das W^- mit gleicher Stärke an Lepton-Neutrino- oder Quark-Antiquarkpaare koppelt, würde man ohne Farbfreiheitsgrad das Verzweigungsverhältnis

$$B(\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e) = \frac{1}{3}$$

erwarten; tatsächlich tritt aber, abgesehen von Strahlungskorrekturen, ein Verzweigungsverhältnis von 1/5 auf.

Auf theoretischer Seite war der Beweis der Renormierbarkeit nichtabelscher Eichtheorien vom Yang-Mills-Typ durch 't Hooft⁴, sowie die Tatsache, daß die

²Beispielsweise lässt sich mit drei Farben die Wellenfunktion des Δ^{++} antisymmetrisieren.

³W. Pauli, The Connection Between Spin and Statistics, Phys. Rev., Vol 58,(1940)

⁴'t Hooft, Veltman, Regularisation and Renormalisation of Gauge Fields, Nucl. Phys., **B44**, S189ff, (1972)

QCD eine mit kurzen Abständen abnehmende, effektive Kopplungskonstante besitzt ⁵, zur Rechtfertigung der QCD von entscheidender Bedeutung. Auch wenn noch nicht befriedigend bewiesen ist, ob und wie Confinement, der Umstand, daß hadronische Materie im physikalischen Spektrum nur als Farbsingulett auftritt, – die Tatsache, daß Confinement auftritt, ist unbestritten – aus der QCD folgt ⁶, hat an dem großen Zutrauen, das die zahlreichen experimentellen und theoretischen Erfolge nach sich zog, keinerlei Zweifel aufkommen lassen ⁷. Deswegen sollen im folgenden die für die vorliegende Arbeit wichtigen Aspekte der QCD, insbesondere mit Fokus auf die chiralen Symmetrien, rekapituliert werden, um später teilweise in einem technisch simpleren, handhabbareren effektiven Modell nachempfunden zu werden. Dieser Weg stellt einen zu den Gitterrechnungen, deren Anspruch es ist – wenn bisher auch nur partiell realisierbar – die volle, diskretisierte Theorie zu lösen, komplementären Zugang dar ⁸.

⁵Politzer, Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?, Phys. Rev. Lett. **30**, S1346ff (1973);

Gross, Wilczek, Asymptotically Free Gauge Theories. I, Phys. Rev. **D8** (1973), S3688ff;

Gross, Wilczek, Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), S1343ff;

Gross, Wilczek, Asymptotically Free Gauge Theories. II, Phys. Rev. **D9** (1974), S980ff

⁶Die prominenteste Erklärung des Confinements geht davon aus, daß sich bei vollständiger Antipolarisation des Vakuums Farbfeldflußröhren analog zum Verhalten elektromagnetischer Typ-2-Supraleiter bilden können – worauf es auch streuexperimentelle Hinweise gibt –, so daß wegen der Erhaltung des „farbelektrischen Feldes“ die Röhre eines freien Quark nicht enden kann, da dieses folglich unendliche Energie zu tragen hätte.

⁷Eine hinreichende Bedingung zur Confinementexistenz innerhalb einer Yang-Mills-Theorie ist, daß die durch die Farbladung induzierte Symmetrie nicht spontan gebrochen wird. Ob diese Bedingung auch notwendig ist, ist bislang noch ungeklärt.

⁸Eine weitere, weniger populäre Zugangsmöglichkeit zur „vollen“ QCD besteht darin, nach topologisch nichttrivialen Lösungen der klassischen Eichfeldgleichungen zu quantisieren, und die QCD dann in meist semiklassischen Entwicklungen zu lösen.

1.2.1 Die Lagrangedichte der QCD

Alle fundamentalen Wechselwirkungen – mit Ausnahme der Gravitation – lassen sich durch lokalsymmetrische Quanteneichtheorien beschreiben. In dieser Arbeit ist die Quantenchromodynamik Betrachtungsgegenstand. Sie ist eine nichtabelsche Eichtheorie mit einer lokalen $G = SU(3)$ Symmetrie. Bei den Materiefeldern, den sogenannten Quarks, q , handelt es sich um Fermionen mit Spin 1/2, die in sechs verschiedenen *flavours* vorkommen. Jedem Quarkflavour, f , entspricht ein dreikomponentiger, komplexwertiger Vektor

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{\text{rot}} \\ q_{\text{grün}} \\ q_{\text{blau}} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

der sich bezüglich einer lokalen Transformation $g(x)$ wie

$$q_f \longrightarrow q'_f = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a(x) T_a\right) q_f = U[g(x)] q_f \quad (1.2)$$

transformiert. Jeder Eintrag von (1.1) entspricht wegen des halbzahligen Spins einem vierkomponentigen Diracspinor. Die T_a sind die halben Gell-Mann-Matrizen $2T_a = \lambda_a$, die gängigste Darstellung der $N^2 - 1 = 8$ Generatoren der $SU(3)$. Um eine lokal eichinvariante Lagrangedichte zu erhalten, ist es notwendig, anstelle einfacher partieller Ableitungen eichkovariante Ableitungen,

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu, \quad (1.3)$$

mit den Eichfeldern A_μ , deren Substruktur durch

$$A_\mu = g \sum_{a=1}^8 A_\mu^a T^a \quad (1.4)$$

gegeben ist, zu verwenden:

$$D_\mu \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix} = \partial_\mu \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix} - ig \sum_{a=1}^8 A_\mu^a T^a \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Die Wechselwirkung der Quarks mit den Eichfeldern (Gluonen), deren Transformationsverhalten durch

$$A_\mu \longrightarrow U[g(x)] \left(A_\mu - \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^\dagger[g(x)] \quad (1.6)$$

gegeben ist, ist flavour-unabhängig. Ferner gibt es die Feldstärketensoren der Gluonen,

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.7)$$

wobei die f^{abc} die Strukturkonstanten der $SU(3)$ sind. Die Feldstärketensoren der Gluonen transformieren sich wie

$$G_{\mu\nu}^a T^a \longrightarrow U[g(x)] G_{\mu\nu}^a T^a U^\dagger[g(x)], \quad (1.8)$$

so daß sich die eichinvariante Lagrangedichte der QCD zu

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (1.9)$$

ergibt.

Hierbei ist zu bemerken, daß nach Quantisierung und Übergang zum Pfadintegral mit ausintegrierten kanonischen Impulsen die Lagrangedichte sich im allgemeinen nur bis auf einen Eichfixierungs- und einen Geistfeldterm reproduziert, und in dieser Form nur noch BRS-Symmetrie⁹, eine residuale, globale, grassmannwertige Symmetrie der $SU(3)$, besitzt. Die Observablen erweisen sich dabei notwendigerweise als von der konkreten Eichfixierung unabhängig. Auf eine detaillierte Darstellung dieses Gegenstands wird hier verzichtet, da das später in Kapitel 2 entwickelte und durchgeführte, effektive, thermische Quantenmodell zur QCD nicht exakt eichinvariant ist, sich somit der Eichfixierungsprozess erübrigt, und darüberhinaus in seiner Motivierung, abgesehen von dem Problem der $U(1)_A$ -Anomalie, die Gegenstand des nächsten Abschnittes sein wird, nicht auf diese Subtilitäten rekurriert.

1.2.2 Chirale Symmetrien der QCD

Neben der oben besprochenen lokalen Symmetrie kann eine Theorie auch globale Symmetrien aufweisen. In beiden Fällen lassen sich aufgrund des Noether-

⁹Nach den Entdeckern dieser Symmetrie: Becchi, Rouet, Stora (1974), *Physics Letters*, **52B**, 344

Theorems¹⁰ – die Bedeutung dieses Theorems kann nicht hoch genug eingeschätzt werden – erhaltene Ströme angeben¹¹. Darüberhinaus ergeben die irreduziblen Darstellungen der Symmetrien für das Spektrum der Eigenzustände des Hamiltonoperators ein Ordnungsschema.

Im Falle verschwindender Quarkmassen – die Theorie wird dadurch *flavour*-unabhängig – erweist sich die Lagrangedichte \mathcal{L}_{QCD} der QCD, abgesehen von der $U(1)_A$ -Anomalie, als invariant gegenüber einer globalen chiralen $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ -Symmetrie.

Die sechs Quarkflavours lassen sich grob in zwei Gruppen,

$$\begin{pmatrix} m_u = 0.005\text{GeV} \\ m_d = 0.009\text{GeV} \\ m_s = 0.175\text{GeV} \end{pmatrix} \ll 1\text{GeV} \leq \begin{pmatrix} m_c = 1.35\text{GeV} \\ m_b = 5.3\text{GeV} \\ m_t = 175\text{GeV} \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

unterteilen, wobei 1 GeV eine Größenordnung ist, die einerseits im Zusammenhang mit typischen Hadronenmassen, z.B. $m_p = 770$ MeV, und andererseits infolge der spontanen, chiralen Symmetriebrechung in $4\pi f_\pi \approx 1170$ MeV auftritt, wobei $f_\pi = 93$ MeV die Vakuumzerfallskonstante des Pions ist. Betrachtet man die Masse des Protons, $m_p = 938$ MeV, so sieht man, daß diese deutlich größer ist als die seiner Konstituenten,

$$m_p \gg 2m_u + m_d, \quad (1.11)$$

was den Grenzfall $m_u, m_d \rightarrow 0$ nahelegt.

Zur Examinierung der chiralen Symmetrien der QCD-Lagrangedichte ist es zweckmäßig, die Quarks nach rechts- und linkshändigen mittels im Diracspinorraum wirkenden Projektoren,

$$\begin{aligned} q &= \left[\frac{1}{2}(1 + \gamma_5) + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \right] q = (P_R + P_L)q =: q_R + q_L \quad \text{und} \\ \bar{q} &= \bar{q} \left[\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \right] = \bar{q}(P_L + P_R) =: \bar{q}_R + \bar{q}_L, \end{aligned} \quad (1.12)$$

zu zerlegen, und damit die Lagrangedichte unter Ausnutzung der Antikommutationsrelation $\{\gamma^5, \gamma^\mu\}$, respektive $P_{L,R}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{R,L}$, zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \sum_{f=1}^{N_f} (i\bar{q}_{L,f}\not{D}_\mu q_{L,f} + i\bar{q}_{R,f}\not{D}_\mu q_{R,f} - \bar{q}_{R,f}M_f q_{L,f} - \bar{q}_{L,f}M_f q_{R,f}) \\ &\quad - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.13)$$

¹⁰Emmy Noether, 13.Invariante Variationsprobleme, Nachr. v. d. Wiss. zu Göttingen (1918), S235ff

¹¹Umgekehrt lässt sich auch von erhaltenen Strömen auf Symmetrien schließen.

umzuschreiben. Die Quarkfelder dieser Lagrangedichte werden nun im Flavourraum einer klassischen, globalen $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ -Symmetrietransformation,

$$\begin{aligned} q_L &\longrightarrow U_L q_L = \exp(-i\theta_L^a T_a) e^{-i\theta_L} q_L, \\ q_R &\longrightarrow U_R q_R = \exp(-i\theta_R^a T_a) e^{-i\theta_R} q_L, \end{aligned} \quad (1.14)$$

unterzogen. Hierbei stellen die T_a die Generatoren der $SU(N_f)$ dar; der unindizierte $U(1)$ -Parameter $\theta_{L,R}$ ist zur hier unterdrückten $1/\sqrt{2N_f}$ -fachen, N_f -dimensionalen Einheitsmatrix T_0 proportional. Bei Invarianz, beziehungsweise Nichtinvarianz der Lagrangedichte bezüglich dieser Transformation folgt aus dem Noether-Theorem die Existenz von $2 \times N_f^2$ erhaltenen, beziehungsweise, je nach Grad der Symmetriebrechung, nicht erhaltenen Strömen. Diese lassen sich leicht durch die variierte Lagrangedichte ¹²

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{QCD} &= \bar{q}_L T_a \gamma^\mu q_L \partial_\mu \theta_L^a + \bar{q}_L T_0 \gamma^\mu q_L \partial_\mu \theta_L^0 + \bar{q}_R T_a \gamma^\mu q_R \partial_\mu \theta_R^a + \bar{q}_R T_0 \gamma^\mu q_R \partial_\mu \theta_R^0 \\ &\quad - i [\theta_R^a (\bar{q}_R T_a M q_L - \bar{q}_L M T_a q_R) + \theta_R (\bar{q}_R M q_L - \bar{q}_L M q_R) \\ &\quad + \theta_L^a (\bar{q}_L T_a M q_R - \bar{q}_R M T_a q_L) + \theta_L (\bar{q}_L M q_R - \bar{q}_R M q_L)] \end{aligned} \quad (1.15)$$

errechnen, wobei sich der Übergang von den rechts- und linkshändigen zu den vektoriellen und axialen Strömen $V^\mu = L^\mu + R^\mu$ und $A^\mu = R^\mu - L^\mu$, die sich gerade, beziehungsweise ungerade, unter Paritätstransformationen,

$$\begin{aligned} P &: V^\mu(\vec{x}, t) \longrightarrow V^\mu(-\vec{x}, t) \\ P &: A^\mu(\vec{x}, t) \longrightarrow -A^\mu(-\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (1.16)$$

transformieren, beziehungsweise deren Divergenzen, anbietet. So ergibt sich für die Ströme

$$\begin{aligned} V^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_R)} + \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_L)} = \bar{q}\gamma^\mu q, \\ A^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_R)} - \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_L)} = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q, \\ V_a^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_R^a)} + \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_L^a)} = \bar{q}\gamma^\mu T_a q, \\ A_a^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_R^a)} - \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_L^a)} = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 T_a q, \end{aligned} \quad (1.17)$$

¹²Man kann dabei so tun, als sei der Parameter $\theta_{L,R}$ lokal: Gell-Mann, Levi, The Axial Vector Current In Beta Decay; Nuovo Cim.16:705(1960)

und für deren Divergenzen

$$\begin{aligned}
\partial_\mu V^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\theta_R} + \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\theta_L} = 0, \\
\partial_\mu A^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\theta_R} - \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\theta_L} = 2i\bar{q}M\gamma_5q, \\
\partial_\mu V_a^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\theta_R^a} + \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\theta_L^a} = i\bar{q}[M, T_a]q, \\
\partial_\mu A_a^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\theta_R^a} - \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\theta_L^a} = i\bar{q}\{T_a, M\}\gamma_5q.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Der vektorielle Singulettstrom V^μ ist offensichtlich immer erhalten, worin die Erhaltung der Baryonenzahl zum Ausdruck kommt¹³. Bei entarteten Quarkmassen ist M proportional zur Einheitsmatrix und die $N_f^2 - 1$ Vektorströme V_a^μ sind (jeder für sich) erhalten; die $N_f^2 - 1$ Axialvektorströme A_a^μ hingegen sind nur bei identisch verschwindenden Quarkmassen erhalten¹⁴. Selbiges sollte auch für den axialen Singulettstrom A^μ gelten, tut dies aber nur klassisch: Die chirale Transformation des Pfadintegrals ist funktional nicht unitär¹⁵, was beispielsweise für die chirale Quantenelektrodynamik konkret bedeutet, daß das funktionale Integrationsmaß mit dem Faktor

$$\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \cdot \mathcal{J}^{-2} = \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(i\alpha(x) \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}\right) \tag{1.19}$$

skaliert. Analog ergibt sich im Fall der (quantisierten) QCD für die Divergenz des axialen Singulettstroms

$$\partial_\mu A^\mu = 2i\bar{q}M\gamma_5q - \frac{g^2 N_f}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} G_{\mu\nu}^a G_{\lambda\sigma}^a. \tag{1.20}$$

Als stichhaltigster experimenteller Beweis für die Existenz von Anomalien gilt die von Adler, Bell, Jackiw und Bardeen¹⁶ richtig vorhergesagte Zerfallsbreite für den $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -Prozess zu

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{e^2}{(4\pi)^4} \frac{m_\pi^3}{f_\pi^2} \approx 7.6 \text{ eV}, \tag{1.21}$$

der, wie Sutherland gezeigt hat, ohne Anomalie verschwinden würde.

Bevor sich im nächsten Abschnitt dem Phänomen der spontanen Symmetriebrechung zugewendet wird, sei der Vollständigkeit halber noch erwähnt, daß die

¹³ $V^\mu/3$ ist der Baryonenstrom.

¹⁴Diese Arbeit bescheidet sich mit dem Fall entarteter Quarkmassen.

¹⁵Fujikawa, *Phys.Rev.Lett.***42**,1195 (1979)

¹⁶Adler, Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics, *Phys. Rev.***177** (1969), S2426ff

Noetherladungen $Q_a^V = \int d^3x V_a^0$ und $Q_a^A = \int d^3x A_a^0$ bei verschwindenden Quarkmassen der chiralen Ladungsalgebra

$$\begin{aligned} [Q_a^V, Q_b^V] &= if_{abc}Q_c^V, \\ [Q_a^A, Q_a^A] &= if_{abc}Q_c^V \quad \text{und} \\ [Q_a^V, Q_a^A] &= if_{abc}Q_c^A \end{aligned} \tag{1.22}$$

genügen, und als Ausgangspunkt zur Herleitung von Gleichzeitvertauschungsrelationen der Ströme, der sogenannten Stromalgebra, dienen können¹⁷. Bemerkenswert ist hier, daß die axialen Ladungen allein keine abgeschlossene Algebra bilden, die vektoriellen hingegen schon.

1.3 Spontane Symmetriebrechung

Neben den im vorigen Abschnitt besprochenen Symmetrien der Lagrange-dichte einer Theorie können die physikalischen Zustände selbst noch gewissen Symmetrieprinzipien unterworfen sein. Im Rahmen der Quantenfeldtheorien kommt in diesem Sinne den Symmetrieeigenschaften des Grundzustandes eine hervorragende Bedeutung zu. In der Theorie der schwachen Wechselwirkung, beispielsweise, führt die Brechung der Grundzustandssymmetrie des Higgsfeldes dazu, daß die Eichbosonen eine Masse erhalten, womit unter anderem die Kurzreichweitigkeit der schwachen Wechselwirkung erklärt werden kann; dabei bleibt die Eichinvarianz und damit auch die Renormierbarkeit der Theorie erhalten. Theorien mit einer Phase nichtmaximaler Grundzustandssymmetrie bezeichnet man als spontan gebrochen.

Die QCD ist, wie im vorigen Abschnitt gesehen, bei Vernachlässigung der Quarkmassen chiral invariant. Diese Eigenschaft sollte sich im Spektrum der

¹⁷Adler and Dashen, Current algebra and applications to particle physics, Benjamin, New York (1998)

Hadronen¹⁸ – insbesondere der leichten – widerspiegeln. Wirft man einen Blick¹⁹ auf die leichten, vektormesonischen und axialvektormesonischen Tripletzustände²⁰

$$\vec{\rho}_\mu = \bar{\psi} \vec{\tau} \gamma_\mu \psi \quad \text{und} \quad \vec{a}_\mu^1 = \bar{\psi} \vec{\tau} \gamma_\mu \gamma_5 \psi, \quad (1.23)$$

und ihrem Verhalten unter infinitesimalen, vektoriellen ($\psi \rightarrow (1 - i\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}}{2})\psi$) und axialvektoriellen ($\psi \rightarrow (1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}}{2})\psi$) Transformationen

$$\begin{aligned} V : \vec{\rho}_\mu &\longrightarrow \vec{\rho}_\mu + \vec{\theta} \times \vec{\rho}_\mu, & V : \vec{a}_\mu^1 &\longrightarrow \vec{a}_\mu^1 + \vec{\theta} \times \vec{a}_\mu^1, \\ A : \vec{\rho}_\mu &\longrightarrow \vec{\rho}_\mu + \vec{\theta} \times \vec{a}_\mu^1, & A : \vec{a}_\mu^1 &\longrightarrow \vec{a}_\mu^1 + \vec{\theta} \times \vec{\rho}_\mu, \end{aligned} \quad (1.24)$$

so sieht man, daß diese unter den Isospintransformationen in sich selbst oder ihre chiralen Partner – so nennt man Teilchen, die sich nur durch ihre entgegengesetzte Parität unterscheiden – übergehen. Naiv würde man erwarten, daß diese Teilchen gleiche Eigenzustände, genauer gleiche Massen haben sollten, was aber bei einer Masse für das ρ_μ , $m_\rho = 770$ MeV, und für das a_μ^1 , $m_{a_1} = 1240$ MeV, dezidiert nicht der Fall ist. Analoges gilt für die Beziehung zwischen dem Pion, π , und seinem chiralen Partner, dem Sigma, σ . Obwohl die durch die up- und down-Quarks induzierte Symmetriebrechung sehr klein ist, und es nicht zu erwarten ist, daß durch das „Dressing“ der Flußquarks allein ein solch gewaltiger Massenunterschied erzeugt wird, scheint die chirale Symmetrie einer starken Brechung zu unterliegen. Andererseits aber zeigt der schwache Zerfall des Pions, der aus Paritätsgründen durch das Matrixelement des Axialstroms, A_μ , beziehungsweise dessen Divergenz zwischen dem Pion und dem Vakuum dominiert wird,

$$\partial^\mu \langle 0 | A_\mu(x) | \pi(k) \rangle = -f_\pi m_\pi^2 e^{-ikx}, \quad (1.25)$$

daß dieser proportional zu der kleinen Masse des Pion, und damit im Vergleich zu hadronischen Massenskalen in guter Näherung erhalten ist²¹. Ein weiteres starkes Indiz für die Geringfügigkeit der Verletzung der Axialsymmetrie ist die Goldberger-Treiman-Relation, die davon ausgeht, daß der Axialstrom der Kernmaterie an Nukleonen und Pionen wie

$$A_\mu^a = g_a \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi_N + f_\pi \partial_\mu \Phi^a \quad (1.26)$$

¹⁸Diese Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit chiralen Mesonen.

¹⁹Die folgende Motivierung der QCD als spontan gebrochener, chiraler Theorie ist teilweise dem Skript von Volker Koch „Introduction to Chiral Symmetry“ (S.10ff) nachempfunden.

²⁰Zur Identifikation der Mesonen mit ihren Quarkkonstituenten siehe Anhang.

²¹Dieser Sachverhalt, beziehungsweise auch die Gleichung $A_\mu^a = f_\pi \partial_\mu \Phi^a(x)$, wobei $\Phi^a(x)$ das Piontriolett ist, wird in der Literatur oft als PCAC-Relation (Partial Conservation of the Axial Current) bezeichnet.

koppelt. Die Divergenz von (1.26) ergibt mittels Diracgleichung und unter der Annahme erhaltenen Axialstroms die Relation

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi^a = -g_a i \frac{M_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N, \quad (1.27)$$

was eine Pion-Nukleon-Kopplung von

$$g_{\pi NN} = g_a \frac{M_N}{f_\pi} \approx 12.6 \quad (1.28)$$

ergibt, die in guter Übereinstimmung mit den Pion-Nukleon-Streudaten ($g_{\pi NN}^{exp} = 13.4$) ist. Wiedereinmal scheint die Annahme erhaltenen Axialstroms eine gute Näherung zu sein.

Der Widerspruch, daß einerseits das Massenspektrum der Mesonen die Axialsymmetrie nicht widerspiegelt, andererseits aber der schwache Zerfall des Pions und die Goldberger-Treimann-Relation auf einen teilweise erhaltenen Axialstrom hindeuten, lässt sich durch die aus der spontanen, chiralen Symmetriebrechung erwachsenden Konsequenzen auflösen.

Die beiden wichtigsten dieser Konsequenzen werden durch das Goldstonetheorem und dem Theorem vom Higgsmechanismus beschrieben, die hier exemplarisch an einem global, beziehungsweise lokal $SO(3)$ -symmetrischen Modell skizziert werden sollen; eine ausführliche Darstellung, beziehungsweise explizite Beweise zu diesem Gegenstand finden sich in den meisten Standardwerken zur Quantenfeldtheorie²². Konkret findet spontane Symmetriebrechung typischerweise bei skalaren Modellen, beziehungsweise im skalaren Sektor eines Modells statt, wie in dem global $SO(3)$ -symmetrischen Modell

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i) (\partial^\mu \phi_i) - V(\phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i) (\partial^\mu \phi_i) - \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i - \lambda (\phi_i \phi_i)^2, \quad (1.29)$$

wobei ϕ_i die i -te Komponente eines dreidimensionalen Vektors ist. Diese Lagrangedichte ist symmetrisch unter der Transformation des ϕ -Feldes, $G : \phi_i \rightarrow (\exp(-iT_k \alpha_k))_{ij} \phi_j$, wobei die T_k der Lie-Algebra der entsprechenden Gruppe genügen. Im Wigner-Weyl-Modus – der Parameter m^2 ist dann positiv – liegt der

²²Eine profunde Einführung unter Einbeziehung zahlreicher quantenmechanischer Subtilitäten zu diesem Gegenstand nach dem Motto „[...] common sense will have to guide the passage between the Skylla of mathematical Talmudism and the Charybdis of mathematical nonsense.“, bietet auch der Übersichtartikel von Jeremy Bernstein: Jeremy Bernstein, Spontaneous symmetry breaking, gauge theories, the Higgs mechanism and all that, Reviews of Modern Physics, Vol. 46, No. 1, January 1974

Grundzustand des ϕ -Feldes im Minimum des Potentials bei $\phi_0 = 0$; der Grundzustand hat dann maximale Symmetrie,

$$G : \quad \phi'_0 = U(g)\phi_0 = 0, \quad (1.30)$$

das heißt alle Generatoren vernichten den Grundzustand. Im Goldstonemodus – der Parameter $m^2 = -\mu^2$ ist dann negativ – wird das Potential für alle ϕ_0 mit Betrag

$$(\phi_0^i)^2 = \frac{\mu^2}{4\lambda} = a^2 \quad (1.31)$$

minimiert. In diesem Fall ist der Grundzustand nur unter einer Subgruppe $H \subset G$ symmetrisch:

$$H : \quad \phi'_0 = U(h)\phi_0 = e^{iT_3\alpha_3}\phi_0 = 0. \quad (1.32)$$

Der Grundzustand wird nur noch durch T_3 vernichtet, was dazu führt, daß bis auf ein Teilchen alle masselos geworden sind. Solche, durch spontane Symmetriebrechung masselos gewordenen skalaren Teilchen bezeichnet man als Goldstonebosonen. Diese lassen sich (auch ihrer Anzahl nach) identifizieren: Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} V(\phi_i) &= V(\phi_i + (\alpha_k T_k)_{ij}\phi_j) = V(\phi_i + \alpha\Delta_i(\phi)) \quad \text{bzw.} \\ 0 &= \Delta_i(\phi) \frac{\partial}{\partial\phi_i} V(\phi), \end{aligned} \quad (1.33)$$

was nach ϕ_j an der Stelle ϕ_0 abgeleitet auf

$$0 = \left(\frac{\partial\Delta_i}{\partial\phi_j} \right)_{\phi_0} \left(\frac{\partial V}{\partial\phi_i} \right)_{\phi_0} + \Delta_i(\phi_0) \left(\frac{\partial^2}{\partial\phi_i\partial\phi_j} V \right)_{\phi_0} \quad (1.34)$$

führt. Der erste Term verschwindet identisch, da ϕ_0 das Potential minimiert, weshalb auch der zweite Term verschwinden muß. Der Term

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi_i\partial\phi_j} V \right)_{\phi_0} = m_{ij} \quad (1.35)$$

ist eine symmetrische Matrix deren Eigenwerte den Massen der Felder entsprechen; die Eigenwerte können nicht negativ sein, da ϕ_0 ein Minimum ist. Im Fall spontaner Symmetriebrechung müssen jene Eigenwerte gleich Null sein, die zu einer nicht verschwindenden Transformation $\Delta_i(\phi_0) \neq 0$ korrespondieren; diesen

Zuständen entsprechen die Goldstonebosonen. Ihre Anzahl entspricht der Zahl der Dimensionen der Symmetriegruppe, $\dim G$, minus der Zahl der Dimensionen der Untergruppe, die den Grundzustand nicht vernichtet, $\dim G/H = \dim G - \dim H$.

