

Phänomenologie des Dilatons in einem chiralen
Modell mit (Axial-) Vektormesonen

Diplomarbeit

von

Stanislaus Janowski

Institut für Theoretische Physik

vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

Frankfurt am Main, Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Standardmodell der Elementarteilchen	1
1.2	Quantenchromodynamik	4
1.3	Chirale Symmetrie	7
1.4	Spontane Symmetriebrechung	9
1.5	Skalen-Anomalie	12
1.6	Mischung der Felder	17
1.7	Zerfälle	22
2	Konstruktion des effektiven Modells	27
2.1	Die mesonische Lagrangedichte	28
2.2	Das Dilaton	33
2.3	Einkopplung des Dilatons	37
2.4	Vakuumerwartungswerte	39
2.5	Berechnung der Lagrangedichte	41
2.6	Verschiebung der vollen Lagrangedichte	45
3	Mischung zwischen Sigmafeld und Glueball	49
3.1	Lagrangedichte für den Mischungswinkel	49
3.2	$SO(2)$ -Rotation der Felder	52
3.3	Mischungswinkel und Massen der Felder	54
4	Zerfallsbreiten	55
4.1	Γ -Lagrangedichte	55
4.2	Zerfallsbreiten $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \pi\pi}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow \pi\pi}$	58
4.3	Zerfallsbreiten $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi}$	62
4.4	Zerfallsbreiten $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \eta\eta}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta}$	66
4.5	Zerfallsbreiten $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \eta\eta'}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta'}$	69
4.6	Zerfallsbreiten $\Gamma_{\sigma' \rightarrow K\bar{K}}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow K\bar{K}}$	71
5	Resultate	75
5.1	χ^2 -Funktion	75
5.2	Die freien Parameter	76
5.3	Zerfallsbreiten	79
6	Zusammenfassung und Ausblick	83

A Die Mesonen	87
A.1 Der skalare Glueball	87
A.2 Die Quark-Antiquark Zustände	88
A.2.1 Skalare Mesonen	89
A.2.2 Pseudo-skalare Mesonen	90
A.2.3 Vektorielle Mesonen	91
A.2.4 Axial-vektorielle Mesonen	92
B PCAC-Relation	93
C Fehlerbestimmung mittels χ^2-Analysis	95
D Die explizite effektive Lagrangedichte	99
E Bewegungsgleichungen der Felder	101
E.1 Klein-Gordon Gleichung	102
E.2 Dirac Gleichung	103
E.3 Proca Gleichung	104
Literaturverzeichnis	104

Tabellenverzeichnis

1.1	Die Massen der Stromquarks und Leptonen.	1
1.2	Die Eigenschaften der Wechselwirkungen im Standardmodell.	2
2.1	Die Quark-Antiquark Zustände des effektiven Modells.	27
5.1	Die freien Parameter des effektiven Modells mit $\chi^2 \simeq 1.2$	76
5.2	Die freien Parameter des effektiven Modells mit $\chi^2 \simeq 4$	77
5.3	Mit freien Parametern der Tabelle 5.2 berechnete Größen.	78
5.4	Mit freien Parametern der Tabelle 5.1 berechnete Größen.	79
5.5	Zerfallsbreiten des skalaren Glueballs mit $m_1 = 775 MeV$	80
5.6	Zerfallsbreiten des physikalischen Sigmafeldes mit $m_1 = 775 MeV$	80
5.7	Zerfallsbreiten des skalaren Glueballs mit $m_1 = 809 MeV$	81
5.8	Zerfallsbreiten des physikalischen Sigmafeldes mit $m_1 = 809 MeV$	81
A.1	Zerfallskanäle der Resonanz $f_0(1500)$ [8].	88
A.2	Quantenzahlen der Quarks.	88
A.3	Zerfallskanäle der Resonanz $f_0(1370)$ [8].	90

Abbildungsverzeichnis

1.1	Energie-Skalen Parameter μ als Funktion der starken Kopplung g . . .	16
1.2	Beide Ellipsen im Vergleich. Dabei entspricht die Ellipse mit den Koordinaten (x', y') der Mischung von x - y	20
1.3	Feynman Diagramme erster Ordnung für den Zerfall des χ -Feldes. . .	23
2.1	Die Potentialdichte des Dilatons.	36
4.1	Übergangsamplitude $A_{\sigma \rightarrow \pi\pi}$ als Funktion der laufenden Sigmamasse X_{M_σ}	61
4.2	Übergangsamplitude $A_{G \rightarrow \pi\pi}$ als Funktion der laufenden skalaren Glueballmasse X_{M_G}	61
4.3	Massenverteilung des ρ -Mesons.	65
4.4	Übergangsamplitude $A_{\sigma \rightarrow \eta\eta}$ als Funktion der laufenden Sigmamasse X_{M_σ}	68
4.5	Übergangsamplitude $A_{G \rightarrow \eta\eta}$ als Funktion der laufenden skalaren Glueballmasse X_{M_G}	68
4.6	Massenverteilung des Sigmafeldes.	71
4.7	Massenverteilung des skalaren Glueballs.	72
4.8	Übergangsamplitude $A_{\sigma \rightarrow K\bar{K}}$ als Funktion der laufenden Sigmamasse X_{M_σ}	73
4.9	Übergangsamplitude $A_{G \rightarrow K\bar{K}}$ als Funktion der laufenden skalaren Glueballmasse X_{M_G}	73
6.1	Phasendiagramm der stark wechselwirkenden Kernmaterie.	86

Vorwort

Ist es möglich all die Materie in immer kleinere Bausteine zu zerlegen? Diese Frage haben sich schon die griechischen Naturphilosophen gestellt und einige von ihnen waren der Überzeugung, dass es fundamentale, nicht mehr zerlegbare Bausteine der Materie geben muss, aus denen die makroskopischen Strukturen des Universums aufgebaut sind. Damit war die Idee des Atoms¹, die auf Demokrit und seinen Lehrer Leukipp etwa 500 v. Chr. zurückgeht, geboren. Sie gingen davon aus, dass die gesamte Materie aus unteilbaren Einheiten aufgebaut ist, wobei die experimentelle Überprüfung dieser Vermutung zur damaligen Zeit nicht möglich war. Andere Gelehrte, wie z.B. deren Zeitgenosse Empedokles, vertraten die Lehre der vier Elemente - Wasser, Luft, Feuer und Erde - was man als „Standardmodell der Elementarteilchen“ jener Zeit auffassen könnte.

Heute geht man davon aus, dass die gesamte Materie aus fundamentalen Teilchen, den Quarks und Leptonen, aufgebaut ist². Im Gegensatz zur damaligen Zeit, werden heute immer leistungsfähigere Beschleunigeranlagen gebaut, wie z.B. das im Jahr 2008 in Betrieb genommene LHC³ (Large Hadron Collider) am CERN, oder das sich noch im Bau befindliche FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research) an der GSI bei Darmstadt, die wie riesige Mikroskope immer tiefer in die Materie eindringen und Erkenntnisse über deren Aufbau und Wechselwirkungen sowie über die Evolution des Universums liefern können.

Ist man bestrebt den Aufbau der Materie zu untersuchen, so ist es unumgänglich, dass sich die Frage nach der Kraft stellt, die „die Welt im Innersten zusammenhält“. Nach heutigem Verständnis sind in der Physik auf elementarem Niveau vier fundamentale Kräfte bekannt. Das ist auf der einen Seite die Gravitation, die ihre Beschreibung in der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) findet [1]. Auf der anderen Seite sind es die elektromagnetische, die schwache und die starke Kraft, die mit lokalen Quantenfeldtheorien (QFT) beschrieben werden [2]. Die elektromagnetische Kraft, auf die die chemischen Bindungen zurückgeführt werden können und auf der ebenfalls die Stabilität der Atome beruht, wird mit der Quantenelektrodynamik (QED) beschrieben. Die Tatsache, dass Protonen, die in vereinfachter Vorstellung aus drei Quarks aufgebaut sind, sich auf Grund der positiven elektrischen Ladung abstoßen, fordert auf mikroskopischen Skalen eine Kraft, die stärker ist als die elektrische, um die Stabilität der Atomkerne zu garantieren. Diese wird einfach als starke Kraft bezeichnet und wirkt zwischen den in sechs Sorten, den Flavours, vorkommenden Quarks bzw. Teilchen, die aus ihnen aufgebaut sind, den Hadronen. Die Theorie dieser Kraft ist die

¹ Atom leitet sich aus dem Griechischen *ατομος* (atomos) ab und bedeutet das Unteilbare.

² Anlass dazu geben die tiefinelastischen Experimente.

³ Die Schwerpunktsenergien, die bei Protonkollisionen im LHC erzeugt werden können, liegen bei $\sqrt{s} \sim 14 \text{ TeV}$.

Quantenchromodynamik (QCD). Die sogenannte schwache Kraft ist die letzte fundamentale Kraft, die die Umwandlung von Quarkflavours zulässt und somit z.B. den β -Zerfall erklärt. Sie wird mit der Quantenflavourdynamik (QFD) beschrieben. Charakteristisch für die schwache Kraft ist, dass sie, im Gegensatz zur QED und QCD sowie auch der Gravitation, keine stabilen Zustände bildet. Bedingt durch den mathematischen Formalismus und experimentelle Befunde ist man heute der Auffassung, dass diese fundamentalen Kräfte durch Austauschteilchen, die sogenannten Eichfelder, übermittelt werden. Man spricht somit von einer Wechselwirkung zwischen den Materiefeldern und den Eichfeldern. Voraussetzung für solch eine Wechselwirkung ist jedoch, dass die Materiefelder die Ladung der entsprechenden Kraft bzw. Wechselwirkung tragen. So sind die Eichfelder der Gravitation die hypothetischen Gravitonen die zwischen massebehafteten Teilchen bzw. massiven Objekten ausgetauscht werden. Tragen die Materiefelder die elektrische Ladung, wie z.B. die Elektronen, so kann zwischen ihnen, durch virtuelle Photonen γ als Eichfelder, die elektromagnetische Wechselwirkung übermittelt werden. Die Materiefelder der starken Wechselwirkung sind die Quarks, die die sogenannte Farbladung tragen. Diese sind die einzigen Materiefelder, die allen Wechselwirkungen unterliegen und haben die besondere Eigenschaft, dass sie zusammen mit den Gluonen g , dies sind die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung, in Hadronen eingesperrt sind und somit nicht isoliert beobachtet werden können. Diesen Umstand bezeichnet man als Confinement. Die Gluonen haben die besondere Eigenschaft, dass sie selbst die Farbladung tragen⁴ und somit theoretisch gebundene Zustände, die sogenannten Glueballs, die in dieser Arbeit eine zentrale Rolle einnehmen werden, generieren können. Die Eichfelder der schwachen Wechselwirkung sind die Vektorbosonen W^\pm und Z^0 und die entsprechende Ladung ist die schwache Ladung. Die drei letztgenannten Wechselwirkungen bilden das heutige Standardmodell der Elementarteilchen [3]. Diese fundamentalen Wechselwirkungen des Standardmodells lassen sich aus einem einzigen Prinzip herleiten, nämlich der Forderung nach einer lokalen Eichinvarianz. Die Gravitation konnte bis heute noch nicht in das Standardmodell eingebunden werden⁵. Sie ist die schwächste Wechselwirkung der Vier, jedoch auf astronomischen Skalen die dominanteste, da sie eine unendliche Reichweite besitzt und im Gegensatz zur elektromagnetischen, die ebenfalls eine unendliche Reichweite hat, nicht abgeschirmt werden kann. Die Gluonen sind ebenso wie die Gravitonen und Photonen masselos, somit müsste auch die starke Wechselwirkung unendliche Reichweite besitzen. Die Tatsache, dass sie nur sehr kurzreichweitig ist, liegt darin begründet, dass die Gluonen die Farbladung tragen. Auf mikroskopischen Skalen spielt die Gravitation jedoch keine wesentliche Rolle. Will man mikroskopische Systeme untersuchen, wie sie z.B. Elementarteilchen darstellen, so sind die Wechselwirkungen des Standardmodells von Bedeutung, wobei die schwache Wechselwirkung bei den meisten Prozessen nicht beobachtet wird, da sie von der elektromagnetischen und der starken Wechselwirkung stark unterdrückt wird. Am besten kann die schwache Wechselwirkung beobachtet werden, wenn die elektromagnetische und die star-