Die ebenso wichtigen Theoreme zum Higgsmechanismus erweitern die Erkenntnisse vom Goldstonetheorem auf lokal eichinvariante Theorien. Diese Erweiterung kann nach obigem Beispiel (lokalsymmetrische $SO(3)$) folgendermaßen vollzogen werden: \mathcal{L}_0 sei die unter globalen Symmetrien invariante Lagrangedichte. Deren Variation ergibt sich unter nun angenommener Lokalität des Eichparameters zu

$$\delta\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu\alpha^i)J_i^\mu, \quad (1.36)$$

wobei J_i^μ der global erhaltene Noetherstrom ist. Koppelt man dieses global symmetrische Modell derart an Eichfelder, daß es lokal symmetrisch wird, nimmt die Lagrangedichte in erster Ordnung in g die Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - gA_\mu^i J_i^\mu + O(A^2) \quad (1.37)$$

an. Dabei kompensiert die Variation (1.36) in führender Ordnung von g die von (1.37), weshalb Matrixelemente, die nur eine Eintragung eines Eichfeldes enthalten, unter Ausnutzung der Eigenschaften des globalen Noetherstroms berechnet werden können. Der Zerfall eines Teilchens im lokalen $SO(3)$ -Modell,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi_i)(D^\mu\phi_i) + \frac{\mu}{2}\phi_i\phi_i - \lambda(\phi_i\phi_i)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu}, \quad (1.38)$$

wobei

$$\begin{aligned} D_\mu\phi_i &= \partial_\mu\phi_i + g\epsilon_{ijk}A_\mu^j\phi_k \\ F_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\epsilon^{ijk}A_\mu^j A_\nu^k \end{aligned} \quad (1.39)$$

ist, berechnet sich aus

$$\frac{1}{2}(D_\mu\phi_i)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_i)^2 + gA_\mu^a(\partial_\mu\phi_i T_{ij}^a\phi_j) + \frac{1}{2}g^2 A_\mu^a A^{\mu b}(T^a\phi)_i(T^b\phi)_i, \quad (1.40)$$

also dem globalen Noetherstrom im Grundzustand, $J_\mu^a|_{\phi_0} = \partial_\mu\phi_i T_{ij}^a\phi_j|_{\phi_0} = \partial_\mu\phi_i(T^a\phi_0)_i$, zu

$$\langle 0|J_\mu^a(x)|\phi_i(p)\rangle = -ip^\mu(T_a\phi_0)_i e^{-ipx}. \quad (1.41)$$

Die Divergenz dieses Ausdrucks,

$$\partial_\mu\langle 0|J_\mu^a(x)|\phi_i(p)\rangle = -m^2(T_a\phi_0)_i e^{-ipx}, \quad (1.42)$$

verschwindet wiederum nur für die Teilchen, die mit den Generatoren T^a assoziiert werden können, die den Grundzustand nicht vernichten, die Teilchen also Goldstonebosonen sind. Verschiebt man das Feld ϕ_i um seinen Grundzustandserwartungswert ²³ so enthält der letzte Term aus (1.40) einen Eichbosonmassenterm

$$\frac{1}{2}g^2(T^a\phi_0)_i(T^b\phi_0)_i A_\mu^a A_\mu^b = \frac{1}{2}m_{ab}^2 A_\mu^a A_\mu^b, \quad (1.43)$$

dessen Massenmatrix positiv semidefinit ist. Bis auf jene Eichbosonen, die zu einem den Vakuumerwartungswert invariant lassenden Generator korrespondieren, erhalten alle eine Masse. Im Fall einer exakt eichinvarianten Theorie kann im Quantisierungsprozess durch Hinzunahme eines 'tHooft-Eichfixierungsterms gezeigt werden, daß die Goldstonebosonen unphysikalisch werden beziehungsweise verschwinden. Ihr Freiheitsgrad findet sich in dem durch die Masse gewonnenen longitudinalen Freiheitsgrad der Eichbosonen wieder.

Nach dem Theorem von Vafa und Witten ²⁴ folgt für vektorielle Theorien wie die QCD, daß eine spontane Symmetriebrechung nicht in den in ihnen vorkommenden vektoriellen Symmetrien auftreten kann. Die vektoriellen Ladungsoperatoren, Q_V^a , vernichten also stets den Grundzustand; die axialen Ladungsoperatoren, Q_A^a , hingegen im allgemeinen nicht. Man gelangt also unter Berücksichtigung entarteter, leichter Quarkmassen ($q_u = q_d \ll 1 \text{ GeV}$) zu einer leicht explizit gebrochenen $U_L(2) \times U_R(2)$ -Symmetrie, die nach obigen Überlegungen betreffs des Grundzustands spontan zu einer $SU(2)_V \times U(1)_V$ -Symmetrie gebrochen werden kann. Diese mögliche Symmetriebrechung (Goldstone-Modus) wird in der Natur als näherungsweise realisiert beobachtet ²⁵, weshalb leichte, pseudoskalare Mesonen auch häufig als Pseudo-Goldstone-Bosonen bezeichnet werden. Für das Verständnis des Niederenergiebereichs der QCD spielen insbesondere die leichtesten Pseudo-Goldstone-Bosonen, nämlich die Pionen, eine hervorragende Rolle.

Wie oben erwähnt, findet spontane Symmetriebrechung vorzugsweise im skalaren Sektor eines Modells statt, was für die QCD bedeutet, daß sich ein nicht verschwindendes Quarkkondensat $\langle 0|\bar{q}_f q_f|0\rangle$ ausbildet. Umgekehrt folgt natürlich auch, daß aus der Existenz von Goldstonebosonen ein (im Grundzustand) nicht

²³Durch Quantenfluktuationen wird permanent ein Grundzustand selektiert, weshalb die Verschiebung nicht etwa um eine kohärente Überlagerung aller möglichen Grundzustände vollzogen wird.

²⁴Vafa and Witten, Restriction on symmetry breaking in vector-like gauge theories, Nucl.Phys. **B234** (1984), 173

²⁵Review Of Particle Physics. Particle Data Group. By Particle Data Group (K. Hagiwara et al.). 2002. Published in Phys.Rev.D66:010001,2002

verschwindendes Quarkondensat folgt:

$$\langle 0|[Q_A^a, i\bar{q}\gamma_5 T^a q]|0\rangle = \frac{2}{3}\langle\bar{q}q\rangle \quad (1.44)$$

Der Term $i\bar{q}\gamma_5 T^a q$ kann mit einem Pseudo-Goldstone-Boson, beispielsweise einem Pion, identifiziert werden, weshalb das PCAC-Theorem als Spezialfall von (1.44) interpretiert werden kann. Damit nimmt das skalare Quarkondensat für die spontane Symmetriebrechung die Rolle eines Ordnungsparameters ein.

Im Fokus dieser Arbeit steht das Verhalten leichter, skalarer und vektorieller Mesonen bei endlichen Temperaturen. Dabei werden die besprochenen chiralen Eigenschaften in ein sogenanntes Lineares-Sigma-Modell per Konstruktion inkorporiert. In solchen Modellen tritt typischerweise zwischen 150 – 220 MeV ein Phasenübergang auf, der die bei niedrigerer Temperatur spontan gebrochene, chirale Symmetrie restauriert. Der Ordnungsparameter dieses Phasenübergangs ist das chirale Quarkondensat $\langle\bar{q}q\rangle$. Im Vergleich dazu sagen Gitterrechnungen den chiralen Phasenübergang für eine Temperatur von etwa 170 MeV voraus ²⁶.

Im folgenden Abschnitt sollen nun die in dieser Arbeit verwendeten Konzepte und Methoden zur Behandlung thermischer Quantenfeldtheorien besprochen werden.

1.4 Endliche Temperaturen

Die folgende Erörterung thermoquantenfeldtheoretischer Methoden beschränkt sich auf den einfachen Fall thermodynamischen Gleichgewichts, und diskutiert diese auch nur so weit, wie sie später kommen ²⁷.

²⁶Laermann, Philipsen, Status of Lattice QCD at Finite Temperature, hep-ph/0303042 v1,2003

²⁷Die Darstellungen dieses Abschnittes orientieren sich an den feldtheoretischen und vielteilchentheoretischen Lehrbüchern (besonders an zweitgenanntem):

le Bellac, Thermal Field Theory, Cambridge University Press, 1996;

Das, Finite Temperature Field Theory, World Scientific, Singapore, 1997;

Als originär vielteilchentheoretische Beschreibung von Elementarteilcheneigenschaften drängt sich die Handhabung von Quantenfeldtheorien unter statistischen Gesichtspunkten auf. Bei unvollständiger Information über Anfangs- und Endzustand des Systems werden diese mit dem statistischen Operator, respektive der Dichtematrix, $\hat{\rho}$, mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, p_i , gewichtet:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (1.45)$$

Für Systeme bei endlichen Temperaturen, die vorzugsweise im kanonischen beziehungsweise im makrokanonischen ($\mu \neq 0$) Ensemble,

$$\hat{\rho}(\beta) = e^{-\beta\mathcal{H}}, \quad (1.46)$$

dabei ist $\beta = 1/T$ ($k_B = 1$) und $\mathcal{H} = H - \mu N$, beschrieben werden, lassen sich, im Gegensatz zur Vakuumquantenfeldtheorie, keine asymptotisch freien Zustände definieren. Insbesondere erhalten dabei alle Einteilchenzustände eine endliche Breite, was von der Streuung der Teilchen an denen des Wärmebads herrührt.

Da die vorliegende Arbeit auf die Berechnung der effektiven Massen für den thermostatischen Fall beschränkt ist, und Effekte wie beispielsweise Bremsstrahlung hier nicht weiter interessieren, kann der auf thermostatische Prozesse beschränkte Matsubara-Formalismus²⁸ angewandt werden. Dieser – er wird auch als Imaginärzeit-Formalismus bezeichnet – ist im Gegensatz zum wesentlich allgemeineren Real-Zeit-Formalismus, der auch die Behandlung von Nichtgleichgewichtsphänomenen gestattet, relativ einfach zu handhaben. Aus störungstheoretischer Sicht kann man in diesem Formalismus vorteilhafterweise, wenn man β als Real- oder Imaginärteil einer komplexen Zeit auffasst, die Exponentialfunktion, $e^{-\beta\mathcal{H}}$, der Dichtematrix mit der des in Heisenberg- oder Wechselwirkungsdarstellung gegebenen Zeitentwicklungsoperators, $\exp(\pm i\mathcal{H}t)$, zusammenfassen, das heißt, man muß die Störentwicklung für den Störungsterm in der Dichtematrix und dem im Zeitentwicklungsoperator nicht einzeln durchführen.

Bedeutend für die Entwicklung des Imaginärzeit-Formalismus ist die Kubo-Martin-Schwinger-Relation, die kurz (im kanonischen Fall) erörtert werden soll.

Kapusta, Finite-temperature field theory, Cambridge University Press, 1989;

Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 7, Viel-Teilchen-Theorie, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

²⁸Nach dem Autor von: Takeo Matsubara, A New Approach To Quantum Statistical Mechanics. Prog.Theor.Phys.14:351-378,1955

Der Erwartungswert einer Observable A im Gleichgewicht ist gegeben durch

$$\langle A \rangle_\beta = Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \rho(\beta) A = \frac{\text{Tr} e^{-\beta H} A}{\text{Tr} e^{-\beta H}}. \quad (1.47)$$

Die thermische Korrelationsfunktion zweier beliebiger Operatoren A und B , mit verschiedenen Koordinaten kann analog als

$$\langle AB \rangle_\beta = Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \rho(\beta) AB \quad (1.48)$$

geschrieben werden, wobei die Koordinatenabhängigkeit der Operatoren unterdrückt wurde. Im Heisenbergbild,

$$A_H(t) = e^{iHt} A e^{-iHt}, \quad (1.49)$$

kann die thermische Korrelationsfunktion zweier Operatoren zu unterschiedlichen Zeiten geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \langle A_H(t) B_H(t') \rangle_\beta &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \rho(\beta) A_H(t) B_H(t') \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} e^{-\beta H} A_H(t) B_H(t') \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} e^{-\beta H} A_H(t) e^{\beta H} e^{-\beta H} B_H(t') \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} A_H(t + i\beta) e^{-\beta H} B_H(t') \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} e^{-\beta H} B_H(t') A_H(t + i\beta) \\ &= \langle B_H(t') A_H(t + i\beta) \rangle_\beta, \end{aligned} \quad (1.50)$$

wobei hier die zyklische Vertauschbarkeit unter der Spur ausgenutzt wurde. Damit gilt insbesondere auch

$$\langle A_H(t) A_H(t') \rangle_\beta = \langle A_H(t') A_H(t + i\beta) \rangle_\beta. \quad (1.51)$$

Die aus der Vakuumquantenfeldtheorie bekannten Korrelationsfunktionen

$$\begin{aligned} \langle A_H(t) B_H(t') \rangle_\beta &= \langle A_H(t - t') B_H(0) \rangle_\beta = \langle A_H(0) B_H(t' - t) \rangle_\beta \\ \langle B_H(t') A_H(t) \rangle_\beta &= \langle B_H(t' - t) A_H(0) \rangle_\beta = \langle B_H(0) A_H(t - t') \rangle_\beta, \end{aligned} \quad (1.52)$$

die die avancierten, retardierten und kausalen Greensfunktionen aufbauen, sind offensichtlich nicht mehr unabhängig voneinander, wenn die Zeitvariable komplexe Werte annimmt.

Der Matsubaraformalismus bietet eine Möglichkeit, Funktionen wie (1.47) störungstheoretisch oder mit anderen diagrammatischen Methoden, analog zu

den von der konventionellen Vakuumfeldtheorie bei verschwindenden Temperaturen her bekannten, zu berechnen. Bevor sich dem Matsubaraformalismus in seiner pfadintegralen Form zugewendet wird, soll er in Aspekten kurz in seiner kanonischen Form diskutiert werden. In beiden Zugängen liegt die entscheidende Bedeutung in der Tatsache, die (in vorliegendem Fall kanonische) Dichtematrix als Zeitentwicklungsoperator für negative, imaginäre Zeiten zu interpretieren. Die Dichtematrix $\rho(\beta) = e^{-\beta H}$ genügt im Intervall $0 \leq \tau < \beta$ der „Zeitentwicklungsgleichung“ ,

$$\frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \tau} = -H\rho(\tau), \quad (1.53)$$

womit Operatoren im Heisenbergbild als

$$\begin{aligned} \phi_H(\tau) &= e^{\tau H} \phi e^{-\tau H} \\ \phi_H^\dagger(\tau) &= e^{\tau H} \phi^\dagger e^{-\tau H} \neq (\phi_H(\tau))^\dagger \end{aligned} \quad (1.54)$$

geschrieben werden können. Im Schrödingerbild bleibt die Hermitizität der Operatoren gewahrt, wenn man beachtet, daß die komplexen Argumente zu konjugieren sind, das heißt

$$\phi^\dagger(z) = \phi(z^*). \quad (1.55)$$

Mit diesen auf endliche Temperaturen angepassten Heisenbergoperatoren können nun beispielsweise kausale Zweipunktfunktionen

$$\begin{aligned} G_\beta(\tau, \tau') &= \langle P_\tau(\phi_H(\tau)\phi_H^\dagger(\tau')) \rangle_\beta \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} e^{-\beta H} P_\tau(\phi_H(\tau)\phi_H^\dagger(\tau')) \end{aligned} \quad (1.56)$$

(räumliche Argumente unterdrückt) definiert werden, wobei P_τ der Ordnungsoperator der τ -Variable, also

$$P_\tau(\phi_H(\tau)\phi_H^\dagger(\tau')) = \theta(\tau - \tau')\phi_H(\tau)\phi_H^\dagger(\tau') \pm \theta(\tau' - \tau)\phi_H^\dagger(\tau')\phi_H(\tau), \quad (1.57)$$

ist. Das positive Vorzeichen entspricht dem bosonischen Fall, das negative dem fermionischen ²⁹.

Der größte Unterschied in eben Dargelegtem zur Vakuumquantenfeldtheorie besteht darin, daß die Zeitvariable über ein endliches Intervall integriert wird. Darüberhinaus folgt aus (1.56) und der Beziehung zwischen Heisenberg- und

²⁹Die weiteren Diskussionen beschränken sich auf den bosonischen Fall.

Schrödingerbild, daß die Zweipunktgreensfunktion zum einen nur von der Differenz $\tau - \tau'$ abhängt, also für den Gleichgewichtsfall erwartungsgemäß zeitlich homogen ist, zum anderen jede Zeitvariable in dem Intervall $0 \leq \tau, \tau' < \beta$ liegt, womit dem Argument der Greensfunktion das Intervall $-\beta \leq \tau - \tau' < \beta$ zur Verfügung steht. Weiter folgt aus den Eigenschaften der Spur und des Zeitordnungsoperators sowie aus der Kubo-Martin-Schwingerrelation (für Rotationen zu imaginären Zeiten) die Periodizität der Greensfunktion:

$$\begin{aligned} G_\beta(0, \tau) &= \langle \phi_H^\dagger(\tau) \phi_H(0) \rangle_\beta \\ &= \langle \phi_H(\beta) \phi_H^\dagger(\tau) \rangle_\beta \\ &= G_\beta(\beta, \tau). \end{aligned} \tag{1.58}$$

Die Auswertung von Feynmandiagrammen erfolgt bei endlichen Temperaturen (im Gleichgewicht) wie bei $T = 0$ vorteilhafterweise im Impulsraum³⁰. Wegen der Endlichkeit des Intervalls, auf dem die Greensfunktionen definiert sind, können deren Fouriertransformationen allgemein als

$$\begin{aligned} G_\beta(\tau) &= \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} G_\beta(i\omega_n) \\ G_\beta(i\omega_n) &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\beta(\tau), \end{aligned} \tag{1.59}$$

geschrieben werden, wobei $\omega_n = n\pi/\beta$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ist. Aus der Periodizität von (1.58) folgt, daß die Fourierentwicklung für Bosonen nur in geradzahigen Moden existiert, wie man wegen

$$\begin{aligned} G_\beta(i\omega_n) &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\beta(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\beta(\tau) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\beta(\tau + \beta) + \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\beta(\tau) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n(\tau+\beta)} G_\beta(\tau) + \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\beta(\tau) \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{-i\omega_n \beta}) \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\beta(\tau) \\ &= \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\beta(\tau) \end{aligned} \tag{1.60}$$

leicht erkennt. Die räumlichen Fouriertransformationen schreiben sich in der gewohnten Form

$$G_\beta(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i(\omega_n \tau - \vec{k} \cdot \vec{x})} G_\beta(\vec{k}, i\omega_n)$$

³⁰Im Nichtgleichgewicht hilft die Fouriertransformation oft wegen der fehlenden zeitlichen Homogenität nicht weiter.

$$G_\beta(\vec{k}, i\omega) = \int_0^\beta d\tau \int d^3x e^{i(\omega_n\tau - \vec{k}\vec{x})} G_\beta(\vec{x}, \tau). \quad (1.61)$$

Mit eben Entwickeltem ist es bereits möglich, die Form des Propagators für jede beliebige Theorie hinzuschreiben³¹. Für die freie Klein-Gordontheorie beispielsweise läßt sich der Propagator bei endlichen Temperaturen aus

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)G(x) = -\delta(x) \quad (1.62)$$

nach Rotation zu imaginären Zeiten, $t \rightarrow -i\tau$ (oder $p^0 \rightarrow ip_4$), das heißt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \nabla^2 - m^2\right)G_\beta(\vec{x}, \tau) = -\delta^3(\vec{x})\delta(\tau), \quad (1.63)$$

per Inversion der Fouriertransformierten zu

$$G_\beta(\vec{k}, i\omega_n) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2} \quad (1.64)$$

berechnen, wobei wie oben gesehen (für Bosonen) $\omega_n = 2\pi n/\beta$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ist. Die diagrammatische Berechnung von quantenfeldtheoretischen Observablen bei endlichen Temperaturen verläuft also zum Vakuumfall weitgehend analog. Der größte Unterschied zur Vakuumtheorie besteht darin, wie aus dem Beispiel ersichtlich, daß die Propagatoren keine Singularitäten für reelle Werte in der Energie und im Impuls haben.

Im Anwendungsbereich der nichtabelschen Quantenfeldtheorien ist der Matsubara- oder Imaginärzeitformalismus in der funktionalintegralen Form wesentlich wichtiger, und auch leichter motivierbar:

Die Übergangsamplitude in der Vakuumfeldtheorie kann bekanntermaßen als Funktionalintegral,

$$\langle\phi(t_1)|\phi(t_2)\rangle = \langle\phi_1|e^{-iH(t_1-t_2)}|\phi_2\rangle = N \int \mathcal{D}\phi e^{iS}, \quad (1.65)$$

mit

$$S[\phi] = \int_{t_2}^{t_1} dt \int d^3x \mathcal{L}, \quad (1.66)$$

geschrieben werden. Identifiziert man nun $t_1 - t_2 = -i\beta$, so ergibt sich für die Dichtematrix

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}} = \int d\phi_1 \langle\phi_1|e^{\beta\mathcal{H}}|\phi_1\rangle \\ &= N \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

³¹Die Erweiterung auf fermionische Systeme ist trivial.

wobei S_E die entsprechende Euklidische Wirkung ist (bei endlichem chemischen Potential),

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E + \beta\mu N. \quad (1.68)$$

Dieser Sachverhalt verdeutlicht einmal mehr die formale und inhaltliche Ähnlichkeit von statistischer Physik und Quantenfeldtheorie. Aus der statistischen Unkenntnis über Anfangs- und Endzustand des Vielteilchensystems folgt, daß man im Pfadintegral nicht über die ungewichteten „Historien“ zu summieren hat, sondern, daß die „Historien“, ausgehend von der durch die klassische Wirkung induzierten, exponentiell gewichtet werden. Mit dieser bemerkenswerten Feststellung sollen die Ausführungen zu den statistischen Gleichgewichtsmodifikationen von Quantenfeldtheorien beschlossen und uns dem Themenkreis des in dieser Arbeit verwendeten Approximationsformalismus zugewendet werden.

1.5 Effektive Wirkung und CJT-Formalismus

1.5.1 Effektive Wirkung

Die effektive Wirkung ist ein Standardwerkzeug bei der Untersuchung von Quantenfeldtheorien, und dient oft als Ausgangspunkt zur Behandlung nichtperturbativer Effekte. Im Folgenden sollen ihre wichtigsten Attribute rekapituliert werden, soweit diese von Bedeutung für die Erweiterung zum CJT-Formalismus³² sind, der Gegenstand des nächsten Unterabschnittes sein wird.

Zu den zentralen Objekten in den Quantenfeldtheorien gehören die sich aus der Störungstheorie ergebenden Greenschen n-Punkt-Funktionen, respektive Propagatoren, die den wichtigsten Bezug zu Observablen der entsprechenden Theorie herstellen. So ist es mit ihrer Hilfe beispielsweise möglich, unter Benutzung asymptotischer Bedingungen für die Feldoperatoren, eine Reduktionsformel

³²Nach den Autoren von: J. Cornwall, R. Jackiw, E. Tomboulis, Effective action for composite operators, Phys. Rev. **D10** (1974)

herzuleiten, die es ermöglicht, die S-Matrix (Streumatrix),

$$S_{fi} = \langle q_1, \dots, q_m; \text{out} | p_1, \dots, p_n; \text{in} \rangle, \quad (1.69)$$

deren Elemente oft die einzigen experimentell zugänglichen Größen darstellen, durch den Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produkts von Feldoperatoren³³ auszudrücken, deren grundlegende Konstituenten gerade die Propagatoren

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T (\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)) | 0 \rangle \quad (1.70)$$

sind³⁴.

Als bequemes Instrument zur Beschaffung der Propagatoren dient das erzeugende Funktional

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \langle 0 | T \exp [iJ\hat{\phi}] | 0 \rangle = N \int \mathcal{D}\phi \exp [iS[\phi] + J\phi], \quad (1.71)$$

wobei die rechte Gleichung die pfadintegrale Form darstellt. n-fache Funktional-differentiation des Funktionals $Z[J]$ nach den Hilfsfeldern J ³⁵ an der Stelle $J = 0$ liefert die begehrten Propagatoren

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (1.72)$$

Das Funktional Z hat allerdings den Nachteil, bei beschriebenem Verfahren topologisch äquivalente Propagatoren vielfach zu erzeugen. Diese Propagatoren treten in ihrer Vielfachheit zwar in der prinzipiell richtigen Anzahl auf, führen bei konkreten Rechnungen jedoch zu unangenehm langen Ausdrücken. Diesem Umstand kann man durch Logarithmierung des erzeugenden Funktionals,

$$W[J] = -i \ln Z[J] = -i \ln \int \mathcal{D}\phi \exp \{i[S[\phi] + J\phi]\}, \quad (1.73)$$

³³Die im Folgenden auftauchenden Feldoperatoren $\hat{\phi}$ notieren gemeinhin Spin-0-Felder, und sollen auch hier die Felder einer exemplarischen Theorie des Typs $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi)$ repräsentieren. Die Verallgemeinerung der Ausführungen dieses Kapitels auf massive Spin-1-Felder ist zwar prinzipiell nichttrivial, kann jedoch analog vollzogen werden.