⁴Eine Konsequenz nicht-abel'scher Eichtheorien ist, dass ihre Eichfelder selbst die entsprechende Ladung tragen.

⁵Mit gewissen Stringtheorien und der Quantengravitation wird versucht die Gravitation mit den restlichen Wechselwirkungen zu vereinheitlichen.

ke Wechselwirkung nicht erlaubt sind. Dies ist der Fall, wenn Neutrinos⁶ an den Prozessen beteiligt sind, oder wenn eine Umwandlung der Quarkflavours stattfindet. Um die Eigenschaften von Elementarteilchen sowie deren Wechselwirkungen zu studieren, können als Untersuchungsobjekte Streuungen⁷ sowie Zerfälle herangezogen werden. In der Theorie läuft das meist auf die Berechnung von Wirkungsquerschnitten σ und Zerfallsbreiten Γ der Teilchen hinaus. Im Fokus dieser Arbeit steht die Untersuchung von Zerfällen, insbesondere der bereits genannten Glueballs, über die starke Wechselwirkung innerhalb eines effektiven Modells⁸ mit einer, bis auf die $U(1)_A$ -Anomalie⁹ sowie die explizite Symmetriebrechung, bedingt durch die endlichen Quarkmassen, globalen chiralen $U(2)_L \times U(2)_R$ -Symmetrie. Dabei bedeutet Chiralität Händigkeit und bezieht sich auf die Projektion des Spinvektors auf den Impulsvektor. Zeigen beide in die gleiche Richtung, so ist das betrachtete Teilchen rechtshändig, ist die Richtung der Vektoren entgegengesetzt, dann handelt es sich um ein linkshändiges Teilchen¹⁰. Die starke Wechselwirkung besitzt die exakte lokale $SU(3)_c$ -Eichsymmetrie, wobei diese bei typischen hadronischen Längenskalen von etwa 1 fm eine untergeordnete Rolle spielt, und im Fall von N_f masselosen Quarks die approximative globale chirale $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ -Symmetrie.

Bevor sich den Zerfällen zugewandt wird, soll an dieser Stelle noch eine weitere für diese Arbeit wichtige Eigenschaft der QCD als QFT erwähnt werden, die Skalen-Anomalie. Diese hängt mit der Dilatation-Symmetrie zusammen, wobei es sich bei der Dilatation um eine Skalentransformation der Raum-Zeit handelt, welche für Theorien ohne charakteristische Längen- bzw. Energieskala, wie beispielsweise die klassische QCD-Lagrangedichte, erhalten bleibt. In diesem Fall ist die entsprechende Theorie Skalen invariant und besitzt entsprechend dem Noether-Theorem¹¹ [4] einen erhaltenen Strom, den Skalen-Strom. In der QCD als eine QFT wird jedoch durch die Renormierung der reinen Yang-Mills Lagrangedichte¹² ein Skalenparameter Λ hervorgebracht, wodurch die Dilatation-Symmetrie nicht mehr erhalten bleibt. Diese Brechung der Dilatation-Symmetrie wird als Skalen-Anomalie bezeichnet. Bei niedrigen Impulsen erhält man den

⁶Neutrinos zählen zu den elektrisch ungeladenen Leptonen. Sie tragen keine Farbladung und sind fast masselos. Dadurch unterliegen sie im messbaren Bereich nur der schwachen Wechselwirkung. Trotz der geringen Masse spielen sie gravitativ im Universum keine unwichtige Rolle, da sie in einer enormen Anzahl vorkommen und somit zur Klärung der Natur der dunklen Materie beitragen könnten.

⁷Bei Streuungen werden Teilchen aufeinander geschossen und man kann beispielsweise den Ablenkwinkel messen und daraus, wie bei der Rutherford-Streuung, auf die Struktur des Atoms schließen.

⁸Unter einem effektiven Modell versteht man die Realisierung grundlegender Eigenschaften, wie der Symmetrien der betrachteten Theorie.

⁹Im allgemeinen handelt es sich bei Anomalien um Symmetrien einer klassischen Lagrangedichte, die auf der Quantenebene gebrochen werden. Die globale chirale Symmetrie $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ kann zerlegt werden in $SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \times U(1)_V \times U(1)_A$, wobei $U(1)_A$ nach der Quantisierung nicht mehr erhalten ist, was als $U(1)_A$ - bzw. Chirale-Anomalie bezeichnet wird.

¹⁰Bei einem Diracfeld, welches in eine rechts- bzw. linkshändige Komponente zerlegt werden kann, wird dies als einer der beiden Eigenwerte des Operators γ^5 definiert.