³⁴Die genaue Ausarbeitung des Zusammenhangs, unter entsprechenden Asymptotikannahmen, zwischen S-Matrix und Greenschen Funktionen geht auf Lehmann, Symanzik und Zimmermann zurück, weshalb in diesem Zusammenhang auch oft von der LSZ-Reduktionsformel gesprochen wird. [H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, *Nuovo Cim.* 1, 205 (1955)]

³⁵Physikalisch kann man das Feld J als eine klassische Quelle des ϕ -Feldes interpretieren, welche im Limes großer Zeiten $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} J(t) = 0$ adiabatisch ausgeschaltet wird. Auf die Subtilitäten bei physikalischer Interpretation der Quellterme in erzeugenden Funktionalen wird im Weiteren nicht eingegangen, stattdessen auf sie als reine mathematische Hilfsgrößen rekurriert. Eine Diskussion zu diesem Gegenstand, insbesondere mit Bezug zur effektiven Wirkung, findet sich in T. Kugo, *Eichtheorie*. [T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer, Berlin (1997)]

begegnen. Bei Funktionalableitung von $W[J]$ an der Stelle $J = 0$ lassen sich topologisch irreduzible, das heißt zusammenhängende Greensfunktionen $G_c^{(n)}$ (c=connected) erzeugen; sie enthalten keine Beiträge, die sich auf triviale Art multiplikativ aus nichtzusammenhängenden n-Punkt-Funktionen niedrigerer Stufe aufbauen ließen ³⁶.

Der nächste Schritt zur Eliminierung redundanter Topologien mündet in die Definition der effektiven Wirkung. Zu ihr gelangt man durch eine (funktionale) Legendretransformation des erzeugenden Funktionals der verbundenen Propagatoren

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int_x J(x)\phi_c(x), \quad (1.74)$$

wobei

$$\begin{aligned} \phi_c(x) &= \frac{\delta W[Z]}{\delta J(x)} = \frac{1}{i} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)} \phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)}} \\ &= \left(\frac{\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \right)_J \end{aligned} \quad (1.75)$$

der korrekt normierte Vakuumerwartungswert des Feldoperators $\hat{\phi}(x)$ in Anwesenheit der Quelle J ist ³⁷. Im Grenzfall verschwindender Quellen, $J \rightarrow 0$, geht gewöhnlich auch das klassische Feld, $\phi_c \rightarrow 0$, gegen Null; nicht so jedoch bei Theorien mit gebrochener Grundzustandssymmetrie, wie es dem in dieser Arbeit entwickeltem Modell zu eigen ist. Die Erweiterung des Konzepts der effektiven Wirkung auf Theorien mit spontan gebrochener Grundzustandssymmetrie geht auf Goldstone, Salam und Weinberg ³⁸ zurück.

Der physikalische Erwartungswert, φ , des Quantenfeldes, in Abhängigkeit von J , ergibt sich nun durch Lösen der Gleichung

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} \right|_{\phi_c = \varphi} = -J(x), \quad (1.76)$$

also dem Auffinden des Minimums.

Selbstverständlich lassen sich auch die verbundenen Greensfunktionen, bezie-

³⁶Zur Rückgewinnung der $G^{(n)}$ aus den $G_c^{(n)}$ siehe z.B. W. Greiner, J. Reinhardt, Feldquantisierung, S. 461 ff. [W. Greiner, J. Reinhardt, Feldquantisierung, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (1993)]

³⁷Hier bedeutet der Index c classical, weil es sich um das mittlere oder klassische Feld handelt.

³⁸J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Phys. Rev. 127 (1962)

ungsweise ihre Inversen, aus Γ gewinnen:

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \delta \phi_c(x_2)} \Big|_{\phi_c=\varphi} = - \frac{\delta J[\phi_c]}{\delta \phi_c} \Big|_{\phi_c=\varphi} \quad (1.77)$$

ist zu $\delta \phi_c / \delta J$ invers, was mit (1.75)

$$\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = -G_c^{(2)}(x_1, x_2) \quad (1.78)$$

entspricht.

Ist die zugrundeliegende Theorie translationsinvariant, also die Einpunktfunktion raum-zeitlich konstant, kann von der effektiven Wirkung zum effektiven Potential,

$$\Gamma[\phi_c] = -V[\phi_c] \int d^4x, \quad (1.79)$$

übergangen werden.

In der Schleifenentwicklung stellt sich das effektive Potential dar als:

$$V[\phi_c] = V^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} V^{(n)}[\phi_c]. \quad (1.80)$$

Die nullte Ordnung in dieser Entwicklung ³⁹ entspricht dem effektiven Potential auf Baumgraphenniveau, und damit dem klassischen Potential $V^{(0)}[\phi_c] = U[\phi]$. Die Einschleifennäherung ergibt sich zu:

$$V[\phi_c] = U[\phi_c] - \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln G^{-1}(k, \phi_c). \quad (1.81)$$

Dieser Ansatz führt allerdings zu Schwierigkeiten bei Theorien mit spontan gebrochener Symmetrie bei endlicher Temperatur. Bei kleinen Impulsen, beispielsweise, entstehen Quasiteilchenanregungen mit imaginären Energien (respektive Massen), was im Ortsraum einer tachyonischen Propagation dieser Teilchen entspräche. Diese Schwierigkeiten sind mit einer Verletzung der Konvexität des effektiven Potentials bei Näherungen in der Schleifenentwicklung verbunden ⁴⁰. Aus diesem Grunde ist es zwingend notwendig, Methoden zu

³⁹(1.80) ist die Volterra-Reihe des effektiven Potentials. Analoge Entwicklungen sind auch für $W[J]$ und $Z[J]$ möglich, wobei die Koeffizienten dieser Reihen gerade den verbundenen bzw. unverbundenen Greensfunktionen entsprechen.

⁴⁰R. J. Rivers, Path Integral Methods in Quantum Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987)

verwenden, die über die ordinäre Schleifen-Entwicklung hinausgehen. Eine dieser Methoden stellt der CJT-Formalismus dar, dessen Erörterung nun folgt.

1.5.2 CJT-Formalismus

Der CJT-Formalismus ⁴¹ stellt, wie bereits angedeutet, ein thermodynamisch konsistentes Vielteilchenresummationsschema dar. Dabei wird das Konzept der effektiven Wirkung für Einpunktfunktionen auf das der effektiven Wirkung für Ein- und Zweipunktfunktionen erweitert, was die Aufstellung von Schwinger-Dyson-Gleichungen für die Zweipunktfunktionen und, im Fall spontan gebrochener Grundzustandssymmetrie, Gleichungen für die Einpunktfunktionen ermöglicht. Darüber hinaus erweist sich der CJT-Formalismus in praxi als übersichtlicher Ausgangspunkt vieler Approximationsmethoden, wie zum Beispiel Entwicklungen nach der Kopplung, Entwicklungen nach $1/N$ oder Entwicklungen nach der Schleifenordnung ⁴². Für translationsinvariante Theorien geht die effektive Wirkung für Zweipunktfunktionen analog zur effektiven Wirkung für Einpunktfunktionen in ein effektives Potential über.

Im folgenden wird nur die Applikation des CJT-Formalismus an einer exemplarischen Theorie gleichen Typs wie des vorangegangenen Abschnitts diskutiert. Für die Details der Beweisführung sei auf die Originalveröffentlichung aus dem Jahre 1974⁴³ verwiesen.

Ausgangspunkt ist das erzeugende Funktional

$$Z[J, K] = e^{W[J, K]} = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ I[\Phi] + \Phi J + \frac{1}{2} \Phi K \Phi \right\} \quad (1.82)$$

⁴¹Der CJT-Formalismus ist die relativistische Verallgemeinerung der Vielteilchenapproximationsschemata von Luttinger, Ward und Baym: Luttinger, Ward, Ground-State Energy of a Many-Fermion System, *Phys. Rev.* 118, 1417 (1960); Baym, Self-Consistent Approximations in Many-Body Systems, *Phys. Rev.* 127, 1391 (1962)

⁴²Letzteres Verfahren kam in dieser Arbeit zur Anwendung.

⁴³loc. cit.

mit der lokalen Quelle J und der bilokalen Quelle K ⁴⁴. Das erzeugende Funktional zusammenhängender Greensfunktionen ist entsprechend

$$\ln Z = W = \ln \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ I[\Phi] + \Phi J + \frac{1}{2} \Phi K \Phi \right\} \quad \text{mit} \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta J} &= \phi_c \quad \text{und} \\ \frac{\delta W}{\delta K} &= \frac{1}{2} (G + \phi_c \phi_c) \quad . \end{aligned} \quad (1.84)$$

Die effektive Wirkung als Legendretransformierte in den Quellen ist folglich

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_c, G] &= W[J, K] - \phi_c J - \frac{1}{2} \phi_c K \phi_c - \frac{1}{2} K G \quad (1.85) \\ &= -\frac{1}{2} K G + \ln \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ I[\Phi] + (\Phi - \phi_c) J + \frac{1}{2} (\Phi^2 - \phi_c^2) K \right\} \\ &= -\frac{1}{2} K G + \ln \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ I[\Phi + \phi_c] + \Phi J + \frac{1}{2} (\Phi + 2\phi_c) K \Phi \right\} \quad . \end{aligned}$$

Das Integralmaß ändert sich durch den linearen Shift um den Vakuumerwartungswert von der zweiten zur dritten Gleichung selbstverständlich nicht. Die Wirkung $I[\Phi + \phi_c]$ an der Stelle des mittleren Feldes ϕ_c funktional nach Taylor entwickelt, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} I[\Phi + \phi_c] &= \int d^4x \mathcal{L}(\Phi + \phi_c) \\ &= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\phi_c) + \left. \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_c} \right|_{\phi_c} \Phi - \frac{1}{2} \Phi \mathcal{D}^{-1} \Big|_{\phi_c} \Phi + \mathcal{L}_I(\phi_c, \Phi) \right\} \quad , \end{aligned}$$

was in die effektive Wirkung eingesetzt zu

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_c, G] &= I[\phi_c] - \frac{1}{2} K G \\ &\quad + \ln \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Phi \mathcal{D}^{-1} \Phi + I_I[\Phi, \phi_c] \right. \\ &\quad \left. + \Phi J + \phi_c K \Phi + \frac{1}{2} \Phi K \Phi + \frac{\delta I}{\delta \phi_c} \Phi \right\} \quad (1.86) \end{aligned}$$

führt⁴⁵. Drei der Terme aus (1.86) werden zu dem neuen Quellterm

$$\Phi J + \phi_c K \Phi + \frac{\delta I}{\delta \phi_c} \Phi = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c} \Phi + \frac{\delta I}{\delta \phi_c} \Phi = -\frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta \phi_c} \Phi \quad (1.87)$$

⁴⁴Im Imaginärzeitformalismus verschwindet das i in der Exponentialfunktion.

⁴⁵ \mathcal{D}^{-1} ist der inverse Propagator auf Baumgraphenniveau.

zusammengefasst, womit die effektive Wirkung nun durch

$$\Gamma[\phi_c, G] = I[\phi_c] - \frac{1}{2}K G \quad (1.88)$$

$$+ \ln \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -\frac{1}{2}\Phi \mathcal{D}^{-1}\Phi + I_I[\Phi, \phi_c] - \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\phi_c}\Phi + \frac{1}{2}\Phi K \Phi \right\}$$

gegeben ist. Es ist nun wünschenswert – warum wird gleich ersichtlich – mit eben Entwickeltem einen Ausdruck für Γ_2 in

$$\Gamma[\phi_c, G] = I[\phi_c] - \frac{1}{2}\text{Tr}(\ln G^{-1}) - \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{D}^{-1}G - 1) + \Gamma_2[\phi_c, G] \quad (1.89)$$

zu finden. Die funktionale Variation von (1.89) nach der Zweipunktfunktion ist

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta G} = -\frac{1}{2}K = \frac{1}{2}G^{-1} - \frac{1}{2}\mathcal{D}^{-1} + \frac{\delta\Gamma_2}{\delta G}, \quad (1.90)$$

also ein expliziter Ausdruck der bilokalen Quelle K . Diesen Ausdruck für die Quelle in (1.88) eingesetzt, liefert die mit (1.89) assoziierbare Wirkung

$$\Gamma[\phi_c, G] = I[\phi_c] - \frac{1}{2}\text{Tr}(\ln G^{-1}) - \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{D}^{-1}G - 1) \quad (1.91)$$

$$+ \text{Tr}\left(\frac{\delta\Gamma_2}{\delta G}G\right) + \frac{1}{2}\text{Tr}(\ln G^{-1})$$

$$+ \ln \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -\frac{1}{2}\Phi G^{-1}\Phi + I_I[\Phi, \phi] - \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\phi_c}\Phi - \Phi \frac{\delta\Gamma_2}{\delta G}\Phi \right\} .$$

Γ_2 besteht damit aus einem Vakuumblasenterm und einem korrekt normierten erzeugenden Funktional für volle Zweipunktfunktionen, respektive Propagatoren. Darüberhinaus ist die funktionale Variation von Γ_2 wegen der Äquivalenz von (1.90) zur Schwinger-Dyson-Gleichung (bei verschwindender Quelle $K = 0$)

$$G^{-1} = \mathcal{D}^{-1} - 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta G} = \mathcal{D}^{-1} + \Sigma(\phi, \mathcal{G}) \quad (1.92)$$

zur Selbstenergie proportional, weshalb Γ_2 als die Summe aller vollen zweiteilchenirreduziblen Diagramme interpretiert werden kann.

In praxi ist man bei Verwendung des CJT-Formalismus natürlich ebenso auf Approximationsschemata angewiesen wie bei allen anderen quantenfeldtheoretischen Formalismen. Ein Approximationsschema bedeutet hier die Selektion partikulärer zweiteilchenirreduzibler Diagramme aus Γ_2 . Diese partikuläre Selektion birgt das Risiko, fast immer wichtige Symmetrien der effektiven Wirkung

zu zerstören, was eine Verletzung der Ward-Takahashi-Identitäten impliziert, die wiederum, beispielsweise, eine Verletzung des Goldstonetheorems zur Folge hat. Eine Strategie zur Restaurierung der Symmetrien der genäherten effektiven Wirkung, die schon auf Baym und Kadanoff ⁴⁶ zurückgeht, macht sich den Fakt zu Nutze, daß die approximierte, „ursprüngliche“ effektive Wirkung

$$\tilde{\Gamma}_{\text{apprx}}[\phi_c] = \Gamma_{\text{apprx}}[\phi_c, \tilde{G}[\phi_c]] \quad , \quad (1.93)$$

mit \tilde{G} definiert durch

$$\left. \frac{\delta \Gamma_{\text{apprx}}[\phi_c, G]}{\delta G} \right|_{G=\tilde{G}[\phi_c]} = 0 \quad ,$$

die Ward-Takahashi-Identitäten definitionsgemäß als Folge der Stationaritätsbedingungen der Approximation erfüllt ⁴⁷. Eine andere, auf Modelle und Näherungen wie die in vorliegender Arbeit zugeschnittene Möglichkeit zur Restaurierung des Goldstonetheorems besteht darin, zur gelösten Gapgleichung den zur entsprechenden Näherung korrespondierenden Random-Phase-Approximation-Term zu addieren, was dann einer Gapless-Approximation entspricht ⁴⁸.

Diese „Restaurierungsmethoden“ sind allerdings bei konkreten Rechnungen, bei denen die Auswertung der Propagatoren numerisch erfolgt, kaum praktikabel. Eine andere Strategie zur eichinvarianten, thermodynamisch konsistenten Resummation stellt das Verfahren der Hard-Thermal-Loop-Approximation dar ⁴⁹, die hier nur am Rande erwähnt sei. Die Entwicklung eines wirklich robusten, eichinvarianten Resummationsschemas steht jedenfalls noch aus.

⁴⁶G. Baim and L. Kadanoff, Conservation laws and Correlation Functions, Phys.Rev. **124**, S287ff (1961)

⁴⁷H. van Hees, J.Knoll, Renormalisation in Self-Consistent Approximation schemes at Finite Temperature **III**: Global Symmetries, <http://arXiv:hep-ph/0203008> v3

⁴⁸Ivanov, Riek, Knoll, Gapless Hatree-Fock Resummation Scheme for the $O(N)$ Model, <http://arXiv:hep-ph/0502146> v1

⁴⁹siehe hierzu: Braaten, Pisarski, Soft Amplitudes In Hot Gauge Theories: A General Analysis, Nucl.Phys. **B337**, S569ff (1990), sowie: Braaten, Pisarski, Deducing Hard Thermal Loops From Ward Identities, Nucl.Phys. **B339**, S310ff (1990)

Kapitel 2

Konstruktion und Auswertung des effektiven Modells auf Doppelblasenniveau

2.1 Konstruktion der Lagrangedichte

Im ersten Teil dieser Arbeit, genauer in den Abschnitten zur Quantenchromodynamik und zur chiralen Symmetriebrechung, wurde dargelegt, wie chirale Symmetrie in der QCD realisiert und wie bedeutend ihre Brechung für das hadronische Teilchenspektrum ist. Im zweiten Teil dieser Arbeit soll nun das quantitative Verhalten chiraler, stark wechselwirkender Teilchen bei endlichen Temperaturen in Teilaspekten mittels eines effektiven Modells untersucht werden. Dazu werden die für die Problemstellung relevanten Freiheitsgrade nach den Symmetrien der zugrundeliegenden mikroskopischen Theorie in einem einfacheren Modell organisiert. Die Untersuchungen beschränken sich dabei per Bescheidung auf entsprechend kleine Symmetriegruppe und Verzicht auf baryonische Freiheitsgrade auf die wichtigsten, genauer die leichtesten Skalar- und Vektormesonen. Das in diesem Abschnitt entwickelte Modell ist eine auf vektormesonische Freiheitsgrade verallgemeinerte Version des aus der Literatur bekannten linearen Sigma-Modells. Besondere Aufmerksamkeit wird den verschiedenen Eigenschaften und Phänomenen des chiralen Phasenübergangs innerhalb dieses Modells zukommen. Der Rest dieses Abschnitts wird sich nun wie angekündigt der Konstruktion eines effektiven Modells für skalare und vektorielle Bosonen widmen. In den drei folgenden Abschnitten werden dann die interessierenden Observablen dieses Modells in Doppelblasenapproximation bei

endlichen Temperaturen berechnet und im darauf folgenden Abschnitt diskutiert werden.

Die leichtesten im mesonischen Spektrum auftretenden Zweiflavourmesonen (mit up- und down-Quarkinhalt) sind im skalaren Fall das Piontripllett, das Triplet der a_0 -Mesonen, das η -Meson und das σ -Meson, wobei die beiden letzteren Singulettzustände sind. Im Falle verschwindender Quarkmassen muß das effektive Modell einer $U_L(2) \times U_R(2)$ -Symmetrie genügen, was den Schluss nahelegt, erwähnte Teilchen in einer Isospinstruktur wie beispielsweise

$$\Phi = (\sigma + i\eta)t^0 + (\vec{a}_0 + i\vec{\pi})\vec{t}, \quad (2.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} t^0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & t^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ t^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & t^3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

die Generatoren der $U(2)$ -Algebra sind, zu organisieren. Mit dieser Darstellung lassen sich leicht chiral invariante Terme bilden, wie zum Beispiel der skalare Massenterm

$$-m_0^2 \text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi] = -\frac{m_0^2}{2} (\sigma^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2), \quad (2.3)$$

wobei

$$\Phi^\dagger = (\sigma - i\eta)t^0 + (\vec{a}_0 - i\vec{\pi})\vec{t} \quad (2.4)$$

ist. Die Invarianz dieses Terms unter der chiralen Transformation

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U_R^\dagger \Phi U_L, \quad \Phi^\dagger \rightarrow \Phi'^\dagger = U_L^\dagger \Phi^\dagger U_R, \quad (2.5)$$

mit

$$U_{L,R} = \exp(i\Theta_{L,R}^a t_a), \quad (2.6)$$

ergibt sich aus der Unitarität der Transformation und der zyklischen Vertauschbarkeit nicht singulärer Operatoren unter der Spur:

$$\begin{aligned} -m_0^2 \text{Tr}[\Phi'^\dagger \Phi'] &= -m_0^2 \text{Tr}[U_L^\dagger \Phi^\dagger U_R U_R^\dagger \Phi U_L] = -m_0^2 \text{Tr}[U_L^\dagger \Phi^\dagger \Phi U_L] \\ &= -m_0^2 \text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Mit dem Quadrat dieses Terms lässt sich leicht eine chiral invariante Selbstwechselwirkung,

$$-\lambda_1 \left[\text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi) \right]^2, \quad (2.8)$$

konstruieren. Darüberhinaus kann man zeigen, daß auch die skalarmesonische Selbstwechselwirkung

$$-\lambda_2 \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.9)$$

aus den gleichen Gründen invariant ist.

Entsprechendes gilt auch für den kinetischen Term,

$$\text{Tr}[(\partial^\mu \Phi)^\dagger \partial^\mu \Phi], \quad (2.10)$$

unter Berücksichtigung der Globalität der Eichsymmetrie,

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\partial^\mu \Phi)^\dagger \partial^\mu \Phi] &= \text{Tr}[\partial^\mu (U_L^\dagger \Phi^\dagger U_R) \partial^\mu (U_R^\dagger \Phi U_L)] \\ &= \text{Tr}[U_L^\dagger \partial^\mu (\Phi^\dagger) U_R U_R^\dagger \partial^\mu (\Phi) U_L] \\ &= \text{Tr}[U_L^\dagger \partial^\mu (\Phi^\dagger) \partial^\mu (\Phi) U_L] \\ &= \text{Tr}[\partial^\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi]; \end{aligned} \quad (2.11)$$

also chirale Invarianz.

Tatsächlich ist aber chirale Invarianz wie gesehen keine exakte, sondern nur eine näherungsweise erfüllte, das heißt eine leicht explizit verletzte Symmetrie der QCD. Diese explizite Symmetrieverletzung existiert in drei qualitativen Abstufungen: Zunächst ist die $U_A(1)$ -Axialsymmetrie wegen der $U_A(1)$ -Anomalie identisch verletzt, das heißt auch bei völligem Verschwinden der Quarkmassen (siehe (1.20)). Bei nicht verschwindenden, entarteten Quarkmassen ist die $U_A(N_f)$ -Symmetrie komplett verletzt (siehe (1.18)). Ist noch zusätzlich die Entartung der Quarkmassen aufgehoben, so ist die residuale chirale Symmetrie der QCD die $U_V(1)$ -Symmetrie, die zur Baryonenzahlerhaltung korrespondiert.

Die Verletzung durch die $U_A(1)$ -Anomalie kann in der eingeführten Multiplattendarstellung durch einen Determinantenterm der Form

$$c \left[\det(\Phi^\dagger) + \det(\Phi) \right] \quad (2.12)$$

realisiert werden. Wegen den Eigenschaften der Determinante (Vertauschbarkeit der Argumente und Identität unter Rotationen) folgt für diesen Term unter gegebenen Symmetrietransformationen:

$$c \left[\det(\Phi'^\dagger) + \det(\Phi') \right] = c \left[\det(U_L^\dagger \Phi^\dagger U_R) + \det(U_R^\dagger \Phi U_L) \right] \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
&= c \{ \det[\exp(-i\theta_L^a t_a)\Phi^\dagger \exp(i\theta_R^a t_a)] \\
&\quad + \det[\exp(-i\theta_R^a t_a)\Phi \exp(i\theta_L^a t_a)] \} \\
&= c \{ \det[\exp\left(-i\frac{\theta_V^a - \theta_A^a}{2}t_a\right)\Phi^\dagger \exp\left(i\frac{\theta_V^a + \theta_A^a}{2}t_a\right)] \\
&\quad + \det[\exp\left(-i\frac{\theta_V^a + \theta_A^a}{2}t_a\right)\Phi \exp\left(i\frac{\theta_V^a - \theta_A^a}{2}t_a\right)] \} \\
&= c \{ \det[\exp(i\theta_A^a t_a)\Phi^\dagger] + \det[\exp(-i\theta_A^a t_a)\Phi] \} \\
&= c \{ \det[\exp\left(i\sum_{a=1}^{N_f^2-1}\theta_A^a t_a\right)] \det[\exp(i\theta_A^0 t_0)\Phi^\dagger] \\
&\quad + \det[\exp\left(-i\sum_{a=1}^{N_f^2-1}\theta_A^a t_a\right)] \det[\exp(-i\theta_A^0 t_0)\Phi] \} \\
&= c \{ \det[\exp(i\theta_A^0 t_0)\Phi^\dagger] + \det[\exp(-i\theta_A^0 t_0)\Phi] \}.
\end{aligned}$$

Dieser Term bricht also offensichtlich die $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ -Symmetrie nach $U_V(N_f) \times SU_A(N_f)$ und generiert somit die $U_A(1)$ -Anomalie der QCD.

Damit bleibt noch die explizite Brechung der $U_A(N_f)$ - und $SU_V(N_f)$ -Symmetrie zu modellieren, die die Gültigkeit des Goldstone-Theorems aufhebt und den Goldstonebosonen eine explizite Masse gibt. Diese Symmetriebrechungsmuster können mit Hilfe des Terms

$$\text{Tr}[H(\Phi^\dagger + \Phi)], \quad (2.14)$$

und entsprechender Wahl des Parameters $H = \bar{\sigma}_0 t_0 + \bar{\sigma}_3 t_3$ (für den Zweiflavourfall) erzeugt werden. Bei erhaltener vektorieller Symmetrie ($\bar{\sigma}_3 = 0$) gilt

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\bar{\sigma}_0 t_0 \Phi'] &= \text{Tr}[\bar{\sigma}_0 t_0 U_R^\dagger \Phi U_L] \\
&= \text{Tr}[\bar{\sigma}_0 t_0 \exp\left(-i\frac{\theta_V^a + \theta_A^a}{2}t_a\right)\Phi \exp\left(i\frac{\theta_V^a - \theta_A^a}{2}t_a\right)] \\
&= \text{Tr}[\bar{\sigma}_0 t_0 \exp(-i\theta_A^a t_a)\Phi], \quad (2.15)
\end{aligned}$$

wobei sich der hermitesch konjugierte Term Φ^\dagger bis auf ein Vorzeichen analog berechnet. Den Fall nicht entarteter up- und down-Quarks kann man durch Hinzunahme von $\bar{\sigma}_3$ in H generieren

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\bar{\sigma}_3 t_3 \Phi'] &= \text{Tr}[\bar{\sigma}_3 t_3 U_R^\dagger \Phi U_L] \quad (2.16) \\
&= \text{Tr}[\bar{\sigma}_3 t_3 \exp\left(-i\frac{\theta_V^a + \theta_A^a}{2}t_a\right)\Phi \exp\left(i\frac{\theta_V^a - \theta_A^a}{2}t_a\right)]
\end{aligned}$$

$$= \text{Tr}[\bar{\sigma}_3 t_3 \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\theta_V^a t_a + \sum_{a=1}^{N_f^2-1} \theta_A^a t_a) \right\} \Phi \exp \left\{ \frac{i}{2} (\theta_V^a t_a - \sum_{a=1}^{N_f^2-1} \theta_A^a t_a) \right\}].$$

Der zu t_0 korrespondierende vektorielle Singulettgenerator ist der einzige, der mit $\bar{\sigma}_3$ kommutieren kann. Da der Massenunterschied zwischen up- und down-Quark sehr gering ist, begnügt sich diese Arbeit mit dem Fall entarteter Quarkflavours, also mit der Erhaltung des vektoriellen Stromes, das heißt $H = \bar{\sigma}_0 t_0$.