¹¹Das Theorem von E. Noether ist ein physikalisch fundamentales und wohl eines der wichtigsten Theoreme, welches besagt, dass kontinuierliche Symmetrien zu erhaltenen physikalischen Größen bzw. erhaltenen Strömen und umgekehrt führen. Dabei bedeutet Symmetrie Invarianz der Wirkung unter der Transformation der entsprechenden Symmetrie.

¹²Die QCD-Lagrangedichte setzt sich zusammen aus der Dirac-Lagrangedichte, die die Wechselwirkung der Quarks durch die Gluonen beschreibt, und der reinen Yang-Mills-Lagrangedichte, die die Selbstwechselwirkung der Gluonen beschreibt.

QCD Skalenparameter $\Lambda_{QCD} \simeq 200 \text{ MeV}$, der die typische hadronische Längenskala von $\Lambda_{QCD}^{-1} \simeq 1 \text{ fm}$ ergibt.

Eine intrinsische Eigenschaft der Elementarteilchen ist, dass alle, bis auf ein paar Ausnahmen, die auf Grund gewisser Erhaltungssätze oder kleiner Massen stabil bleiben, spontan zerfallen. Quantenfeldtheoretisch wird ein Zerfall, z.B. eines Teilchens in zwei leichtere, als eine Zustandsänderung betrachtet, also als ein Übergang zwischen zwei Zuständen. Auf Grund der quantenmechanischen Natur der Elementarteilchen können bei Zerfällen nur statistische Vorhersagen getroffen werden. Dies bedeutet, dass die wesentliche Größe für die man sich interessiert, nämlich die Lebensdauer eines Teilchens, die umgekehrt proportional zur Zerfallsbreite ist¹³, eine mittlere Lebensdauer ist. Diese ist charakteristisch für die jeweilige Wechselwirkung, über die ein Teilchen zerfällt. In der starken Wechselwirkung beträgt diese 10^{-23} s . Solche kurzlebigen Teilchen bzw. Zustände werden als Resonanzen bezeichnet. In der hadronischen QCD unterscheidet man zwischen bosonischen Hadronen, den Mesonen, dies sind Quark-Antiquark Zustände $q\bar{q}$ sowie auch die Glueballs, und fermionischen Hadronen, den Baryonen, die aus drei Quarks aufgebaut sind qqq . Betrachtet man die theoretische sowie experimentelle Entwicklung der letzten 30 Jahre in der hadronischen QCD, so stellt man fest, dass im Sektor der leichten skalaren Mesonen, unterhalb der Masse von 2 GeV , die Natur dieser Zustände noch nicht eindeutig geklärt ist. In diesem Energiebereich existieren viele skalare Resonanzen, die man mit dem naiven Quark-Antiquark Bild nicht in Einklang bringen kann. Allein im skalaren-isoskalaren Kanal¹⁴ gibt es fünf Resonanzen: $f_0(600)$, $f_0(980)$, $f_0(1370)$, $f_0(1500)$ und $f_0(1710)$. Um die Natur dieser Resonanzen zu erklären, vermutet man aus theoretischer Sicht außer dem gewöhnlichen Quarkonium, d.h. einem Quark-Antiquark Zustand, weitere Zustände, wie z.B. die Glueballs, Tetraquarks sowie mesonische Moleküle [5, 6], die auf Grund gleicher Quantenzahlen $J^{PC} = 0^{++}$ alle miteinander mischen. In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich die Mischung zwischen zwei dieser Zustände, einem Quarkonium und einem Glueball, betrachtet.

Eine abschließende Klärung, welche der zuvor genannten skalaren-isoskalaren Resonanzen überwiegend als Quarkonium bzw. als Glueball identifiziert wird, steht noch aus. Gitterrechnungen der reinen Yang-Mills QCD deuten auf ein komplettes Glueballspektrum hin, wobei der Grundzustand, ein skalare-isoskalare Glueball G , im Bereich zwischen 1.4 und 1.8 GeV liegen soll [7]. Der experimentelle Nachweis dieses Glueballs bringt jedoch erhebliche Schwierigkeiten mit sich, da er, auf Grund der gleichen Quantenzahlen, nicht vom gewöhnlichen skalaren-isoskalaren Quarkonium unterschieden werden kann. In dieser Arbeit wird der skalare Glueball überwiegend als Resonanz $f_0(1500)$ und das skalare Quarkonium, das als Sigmafeld bezeichnet wird, überwiegend als die Resonanz $f_0(1370)$ identifiziert. Anschließend werden aus dem effektiven Modell die folgenden Zerfallskanäle $f_0(1500) \rightarrow \pi\pi$, $f_0(1500) \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$, $f_0(1500) \rightarrow \eta\eta$, $f_0(1500) \rightarrow \eta\eta'$, $f_0(1500) \rightarrow K\bar{K}$, die von der Particle Data Group [8] sehr gut bekannt sind, sowie $f_0(1370) \rightarrow \pi\pi$, $f_0(1370) \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$, $f_0(1370) \rightarrow \eta\eta$, $f_0(1370) \rightarrow K\bar{K}$ untersucht.

¹³Dies resultiert aus der Heisenberg'schen Unschärferelation in Energie und Zeit: $\Delta E \Delta t \geq \hbar$.

¹⁴Zudem gibt es die Isovektoren $a_0(980)$ und $a_0(1450)$ und die Isodoublets $K_0^*(800)$ sowie $K_0^*(1430)$, wobei die Resonanz $K_0^*(800)$ experimentell nicht ausreichend gesichert ist und aus diesen Grund in der Particle Data Group nicht mehr aufgeführt wird.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Standardmodell der Elementarteilchen

Das Standardmodell der Elementarteilchen besteht aus den fundamentalen Materiefeldern, den Quarks und den Leptonen¹, die jeweils in sechs Sorten vorkommen, wie der Tabelle 1.1 zu entnehmen ist. Sie werden in drei Familien zu jeweils zwei Dubletts unterteilt. Die uns umgebende Welt ist jedoch nur aus Teilchen der ersten Familie aufgebaut. Die zwei übrigen Familien sind sozusagen „Kopien“ der ersten, mit dem gravierenden Unterschied, dass die äquivalenten Teilchen von Familie zu Familie immer massiver werden. Dabei tragen die Materiefelder einen halbzahligen Spin von $\frac{1}{2}$, wodurch sie den Fermionen² angehören.