Bei Symmetriebetrachtungen mit mehr als zwei Flavours, wie zum Beispiel einer vierflavourigen, $U_V(4) \times U_A(4)$, kann nach analogem Prinzip durch die Wahl von $H = \bar{\sigma}_0 t_0 + \bar{\sigma}_{15} t_{15}$ die Symmetrie explizit nach $U_V(3)$ gebrochen werden, was dem Fall von entarteten up-, down- und strange-Quarks entspräche; das charm-Quark entartet in diesem Fall nicht. Sinnvoller ist jedoch in diesem Beispiel der Fall, daß H mit $H = \bar{\sigma}_0 t_0 + \bar{\sigma}_8 t_8 + \bar{\sigma}_{15} t_{15}$ angesetzt wird, was zu einer expliziten Brechung nach $U_V(2)$ führt. In diesem Fall entarten nur noch up- und down-Quark.

Die bisherigen Modellierungsbemühungen, die eine Einbeziehung der Vektormesonen vernachlässigt haben, reichen bereits aus, um ein effektives Modell für skalare, chirale Mesonen zu konstruieren, welches demnach mit der Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \text{Tr}[(\partial^\mu \Phi)^\dagger \partial^\mu \Phi] - m_0^2 \text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi] - \lambda_1 (\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^2 - \lambda_2 \text{Tr}[(\Phi^\dagger \Phi)^2] \\ & + c(\det(\Phi^\dagger) + \det(\Phi)) + \text{Tr}[H(\Phi^\dagger + \Phi)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

angesetzt werden könnte.

Bei den jetzt einzukoppelnden Vektormesonen handelt es sich um Spin-1 Teilchen. Die für den Zweiflavourfall in Frage kommenden Teilchen sind das ω_μ - und f_μ^1 -Singulett, sowie das \vec{a}_μ^1 - und $\vec{\rho}_\mu$ -Triplett, die man zweckmäßigerweise ähnlich den skalaren Mesonen in den Strukturen

$$\begin{aligned} R^\mu &= (\omega^\mu + f_1^\mu) t^0 + (\vec{\rho}^\mu + \vec{a}_1^\mu) \vec{t} \\ L^\mu &= (\omega^\mu - f_1^\mu) t^0 + (\vec{\rho}^\mu - \vec{a}_1^\mu) \vec{t} \end{aligned} \quad (2.18)$$

zusammenfasst.

Die chirale Eichung dieser Teilchen stellt ein Problem dar. Scheinbar ist die chirale Symmetrie der QCD global. Eine globale Eichsymmetrie für Vektorteilchen zu definieren, ist jedoch nicht möglich, beziehungsweise führt zu Paradoxien. Wenn man trotzdem Vektormesonen näherungsweise chiral invariant koppeln möchte, so ist es naheliegend, von einer globalen Symmetrieforderung zu einer lokalen

überzugehen. Dabei bleibt das Symmetrieverhalten obiger skalarmesonischer Lagrangedichte (2.17) gewahrt, abgesehen von dem kinetischen Term, der wie weiter unten ausgeführt durch Einkopplung von Vektormesonen per kovarianter Ableitung „resymmetrisiert“ werden kann.

Zunächst werden jedoch die vektoriellen Feldstärketensoren,

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \partial^\mu L^\nu - \partial^\nu L^\mu - ig[L^\mu, L^\nu] \\ R^{\mu\nu} &= \partial^\mu R^\nu - \partial^\nu R^\mu - ig[R^\mu, R^\nu], \end{aligned} \quad (2.19)$$

definiert, die die Eigendynamik der Vektormesonen vermitteln. Sie haben dieselbe Gestalt wie nichtabelsche Eichbosonen und die lokale Transformation der Felder L_μ und R_μ ist gleichsam in der typischen Weise,

$$\begin{aligned} R^\mu &\longrightarrow U_R^\dagger \left(R^\mu + \frac{i}{g} \partial^\mu \right) U_R \\ L^\mu &\longrightarrow U_L^\dagger \left(L^\mu + \frac{i}{g} \partial^\mu \right) U_L, \end{aligned} \quad (2.20)$$

definiert. So nimmt es nicht Wunder, daß sich die Feldstärketensoren in der vertrauten Weise,

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &\longrightarrow U_L^\dagger L^{\mu\nu} U_L \\ R^{\mu\nu} &\longrightarrow U_R^\dagger R^{\mu\nu} U_R, \end{aligned} \quad (2.21)$$

transformieren. Mit diesen Feldstärketensoren lässt sich also offensichtlich der chiral symmetrische Term

$$-\frac{1}{4} \text{Tr}[(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2], \quad (2.22)$$

definieren, der die Eigendynamik der Vektormesonen beschreibt.

Natürlich haben Vektormesonen im Gegensatz zu den aus den nichtabelschen Eichtheorien bekannten Eichbosonen eine explizite Masse,

$$+\frac{m_1^2}{2} \text{Tr}[(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2], \quad (2.23)$$

und können somit wegen der (gruppentheoretisch unkontrollierbaren) Verletzung der Eichsymmetrie nicht wirklich als Eichbosonen der Skalarmesonen interpretiert werden ¹. Vielmehr dient das lokale Eichprinzip hier als Inspiration für die

¹Man könnte versuchen, die Masse der Vektormesonen durch einen zusätzlichen Higgsmechanismus zu generieren, um die Eichsymmetrie des Modells zu bewahren, beziehungsweise ihre

Art und Weise, wie Skalar- und Vektormesonen aneinander zu koppeln sind.

Die lokal eichinvariante Kopplung von Skalar- und Vektormesonen kann durch eine kovariante Ableitung der Form

$$\begin{aligned} D^\mu \Phi &= \partial^\mu \Phi + ig(\Phi L^\mu - R^\mu \Phi) \\ (D^\mu \Phi)^\dagger &= \partial_\mu \Phi^\dagger - ig(L_\mu \Phi^\dagger - \Phi^\dagger R_\mu) \end{aligned} \quad (2.24)$$

erreicht werden. Nach oben definierten Transformationen transformieren sich die kovarianten Ableitungen unter Benutzung der Unitaritätseigenschaften sowie der Tatsache, daß $\partial^\mu U^\dagger U = -U^\dagger \partial^\mu U$ ist, wie

$$\begin{aligned} (D^\mu \Phi)' &= \partial^\mu (U_R^\dagger \Phi U_L) + ig(U_R^\dagger \Phi U_L U_L^\dagger (L^\mu + \frac{i}{g} \partial^\mu) U_L \\ &\quad - U_R^\dagger (R^\mu + \frac{i}{g} \partial^\mu) U_R U_R^\dagger \Phi U_L) \\ &= U_R^\dagger \partial^\mu \Phi U_L + \partial^\mu U_R^\dagger \Phi U_L + U_R^\dagger \Phi \partial^\mu U_L \\ &\quad + ig(U_R^\dagger \Phi L^\mu U_L - U_R^\dagger R^\mu \Phi U_L) \\ &\quad + ig \frac{i}{g} (U_R^\dagger \Phi \partial^\mu U_L + \partial^\mu U_R^\dagger \Phi U_L) \\ &= U_R^\dagger D^\mu \Phi U_L + \partial^\mu U_R^\dagger \Phi U_L + U_R^\dagger \Phi \partial^\mu U_L \\ &\quad - (U_R^\dagger \Phi \partial^\mu U_L + \partial^\mu U_R^\dagger \Phi U_L) \\ &= U_R^\dagger D^\mu \Phi U_L, \end{aligned} \quad (2.25)$$

beziehungsweise

$$(D^\mu \Phi)^{\dagger'} = U_L^\dagger (D^\mu \Phi)^\dagger U_R, \quad (2.26)$$

womit sich der chiral invariante kinetische Term der Skalarmesonen zu

$$\text{Tr}[(D^\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi] \quad (2.27)$$

Brechung besser kontrollieren zu können. Doch ist nicht klar, wie dies bewerkstelligt werden könnte, denn innerhalb der hier vorliegenden $U_L(2) \times U_R(2)$ -Symmetrie ist dies offensichtlich nicht möglich, und man wäre dazu genötigt, das bisher entwickelte Modell in ein größeres mit allgemeinerer Symmetrie einzubetten, welche dann spontan auf das gruppentheoretische Komplement der $U_L(2) \times U_R(2)$ -Symmetrie zu brechen wäre. Wegen der in diesem „größeren“ Modell neu zu postulierenden und dann zu interpretierenden Freiheitsgrade wäre dies aber gar nicht sinnvoll, abgesehen von dem enormen Mehraufwand, den ein solcher Schritt mit sich bringen würde.

ergibt.

Dieser Term enthält die im oben proklamierten Sinne chiraler Dynamik schlüssige Kopplung der Vektormesonen an die Skalarmesonen. Darüber hinaus schränkt die Voraussetzung lokal invarianter Kopplung von Skalar- und Vektormesonen die Kopplungsmöglichkeiten stark ein, denn unter global invarianter Transformation der Vektormesonen,

$$A_{L,R}^{\mu'} \rightarrow U_{L,R}^\dagger A_{L,R}^\mu U_{L,R}, \quad (2.28)$$

würden sich Terme wie $A_L^\mu \Phi$ und ΦA_R^μ transformieren wie Φ selbst. Damit könnten unter Berücksichtigung der Paritätsinvarianz der QCD Terme gebildet werden, wie zum Beispiel

$$|A_L^\mu \Phi - \Phi A_R^\mu|^2, \quad |A_L^\mu \Phi + \Phi A_R^\mu|^2 \quad \text{und} \quad |A_L^\mu \Phi|^2 + |\Phi A_R^\mu|^2. \quad (2.29)$$

Vom Standpunkt der Renormierungsgruppengleichung können solch globalinvarianten Terme jedoch als subrenormierbar zurückgewiesen werden ².

Unter Hinzunahme der vektormesonischen Terme, beziehungsweise Modifikation des Ableitungsterms, ergibt sich die klassische Lagrangedichte (im Wigner-Weyl-Modus) in ihrer vollen Pracht soweit zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \text{Tr}[(D^\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi] - m_0^2 \text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi] - \lambda_1 (\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^2 - \lambda_2 \text{Tr}[(\Phi^\dagger \Phi)^2] \\ & + c(\det(\Phi^\dagger) + \det(\Phi)) + \text{Tr}[H(\Phi^\dagger + \Phi)] \\ & - \frac{1}{4} \text{Tr}[(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2] + \frac{m_1^2}{2} \text{Tr}[(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Um die vorgenommenen Kopplungen auf Sinnhaftigkeit zu inspizieren und für weitere Überlegungen im Zusammenhang mit der gleich vorzunehmenden spontanen Symmetriebrechung, ist es zweckmäßig, sich ein genaueres Bild von der expliziten Struktur des Modells zu machen. Dazu wird die Spur über die Terme des kovarianten Ableitungsprodukts und des Feldstärketensorprodukts ausgeführt:

$$\text{Tr}[(D^\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi] = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma + g(\vec{\pi} \vec{a}_{1\mu} + \eta f_{1\mu}))^2 \quad (2.31)$$

²Pisarski, Applications of chiral symmetry, e-Print Archive: hep-ph/9503330

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta - g(\sigma f_{1\mu} + \vec{a}_0 \vec{a}_{1\mu}))^2 \\
& + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{a}_0 + g(\vec{\rho}_\mu \times \vec{a}_0 + \eta \vec{a}_{1\mu} + \vec{\pi} f_{1\mu}))^2 \\
& + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi} - g(\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu + \sigma \vec{a}_{1\mu} + \vec{a}_0 f_{1\mu}))^2, \\
-\frac{1}{4}\text{Tr}[(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2] &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu)^2 \\
& - \frac{1}{4}(\partial_\mu f_{1\nu} - \partial_\nu f_{1\mu})^2 \\
& - \frac{1}{4}(\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu + g(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu + \vec{a}_{1\mu} \times \vec{a}_{1\nu}))^2 \\
& - \frac{1}{4}(\partial_\mu \vec{a}_{1\nu} - \partial_\nu \vec{a}_{1\mu} + g(\vec{\rho}_\mu \times \vec{a}_{1\nu} + \vec{a}_{1\mu} \times \vec{\rho}_\nu))^2.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Das ω -Meson entkoppelt offensichtlich vollständig, da es zum einen im Zweiflavourfall keine Mischung zwischen dem ρ - und dem ω -Meson wie im Dreiflavourfall gibt, zum anderen wird in diesem Modell die chirale Wess-Zumino-Anomalie ³, wie beispielsweise in der von Klingl, Kaiser und Weise benutzten Form ⁴

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WZA} &= \frac{i\hbar}{4f_\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}(V_\mu \partial_\nu \Phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \Phi) \\
&+ \frac{g}{4f_\pi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}(\partial_\mu V_\nu V_\alpha \partial_\beta \Phi),
\end{aligned} \tag{2.33}$$

vernachlässigt, die zur Einkopplung von ω -Mesonen unter chiraler Invarianz notwendig ist ⁵. Dies ist ein weiteres Indiz für die Sinnhaftigkeit der Vernachlässigung der in (2.29) wegen Subrenormierbarkeit zurückgewiesenen Terme, die durchaus (also ohne Wess-Zumino-Anomalie) eine Einkopplung der ω -Mesonen implizieren. Vor diesem Hintergrund ist es auch nicht zu erwarten, daß das ω -Meson nach dem Phasenübergang mit dem f_1 -Meson entartet. Im Gegensatz zu den a_1 - und ρ -Meson, die unter chiralen $SU_L(2) \times SU_R(2)$ -Transformationen mischen, trifft dies für die vektoriellen Singulettzustände nicht zu, und es ist auch keine Symmetrie bekannt, die dies bewerkstelligen könnte.

³Wess and Zumino, Phys. Lett. **37B**, 95 (1971)

⁴Klingl, Kaiser, Weise, Effective Lagrangian approach to vector mesons, their structure and decays, Z. Phys. A 356, 193-206 (1996)

⁵Kaymakcalan, Rajeev, Schechter, Non-Abelian anomaly and vector-meson decays, Phys. Rev. D, V30 Nr.3 (1984)

Im Goldstonemodus – der skalare Massenparameter m_0 ist hier imaginär – wird das σ -Feld um den (als konstant angenommenen) Vakuumerwartungswert ϕ verschoben,

$$\sigma \rightarrow \sigma + \phi, \quad (2.34)$$

woraus für obige Terme aus (2.31)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma + g(\vec{\pi} \vec{a}_{1\mu} + \eta f_{1\mu}))^2 \\ & \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta - g(\sigma f_{1\mu} + \phi f_{1\mu} + \vec{a}_0 \vec{a}_{1\mu}))^2 \\ & \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{a}_0 + g(\vec{\rho}_\mu \times \vec{a}_0 + \eta \vec{a}_{1\mu} + \vec{\pi} f_{1\mu}))^2 \\ & \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi} - g(\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu + \sigma \vec{a}_{1\mu} + \phi \vec{a}_{1\mu} + \vec{a}_0 f_{1\mu}))^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

folgt. Die dabei entstehenden nicht-diagonalen Propagatorterme

$$\phi \partial_\mu \eta f_1^\mu \quad \text{und} \quad \phi \partial_\mu \vec{\pi} \vec{a}_1^\mu \quad (2.36)$$

könnten bei Eichinvarianz der Lagrangedichte durch einen 't Hooft-Eichfixierungsterm

$$\mathcal{L}_{EF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu V^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu f_1^\mu + \xi M \eta)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu \vec{a}_1^\mu + \xi M \vec{\pi})^2 \quad (2.37)$$

– V^μ sind hier die vektoriellen Vektormesonen (Isospinindex unterdrückt) – zum Verschwinden gebracht werden. Da jedoch die Lagrangedichte nicht eichinvariant ist, muss auf andere Methoden zur Beseitigung dieses Problems zurückgegriffen werden, wobei sich vier Handlungsoptionen eröffnen. Die bequemste und fragwürdigste besteht darin, die beiden nicht-diagonalen Propagatorterme einfach zu vernachlässigen, also gleich Null zu setzen. Die zweite, und das ist die in der Literatur gebräuchlichste, verschiebt die Axialfelder in geeigneter Weise,

$$f_1^\mu \rightarrow f_1^\mu + \frac{g\phi}{m_1^2 + (g\phi)^2} \partial^\mu \eta = f_1^\mu + w \partial^\mu \eta \quad \text{und} \quad (2.38)$$

$$\vec{a}_1^\mu \rightarrow \vec{a}_1^\mu + \frac{g\phi}{m_1^2 + (g\phi)^2} \partial^\mu \vec{\pi} = \vec{a}_1^\mu + w \partial^\mu \vec{\pi}, \quad (2.39)$$

um so die unliebsamen Terme zum Verschwinden zu bringen. Diese Methode hat die Nachteile zum einen eine Vielzahl neuer Terme beziehungsweise Kopplungen, darunter auch einige subrenormierbare, zu erzeugen, zum anderen die chirale

Eichinvarianz des kovarianten Kopplungsterms wie auch des Feldstärketensorterms zu zerstören. Die dritte Option besteht darin, die nicht diagonalen Propagatoren als quantenfeldtheoretische Entitäten anzuerkennen und sie gleichberechtigt neben den diagonalen Propagatoren in die Rechnungen einzubeziehen⁶. Ihre Existenz würde sich durch ihren Einfluss auf die diagonalen Propagatoren bemerkbar machen, die zu physikalischen Observablen korrespondieren. In der in dieser Arbeit angestrebten, noch später genauer zu diskutierenden Doppelblasennäherung unterscheidet sich diese Methode der nicht diagonalen Propagatoren nicht von der erstgenannten, welche die zu nicht diagonalen Propagatoren korrespondierenden Terme gleich Null setzt, was daran liegt, daß in genannter Näherung die Gapgleichungen der nicht diagonalen Propagatoren von den anderen vollständig entkoppeln und somit irrelevant werden. Dies ist leicht aus (2.35) ersichtlich.

Die letzte Möglichkeit zur Handhabung des Problems besteht darin, die Mischterme bis zum Aufstellen der Gapgleichungen als nichtdiagonale Terme in der Matrix der Gapgleichungen bestehen zu lassen, und sie dann durch eine impulsabhängige, diagonalisierende Drehung der Gapgleichungsmatrix zu eliminieren. Dadurch würde sich Definition der diagonalen Matrixterme ändern.

In der Literatur ist dieses Verfahren für Modelle, die dem in dieser Arbeit verwendeten ähnlich sind, schon häufiger zur Anwendung gekommen; beispielsweise in linearen Sigma-Modellen mit drei Flavours entstehen durch das η - η' -Mischen typischerweise in der Massenmatrix der Gapgleichungen nichtdiagonale Terme, die durch eine Rotation dieser Matrizen und der damit einhergehenden Veränderung der Propagatoren diagonalisiert werden⁷. Diese veränderten Propagatoren beschreiben nun eine Oszillation zwischen dem η - und dem η' -Teilchen, welche in sogenannten Regenerationsexperimenten nachgewiesen werden können. Der eklatante Unterschied dieser nichtdiagonalen Mischterme zu vorliegenden besteht in ihrer Impulsunabhängigkeit. In vorliegendem Fall müsste eine impulsabhängige Drehung vorgenommen werden, was eine impulsabhängige Oszillation zwischen den a_1 -Teilchen und den Pionen sowie zwischen dem f_1 und dem η zur Folge hätte.

In dieser Arbeit wird auf dieses Verfahren verzichtet. Stattdessen werden die ersten drei der genannten Verfahren zur Anwendung kommen, wobei, wie bereits

⁶Dieser Weg wurde in Urban, Buballa und Wambach für ein chirales $O(4)$ -Modell mit Vektormesononen – allerdings perturbativ – besprochen: Urban, Buballa, Wambach, Vector and axial vector correlators in a chirally symmetric model, Nucl.Phys.A697:338-371,2002

⁷Röder, Ruppert, Rischke, Chiral symmetry restoration in linear sigma models with different numbers of quark flavors, Phys.Rev.D68:016003,2003

erwähnt, in vorliegender Näherung kein Unterschied zwischen dem Weglassen der unerwünschten Terme und dem Verfahren, einen nichtdiagonalen Propagator zu definieren, besteht.

Die Axialmesonen werden nun zur Eliminierung der unerwünschten Terme in der besprochenen Weise verschoben:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma + g(\vec{\pi}\vec{a}_{1\mu} + w\vec{\pi}\partial_\mu\vec{\pi} + \eta f_{1\mu} + w\eta\partial_\mu\eta))^2, \\
& \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta - g(\sigma f_{1\mu} + w\sigma\partial_\mu\eta + \phi f_{1\mu} + w\phi\partial_\mu\eta + \vec{a}_0\vec{a}_{1\mu} + w\vec{a}_0\partial_\mu\vec{\pi}))^2, \\
& \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{a}_0 + g(\vec{\rho}_\mu \times \vec{a}_0 + \eta\vec{a}_{1\mu} + w\eta\partial_\mu\vec{\pi} + \vec{\pi}f_{1\mu} + w\vec{\pi}\partial_\mu\eta))^2, \\
& \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\pi} - g(\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu + \sigma\vec{a}_{1\mu} + w\sigma\partial_\mu\vec{\pi} + \phi\vec{a}_{1\mu} + w\phi\partial_\mu\vec{\pi} + \vec{a}_0f_{1\mu} + w\vec{a}_0\partial_\mu\eta))^2, \\
& -\frac{1}{4}(\partial_\mu f_{1\nu} - \partial_\nu f_{1\mu})^2, \\
& -\frac{1}{4}(\partial_\mu\vec{\rho}_\nu - \partial_\nu\vec{\rho}_\mu + g(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu + \vec{a}_{1\mu} \times \vec{a}_{1\nu} + w(\vec{a}_{1\mu} \times \partial_\nu\vec{\pi} + \partial_\mu\vec{\pi} \times \vec{a}_{1\nu})), \\
& \quad \quad \quad + w^2\partial_\mu\vec{\pi} \times \partial_\nu\vec{\pi}))^2, \\
& -\frac{1}{4}(\partial_\mu\vec{a}_{1\nu} - \partial_\nu\vec{a}_{1\mu} + g(\vec{\rho}_\mu \times \vec{a}_{1\nu} + \vec{a}_{1\mu} \times \vec{\rho}_\nu + w(\vec{\rho}_\mu \times \partial_\nu\vec{\pi} + \partial_\mu\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\nu)))^2, \\
& \frac{m_1^2}{2}(\omega_\mu^2 + \vec{\rho}_\mu^2 + f_{1\mu}^2 + \vec{a}_{1\mu}^2 + 2wf_{1\mu}\partial^\mu\eta + w^2(\partial_\mu\eta)^2 + 2w\vec{a}_{1\mu}\partial^\mu\vec{\pi} + w^2(\partial_\mu\vec{\pi})^2).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Teilweises Ausmultiplizieren und Addieren von (2.40) liefert

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}((\partial_\mu\sigma)^2 + 2g\partial^\mu\sigma(\vec{\pi}\vec{a}_{1\mu} + w\vec{\pi}\partial_\mu\vec{\pi} + \eta f_{1\mu} + w\eta\partial_\mu\eta) \\
& \quad + g^2(\vec{\pi}\vec{a}_{1\mu} + w\vec{\pi}\partial_\mu\vec{\pi} + \eta f_{1\mu} + w\eta\partial_\mu\eta)^2) \\
& + \frac{1}{2}((\partial_\mu\eta)^2 - 2g\phi\partial_\mu\eta f_1^\mu - 2gw\phi(\partial_\mu\eta)^2 + g^2\phi^2(f_{1\mu})^2 + g^2\phi^2w^2(\partial_\mu\eta)^2 \\
& \quad + 2g^2\phi^2w\partial_\mu\eta f_1^\mu \\
& \quad + 2(-g\partial^\mu\eta + g^2\phi f_{1\mu} + g^2w\phi\partial_\mu\eta)(\sigma f_{1\mu} + w\sigma\partial_\mu\eta + \vec{a}_0\vec{a}_{1\mu} + w\vec{a}_0\partial_\mu\vec{\pi}) \\
& \quad + g^2(\sigma f_{1\mu} + w\sigma\partial_\mu\eta + \vec{a}_0\vec{a}_{1\mu} + w\vec{a}_0\partial_\mu\vec{\pi})^2) \\
& + \frac{1}{2}((\partial_\mu\vec{a}_0)^2 + 2g\partial^\mu\vec{a}_0(\vec{\rho}_\mu \times \vec{a}_0 + \eta\vec{a}_{1\mu} + w\eta\partial_\mu\vec{\pi} + \vec{\pi}f_{1\mu} + w\vec{\pi}\partial_\mu\eta) \\
& \quad + g^2(\vec{\rho}_\mu \times \vec{a}_0 + \eta\vec{a}_{1\mu} + w\eta\partial_\mu\vec{\pi} + \vec{\pi}f_{1\mu} + w\vec{\pi}\partial_\mu\eta)^2) \\
& + \frac{1}{2}((\partial_\mu\vec{\pi})^2 - 2g\phi\partial_\mu\vec{\pi}\vec{a}_1^\mu - 2gw\phi(\partial_\mu\vec{\pi})^2 + g^2\phi^2(\vec{a}_{1\mu})^2 + g^2w^2\phi^2(\partial_\mu\vec{\pi})^2
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
& + 2g^2 w \phi^2 \partial_\mu \vec{\pi} \vec{a}_1^\mu \\
& + 2(-g \partial^\mu \vec{\pi} + g^2 \phi \vec{a}_{1\mu} + g^2 w \phi \partial_\mu \vec{\pi})(\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu + \sigma \vec{a}_{1\mu} + w \sigma \partial_\mu \vec{\pi} \\
& \quad + \vec{a}_0 f_{1\mu} + w \vec{a}_0 \partial_\mu \eta) \\
& + g^2 (\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu + \sigma \vec{a}_{1\mu} + w \sigma \partial_\mu \vec{\pi} + \vec{a}_0 f_{1\mu} + w \vec{a}_0 \partial_\mu \eta)^2 \\
& - \frac{1}{4} (\partial_\mu f_{1\nu} - \partial_\nu f_{1\mu})^2 \\
& - \frac{1}{4} ((\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu)^2 \\
& \quad + 2g(\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu)(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu + \vec{a}_{1\mu} \times \vec{a}_{1\nu} + w(\vec{a}_{1\mu} \times \partial_\nu \vec{\pi} + \partial_\mu \vec{\pi} \times \vec{a}_{1\nu}) \\
& \quad \quad + w^2 \partial_\mu \vec{\pi} \times \partial_\nu \vec{\pi})) \\
& + g^2 (\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu + \vec{a}_{1\mu} \times \vec{a}_{1\nu} + w(\vec{a}_{1\mu} \times \partial_\nu \vec{\pi} + \partial_\mu \vec{\pi} \times \vec{a}_{1\nu}) + w^2 \partial_\mu \vec{\pi} \times \partial_\nu \vec{\pi})^2 \\
& - \frac{1}{4} ((\partial_\mu \vec{a}_{1\nu} - \partial_\nu \vec{a}_{1\mu})^2 \\
& \quad + 2g(\partial^\mu \vec{a}_1^\nu - \partial^\nu \vec{a}_1^\mu)(\vec{\rho}_\mu \times \vec{a}_{1\nu} + \vec{a}_{1\mu} \times \vec{\rho}_\nu + w(\vec{\rho}_\mu \times \partial_\nu \vec{\pi} + \partial_\mu \vec{\pi} \times \vec{\rho}_\nu)) \\
& \quad + g^2 (\vec{\rho}_\mu \times \vec{a}_{1\nu} + \vec{a}_{1\mu} \times \vec{\rho}_\nu + w(\vec{\rho}_\mu \times \partial_\nu \vec{\pi} + \partial_\mu \vec{\pi} \times \vec{\rho}_\nu))^2 \\
& + \frac{1}{2} (m_1^2 (\omega_\mu^2 + \vec{\rho}_\mu^2 + f_{1\mu}^2 + \vec{a}_{1\mu}^2) \\
& \quad + 2m_1^2 w f_{1\mu} \partial^\mu \eta + 2m_1^2 w \vec{a}_{1\mu} \partial^\mu \vec{\pi} + m_1^2 w^2 (\partial_\mu \eta)^2 + m_1^2 w^2 (\partial_\mu \vec{\pi})^2)
\end{aligned}$$

Die roten Terme heben sich gegenseitig weg (die Verschiebung erfüllt also ihren Zweck) und die grünen addieren sich zu

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2}{m_1^2 + (g\phi)^2} \right) (\partial_\mu \eta)^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2}{m_1^2 + (g\phi)^2} \right) (\partial_\mu \vec{\pi})^2, \quad (2.42)$$

was später eine Wellenfunktionsrenormierung erforderlich macht. Bei verschwindendem Kondensat verschwindet auch der Effekt der Wellenfunktionsrenormierung.

Die blauen Higgsmassenterme heben die Entartung zwischen den Vektor- und Axialvektormesonen auf,

$$m_\rho^2 = m_\omega^2 = m^2 \quad , \quad m_{a_1}^2 = m_{f_1}^2 = m^2 + g^2 \phi^2, \quad (2.43)$$

was in gutem Einklang mit den tatsächlichen Massen steht, was bedeutet, daß der Higgseffekt der Axialmesonen eine gute Erklärung für die Massendifferenz

zwischen Axial- und Vektormesonen ist; das Massenverhältnis zwischen ρ - und a_1 -Meson, $\sqrt{m^2 + g^2\phi^2}/m^2 \approx 1.6$, ist nämlich experimentell wohlbekannt.

Neben dem oben eingeführten Massenterm $\text{Tr}(A_{L,R}^2)$ gibt es eine zweite Möglichkeit, einen unter globaler $U_L(2) \times U_R(2)$ -Symmetrie invarianten Massenterm, $[\text{Tr}(A_{L,R})]^2$, einzuführen. Dieser zusätzliche Massenterm trägt nur zu den Massen der vektoriellen Singulett- und Tripletzuständen aufzuheben. Da der Massenunterschied zwischen den Singulett- und Tripletzuständen jedoch geringer als zwei Prozent ist, wird darauf verzichtet. Von vorrangigem Interesse ist das Verhalten, genauer die Entartung, von den ρ - und a_1 -Mesonen am Phasenübergang. Prinzipiell ist es aber durchaus verwunderlich, warum der Massenunterschied zwischen Singulett- und Tripletzuständen so gering ist, der zusätzliche Massenterm also so klein ist.

Als letzte Ingredienz zur effektiven Lagrangedichte wird ein sogenannter Stueckelbergterm,

$$\mathcal{L}_{St} = +\frac{\lambda}{2} \left[(\partial^\mu \omega_\mu)^2 + (\partial^\mu f_{1\mu})^2 + (\partial^\mu \vec{\rho}_\mu)^2 + (\partial^\mu a_{1\mu})^2 \right], \quad (2.44)$$

eingeführt (nicht zu verwechseln mit dem Stueckelberggeist). Dieser Term hat die Funktion, den neben den beiden transversalen und dem longitudinalen vierten, unphysikalischen Freiheitsgrad zu markieren beziehungsweise zu isolieren. Am Ende der Rechnung betrachtet man den Limes des Stueckelbergparameters $\lambda \rightarrow 0$, womit ein Freiheitsgrad typischerweise einen unendlichen Massenparameter erhält und somit als unphysikalisch identifiziert werden kann ⁸.

⁸Es stellt sich die Frage, ob der Stueckelbergterm bei Proccleichenungen – im vorliegenden Fall $D^\mu F_{\mu\nu} + m^2 A_\nu = j_\nu$ – mit nichterhaltenem Strom, $m^2 \partial^\nu A_\nu = \partial^\nu J_\nu \neq 0$ (J_ν beinhaltet im nichtabelschen Fall im Gegensatz zu j_ν auch den Strom der Vektormesonen), nicht mit $\lambda/2(m^2 \partial^\mu A_\mu - \partial^\mu J_\mu)^2$ anzusetzen ist. Da man jedoch nach ebenen Wellen quantisiert, das heißt nach Lösungen der linearisierten, homogenen Bewegungsgleichungen, von denen ausgehend man auch nach der „althergebrachten“ Weise den vierten Freiheitsgrad als von den anderen abhängigen darstellt, erscheint es durchaus legitim, den Stueckelbergterm als divergenzfrei anzusetzen. Aus dem selben Grund wurde der Stueckelbergterm erst an dieser Stelle eingeführt, um von der axialmesonischen Verschiebung verschont zu bleiben.

2.2 Das effektive Potential und die Gapgleichungen auf Doppelblasenniveau

2.2.1 Potential und Gapgleichungen

Die im vorigen Abschnitt aufgestellte Lagrangedichte beziehungsweise klassische Wirkung wird nun im quantenfeldtheoretischen CJT-Formalismus bei endlichen Temperaturen in Doppelblasennäherung ausgewertet, was das Aufstellen von Schwinger-Dyson-Gleichungen zur numerischen Berechnung der temperaturabhängigen Mesonenmassen bedeutet.

Wie in Kapitel 1.6 angedeutet, entspricht die Näherung innerhalb der Schleifenentwicklung beim CJT-Formalismus der Selektion zweiteilchenirreduzierbarer Diagramme aus Γ_2 mit geringer Schleifenanzahl, beginnend mit der geringsten Anzahl von zwei Schleifen. Solche Zweischleifendiagramme bezeichnet man je nach Topologie als Doppelblasen- oder Sonnenuntergangsdiagramme. Ein Beispiele für ein dreischleifiges Diagramme ist das Basketballdiagramm.

Zunächst folgt die Berechnung des effektiven Potentials (wegen der Konstanz des Kondensats kann von der effektiven Wirkung zum effektiven Potential übergegangen werden), wozu in der Doppelblasennäherung die Vierervertizes aller quadratischer Terme, genauer alle quadratischen Terme des Typs $(a \circ b)^2$, zu berechnen sind. Die drei kompliziertesten Vertizes sind der ρ - a_1 -Vierervertex, der vektorielle π - ρ - bzw. π - a_1 -Vierervertex sowie der vektorielle π - π -Vierervertex. Die letzteren sind alle durch die Verschiebung der Axialfelder zur Eliminierung der nichtdiagonalen Propagatorterme entstanden. Konkret lassen sich die Vertizes durch funktionale Ableitung der entsprechenden Terme im Impulsraum, wie zum Beispiel

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{\delta^4}{\delta \rho_\alpha^a \delta \rho_\beta^b \delta a_{1\gamma}^c \delta a_{1\delta}^d} \left[g^2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} (\rho_\mu^j a_{1\nu}^k + a_{1\mu}^j \rho_\nu^k) (\rho_\sigma^l a_{1\tau}^m + a_{1\sigma}^l \rho_\tau^m) g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \right] \\ & = g^2 (\epsilon_{iac} \epsilon_{ibd} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) + \epsilon_{iad} \epsilon_{ibc} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta})), \end{aligned} \quad (2.45)$$

generieren. Der Vorfaktor $1/4$ berücksichtigt die Vertauschbarkeit der Indizes des ρ und des a_1 . Es gibt nur eine Möglichkeit, wie dieser Vertex mit den Propagatoren des ρ beziehungsweise des a_1 -Feldes zu kontrahieren ist, nämlich mit den Propagatoren G_ρ^{ab} und $G_{a_1}^{cd}$, was von der speziellen Definition des funktionalen Ableitungsoperators herrührt.

Für den vektoriellen π - a_1 -Vertex ergibt sich analog

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{\delta^4}{\delta\pi^a \delta\pi^b \delta a_{1\gamma}^c \delta a_{1\delta}^d} \left[g^2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} (a_{1\mu}^j k_\nu^k \pi^k + k_\mu^j \pi^j a_{1\nu}^k) (a_{1\sigma}^l k_\tau^m \pi^m + k_\sigma^l \pi^l a_{1\tau}^m) g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \right] \\ & = g^2 w^2 (\epsilon_{iac} \epsilon_{ibd} (k_a^\sigma k_\sigma^b g_{\gamma\delta} - k_\delta^a k_\gamma^b) + \epsilon_{iad} \epsilon_{ibc} (k_a^\sigma k_\sigma^b g_{\gamma\delta} - k_\gamma^a k_\delta^b)), \end{aligned} \quad (2.46)$$

wobei über die lateinischen Indizes der Impulse nicht summiert wird. Diese Indizes kennzeichnen lediglich ihre Zugehörigkeit zu den jeweiligen Pionen. Die einzige Kontraktionsmöglichkeit für diesen Vertex ist mit Propagatoren der Indizierung G_π^{ab} und $G_{a_1}^{cd}$. Genau dieselbe Vertexstruktur mit den gleichen Implikationen gilt auch für den vektoriellen π - ρ -Vertex. Schließlich sei noch der vektorielle Vierpionenvertex angegeben:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4!} \frac{\delta^4}{\delta\pi^a \delta\pi^b \delta\pi^c \delta\pi^d} \left[g^2 w^4 k_\mu^j k_\nu^k k_\sigma^l l_\tau^m \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} \pi_j \pi_k \pi_l \pi_m g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \right] \\ & = \epsilon_{iab} \epsilon_{icd} (k_\mu^a k_c^\mu k_\nu^b k_d^\nu - k_\mu^a k_d^\mu k_\nu^b k_c^\nu) \\ & \quad + \epsilon_{iac} \epsilon_{ibd} (k_\mu^a k_b^\mu k_\nu^c k_d^\nu - k_\mu^a k_d^\mu k_\nu^c k_b^\nu) \\ & \quad + \epsilon_{iad} \epsilon_{ibc} (k_\mu^a k_b^\mu k_\nu^d k_c^\nu - k_\mu^a k_c^\mu k_\nu^d k_b^\nu). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Im Gegensatz zu den beiden vorangegangenen Vertizes gibt es hier drei Möglichkeiten, mit den Pionpropagatoren zu kontrahieren, darüberhinaus unterscheidet sich auch der Symmetriefaktor, $1/4!$, vor der Ableitung von den beiden anderen diskutierten Vertizes.

Zusammen mit den anderen relevanten Vertizes ergibt sich für V_2 :

$$\begin{aligned} V_2 = & +3 \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{8} \right) \left(\int_k \sigma(k) \right)^2 + 3 \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{8} \right) \left(\int_k \eta(k) \right)^2 \\ & + 2 \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{8} \right) \int_k \sigma(k) \int_l \eta(l) + 3 \left(2 \frac{\lambda_1}{4} + 6 \frac{\lambda_2}{8} \right) \int_k \sigma(k) \int_l a_0(l) \\ & + 6 \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{8} \right) \int_k \sigma(k) \int_l \pi(l) + 6 \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{8} \right) \int_k \eta(k) \int_l a_0(l) \\ & + 3 \left(2 \frac{\lambda_1}{4} + 6 \frac{\lambda_2}{8} \right) \int_k \eta(k) \int_l \pi(l) + 15 \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{8} \right) \left(\int_k a_0(k) \right)^2 \\ & + 15 \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{8} \right) \left(\int_k \pi(k) \right)^2 + \left(2 \times 9 \frac{\lambda_1}{4} + (6 \times 9 - 3 \times 4) \frac{\lambda_2}{8} \right) \int_k a_0(k) \int_l \pi(l) \\ & + 3 \frac{g^2}{2} \int_k \pi(k) \int_l a_1(l) - 3w^2 \frac{g^2}{2} \int_k \pi(k) \int_l l^2 \pi(l) + \frac{g^2}{2} \int_k \eta(k) \int_l f_1(l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -w^2 \frac{g^2}{2} \int_k \eta(k) \int_l l^2 \eta(l) + 6 \frac{g^2}{2} \int_k \rho(k) \int_l a_0(l) + 3 \frac{g^2}{2} \int_k \eta(k) \int_l a_1(l) \\
& -3w^2 \frac{g^2}{2} \int_k \eta(k) \int_l l^2 \pi(l) + 3 \frac{g^2}{2} \int_k \pi(k) \int_l f_1(l) - 3w^2 \frac{g^2}{2} \int_k \pi(k) \int_l l^2 \eta(l) \\
& + \frac{g^2}{2} \int_k \sigma(k) \int_l f_1(l) - w^2 \frac{g^2}{2} \int_k \sigma(k) \int_l l^2 \eta(l) + 3 \frac{g^2}{2} \int_k a_0(k) \int_l a_1(l) \\
& -3w^2 \frac{g^2}{2} \int_k a_0(k) \int_l l^2 \pi(l) + 6 \frac{g^2}{2} \int_k \rho(k) \int_l \pi(l) + 3 \frac{g^2}{2} \int_k \sigma(k) \int_l a_1(l) \\
& -3w^2 \frac{g^2}{2} \int_k \sigma(k) \int_l l^2 \pi(l) + 3 \frac{g^2}{2} \int_k a_0(k) \int_l f_1(l) - 3w^2 \frac{g^2}{2} \int_k a_0(k) \int_l l^2 \eta(l) \\
& + 6 \frac{g^2}{4} \left[\left(\int_k \rho(k) \right)^2 - \int_k \rho^{\mu\nu}(k) \int_l \rho_{\mu\nu}(l) \right] \\
& + 6 \frac{g^2}{4} \left[\left(\int_k a_1(k) \right)^2 - \int_k a_1^{\mu\nu}(k) \int_l a_{1\mu\nu}(l) \right] \\
& -12w^2 \frac{g^2}{4} \left[\int_k \rho(k) \int_l l^2 \pi(l) - \int_k \rho^{\mu\nu}(k) \int_l l_\mu l_\nu \pi(l) \right] \\
& -12w^2 \frac{g^2}{4} \left[\int_k a_1(k) \int_l l^2 \pi(l) - \int_k a_1^{\mu\nu}(k) \int_l l_\mu l_\nu \pi(l) \right] \\
& +12 \frac{g^2}{4} \left[\int_k a_1(k) \int_l \rho(l) - \int_k a_1^{\mu\nu}(k) \int_l \rho_{\mu\nu}(l) \right] \\
& +6w^4 \frac{g^2}{4} \left[\left(\int_k k^2 \pi(k) \right)^2 - \int_k k^\mu k^\nu \pi(k) \int_k k_\mu k_\nu \pi(k) \right] \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Die Symbole, die früher die Felder bezeichnet haben, repräsentieren nun die vollen Propagatoren, wobei über Vektormesonpropagatoren ohne Lorentz-index gespurt wird. Die negativen Vorzeichen der w^2 -Terme stammen von den Impulsen der Vertizes. Da nämlich konventionsgemäß alle Impulse in die Vertizes einlaufen, muss ein Impuls sein Vorzeichen wechseln, um den Vertex schließen zu können. Bei dem w^4 -Term ist dies zweimal geschehen, weshalb sein Vorzeichen positiv ist. Die Integrale mit Index am Integralzeichen notieren hier die vom Imaginärzeitformalismus bekannten und in Kapitel 1.5 eingeführten Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\int_k f(k) & := T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} f(i2\pi nT, \vec{k}) \\
\int_x f(x) & := \int_0^\beta d\tau \int d^3 \vec{x} f(\tau, \vec{x}). \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Die Matsubarasummation, also die Auswertung der diskreten Summe, wird im nächsten Abschnitt für vorliegende Terme explizit ausgeführt.

An dieser Stelle wird nun eine zusätzliche Näherung zur Vereinfachung des gleich aufzustellenden Gleichungssystems vorgenommen. Die aus der vektoriellen Selbstwechselwirkung stammenden Vertizes beziehungsweise Doppelblasendiagramme werden durch

$$\begin{aligned}
\left[\left(\int_k \rho(k) \right)^2 - \int_k \rho^{\mu\nu}(k) \int_l \rho_{\mu\nu}(l) \right] &\longrightarrow \frac{3}{4} \left(\int_k \rho(k) \right)^2 \\
\left[\left(\int_k a_1(k) \right)^2 - \int_k a_1^{\mu\nu}(k) \int_l a_{1\mu\nu}(l) \right] &\longrightarrow \frac{3}{4} \left(\int_k a_1(k) \right)^2 \\
\left[\int_k \rho(k) \int_l l^2 \pi(l) - \int_k \rho^{\mu\nu}(k) \int_l l_\mu l_\nu \pi(l) \right] &\longrightarrow \frac{3}{4} \int_k \rho(k) \int_l l^2 \pi(l) \\
\left[\int_k a_1(k) \int_l l^2 \pi(l) - \int_k a_1^{\mu\nu}(k) \int_l l_\mu l_\nu \pi(l) \right] &\longrightarrow \frac{3}{4} \int_k a_1(k) \int_l l^2 \pi(l) \\
\left[\int_k a_1(k) \int_l \rho(l) - \int_k a_1^{\mu\nu}(k) \int_l \rho_{\mu\nu}(l) \right] &\longrightarrow \frac{3}{4} \int_k a_1(k) \int_l \rho(l) \\
\left[\left(\int_k k^2 \pi(k) \right)^2 - \int_k k^\mu k^\nu \pi(k) \int_k k_\mu k_\nu \pi(k) \right] &\longrightarrow \frac{3}{4} \left(\int_k k^2 \pi(k) \right)^2
\end{aligned} \tag{2.50}$$

approximiert. Für die Vektorteilchen wäre dies bei einer eichinvarianten Theorie unter Feynmanregelung eine Äquivalenzrelation, also keine Näherung. Tatsächlich verhalten sich die Propagatoren jedoch eher wie unter Landauregelung, sind also im Impulsraum nicht proportional zu $g^{\mu\nu}$. Durch die Näherung wird ein Teil der pionischen Selbstenergie, die als Teil der pionischen Wellenfunktionsrenormierungsgleichung auftritt, proportional zu l^2 , dem äußeren Impuls, so daß im pionischen Fall ein Wellenfunktionsrenormierungsparameter ausreicht, anstelle von zweien für den exakten Fall, wie man dem unapproximierten pionischen Selbstenergieterm

$$+6w^4 g^2 \left(l^2 \int_k k^2 \pi(k) - l_\mu l_\nu \int_k k^\mu k^\nu \pi(k) \right) \tag{2.51}$$

entnehmen kann. Für die Vektormesonen entartet durch die Näherung die longitudinale mit der transversalen Masse, was sich durch die Proportionalität der Selbstenergie zum metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ äußert. Dadurch erübrigt sich die tensorielle Zerlegung der Gapgleichungen.

Mit dieser Näherung ergibt sich das effektive Potential zu

$$V(\phi, G_i) = \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda_1}{4} \phi^4 + \frac{\lambda_2}{8} \phi^4 - \frac{c}{2} \phi^2 - H\phi \tag{2.52}$$

$$+I_\sigma + I_\eta + 3I_{a_0} + 3I_\pi + I_{f_1} + 3I_\rho + 3I_{a_1} + V_2,$$

wobei

$$I_i = \frac{1}{2} \int_k (\ln G_i^{-1}(k) + \mathcal{D}_i^{-1} G_i - 1) \quad (2.53)$$

ist.

Die \mathcal{D}_i^{-1} sind die inversen Baumgraphenpropagatoren

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\sigma^{-1} &= -k^2 + m_0^2 - c + 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi^2 \\ \mathcal{D}_\eta^{-1} &= - \left(\frac{m_1^2}{m_1^2 + (g\phi)^2} \right) k^2 + m_0^2 + c + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi^2 \\ \mathcal{D}_{a_0}^{-1} &= -k^2 + m_0^2 + c + \left(\lambda_1 + 3 \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi^2 \\ \mathcal{D}_\pi^{-1} &= - \left(\frac{m_1^2}{m_1^2 + (g\phi)^2} \right) k^2 + m_0^2 - c + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi^2 \\ \mathcal{D}_{f_1\mu\nu}^{-1} &= -(k^2 - (m_1^2 + g^2\phi^2))g_{\mu\nu} + (1 - \lambda)k_\mu k_\nu \\ \mathcal{D}_{\rho\mu\nu}^{-1} &= -(k^2 - m_1^2)g_{\mu\nu} + (1 - \lambda)k_\mu k_\nu \\ \mathcal{D}_{a_1\mu\nu}^{-1} &= -(k^2 - (m_1^2 + g^2\phi^2))g_{\mu\nu} + (1 - \lambda)k_\mu k_\nu. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Der Parameter λ stammt von dem Stueckelbergterm, welcher die Funktion hat, den unphysikalischen Freiheitsgrad der Vektormesonen zu isolieren. Diese Technik hat den Vorteil, die manifeste Kovarianz der Theorie zu erhalten.

Aus dem effektiven Potential erhält man durch Variation nach dem Kondensat,

$$\frac{\delta V}{\delta \phi} = 0, \quad (2.55)$$

die Kondensatgleichung

$$\begin{aligned} H &= (m_0^2 - c)\phi + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi^3 + 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi \int_k \sigma(k) \\ &+ \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi \int_k \eta(k) + \frac{m_1^2 g^2 \phi}{(m_1^2 + g^2 \phi^2)^2} \int_k k^2 \eta(k) \\ &+ 3 \left(\lambda_1 + 3 \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi \int_k a_0(k) + 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi \int_k \pi(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3 \frac{m_1^2 g^2 \phi}{(m_1^2 + g^2 \phi^2)^2} \int_k k^2 \pi(k) + g^2 \phi \int_k f_1(k) + 3g^2 \phi \int_k a_1(k) \\
& -u \frac{g^2}{2} \int_k \sigma(k) \int_l l^2 \eta(l) - 3u \frac{g^2}{2} \int_k \sigma(k) \int_l l^2 \pi(l) - u \frac{g^2}{2} \int_k \eta(k) \int_l l^2 \eta(l) \\
& -3u \frac{g^2}{2} \int_k \eta(k) \int_l l^2 \pi(l) - 3u \frac{g^2}{2} \int_k a_0(k) \int_l l^2 \eta(l) - 3u \frac{g^2}{2} \int_k a_0(k) \int_l l^2 \pi(l) \\
& -3u \frac{g^2}{2} \int_k \pi(k) \int_l l^2 \eta(l) - 3u \frac{g^2}{2} \int_k \pi(k) \int_l l^2 \pi(l) \\
& -12u \frac{g^2}{4} \frac{3}{4} \int_k \rho(k) \int_l l^2 \pi(l) - 12u \frac{g^2}{4} \frac{3}{4} \int_k a_1(k) \int_l l^2 \pi(l) \\
& +6v \frac{g^2}{4} \frac{3}{4} \left(\int_k k^2 \pi(k) \right)^2, \tag{2.56}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\delta w^2}{\delta \phi} = 2g^2 \phi \frac{m_1^2 - g^2 \phi^2}{(m_1^2 + g^2 \phi^2)^3} \quad \text{und} \\
v &= \frac{\delta w^4}{\delta \phi} = 4g^4 \phi^3 \frac{m_1^2 - g^2 \phi^2}{(m_1^2 + g^2 \phi^2)^5} \tag{2.57}
\end{aligned}$$

ist.