Familie	Quarks [MeV]		Leptonen [MeV]	
1	up	1.5 – 4	e^-	0.511
	down	4 – 8	ν_e	$< 3 \cdot 10^{-6}$
2	strange	80 – 130	μ^-	105.7
	charme	$1.25 - 1.35 \cdot 10^3$	ν_μ	< 0.19
3	bottom	$4.1 - 4.4 \cdot 10^3$	τ^-	1777
	top	$178 \pm 4.3 \cdot 10^3$	ν_τ	< 18.2

Tabelle 1.1: Die Massen der Stromquarks und Leptonen.

Die Wechselwirkungen im Standardmodell werden mit lokalsymmetrischen, geeichten Quantenfeldtheorien beschrieben. Die Erhaltung der lokalen Eichsymmetrie erfordert Eichfelder, die als bosonische Austauscheteilchen der jeweiligen Wechselwirkung interpretiert werden. Das Standardmodell umfasst 12 Eichfelder, wie aus der gruppentheoretischen Beschreibung und der experimentellen Bestätigung folgt. Sie sind Spin 1 Teilchen und zählen dadurch zu den Bosonen. In Tabelle 1.2 sind die Eichfelder sowie weitere charakteristische Eigenschaften der Wechselwirkungen des Standardmodells zusammengefasst.

¹Aus dem Standardmodell geht hervor, dass die Neutrinos masselos sind. Da jedoch Experimente, z.B. zum β -Zerfall oder zu Neutrino-Oszillationen, auf eine geringe dennoch aber eine endliche Masse der Neutrinos hindeuten, sind ihre Obergrenzen in der Tabelle 1.1 angegeben.

²Entsprechend dem Spin-Statistik Theorem von W. Pauli [9] hängt das statistische Verhalten von Teilchen von ihrem Spin ab. Teilchen mit einem halbzahligen Spin unterliegen der Fermi-Dirac Statistik und werden als Fermionen bezeichnet. Teilchen mit einem ganzzahligen Spin hingegen, die Bosonen, gehorchen der Bose-Einstein Statistik.

Wechselwirkung	Reichweite [m]	Kopplungskonstante	Eichfelder	Symmetrie
elektromagnetische	∞	$\alpha = e^2/4\pi$ $\simeq 1/137$	Photon γ	$U(1)$
schwache	$\leq 10^{-18}$	$G_F = g^2/M_{W^\pm}^2$ $\simeq 1.17 \cdot 10^{-5} [GeV^{-2}]$	Vektorbosonen W^\pm, Z^0	$SU(2)$
starke	$< 10^{-15}$	$\alpha_s = g_s^2/4\pi$ < 1 für $r < 1 fm$ $\gtrsim 1$ für $r \gtrsim 1 fm$	8 Gluonen g	$SU(3)_c$

Tabelle 1.2: Die Eigenschaften der Wechselwirkungen im Standardmodell.

Da Photonen masselos sind, ergibt sich für die elektromagnetische Wechselwirkung eine unendliche Reichweite. Entsprechendes sollte auch für die starke Wechselwirkung gelten, da Gluonen ebenfalls masselos sind. Doch im Gegensatz zu Photonen tragen Gluonen selbst die Ladung ihrer Wechselwirkung, die sogenannte Farbladung. Dies ist die Konsequenz der nicht-abel'schen $SU(3)_c$ -Symmetrie, wodurch die Gluonen nicht nur mit Quarks, sondern auch miteinander wechselwirken können. Auf diese Weise wird eine dynamische Gluonmasse generiert und ihre Reichweite dadurch auf etwa einen Nukleonradius beschränkt. Die sehr geringe Reichweite der schwachen Wechselwirkung erklärt sich aus der experimentellen Tatsache, dass ihre Eichfelder W^\pm und Z^0 mit

$$M_{W^\pm} = (80.398 \pm 0.025) GeV \quad (1.1)$$

sowie

$$M_{Z^0} = (91.1876 \pm 0.0021) GeV \quad (1.2)$$

massiv sind. Die endliche Masse dieser Eichfelder wird durch die spontane Symmetriebrechung erzeugt. Sie wird im Weinberg-Salam Modell³ durch den Higgsmechanismus bewirkt. In diesem Modell sind zunächst alle Leptonen und Eichfelder masselos. Durch den nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswert eines der insgesamt vier in das Modell eingebauten skalaren Felder, dem Higgsfeld, wird die lokale $U(1)_Y \times SU(2)_L$ -Symmetrie spontan gebrochen. Dies hat zur Konsequenz, dass drei der vier Eichfelder W^\pm und Z^0 sowie die Leptonen, bis auf die Neutrinos, eine endliche Masse erhalten. Die Vorhersagen des Modells sind bis auf das massive Higgsfeld⁴ experimentell bestätigt worden. Experimentelle Befunde zeigen, dass die schwache Wechselwirkung, wie ihr Name bereits sagt, schwach ist. Vergleicht man in diesem Zusammenhang die elektromagnetische Kopplung e mit der schwachen Kopplung g , indem man den elektroma-

³S. Weinberg und A. Salam haben unabhängig voneinander die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung miteinander vereinheitlicht. Durch den Beweis der Renormierbarkeit der elektroschwachen Wechselwirkung 1971 durch G. 't Hooft [10], gewann die Theorie an Bedeutung.