Durch Ableiten von V_2 nach den vollen Propagatoren,

$$\Pi_i = 2 \frac{\delta V_2}{\delta G_i}, \tag{2.58}$$

ergeben sich die Selbstenergien zu

$$\begin{aligned}
\Pi_\sigma &= 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \sigma(k) + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \eta(k) + 3 \left(\lambda_1 + 3 \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k a_0(k) \\
&+ 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \pi(k) + g^2 \int_k f_1(k) - w^2 g^2 \int_k k^2 \eta(k) + 3g^2 \int_k a_1(k) \\
&- 3w^2 g^2 \int_k k^2 \pi(k) \\
\Pi_\eta &= 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \eta(k) + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \sigma(k) + 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k a_0(k) \\
&+ 3 \left(\lambda_1 + 3 \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \pi(k) + g^2 \int_k f_1(k) - w^2 g^2 \int_k k^2 \eta(k) + 3g^2 \int_k a_1(k) \\
&- 3w^2 g^2 \int_k k^2 \pi(k) \\
&- l^2 \left(w^2 g^2 \int_k \eta(k) + 3w^2 g^2 \int_k \pi(k) + w^2 g^2 \int_k \sigma(k) + 3w^2 g^2 \int_k a_0(k) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Pi_\eta^* + l^2 \Pi_\eta^{**} \\
\Pi_{a_0} &= 3 \left(\lambda_1 + 3 \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \sigma(k) + 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \eta(k) + 15 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k a_0(k) \\
&\quad + 3 \left(3\lambda_1 + 7 \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \pi(k) + 3g^2 \int_k f_1(k) - 3w^2 g^2 \int_k k^2 \eta(k) + 3g^2 \int_k a_1(k) \\
&\quad - 3w^2 g^2 \int_k k^2 \pi(k) + 6g^2 \int_k \rho(k) \\
\Pi_\pi &= 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \sigma(k) + 3 \left(\lambda_1 + 3 \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \eta(k) + 3 \left(3\lambda_1 + 7 \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k a_0(k) \\
&\quad + 15 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_k \pi(k) + 3g^2 \int_k f_1(k) - 3w^2 g^2 \int_k k^2 \eta(k) + 3g^2 \int_k a_1(k) \\
&\quad - 3w^2 g^2 \int_k k^2 \pi(k) + 6g^2 \int_k \rho(k) \\
&\quad - l^2 \left(3w^2 g^2 \int_k \eta(k) + 3w^2 g^2 \int_k \pi(k) + 3w^2 g^2 \int_k \sigma(k) + 3w^2 g^2 \int_k a_0(k) \right. \\
&\quad \quad \left. - 6w^2 g^2 \frac{3}{4} \int_k \rho(k) - 6w^2 g^2 \frac{3}{4} \int_k a_1(k) + 6w^4 g^2 \frac{3}{4} \int_k k^2 \pi(k) \right) \\
&= \Pi_\pi^* + l^2 \Pi_\pi^{**} \\
\Pi_{\mu\nu}^{f_1} &= g^2 g_{\mu\nu} \int_k \sigma(k) + g^2 g_{\mu\nu} \int_k \eta(k) + 3g^2 g_{\mu\nu} \int_k a_0(k) + 3g^2 g_{\mu\nu} \int_k \pi(k) \\
\Pi_{\mu\nu}^\rho &= 6g^2 g_{\mu\nu} \int_k a_0(k) + 6g^2 g_{\mu\nu} \int_k \pi(k) + 6g^2 \frac{3}{4} g_{\mu\nu} \int_k \rho(k) \\
&\quad + 6g^2 \frac{3}{4} g_{\mu\nu} \int_k a_1(k) - 6w^2 g^2 \frac{3}{4} g_{\mu\nu} \int_k k^2 \pi(k) \\
\Pi_{\mu\nu}^{a_1} &= 3g^2 g_{\mu\nu} \int_k \sigma(k) + 3g^2 g_{\mu\nu} \int_k \eta(k) + 3g^2 g_{\mu\nu} \int_k a_0(k) + 3g^2 g_{\mu\nu} \int_k \pi(k) \\
&\quad + 6g^2 \frac{3}{4} g_{\mu\nu} \int_k \rho(k) + 6g^2 \frac{3}{4} g_{\mu\nu} \int_k a_1(k) - 6w^2 g^2 \frac{3}{4} g_{\mu\nu} \int_k k^2 \pi(k). \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Kondensatgleichung lässt sich nun ein geschlossenes Gleichungssystem,

$$\begin{aligned}
M_\sigma^2 &= m_0^2 - c + 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi^2 + \Pi_\sigma \\
M_\eta^2 &= m_0^2 + c + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi^2 + \Pi_\eta^* \\
-Z_\eta^2 &= - \left(\frac{m_1^2}{m_1^2 + (g\phi)^2} \right) + \Pi_\eta^{**}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{a_0}^2 &= m_0^2 + c + \left(\lambda_1 + 3\frac{\lambda_2}{2} \right) \phi^2 + \frac{1}{3}\Pi_{a_0} \\
M_\pi^2 &= m_0^2 - c + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi^2 + \frac{1}{3}\Pi_\pi^* \\
-Z_\pi^2 &= -\left(\frac{m_1^2}{m_1^2 + (g\phi)^2} \right) + \Pi_\pi^{**} \\
M_{f_1}^2 &= m_1^2 + g^2\phi^2 + \Pi_{f_1} \\
M_\rho^2 &= m_1^2 + \frac{1}{3}\Pi_\rho \\
M_{a_1}^2 &= m_1^2 + g^2\phi^2 + \frac{1}{3}\Pi_{a_1} \\
\frac{\delta V}{\delta\phi} &= 0, \tag{2.60}
\end{aligned}$$

aufstellen, dessen numerische Auswertung mittels einer verallgemeinerten Newton-Raphsonroutine das temperaturabhängige Kondensat und die temperaturabhängigen Massen liefert.

An dieser Stelle sei erwähnt, daß der Imaginärteil der Selbstenergien in vorliegender Doppelblasennäherung aufgrund ihrer expliziten Impulsunabhängigkeit (abgesehen von der trivialen Impulsabhängigkeit der η - und π -Terme) null ist. Innerhalb vorliegender Näherung können also nur die Massen, nicht aber die Lebensdauer der Teilchen vorhergesagt werden.

Bevor die angewendeten numerischen Methoden kurz diskutiert, und ihre Ergebnisse analysiert werden, ist noch die Auswertung der Matsubarasummen in den vorliegenden Formeln abzuwickeln, was im nächsten Abschnitt geschieht.

2.2.2 Matsubarasummation typischer Terme

Die Fouriertransformation der Zeitvariable des Propagators im Imaginärzeitformalismus ist definiert als

$$G_\beta(\tau) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(i\omega_n)$$

$$G_\beta(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau), \quad (2.61)$$

wobei

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta} & \text{für Bosonen} \\ \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & \text{für Fermionen} \end{cases} \quad (2.62)$$

gilt und G periodisch in τ ,

$$G_\beta(\tau - \beta) = G_\beta(\tau), \quad (2.63)$$

ist. Das Integral von (2.61) ist definiert auf dem halboffenen Intervall $[0, \beta)$. Die in der Selbstenergie typischerweise auftretenden Kaulquappendiagramme werden durch Integrale über die vollen Propagatoren des Typs

$$I = T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G^{\mu\nu}(i\omega_n, \vec{k}) \quad (2.64)$$

repräsentiert (die Lorentzindizes entfallen natürlich für die Propagatoren der skalaren Teilchen). Gegebenenfalls taucht bei den skalaren Mesonen wegen der Impulse auf den Vertizes ein k^2 unter dem Integral auf (s.u.).

Als konsistenter Ansatz für die vollen Propagatoren beziehungsweise ihre Inversen bietet sich für Skalar- und Vektormesonen

$$G^{-1}(k) = -Zk^2 + M^2 \quad \text{sowie} \quad (2.65)$$

$$G_{\mu\nu}^{-1}(k) = -(k^2 - M^2)g_{\mu\nu} + (1 - \lambda)k_\mu k_\nu \quad (2.66)$$

zur Lösung des Gleichungssystems an. Der Wellenfunktionsrenormierungsparameter ist für das σ - und das a_0 -Teilchen gleich eins. Substituiert man in (2.64) den Propagator (2.65) (der Wellenfunktionsrenormierungsparameter wird zunächst ignoriert, das heißt gleich eins gesetzt) in der „gemischten Darstellung“, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} I &= T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(i\omega_n, \vec{k}) = T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} G(\tau, \vec{k}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \sum_n \delta(\tau - n\beta) G(\tau, \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Der Integrand $G(\tau, \vec{k})$ kann nun mit Hilfe des Residuensatzes als

$$\begin{aligned} G(\tau, \vec{k}) &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n\tau} G(i\omega_n, \vec{k}) \\ &= \frac{1}{2\omega_k} \left[(1 + n_B(\omega_k)) e^{-\omega_k\tau} + n_B(\omega_k) e^{\omega_k\tau} \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

geschrieben werden ⁹. Nach Ausführen der τ -Integration über das Intervall $[0, \beta]$ ergibt sich:

$$I = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} (1 + 2n_B(\omega_k)). \quad (2.69)$$

Das Integral separiert also nach Matsubarasummation in einen aus der Vakuumtheorie bekannten Anteil, und einen durch die Boseverteilung temperaturabhängigen Teil. Bei der numerischen Auswertung des Gleichungssystems wird der divergente Vakuumanteil ignoriert, das heißt es findet triviale Renormierung statt, was zu keinen großen Fehlern führt, da die Selbstenergie durch die temperaturabhängigen Terme dominiert wird, und die Ergebnisse wenig sensitiv bezüglich der Renormierungsskala sind ¹⁰. Die Kopplungskonstanten werden für $T = 0$ entsprechend auf Baumgraphenniveau angepasst.

Die Ausführung der Matsubarasumme des vektormesonischen Propagators gestaltet sich etwas aufwendiger, kann aber auf die gleiche Struktur wie obige, skalare Summe zurückgeführt werden. Unter Verwendung der Stueckelbergmethode ist

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= \frac{1}{-k^2 + m^2} g^{\mu\nu} + \frac{1}{-k^2 + m^2} \frac{1 - \lambda}{-\lambda k^2 + m^2} k^\mu k^\nu \\ &= \frac{1}{-k^2 + m^2} g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{-k^2 + \frac{m^2}{\lambda}} - \frac{1}{-k^2 + m^2} \right] k^\mu k^\nu. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Eingesetzt in (2.67) ergibt dies

$$\begin{aligned} I &= \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - r\beta) T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \left(\frac{1}{\omega_i^2 + \vec{k}^2 + m^2} g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m^2} \frac{(i\omega_i, \vec{k})^\mu (i\omega_i, \vec{k})^\nu}{\omega_i^2 + \vec{k}^2 + \frac{m^2}{\lambda}} - \frac{1}{m^2} \frac{(i\omega_i, \vec{k})^\mu (i\omega_i, \vec{k})^\nu}{\omega_i^2 + \vec{k}^2 + m^2} \right) \\ &= g^{\mu\nu} \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - r\beta) T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \frac{1}{\omega_i^2 + \vec{k}^2 + m^2} \\ &\quad + \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - r\beta) (-\partial_\tau, \vec{k})^\mu (-\partial_\tau, \vec{k})^\nu \frac{T}{m^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \frac{1}{\omega_i^2 + \vec{k}^2 + \frac{m^2}{\lambda}} \\ &\quad - \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - r\beta) (-\partial_\tau, \vec{k})^\mu (-\partial_\tau, \vec{k})^\nu \frac{T}{m^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \frac{1}{\omega_i^2 + \vec{k}^2 + m^2} \end{aligned} \quad (2.71)$$

⁹le Bellac, Thermal Field Theory, Cambridge University Press, 1996;

¹⁰Lenaghan, Rischke, The $O(N)$ model at nonzero temperature: renormalization of the gap equations in Htree and large- N approximations, J.Phys. G: Nucl. Part. Phys. **26** (2000)

$$\begin{aligned}
&= g^{\mu\nu} \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - r\beta) \frac{1}{2\omega_k} \left[(1 + n_B(\omega_k)) e^{-\omega_k \tau} + n_B(\omega_k) e^{\omega_k \tau} \right] \\
&\quad + \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - r\beta) \frac{1}{2\omega_{k,\lambda}} \left[(1 + n_B(\omega_{k,\lambda})) (\omega_{k,\lambda}, \vec{k})^\mu (\omega_{k,\lambda}, \vec{k})^\nu e^{-\omega_{k,\lambda} \tau} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + n_B(\omega_{k,\lambda}) (-\omega_{k,\lambda}, \vec{k})^\mu (-\omega_{k,\lambda}, \vec{k})^\nu e^{\omega_{k,\lambda} \tau} \right] \\
&\quad - \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - r\beta) \frac{1}{2\omega_k} \left[(1 + n_B(\omega_k)) (\omega_k, \vec{k})^\mu (\omega_k, \vec{k})^\nu e^{-\omega_k \tau} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + n_B(\omega_k) (-\omega_k, \vec{k})^\mu (-\omega_k, \vec{k})^\nu e^{\omega_k \tau} \right] \\
&= g^{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n_B(\omega_k)}{2\omega_k} + \frac{1}{m^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n_B(\omega_{k,\lambda})}{2\omega_{k,\lambda}} \begin{pmatrix} \omega_{k,\lambda}^2 & & & \\ & k_1^2 & & 0 \\ & & k_2^2 & \\ & & & k_3^2 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{m^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n_B(\omega_k)}{2\omega_k} \begin{pmatrix} \omega_k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3^2 \end{pmatrix}^{\mu\nu}. \tag{2.72}
\end{aligned}$$

Die Diagonalität der Propagatoren ergibt sich aus der Antisymmetrie der nicht-diagonalen Elemente unter dem Integral über den \mathbb{R}^3 .

Spuren über obige Formel ergibt

$$I = 3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n_B(\omega_k)}{2\omega_k} + \frac{1}{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n_B(\omega_{k,\lambda})}{2\omega_{k,\lambda}}. \tag{2.73}$$

Hier ist deutlich erkennbar, wie sich unter Vernachlässigung des Stueckelbergparameterterms die richtige Anzahl von Freiheitsgraden für die Vektormesonen ergibt.

Für Felder mit Impulsen auf den Vertizes ergibt sich in diesem Zusammenhang bei vorliegender Näherung:

$$\begin{aligned}
I &= \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - r\beta) T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \frac{(i\omega_i, \vec{k})^\mu (i\omega_i, -\vec{k})_\mu}{\omega_i^2 + \vec{k}^2 + m^2} \\
&= \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - r\beta) (-\partial_\tau, \vec{k})^\mu (-\partial_\tau, -\vec{k})_\mu T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \frac{1}{\omega_i^2 + \vec{k}^2 + m^2} \\
&= m^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n_B(\omega_k)}{2\omega_k}
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Für das η - und das π -Feld,

$$G(k) = \frac{1}{Z^2} \frac{1}{-k^2 + \left(\frac{M}{Z}\right)^2}, \quad (2.75)$$

ergibt sich wegen des Renormierungsparameters – die physikalische Masse M/Z wird auch oft als Polmasse bezeichnet – mit und ohne Impulsen auf den Vertizes

$$\text{mit:} \quad I = \frac{m^2}{Z^4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n_B(\omega_{k,Z})}{2\omega_{k,Z}} \quad (2.76)$$

$$\text{ohne:} \quad I = \frac{1}{Z^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n_B(\omega_{k,Z})}{2\omega_{k,Z}}. \quad (2.77)$$

Wegen der der Isotropie des Impulses kann zur weiteren Vereinfachung der Integrale der Winkelanteil ausintegriert werden, was für die Temperaturabhängigen Terme

$$\begin{aligned} I_T &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{k^2 + M^2}} \frac{1}{\exp\left(\sqrt{k^2 + M^2}/T\right) - 1} \\ &= \int \frac{dk}{2\pi^2} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}} \frac{1}{\exp(\sqrt{k^2 + M^2}/T) - 1} \end{aligned} \quad (2.78)$$

liefert.

Damit sind alle vorkommenden Typen von Matsubarasummen ausgeführt, und die analytischen Rechnungen zu vorliegendem Modell in Doppelblasennäherung innerhalb dieser Arbeit abgeschlossen.

2.3 Resultate

In dem nun folgenden Abschnitt werden die numerischen Ergebnisse der beiden Näherungen des mesonischen, linearen Sigamodells bei endlichen Temperaturen für verschiedene σ -Vakuummassen diskutiert und mit skalarmesonischen $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ -Modellen verglichen.

Die numerisch auszuwertenden Gleichungen stellen wie bereits angedeutet ein System gekoppelter Integralgleichungen dar, welches für jede (vorgegebene) Temperatur gelöst werden muss. Für das „unverschobene“ Modell besteht das Gleichungssystem aus acht Gleichungen, das Gleichungssystem des „verschobenen“ Modells wegen der zwei zusätzlichen Renormierungsparametergleichungen aus zehn¹¹. Die Lösungen zur jeweiligen Temperatur sind die physikalischen Massen – im „verschobenen“ Modell die Massenparameter und Renormierungsparameter für das η und π – der entsprechenden Teilchen und die Energie des chiralen Kondensats. Die Lösungen hängen in Doppelblasennäherung nicht explizit von den Impulsen ab, sind also reelle Zahlen und keine Funktionen des Impulses, was die numerische Auswertung ungeheuer vereinfacht und die direkte Anwendung einer verallgemeinerten Newton-Raphsonroutine ermöglicht. Der Torso des verwendeten FORTRAN77 Programms ist dem Standardwerk Numerical Recipes¹² entnommen.

Die Vakuummassen und die Pionenzerfallskonstante, mit deren Hilfe die Fixierung der freien Parameter des Modells vorgenommen werden kann, sind hier nach dem aktuellen Wissensstand der particle data group¹³ zu

$$\begin{aligned}
 \sigma_M &= 400 - 1200 \text{ MeV} \\
 \eta_M &= 547.75 \text{ MeV} \\
 a_{0M} &= 985.1 \text{ MeV} \\
 \pi_M &= 138.04 \text{ MeV} \\
 f_{1M} &= 1230 \text{ MeV} \\
 \rho_M &= 768.5 \text{ MeV} \\
 a_{1M} &= 1230 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

¹¹Die Gleichung des ω -Mesons wurde bei dieser Zählung vernachlässigt, da sie vollständig entkoppelt und ihre Lösung trivial ist.

¹²<http://www.library.cornell.edu/nr/cbookfpdf.html> [16.09.2005]

¹³<http://pdg.lbl.gov/2005/listings/mxxxcomb.html#mesonslight> [16.09.2005]

$$f_\pi = 91.9 \text{ MeV} \quad (2.79)$$

bestimmt, wobei hier die Entartung des f_1 mit dem a_1 mangels genügend freier Parameter angenommen wurde, das f_1 also auf den Wert des a_1 gesetzt ist, da letzteres Teilchen das in vorliegender Arbeit bedeutendere ist. Die Vakuummassen dienen gleichzeitig als Startwerte des Programms. In der verschobenen Version des Modells sind noch die Renormierungsparameter qua

$$Z_{\eta,\pi} = \frac{\rho_M}{a_{1M}} \quad (2.80)$$

zu berücksichtigen.

Mit diesen Werten lassen sich die freien Parameter des Modells unter Vernachlässigung der Vakuumselbstenergie mittels

$$\begin{aligned} \phi_0 = f_\pi \quad , \quad \lambda_1 = \frac{\sigma_M^2 - Z_\pi^2 \pi_M - a_{0M}^2 + Z_\eta^2 \eta_M^2}{2f_\pi^2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{a_{0M}^2 - \eta_M^2}{f_\pi^2} \quad , \\ m_0^2 = Z_\pi^2 \pi_M^2 + \frac{Z_\eta^2 \eta_M^2 - \sigma_M^2}{2} \quad , \quad c = \frac{Z_\eta^2 \eta_M^2 - Z_\pi^2 \pi_M^2}{2} \quad , \quad H = f_\pi Z_\pi^2 \pi_M^2 \quad , \\ m_1^2 = \rho_M^2 \quad , \quad g^2 = \frac{a_{1M}^2 - \rho_M^2}{f_\pi^2} \end{aligned} \quad (2.81)$$

bestimmen, wobei die Renormierungsparameter im „unverschobenen“ Fall gleich eins zu setzen sind. Die Multiplikation der pseudoskalaren Mesonen mit den Renormierungsparametern ist notwendig, da auf der linken Seite von (2.60) die Massenparameter und nicht die Polmassen stehen.

In den Abbildungen 2.1-2.5 sind die Polmassen der Skalar- und Vektormesonen für $\sigma(400)$, $\sigma(600)$, $\sigma(700)$, $\sigma(907)$ und $\sigma(1200)$ als Funktion der Temperatur mit den dazugehörigen Kondensaten dargestellt. Die grünen Kurven entsprechen dem Kasus mit verschobenen Axialfeldern zur Eliminierung der nichtdiagonalen Propagatorterme, die orangenen dem die unerwünschten Terme ignorierenden Fall. In beiden Kasi findet ein klarer Phasenübergang statt, der sich durch die Massenentartung der chiralen Partner manifestiert ¹⁴. Mit

¹⁴Das ω -Meson, das als chiraler Partner des f_1 interpretiert werden kann, ist hier wegen seiner vollständigen Entkopplung nicht dargestellt. Es ändert sich als Funktion der Temperatur nicht, und entspräche hier einer horizontalen Linie bei 780 MeV; entartet also wie Abschnitt 2.1 angedeutet nicht mit dem f_1 -Meson.

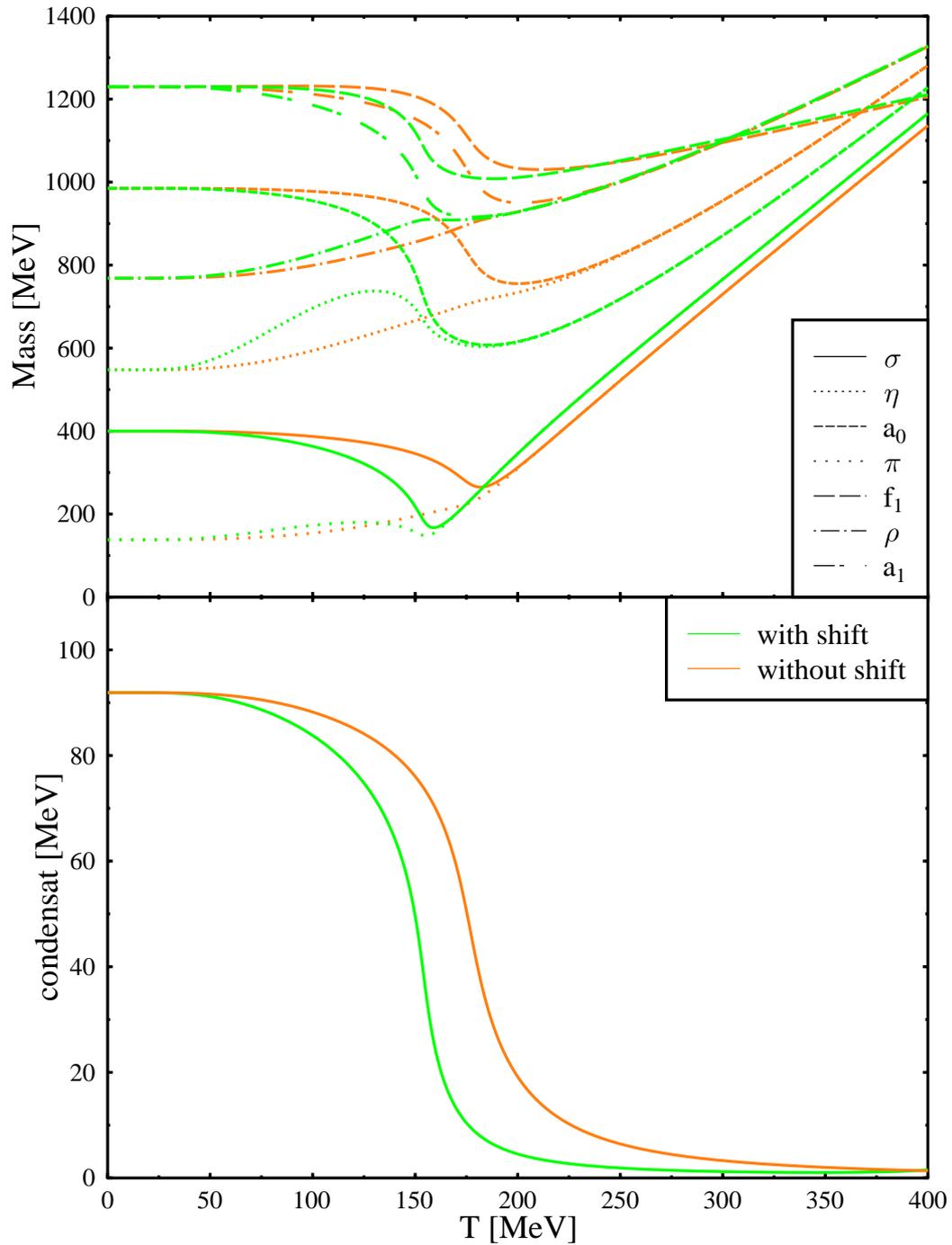


Abbildung 2.1: Die Massen der Mesonen und das Kondensat als Funktion der Temperatur mit und ohne Verschiebung für $\sigma(400)$.

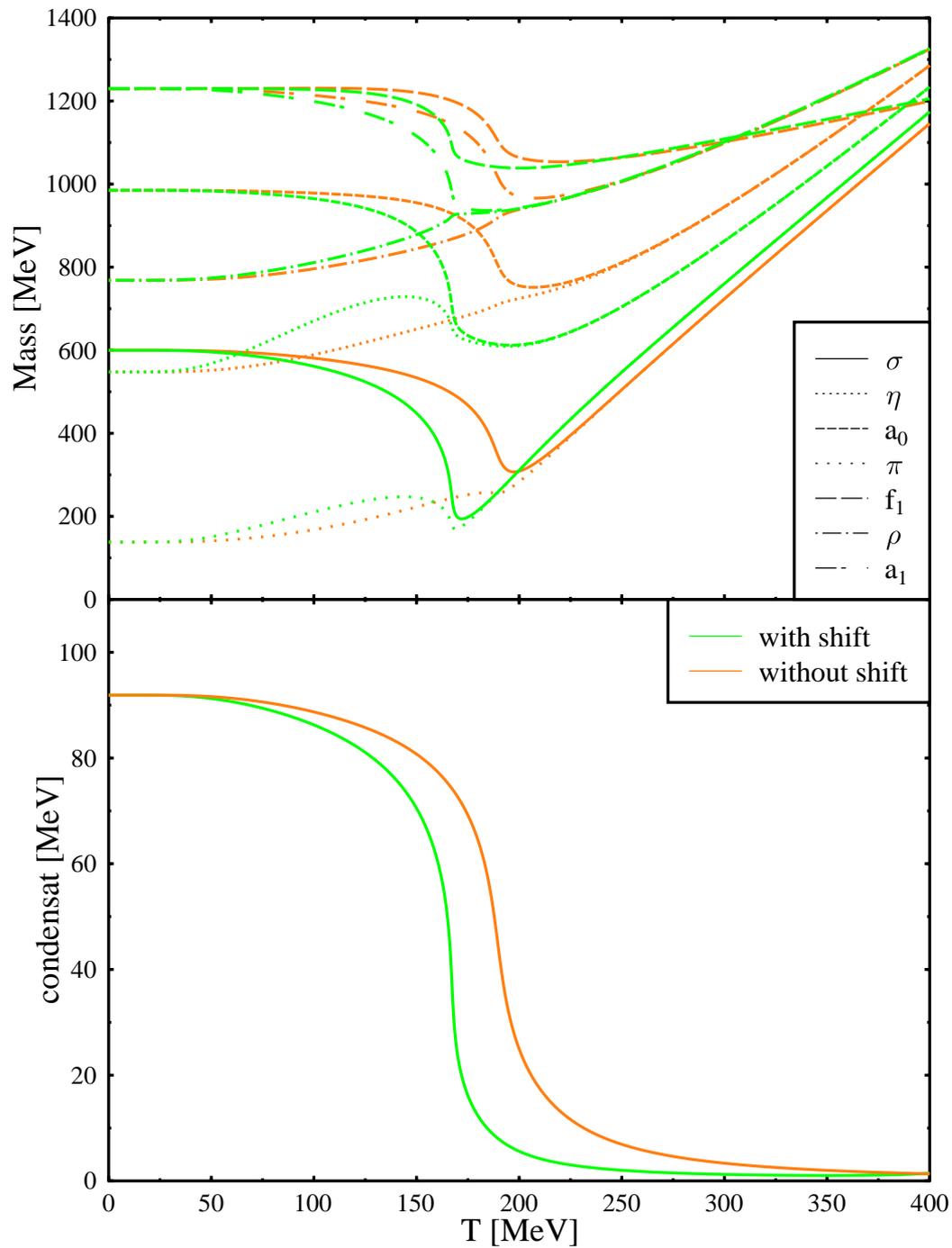


Abbildung 2.2: Die Massen der Mesonen und das Kondensat als Funktion der Temperatur mit und ohne Verschiebung für $\sigma(600)$.