⁴Die experimentelle Suche nach dem Higgsfeld wurde wieder im November 2009 nach Inbetriebnahme des LHC aufgenommen. Die Schwerpunktsenergien, die bei pp -Kollisionen im LHC erzeugt werden können, liegen bei $\sqrt{s} \sim 14 TeV$. Die Untergrenze des Vakuumerwartungswertes des Higgsfeldes liegt etwa bei $114 GeV$.

gnetischen Zerfall

$$\Sigma^0(1192) \longrightarrow \Lambda\gamma \quad (1.3)$$

mit der mittleren Lebensdauer $\tau \simeq 10^{-20}$ s und den schwachen Zerfall

$$\Sigma^+(1189) \longrightarrow p\pi^0 \quad (1.4)$$

mit der mittleren Lebensdauer $\tau \simeq 10^{-10}$ s betrachtet, so lässt sich folgendes Verhältnis ermitteln

$$\frac{g}{e} \simeq \sqrt{\frac{10^{-20}}{10^{-10}}} = 10^{-5}. \quad (1.5)$$

In Anbetracht dessen wäre die schwache Kopplung fünf Größenordnungen kleiner als die elektromagnetische, was die geringe Stärke der schwachen Wechselwirkung erklären würde. Dies würde jedoch nicht mit der elektroschwachen Vereinheitlichung übereinstimmen, aus der hervorgeht, dass die beiden Kopplungen über den Weinbergwinkel θ_W wie folgt miteinander verknüpft sind

$$g \sin(\theta_W) = e. \quad (1.6)$$

Die Ursache für die geringe Stärke der schwachen Wechselwirkung liegt in den großen Massen ihrer Eichfelder⁵. Der Propagator des masselosen Photons γ ist

$$iG_\gamma^{\mu\nu}(Q^2) \equiv \frac{-ig^{\mu\nu}}{Q^2} \quad (1.7)$$

bzw. des massiven Vektorbosons W^\pm

$$iG_{W^\pm}^{\mu\nu}(Q^2) \equiv \frac{-i\left(g^{\mu\nu} - \frac{Q^\mu Q^\nu}{M_{W^\pm}^2}\right)}{Q^2 - M_{W^\pm}^2}. \quad (1.8)$$

Bei niedriger Energie kann jedoch angenommen werden, dass $Q^2 \ll M_{W^\pm}^2$ ist, woraus folgt

$$iG_{W^\pm}^{\mu\nu}(Q^2 \ll M_{W^\pm}^2) \simeq \frac{ig^{\mu\nu}}{M_{W^\pm}^2} \simeq \text{Konst.} \quad (1.9)$$

Dies bedeutet, dass bei niedrigen Impulsüberträgen der Propagator des Vektorbosons sehr klein wird und somit auch die Übergangsamplitude, was schließlich die geringe Stärke der schwachen Wechselwirkung erklärt. Bei niedrigen Impulsüberträgen wird der Propagator durch die Fermi-Kopplungskonstante

$$G = g^2/M_{W^\pm}^2 \quad (1.10)$$

ersetzt.

Die starke Strukturkonstante hat die Eigenschaft, dass sie bei kleinen Abständen bzw. hohen Impulsüberträgen abnimmt

$$Q^2 \longrightarrow \infty \Rightarrow \alpha_s(Q^2) \longrightarrow 0, \quad (1.11)$$

wodurch die Quarks bei kleinen Abständen als quasifreie Teilchen betrachtet werden können. Diesen Umstand bezeichnet man als asymptotische Freiheit

⁵Diese sind im Weinberg-Salam Modell folgendermaßen miteinander verknüpft $M_{Z^0} = M_{W^\pm}/\cos(\theta_W)$.

[11, 12]. Für hohe Impulsüberträge ist damit die Störungsrechnung in der Quantenchromodynamik, der Theorie der starken Wechselwirkung auf die noch näher eingegangen wird, anwendbar, im Gegensatz zu niedrigen Impulsüberträgen, bei denen die Strukturkonstante der starken Wechselwirkung

$$\alpha_s(Q^2) \gtrsim 1 \quad (1.12)$$

wird und man auf effektive Modelle angewiesen ist [13].

Aus theoretischer Sicht ist die elektroschwache Vereinheitlichung ein Erfolg des Standardmodells, wobei, wie bereits erwähnt die letzte experimentelle Bestätigung noch aussteht.

Eine weitere Vereinheitlichung der fundamentalen Wechselwirkungen wird mit der Grand Unification Theory (GUT) unternommen. Dabei wird versucht, die elektroschwache mit der starken Wechselwirkung zu vereinheitlichen. Laut dieser Theorie sollen sich bei Energien von etwa 10^{16} GeV die jeweiligen laufenden Kopplungskonstanten in einem Punkt treffen, was bedeuten würde, dass die drei Wechselwirkungen von gleicher Stärke wären. Aufgrund der sehr hohen Energie, die zur Überprüfung dieser Theorie notwendig wäre, gibt es keine experimentellen Befunde. Zudem wird durch diese Theorie der Zerfall des Protons vorhergesagt

$$p \longrightarrow e^+ + \pi^0 \quad (1.13)$$

oder

$$p \longrightarrow \bar{\nu}_\mu + \pi^+. \quad (1.14)$$

Bis heute sind jedoch derartige Zerfälle experimentell nicht beobachtet worden. Trotz vieler experimenteller Übereinstimmungen und unabhängig vom Ausgang der noch ausstehenden Beweise, kann das Standardmodell nicht das endgültige Modell der fundamentalen Wechselwirkungen der Elementarteilchen sein, da es unter Anderem zu viele freie Parameter enthält. Beispielsweise müssen die Massen der Quarks und Leptonen experimentell bestimmt werden und gehen nicht aus dem Modell hervor. Man kann davon ausgehen, dass die zukünftige Entwicklung, sowohl im experimentellen als auch im theoretischen Bereich, höchstwahrscheinlich nicht zur Widerlegung des Standardmodells führen, dennoch aber eine Modifikation erfordern wird.

Wie bereits angedeutet, wird sich im Folgenden weiteren Aspekten der QCD zugewandt, insbesondere deren Lagrangedichte und Symmetrien, die zur Konstruktion des effektiven Modells relevant sind.

1.2 Quantenchromodynamik

Die Theorie der starken Wechselwirkung ist die Quantenchromodynamik, die eine nicht-abel'sche Eichtheorie mit einer lokalen $SU(3)_c$ -Symmetrie ist. Ihre theoretische Beschreibung begann bereits in den 50er Jahren des 20. Jh. und umfasste zunächst eine Klassifizierung der Hadronen⁶ nach deren Quarkinhalt

⁶ Als Hadronen bezeichnet man Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen, also Teilchen, die sich aus Quarks und Gluonen zusammensetzen. Man klassifiziert Hadronen in Baryonen und Mesonen. Baryonen bestehen aus drei Quarks, z.B. die Nukleonen. Mesonen sind aus einem Quark und einem Antiquark aufgebaut, beispielsweise die Pionen. Die Glueballs, deren Konstituenten die Gluonen sind, sind ebenfalls Mesonen, da ihre Baryonzahl, wie bei Quark-Antiquark Zuständen, null ist.

mit einer $SU(2)_f$ -Symmetrie des Isospins. Nach der Entdeckung der seltsamen Teilchen, wurde diese Symmetrie zur $SU(3)_f$ -Flavour-Symmetrie⁷ durch den von Murray Gell-Mann entwickelten Eightfold Way⁸ erweitert. Ein grundlegendes Problem dieses Modells war jedoch, dass die Delta Resonanz Δ^{++} eine totalsymmetrische Wellenfunktion hätte haben müssen, was aber zugleich die Verletzung des als physikalisch fundamental angesehenen Spin-Statistik Theorem von W. Pauli [9] bedeuten würde. Aus diesem Grund wurde ein weiterer Freiheitsgrad für die Quarks im Hilbertraum - die Farbladung - eingeführt, um die Gesamtwellenfunktion zu antisymmetrisieren und somit dem Theorem zu genügen. Um die Einführung des Farbfreiheitsgrades zu rechtfertigen, sowie die richtige Anzahl der Farben N_c zu bestimmen, liefern folgende Ergebnisse aus theoretischen Berechnungen sowie deren experimenteller Überprüfung wichtige Anhaltspunkte. Beispielsweise gibt der Zerfall des neutralen Pions in zwei Photonen den Anlass für die Annahme von drei Farbladungen, die meistens als rot, blau und grün bezeichnet werden. Dieser Zerfall ergibt theoretisch eine Zerfallsbreite von

$$\Gamma_{\pi^0 \rightarrow 2\gamma}^{th} = 7.87 \cdot \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 eV. \quad (1.15)$$

Das dazu korrespondierende Experiment liefert eine Zerfallsbreite von

$$\Gamma_{\pi^0 \rightarrow 2\gamma}^{ex} = (7.95 \pm 0.05) eV. \quad (1.16)$$

Demzufolge muss der Parameter für den postulierten Farbfreiheitsgrad $N_c = 3$ sein. Das gleiche Resultat für die Anzahl der Farben ergibt die Betrachtung des Verhältnisses der Wirkungsquerschnitte bei Elektron-Positron Vernichtung

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_c \sum_f e_q^2 = \begin{cases} 5/9 \text{ für } N_f = 2 \\ 2/3 \text{ für } N_f = 3 \\ 10/9 \text{ für } N_f = 4 \\ 11/9 \text{ für } N_f = 5 \end{cases}, \quad (1.17)$$

wobei e_q die fraktionierte elektrische Ladung der Quarks ist. Diese theoretischen Ergebnisse stimmen mit dem Experiment nur dann überein, wenn $N_c = 3$ angenommen wird. An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass experimentelle Befunde zeigen, dass alle Hadronen ausschließlich als Farbsingulets vorkommen. Dies wird als Confinement bezeichnet und ist aus theoretischer Sicht bis heute noch nicht vollständig geklärt. Entsprechend den vorherigen Betrachtungen zur Farbladung gibt es offensichtlich drei Farbfreiheitsgrade. Dadurch wird jeder Quarkflavour als ein Triplet im Farbraum der lokalen $SU(3)_c$ -Symmetrie dargestellt

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

wobei jedem Eintrag aufgrund des Spins $\frac{1}{2}$ und der Tatsache, dass zu jedem Quark ein Antiquark existiert, ein 4-komponentiger komplexer Diracspinor im

⁷Das Modell wird als Vorläufer des Quarkmodells betrachtet, mit dem eine theoretische Vorhersage des Ω^- Teilchens vor seiner Entdeckung möglich wurde.

⁸M. Gell-Mann wählte den Namen "Eightfold Way" in Anlehnung an den achtfachen Weg des Buddhismus zur Weisheit aus.