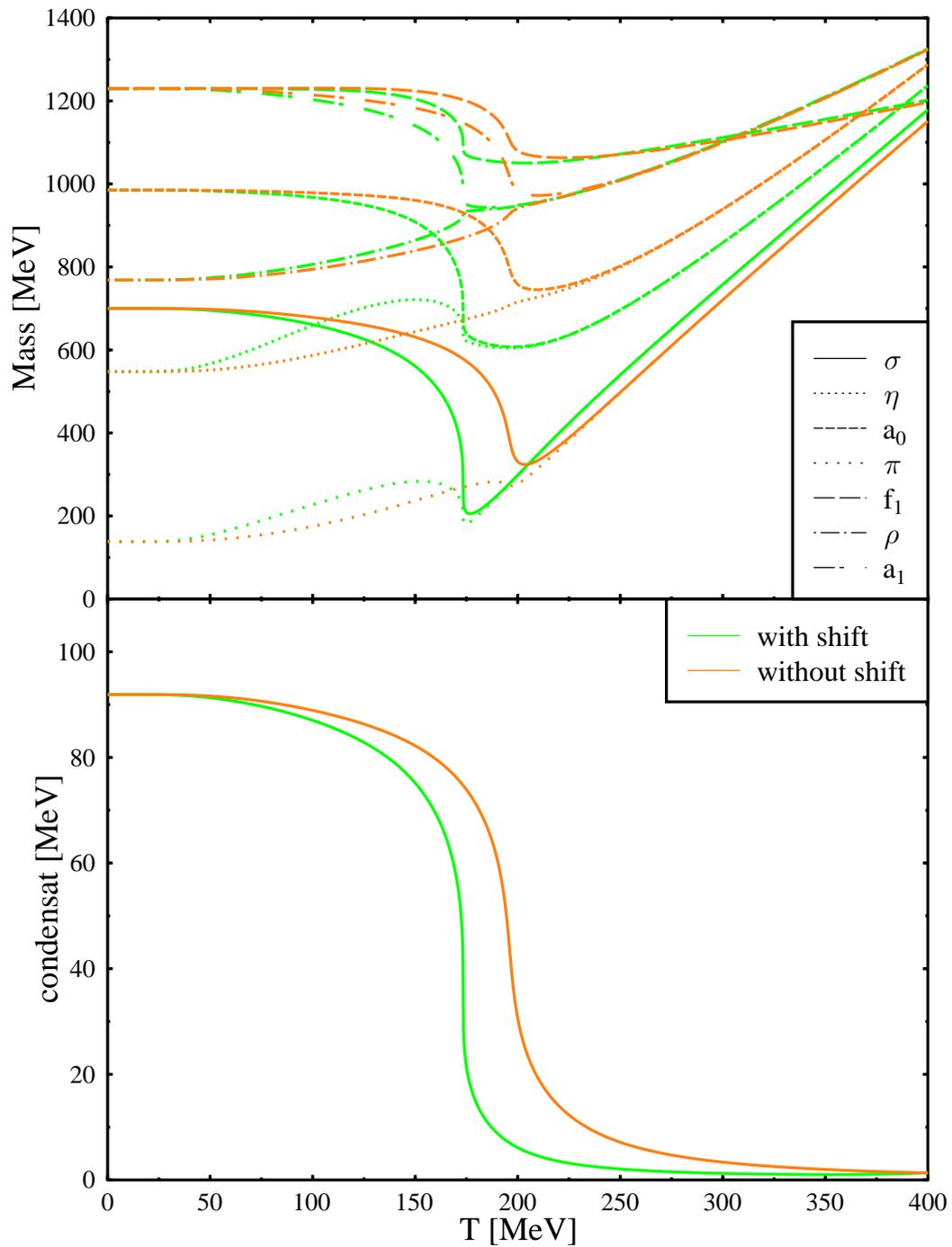


Abbildung 2.3: Die Massen der Mesonen und das Kondensat als Funktion der Temperatur mit und ohne Verschiebung für $\sigma(700)$.

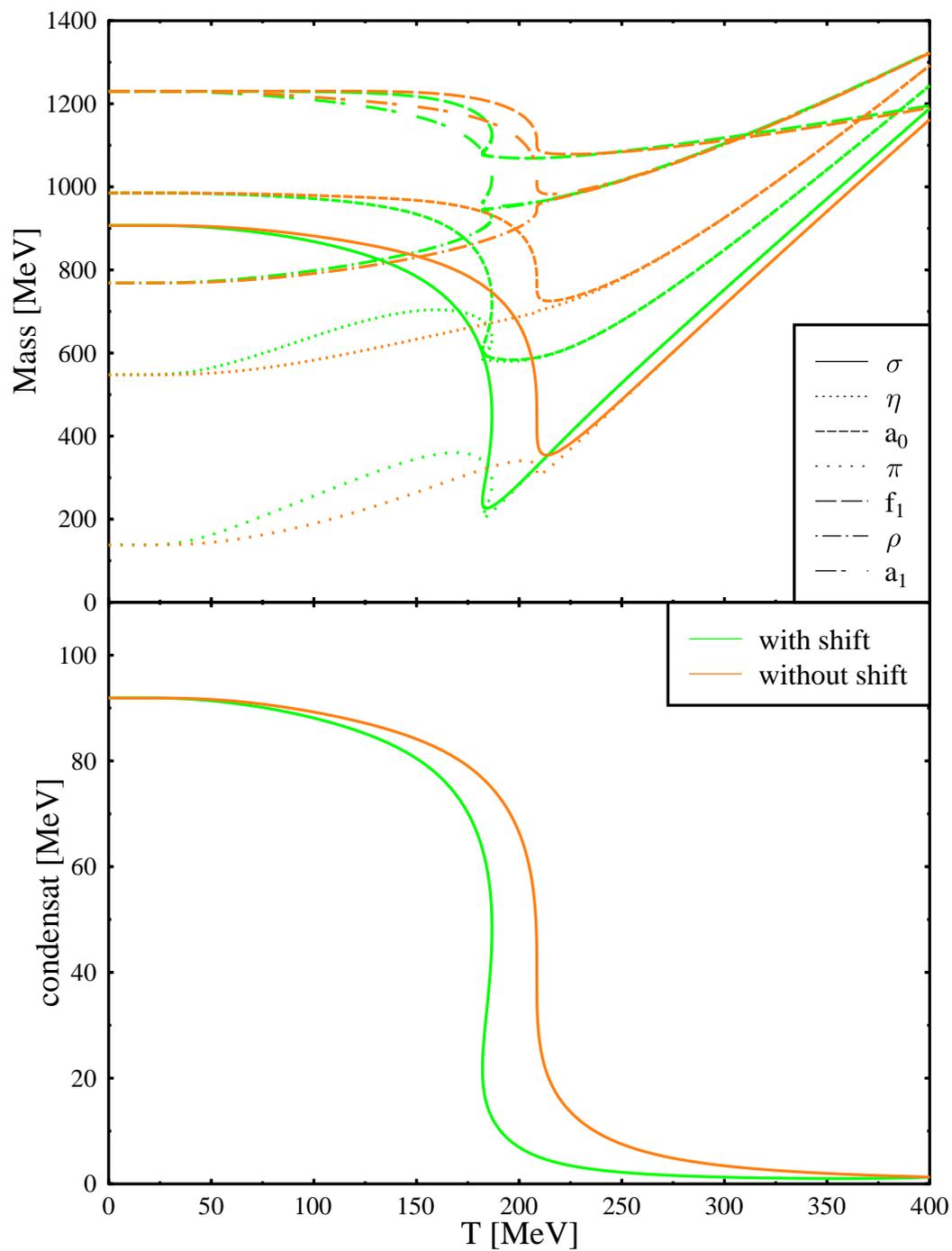


Abbildung 2.4: Die Massen der Mesonen und das Kondensat als Funktion der Temperatur mit und ohne Verschiebung für $\sigma(907)$.

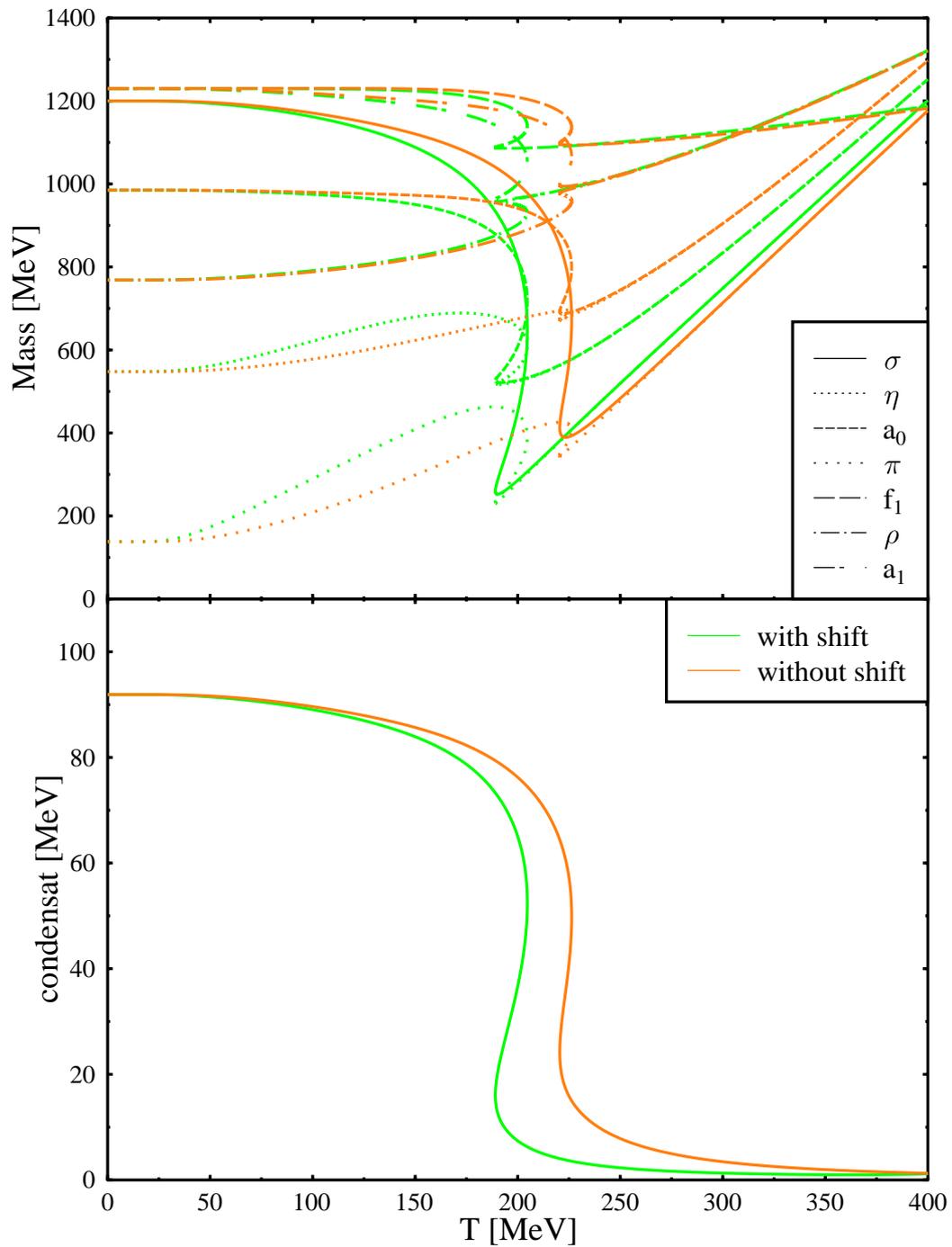


Abbildung 2.5: Die Massen der Mesonen und das Kondensat als Funktion der Temperatur mit und ohne Verschiebung für $\sigma(1200)$.

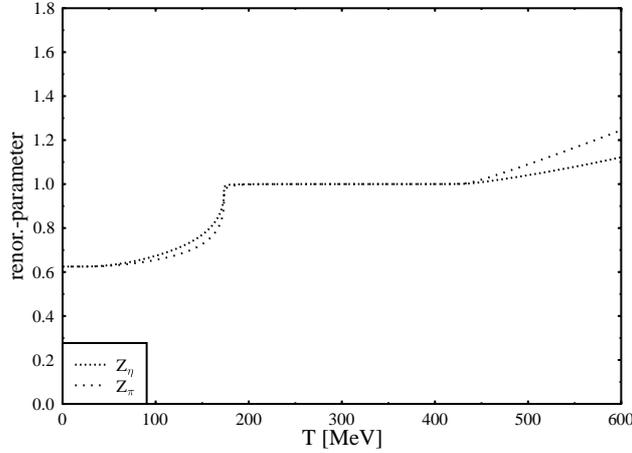


Abbildung 2.6: Die Wellenfunktionsrenormierungsparameter als Funktion der Temperatur.

steigender Vakuumsigmamasse verschiebt sich der Phasenübergang zu höheren Temperaturen, wobei die kritische Temperatur im verschobenen Fall stets um etwa 20 – 25 MeV niedriger liegt als im unverschobenen. In der (nahezu) chiral restaurierten Phase wachsen die Massen linear mit der Temperatur an, das Kondensat konvergiert gegen Null und die Renormierungsparameter sind gleich Eins (Abbildung 2.6).

Der Massenunterschied der Vektormesonen bezüglich der Verschiebungsszenarien ist in der restaurierten Phase sehr gering, da in den vektormesonischen Selbstenergien ausschließlich g^2 -Terme auftreten, die nur implizit über die effektiven Massen beziehungsweise Massenparameter der Kaulquappenterme von der Fixierung der skalarmesonischen Kopplungsterme, und somit von den Renormierungsparametern abhängen. Bei den Skalarmesonen hingegen ist in der restaurierten Phase entsprechend deutlich ein Massenunterschied bezüglich der Verschiebungsszenarien zu erkennen.

Bis zu einer Vakuumsigmamasse von 700 MeV finden in beiden Verschiebungsszenarien Crossover-Phasenübergänge statt. Bei genau 700 MeV Vakuumsigmamasse (Abbildung 2.3) manifestiert sich im verschobenen Fall ein Phasenübergang zweiter Ordnung, für höhere Vakuummassen Phasenübergänge erster Ordnung. Im unverschobenen Szenario tritt erst bei $\sigma(907)$ der Phasenübergang zweiter Ordnung auf; für höhere Vakuumsigmamassen entsprechend Übergänge erster

Ordnung. Dabei führt keiner der letztgenannten Übergänge direkt in die chiral restaurierte Phase, da das Kondensat an den kritischen Punkten nicht verschwindet, und sich der danach folgende Übergang crossover-artig verhält. In diesem Bereich ist die spontane Symmetriebrechung aufgehoben, die explizite hingegen noch nicht.

Die beiden Verschiebungsszenarien liefern also in Doppelblasennäherung unabhängig von der Vakuummasse des σ -Mesons zwei qualitativ sehr ähnliche Übergänge in die chiral restaurierte Phase. Quantitativ offenbaren sich jedoch wie gesehen abhängig von der Vakuumsigma-masse deutliche Unterschiede zwischen den beiden Szenarien.

Bevor der skalare Sektor des Modells einem Vergleich mit chiralen $U(N)_L \times U(N)_R$ -Modellen gestellt wird, deren Zweiflavourfall als Grenzfall $g \rightarrow 0$ vorliegenden Modells interpretiert werden kann, sei auf ein etwas bizarres Feature des verschobenen Szenarios hingewiesen. Das Medium geht bei Temperaturen über 400 MeV in eine neue Phase über, was sich schon in der Darstellung der Renormierungsparameter (Abbildung 2.6) andeutet, deren Temperaturintervall bis 600 MeV reicht. In Abbildung 2.7 sind die Massen und das Kondensat der beiden Szenarien gegen Temperaturen bis zu 2000 MeV aufgetragen. Während die chiralen Partner des Systems des unverschobenen Szenarios entartet bleiben, ist dies für das verschobene Szenario nicht der Fall. Entsprechend wächst der Ordnungsparameter über 400 MeV monoton an. Eine stichhaltige Erklärung ist dem Autor zu diesem Effekt nicht eingefallen, aber daß sich das System, beziehungsweise das Kondensat, unter der Egide der Selbstkonsistenz, die sich durch eine extrem starke Korrelation und Verzahnung der Freiheitsgrade auszeichnet, irgendwie wieder „aufzuschaukeln“ vermag, ist nicht unbedingt überraschend. Tröstlicherweise findet diese Zueignung in einem Temperaturbereich statt, in der das Modell und sein zugrundeliegendes Teilchenbild jede Legitimation verloren hat. Der Anspruch des Modells ist es, den chiralen Phasenübergang als eine effektive Manifestation des Übergangs der hadronischen Materie zu einem Quark-Gluon-Plasma zu beschreiben. Da dieser Übergang nach gegenwärtigem Wissensstand bei Temperaturen über 300 MeV längst abgeschlossen sein sollte, kann man alle Sorgen und Zweifel bezüglich des Auftauchens dieser neuen Phase fahren lassen, und die sonstigen durch das Modell in den relevanten Bereichen gemachten Aussagen weiterhin ernst nehmen.

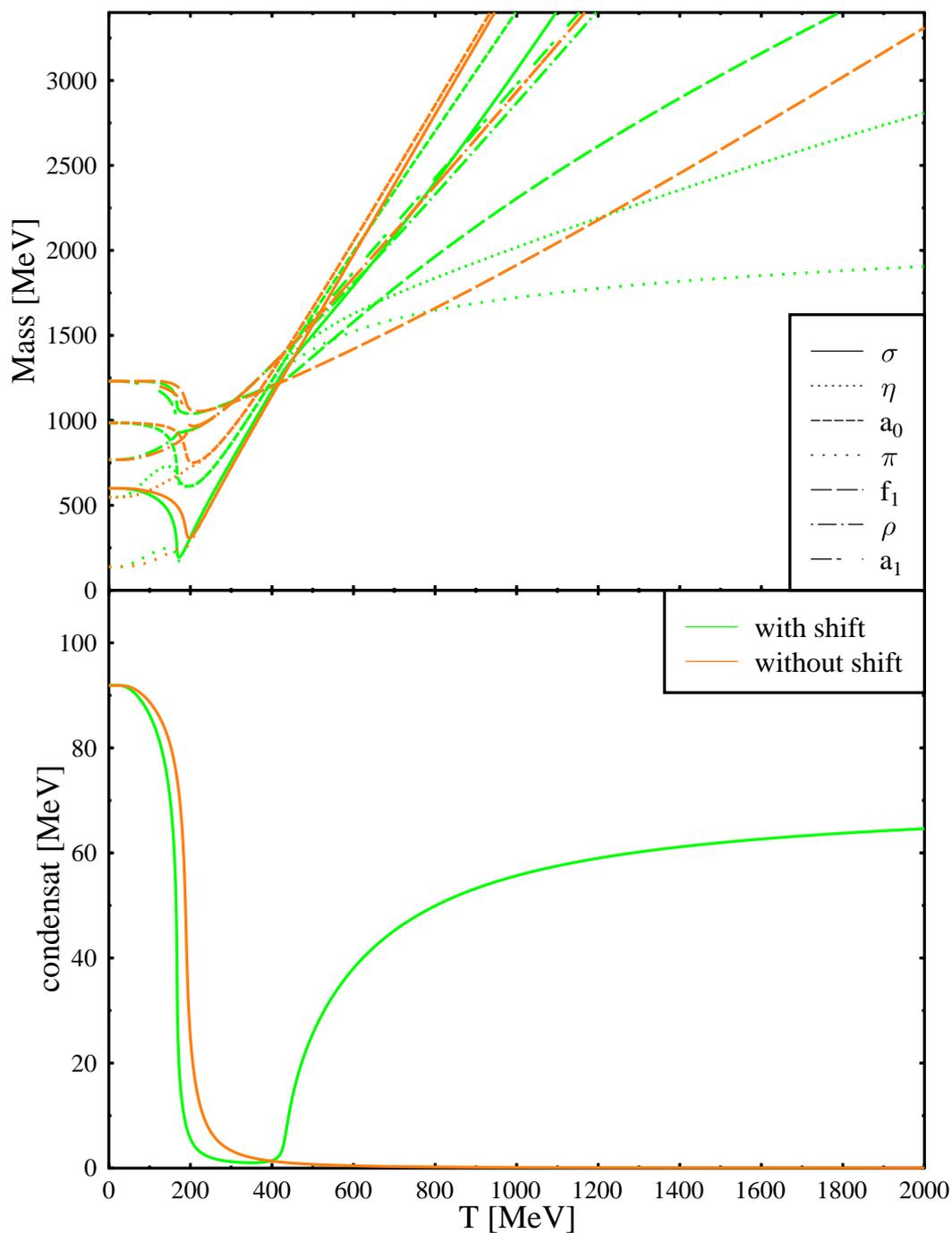


Abbildung 2.7: Die Massen und das Kondensat der beiden Verschiebungsszenarien bei Temperaturen bis zu 2000 MeV.

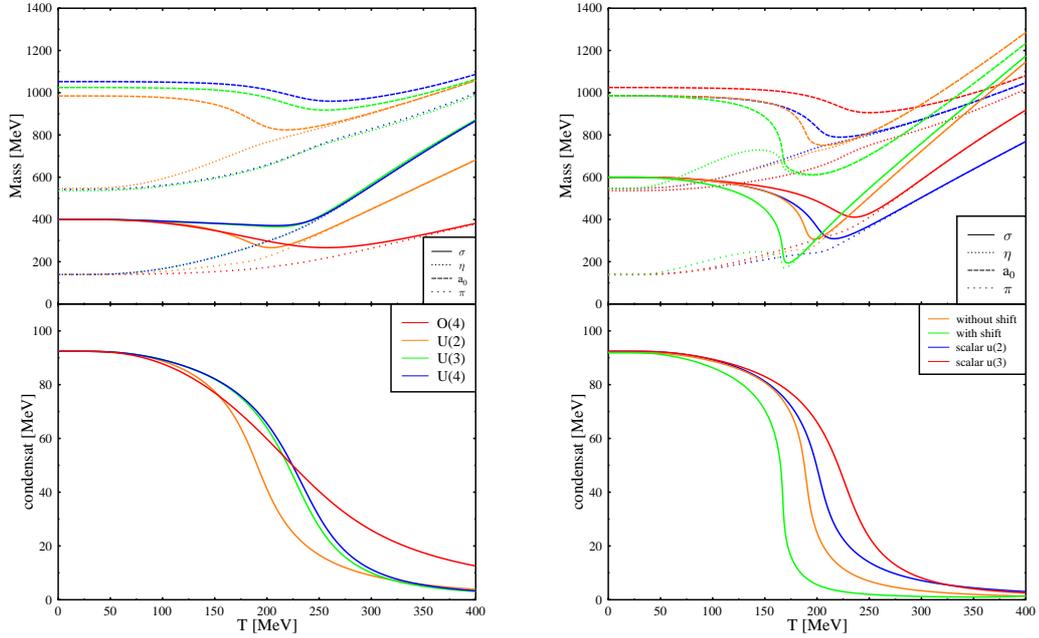


Abbildung 2.8: Die linke Abbildung zeigt die Massen und das Kondensat der leichtesten Skalarmesonen der skalaren $U(N_{f_{2-4}})$ -Modelle, sowie des $O(4)$ -Modells in Doppelblasennäherung; die rechte vergleicht Skalarmesonen und Kondensat vorliegender Modelle mit den skalaren $U(2)$ - und $U(3)$ -Modellen.

Abbildung 2.8 (links) zeigt die leichtesten Skalarmesonen, das heißt nur die sich durch up- und down-Freiheitsgrade konstituierenden, in Doppelblasennäherung für das $O(4)$ -, $U(2)_L \times U(2)_{R-}$, $U(3)_L \times U(3)_{R-}$ und $U(4)_L \times U(4)_{R-}$ -Modell. Das $O(4)$ -Modell unterscheidet sich vom $U(2)_L \times U(2)_{R-}$ -Modell durch das Fehlen des η -Singulets und des a_0 -Tripletts. Beim $U(3)_L \times U(3)_{R-}$ und $U(4)_L \times U(4)_{R-}$ -Modell wird das Teilchenspektrum durch die strange- beziehungsweise charm-Freiheitsgrade erweitert. Die hier präsentierte Darstellung entspricht dem Fall entarteter up- und down-Quarks, welcher in der in Kapitel 2.1 erörterten Weise durch einen expliziten Symmetriebrechungsterm der Art

$$\text{Tr}[H(\Phi^\dagger + \Phi)], \quad (2.82)$$

wobei

$$H = \bar{\sigma}_0 t_0 + \bar{\sigma}_8 t_8 + \bar{\sigma}_{15} t_{15} \quad (2.83)$$

ist ¹⁵, generiert wird. In diesen beiden Modellen ergeben sich zusätzliche Gapgleichungen für das strange- und charm-Kondensat. Der chirale Phasenübergang hängt dann also von mehreren Ordnungsparametern ab.

Im niederen Temperaturbereich sind Massenunterschiede zwischen den verschiedenen Modellen erkennbar, die in der restaurierten Phase noch deutlich größer werden, wobei die Unterschiede zwischen dem $U(3)_L \times U(3)_R$ - und dem $U(4)_L \times U(4)_R$ -Fall relativ gering ausfallen. Erklärt werden kann der Massenzuwachs zwischen den Modellen mit steigender flavour-Anzahl durch das Auftreten neuer Freiheitsgrade, die sich in den Gapgleichungen durch mehr mit positiven Vorzeichen auftretenden Kaulquappentermen widerspiegeln, die eine Erhöhung der selbstkonsistenten Massen bedingen. Die potentielle Energie nimmt in wechselwirkenden Systemen bekanntermaßen mit der Anzahl der Teilchen nicht nur absolut sondern auch relativ, also pro Teilchen, zu, und da die relativistische Masse eine Form potentieller Energie ist, nimmt es nicht Wunder, daß die thermischen Massen hier mit der Anzahl der Freiheitsgrade ansteigen. Für den Verlauf des Kondensats fällt der Unterschied, der Anzahl der Freiheitsgrade entsprechend, analog aus. Die Unterschiede zwischen dem $U(3)_L \times U(3)_R$ - und $U(4)_L \times U(4)_R$ -Modell fallen für die Teilchen mit strange-Freiheitsgraden, sowie für das strange-Kondensat, ähnlich gering aus ¹⁶. Erklärt werden kann dieser Sachverhalt durch die exponentielle Unterdrückung, $\approx \exp(-M/T)$, der Kaulquappen-Beiträge in Hartree-Fock-Näherung, die für die schwereren, das charm-Quark enthaltenden Mesonen wesentlich größer ist. Daher wird die Zugrundelegung von drei Freiheitsgraden im Kontext chiraler Modelle, die nicht als explizite Untersuchung von charm-Freiheitsgraden intendiert sind, von vielen Autoren als der Zugang erachtet, der einen idealen Ausgleich zwischen dem Anspruch physikalischer Genauigkeit und dem Wunsch übersichtlicher Handhabbarkeit schafft.

In der rechten Abbildung von 2.8 sind die beiden Szenarien vorliegenden Modells nebst dem skalaren $U(2)$ - und $U(3)$ -Modell aufgetragen. Die Unterschiede in den Massen, die schon vor dem Phasenübergang deutlich erkennbar sind, werden danach noch viel extremer als die Massenunterschiede zwischen den rein skalaren Modellen. Die Einbeziehung vektormesonischer Freiheitsgrade hat also viel größeren Einfluss auf die Skalarmesonen als die Einbeziehung weiterer

¹⁵Im Drei-flavour-Fall ist $\bar{\sigma}_{15} = 0$.

¹⁶Röder, Ruppert, Rischke, Chiral Symmetry Restoration In Linear Sigma Models With Different Numbers Of Quark Flavors, Phys.Rev.D68:016003,2003

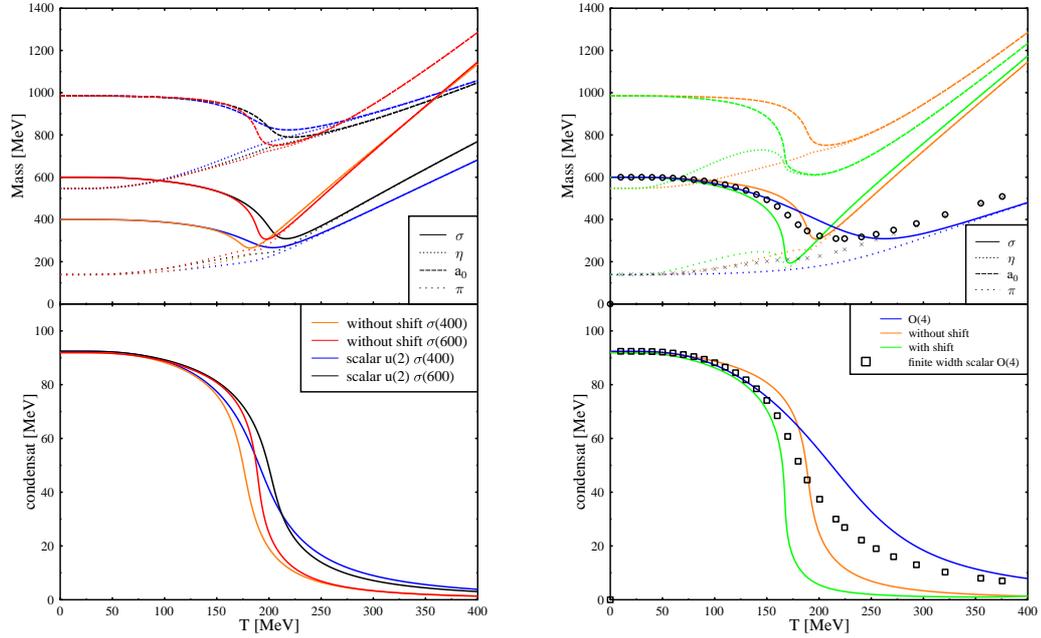


Abbildung 2.9: Die linke Abbildung zeigt das unverschobene Szenario und das skalare $U(2)$ -Modell bei $\sigma(400)$ und $\sigma(600)$. Rechts sind die beiden Szenarien und das $O(4)$ -Modell in Doppelblasen- sowie in der „endliche Breite“-Näherung.

skalarer Freiheitsgrade, schließlich koppeln die Vektormesonen mit einer Stärke von g^2 an die Skalarmesonen, und nicht mit $(\lambda_1 + \lambda_2/2)$, wie etwa die zusätzlichen strange-Mesonen im $U(3)$ -Fall.

Die beste Übereinstimmung für die kritische Temperatur im Vergleich mit den Vorhersagen aus Gitterrechnungen (im chiralen Limes!), die bei einer Temperatur von etwa 170 MeV liegen¹⁷, liefert das verschobene Szenario.

Die linke Abbildung von 2.9 zeigt das unverschobene Szenario im Vergleich mit dem skalaren $U(2)$ -Modell bei $\sigma(400)$ und $\sigma(600)$. Die Änderung in den Kurvenverläufen bezüglich der Vakuummasse des σ -Teilchens ist im ersten Fall deutlich geringer als im zweiten, was abermals von der Dominanz der g^2 -Terme herrührt. Die g^2 -Kopplung ist von der Vakuummasse des σ nicht abhängig, und

¹⁷The Status Of Lattice QCD At Finite Temperature. By Edwin Laermann (Bielefeld U.), Owe Philipsen (MIT, LNS), Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.53:163-198,2003

entsprechend geringer ist die Sensitivität des Systems bezüglich dieser.

Schließlich sollen die Ergebnisse des in vorliegender Arbeit verwendeten Modells noch mit denen eines $O(4)$ -Modells in endlicher Breitennäherung¹⁸ verglichen werden. Endliche Breitennäherung bedeutet die Einbeziehung der Imaginärteile nächster Schleifenordnung, was hier die Sonnenuntergangs-Diagramme sind, welche im Allgemeinen explizit vom Impuls abhängen, und somit den Teilchen, im Gegensatz zur Doppelblasennäherung, deren Imaginärteile verschwinden, eine endliche Zerfallsbreite geben. Die kritische Temperatur liegt im $O(4)$ -Modell mit endlicher Breite knapp 40 MeV niedriger als in Doppelblasennäherung bei etwa 170 MeV (Abbildung 2.9, rechts), und ist damit in guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Gitterrechnungen, für zwei *flavour*-Freiheitsgrade. Obwohl die Imaginärteile keinen direkten Beitrag zu den Massen liefern, sorgen sie doch für eine deutliche Verbesserung in der Beschreibung des Phasenübergangs. Es ist natürlich keine Überraschung, daß bei Einbeziehung von Aspekten von Termen höherer Ordnung in der Entwicklung die Ergebnisse realistischer ausfallen. Trotzdem ist es ein schönes Indiz dafür, wie die Einbeziehung physikalisch wichtiger Effekte wie der endlichen Breite, die wie erwähnt keinen direkten Einfluss auf die thermischen Massen hat, im Rahmen der Selbstkonsistenz zu einer quantitativen Verbesserung nur mittelbar abhängiger Observablen führt, wie es die thermische Masse ist.

¹⁸Selfconsistent Calculations Of Spectral Densities In The $O(N)$ Model: Improving The Hatree-Fock Approximation By Including Nonzero Decay Width. By Dirk Roder (Frankfurt U.), Jorg Ruppert (Duke U. Frankfurt U.), Dirk H. Rischke (Frankfurt U.),. Mar 2005. 21pp. e-Print Archive: hep-ph/0503042

2.4 Zusammenfassung und Ausblick

In vorliegender Arbeit wurde ein Modell zur Beschreibung des chiralen Phasenübergangs eines mesonischen Mediums im Gleichgewicht als effektiver Manifestation des Übergangs von hadronischer Materie zum Quark-Gluon-Plasma präsentiert, und im Rahmen eines selbstkonsistenten Vielteilchenresummationsverfahrens in Doppelblasennäherung numerisch gelöst.

Die für die Problemstellung relevanten, zugrundeliegenden Symmetrien der QCD wurden dazu in der Modellierung der Kopplungsterme konsolidiert, was seine Entsprechung in dem aus der Literatur wohlbekannten linearen Sigma-Modell fand. Dabei wurde sich durch Selektion einer $U(2)_L \times U(2)_R$ -Symmetrie auf die Einbeziehung der leichtesten Spin-0- und Spin-1-Mesonen beschränkt; baryonische Freiheitsgrade und Effekte endlicher Dichte wurden gänzlich vernachlässigt.

Die Realisierung des mesonischen Systems als thermischem Medium im Gleichgewicht wurde mit Hilfe des Imaginärzeit- oder Matsubaraformalismus bewerkstelligt.

Der Tatsache, daß die Stärke der Kopplungen im Vakuum, und erst recht bei endlichen Temperaturen, die Anwendung naiver perturbativer Näherungsmethoden verbietet, wurde durch Verwendung des CJT-Formalismus rechnergetragen, der die Herleitung selbstkonsistenter Vielteilchenresummationsschemata aus der effektiven Wirkung ermöglicht.

Die dieser effektiven Wirkung zugrundeliegende Lagrangedichte offenbarte im Goldstonemodus problematische Terme, deren Wurzel in der nicht exakten Eichinvarianz des Modells liegt. Zur Lösung dieses Problems wurden zwei Strategien entwickelt, die je nach Geschmack auch als a priori Approximationen interpretiert werden können. Die eine Strategie bestand in der Verschiebung der Axialfelder zur Eliminierung der unliebsamen Terme, die andere in der Ignorierung dieser, wobei die letztere als Grenzfall der ersteren, nämlich bei verschwindendem Verschiebungsterm, aufgefasst werden kann. Für diese beiden Verschiebungsszenarien wurde dann die effektive Wirkung, genauer das effektive Potential, in Doppelblasennäherung hergeleitet. Zur Vereinfachung des später zu lösenden Gleichungssystems wurden die vektormesonischen Vertizes, beziehungsweise Diagramme, derart approximiert, daß die longitudinalen und transversalen Freiheitsgrade der Vektormesonen entarteten. Daraufhin wurden aus dem effektiven Potential die matsubarasummierten Schwinger-Dyson-Gleichungen

abgeleitet, die sich erwartungsgemäß als ein System von gekoppelten Integralgleichungen darstellten, deren numerische Lösung mittels einer verallgemeinerten Newton-Raphson-Routine die thermischen Mesonenmassen sowie das chirale Kondensat, welches der Ordnungsparameter des chiralen Phasenübergangs ist, lieferte.

In beiden Szenarien offenbarte sich unabhängig von der Vakuummasse des σ eine Entartung in den Massen der chiralen Partner, die danach linear mit der Temperatur anwuchsen. Die kritische Temperatur im verschobenen Fall lag immer um etwa 20 – 25 MeV niedriger als im unverschobenen. Die Massen der Vektormesonen, im Gegensatz zu denen der Skalarmesonen, erwiesen sich bezüglich des Verschiebungsszenarios in der restaurierten Phase als nahezu gleich. Dies hat seine Ursache in dem ausschließlichen Auftreten von g^2 -Kopplungen in den vektormesonischen Selbstenergien. Da der vektormesonische Kopplungsparameter bei der Parameterfixierung nicht von den Vakuummassen des Pions oder des Eta-Teilchens abhängt, bleibt er auch von der Wellenfunktionsrenormierung unbeeinflusst, womit die vektormesonischen Selbstenergien nur implizit über die Argumente der Propagatoren von den Renormierungsparametern abhängen, die in der restaurierten Phase bedeutungslos werden. Entsprechend fallen die Massenunterschiede (bzgl. der Szenarien) bei den Vektormesonen vor der Restauration deutlich geringer aus als bei den Skalarmesonen.

Bei dem in der Literatur häufig benutzten Wert von $\sigma(600)$ ergab sich als kritische Temperatur des Crossover-Phasenübergangs im unverschobenen Fall ein Wert von 190 MeV, im verschobenen Fall 167 MeV. Die kritische Temperatur im verschobenen Szenario ist damit in relativ guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Gitterrechnungen (≈ 172 MeV, im chiralen Limes), die als der exakteste und vertrauenswürdigste Zugang zu diesem Problemkreis anerkannt sind.

Bis zu einer Vakuumsigmamasse von 700 MeV verliefen die Übergänge in die restaurierte Phase crossover-artig. Bei einer Vakuumsigmamasse von 700 MeV offenbarte sich für das verschobene Szenario ein Phasenübergang zweiter Ordnung; für höhere Sigmamassen entsprechend Übergänge erster Ordnung. Beim unverschobenen Szenario stellte sich erst bei $\sigma(907)$ ein Phasenübergang zweiter Ordnung ein, und für höhere Vakuumsigmamassen Phasenübergänge erster Ordnung. Dies waren jedoch keine Übergänge in die völlig chiral restaurierte Phase, sondern lediglich zu niedrigeren Kondensatenergien. Nach diesen Übergängen war der weitere Verlauf in die vollkommen restaurierte Phase crossover-artig.

Die spontane Symmetriebrechung ist in diesem Bereich bereits aufgehoben, die explizite hingegen nicht.

Beim Vergleich des skalaren Sektors vorliegendem Modells mit dem rein skalaren $U(2)_L \times U(2)_R$ - beziehungsweise $U(3)_L \times U(3)_R$ -Modell fielen zwei Tatsachen besonders auf. Zum einen waren die schon vor dem Phasenübergang deutlichen Unterschiede in den Massen nach dem Phasenübergang noch extremer, das heißt in der restaurierten Phase waren die Massen in vorliegendem Modell erheblich größer. Die Einbeziehung vektormesonischer Freiheitsgrade hat also viel größeren Einfluss auf die Skalarmesonen als die Einbeziehung weiterer skalarer Freiheitsgrade, schließlich koppeln die Vektormesonen mit einer Stärke von g^2 an die Skalarmesonen, und nicht mit $(\lambda_1 + \lambda_2/2)$, wie etwa die zusätzlichen strange-Mesonen im $U(3)_L \times U(3)_R$ -Fall. Der zweite Unterschied bestand in der Sensitivität der Modelle bezüglich der Vakuummasse des Sigma-Teilchens, die in vorliegendem Modell wesentlich geringer war als in den skalaren $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ -Modellen. Dies ist abermals eine Folge der Dominanz der g^2 -Terme, deren Fixierung nicht von der Vakuummasse des Sigma-Mesons abhängt. Vor diesem Hintergrund hat die Einbeziehung vektormesonischer Freiheitsgrade eine stabilisierende Wirkung auf die Skalarmesonen.

Mit dieser Arbeit sind natürlich die Möglichkeiten, mittels effektiver Modelle zu einem besseren Verständnis der stark wechselwirkenden Materie zu gelangen, bei weitem nicht ausgereizt. Einige Möglichkeiten der Weiterentwicklung dieses Modells wurden an geeigneter Stelle bereits angedeutet, wobei sich als vordergründige Aufgaben und Projekte, die eine unmittelbare und natürliche Erweiterung vorliegender Arbeit, quasi einen Nachtrag, darstellen, dreierlei anbietet:

Erstens die Berücksichtigung der divergenten, und in dieser Arbeit vernachlässigten Vakuumterme, die wohl am besten mit dem Countertermverfahren wie in Lenaghan und Rischke geschehen ¹⁹ zu regularisieren sind. Dabei müssen die Kopplungskonstanten entsprechend unter Einbeziehung der Vakuumselbstenergieterme bei $T = 0$ neu angepasst werden.

Als zweites sollten die hier approximierten Vertizes, beziehungsweise Diagramme, der vektormesonischen Selbstkopplungen – im Kontext des verschobenen Szenarios ist von vektoriellen, nicht von vektormesonischen Selbstkopplun-

¹⁹Lenaghan, Rischke, The O(N) Model At Finite Temperature: Renormalization Of The Gap Equations In Hatree And Large N Approximation, J.Phys.G26:431-450,2000; e-Print Archive: nucl-th/9901049

gen zu sprechen, weil die durch die Verschiebung entstandenen vektoriellen Pionenkopplungen ebenfalls betroffen sind – in ihrer vollen Pracht gewürdigt werden. Die Verletzung der Lorentzsymmetrie durch das Wärmebad als ausgezeichnetem Bezugssystem wird sich dann mittels dieser Kopplungen in der Aufhebung der Entartung der longitudinalen und transversalen Freiheitsgrade der Vektormesonen manifestieren. Für das Pion wird innerhalb des verschobenen Szenarios ein zweiter Renormierungsparameter erforderlich. Zur Identifizierung der physikalischen Freiheitsgrade wird dann eine Tensorzerlegung der vektoriellen Gleichungen erforderlich. Qualitativ wird dies sicher eine spektakuläre Bereicherung der in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse darstellen.

Als drittes sich aufdrängendes Projekt bietet sich zum Vergleich mit den beiden Verschiebungsszenarien als alternative Möglichkeit zur Handhabung des Problems mit den nicht-diagonalen Termen deren Eliminierung durch eine impulsabhängige Drehung der Gapgleichungsmatrix, ähnlich wie in Lenaghan et al.²⁰ zur Würdigung der chiralen Teilchenoszillation im Drei-Flavour-Fall geschehen, an. Dies wird dann zu einer (hoffentlich geringen) vom Impuls der jeweiligen Skalarmesonen abhängigen Oszillation zwischen den Pionen und a_1 -Teilchen sowie dem η - und f_1 -Teilchen führen.

Eine deutliche quantitative Veränderung der hier präsentierten Ergebnisse wäre im Rahmen einer perturbativen Handhabung des Modells von keiner der zwei Verbesserungen, respektive alternativen Würdigung des Problems der nichtdiagonalen Terme, zu erwarten. Unter der Egidie der Selbstkonsistenz auch nicht, allerdings mit weit geringerer Gewissheit.

Über diese Projekte hinaus tut sich ein kleiner Kosmos von Möglichkeiten auf.

Durch Einbeziehung der Imaginärteile der nächsten Terme in der Schleifenentwicklung, den Sonnenuntergangs-Diagrammen, erhalten die Teilchen eine endliche Breite, respektive Zerfallswahrscheinlichkeit. Bei Einkopplung von Photonen, was einer Handhabung vorliegenden Modells als Vektormesondominanzmodell gleichkommt, wird über das Photon ein Kanal für die Dileptonenentstehung geöffnet, die eine wunderbare Observable zur Untersuchung der Eigenschaften heißer hadronischer Medien darstellt, wie sie etwa in Targetexperimenten an den Großbeschleunigern untersucht werden (TABS, HADES, ETC.). Die Rolle, die

²⁰Lenaghan, Rischke, Schaffner-Bielich, Chiral Symmetry Restoration At Nonzero Temperature In The SU(3)(R) X SU(3)(L) Linear Sigma Model, Phys.Rev.D62:085008,2000; e-Print Archive: nucl-th/0004006

dabei dem chiralen Phasenübergang bei der Dileptonenerzeugung zukommt, ist noch weitgehend ungeklärt.

Des weiteren ist vom Standpunkt der Chiralität die Einbeziehung von Strange-Freiheitsgraden angezeigt, was die Ausdehnung vorliegenden Modells auf ein $U(3)_L \times U(3)_R$ -symmetrisches erfordert. Dabei wird im Kontext der Dileptonenphysik durch die Drei-Flavour-Ladungsmatrix – im Gegensatz zum Zwei-Flavour-Fall – neben dem ϕ -Meson auch dem ω -Meson die Kopplung an das Photon ermöglicht; darüber hinaus ergibt sich eine Mischung zwischen dem ρ - und ω -Meson.

Die Einbeziehung von baryonischen Freiheitsgraden – in dieser Arbeit gänzlich vernachlässigt – ist selbstverständlich zu einem genauen Verständnis der chiralen Physik stark wechselwirkender Materie unerlässlich; damit einhergehend auch die Berücksichtigung der Effekte endlicher Dichte, was den Rekurs auf das System als makrokanonischem erzwingt.

Natürlich sind die in den Beschleunigerexperimenten untersuchten hadronischen Medien oft weit davon entfernt, äquilibrierte Zustände zu sein, wie in dieser Arbeit angenommen. Gerade für das Verständnis der Dileptonenphysik scheinen Nichtgleichgewichtseffekte eine bedeutende Rolle zu spielen ²¹. Allerdings ist die selbstkonsistente Behandlung vorliegenden Modells unter Einbeziehung endlicher Breite im Nichtgleichgewicht bei den gegenwärtigen Rechnerkapazitäten weit von einer numerischen Realisierbarkeit entfernt, und müsste in diesem Kontext auf wesentlich simple Nährungsverfahren zurückgreifen.

Und schließlich muss die kolossale Aufgabe bewältigt werden zu zeigen, unter welchen Limites die linearen Sigamamodelle aus der QCD folgen – in einem Sinne wie das Nambu-Jona-Lasinio-Modell per Ausintegration der gluonischen Freiheitsgrade aus der QCD hergeleitet wurde ²² –, um damit den relevanten Bereich dieser Modelle abzustecken. Dieser Schritt ist jedenfalls dann unerlässlich, wenn das Verstauben der Arbeiten zu diesen Modellen ein wenig hinausgezögert werden soll.

²¹Schenke, Greiner, Dilepton production from hot hadronic matter in nonequilibrium; arXiv: hep-ph/0509026

²²Klevansky, The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics, Reviews of Modern Physics, Vol64, No 3, 1992

Anhang A

Identifikation der Mesonen des $U_L(2) \times U_R(2)$ -Modells durch ihre Quarkkonstituenten

In diesem Teil des Anhangs wird dargelegt, wie man die im physikalischen Spektrum auftretenden Mesonen im vorliegenden Modell durch ihre Quarkkonstituenten via Isospinalgebra identifizieren kann ¹.

Die in der Lagrangedichte über Φ , L_μ und R_μ auftretenden mesonischen Skalar- und Vektorfelder konstituieren sich in der Isospindarstellung durch die Quarks eingedenk der Tatsache, daß

$$\bar{q}\Gamma_i q = \begin{cases} \bar{q}_L\Gamma_1 q_L + \bar{q}_R\Gamma_1 q_R & \text{für } \Gamma_1 \in \{\gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5\} \\ \bar{q}_L\Gamma_2 q_R + \bar{q}_R\Gamma_2 q_L & \text{für } \Gamma_2 \in \{1, \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\} \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

per

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sum_{a=0}^3 (\bar{q}t_a q + \bar{q}t_a \gamma_5 q)t_a &= \sum_{a=0}^3 (\sigma_a + i\pi_a)t_a \\ \sqrt{2} \sum_{a=0}^3 (\bar{q}\gamma_\mu t_a q \pm \bar{q}\gamma_\mu \gamma_5 t_a q)t_a &= \sum_{a=0}^3 ((R, L)_\mu^a)t_a, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

¹siehe hierzu: Ruppert, Dissertation, Universität Frankfurt am Main, 2003;
Röder, Ruppert, Rischke, Chiral Symmetry Restoration In Linear Sigma Models With Different Numbers Of Quark Flavors, Phys.Rev.D68:016003,2003;
Papazoglou, Diplomarbeit Physik, Universität Frankfurt am Main, 1995;
Review Of Particle Physics. Particle Data Group. By Particle Data Group (K. Hagiwara et al.). 2002
Müller, Greiner, Quantenmechanik, Teil 2 Symmetrien, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1990

wobei q ein zweidimensionaler Vektor mit spinorwertigen Einträgen $q = (u, d)$ aus Up- und Down-Quarks bezeichnet. Die t_a sind die Generatoren der $U(2)$ -Algebra. Für die skalaren Felder $\sigma_a = \sqrt{2}\bar{q}t_a q$ folgt damit

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d) \quad , \quad \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}d + \bar{d}u) \quad , \\ \sigma_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{d}u - \bar{u}d) \quad , \quad \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d) \quad .\end{aligned}\tag{A.3}$$

Entsprechend ihrer Quark-Zusammensetzung kann man den Feldern ihre Mesonen zuordnen,

$$\begin{aligned}\sigma &:= \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d) \quad , \quad a_0^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \bar{d}u \quad , \\ a_0^- &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \bar{u}d \quad , \quad a_0^0 := \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d) \quad .\end{aligned}\tag{A.4}$$

Die Felder beziehungsweise Teilchen a_0^\pm und a_0^0 entsprechen dem Triplet der $a_0(980)$ -Mesonen. Das σ -Mesonfeld wird auch häufig als $f_0(600)$ bezeichnet ².

Für die als pseudoskalare Felder identifizierbaren $\pi_a = \sqrt{2}\bar{q}t_a\gamma_5 q$ gilt analog

$$\begin{aligned}\eta &:= \pi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d) \quad , \quad \pi^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2) = \bar{d}u \quad , \\ \pi^- &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2) = \bar{u}d \quad , \quad \pi^0 := \pi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d) \quad ,\end{aligned}\tag{A.5}$$

also das η -Teilchen und das Pionentriplett.

Nun kann man die in der Lagrangedichte auftretenden Kombinationen $t_a\sigma_a$ und $t_a\pi_a$ vermöge des oben gefundenen Mesoneninhaltes umschreiben:

$$\begin{aligned}t_a\sigma_a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_0 + \sigma_3 & \sigma_1 - i\sigma_2 \\ \sigma_1 + i\sigma_2 & \sigma_0 - \sigma_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma + \frac{1}{\sqrt{2}}a_0^0 & a_0^+ \\ a_0^- & \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma - \frac{1}{\sqrt{2}}a_0^0 \end{pmatrix} \quad ,\end{aligned}\tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}t_a\pi_a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pi_0 + \pi_3 & \pi_1 - i\pi_2 \\ \pi_1 + i\pi_2 & \pi_0 - \pi_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 & \pi^+ \\ \pi^- & \frac{1}{\sqrt{2}}\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 \end{pmatrix} \quad .\end{aligned}\tag{A.7}$$

²siehe hierzu: <http://pdg.lbl.gov/2005/listings/mxxxcomb.html#mesonslight>

Die Identifikation der Vektormesonen verläuft, unter Beachtung von

$$R_\mu = V_\mu + A_\mu, \quad L_\mu = V_\mu - A_\mu \quad \leftrightarrow \quad V_\mu = \frac{1}{2}(R_\mu + L_\mu), \quad A_\mu = \frac{1}{2}(R_\mu - L_\mu)$$

in völliger Analogie zur Identifikation der skalaren und pseudoskalaren Mesonen, weshalb hier auf eine detaillierte Darstellung für diesen Fall verzichtet wird.