Diracspinorraum zugeordnet wird. Die Quarkfelder (1.18) transformieren sich lokal unter $SU(3)_c$ -Symmetrie wie folgt

$$q_f \longrightarrow q'_f = \exp \left\{ -i \sum_{a=1}^{N_c^2-1} \theta^a(x) T_a \right\} q_f = U[g(x)] q_f, \quad (1.19)$$

dabei sind $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$ die halben Gell-Mann Matrizen, die als Generatoren der $SU(3)$ -Gruppe fungieren, und $\theta^a(x)$ die lokalen Parameter der Gruppe. Die Erhaltung der lokalen Eichsymmetrie der Lagrangedichte wird durch Definition einer eichkovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \quad (1.20)$$

gewährleistet. A_μ stellen dabei die 8 Eichfelder - die Gluonen⁹ -, die als Austauschbosonen der starken Wechselwirkung interpretiert werden und als matrixwertiges 4er-Potential die Form

$$A_\mu = \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a T_a \quad (1.21)$$

haben und sich lokal folgendermaßen transformieren

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = U[g(x)] \left(A_\mu - \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^\dagger[g(x)]. \quad (1.22)$$

Die Kopplung der Gluonen an die Quarks ist flavourunabhängig und wird durch die Dirac Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - M_f) q_f \quad (1.23)$$

beschrieben, wobei M_f die diagonale $N_f \times N_f$ -Massenmatrix der Quarks ist. Um die Selbstwechselwirkung der Eichfelder zu beschreiben, wird deren Feldstärketensor definiert

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.24)$$

dessen lokales Transformationsverhalten wie folgt ist

$$G_{\mu\nu}^a T_a \longrightarrow (G_{\mu\nu}^a T_a)' = U[g(x)] G_{\mu\nu}^a T_a U^\dagger[g(x)]. \quad (1.25)$$

f^{abc} sind dabei die Strukturkonstanten der $SU(3)$ -Gruppe.

Die reine Yang-Mills Lagrangedichte, die die Selbstwechselwirkung der Gluonen beschreibt, lautet

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (1.26)$$

Daraus resultiert schließlich die eichinvariante Lagrangedichte der Quantenchromodynamik

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - M_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

⁹Der erste direkte Beweis für die Existenz von Gluonen wurde 1979 am DESY mit dem e^+e^- -Collider PETRA durch Nachweis von 3-Jet Ereignissen erbracht.

1.3 Chirale Symmetrie

Im Fall von N_f masselosen Quarks besitzt die QCD, die nun flavourunabhängig wird, außer der exakten lokalen $SU(3)_c$ -Eichsymmetrie die approximative, bedingt der $U(1)_A$ -Anomalie, globale chirale Symmetrie¹⁰

$$U(N_f)_L \times U(N_f)_R. \quad (1.28)$$

Zur Untersuchung dieser Symmetrie werden die im Diracspinorraum wirkenden chiralen Projektionsoperatoren

$$\mathcal{P}_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \quad (1.29)$$

herangezogen, die die Quarkfelder der QCD-Lagrangedichte (1.27) in links- bzw. rechtshändige Diracspinoren zerlegen

$$q = (\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L)q = q_R + q_L, \quad (1.30)$$

$$\bar{q} = \bar{q}(\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_R) = \bar{q}_R + \bar{q}_L. \quad (1.31)$$

Für die QCD-Lagrangedichte ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \sum_{f=1}^{N_f} (i\bar{q}_{L,f}\gamma^\mu D_\mu q_{L,f} + i\bar{q}_{R,f}\gamma^\mu D_\mu q_{R,f} - i\bar{q}_{L,f}M_f q_{R,f} - i\bar{q}_{R,f}M_f q_{L,f}) \\ &\quad - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

wobei hierzu die Antikommutationsrelation $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ sowie $\mathcal{P}_{L,R}\gamma^\mu = \gamma^\mu\mathcal{P}_{R,L}$ verwendet wurde. Die Quarkfelder

$$q = \begin{pmatrix} q_u \\ q_d \\ \vdots \\ q_{N_f} \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

transformieren sich im Flavourraum der globalen unitären Symmetriegruppe (1.28) nach

$$q_L \longrightarrow q'_L = U_L q_L = \exp \left\{ -i \sum_{i=0}^{N_f^2-1} \theta_L^i T_i \right\} q_L, \quad (1.34)$$

$$q_R \longrightarrow q'_R = U_R q_R = \exp \left\{ -i \sum_{i=0}^{N_f^2-1} \theta_R^i T_i \right\} q_R, \quad (1.35)$$

mit T_i als Generatoren, wobei

$$T_0 = \sqrt{\frac{1}{2N_f}} 1_{N_f} \quad (1.36)$$

¹⁰ $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ kann zerlegt werden in $SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \times U(1)_V \times U(1)_A$.

ist, und θ^i der Parameter der Transformationen. Das Noether-Theorem besagt, dass zu jeder kontinuierlichen Symmetrie der Wirkung eine Erhaltungsgröße korrespondiert und umgekehrt. Entsprechend dem Grad der Symmetriebrechung führt dies maximal zu $2N_f$ erhaltenen bzw. nicht erhaltenen Strömen. Die rechts- und linkshändigen Ströme

$$R^\mu = V^\mu - A^\mu, \quad (1.37)$$

$$L^\mu = V^\mu + A^\mu \quad (1.38)$$

können als vektorielle

$$V^\mu = \frac{R^\mu + L^\mu}{2} \quad (1.39)$$

bzw. axial-vektorielle Ströme ausgedrückt werden

$$A^\mu = \frac{L^\mu - R^\mu}{2}. \quad (1.40)$$

Diese transformieren sich gerade bzw. ungerade unter Paritätstransformationen

$$P : V^0(t, \vec{x}) \longrightarrow V^0(t, -\vec{x}), \quad (1.41)$$

$$P : V^i(t, \vec{x}) \longrightarrow -V^i(t, -\vec{x}) \quad (1.42)$$

und

$$P : A^i(t, \vec{x}) \longrightarrow A^i(t, -\vec{x}), \quad (1.43)$$

$$P : A^0(t, \vec{x}) \longrightarrow -A^0(t, -\vec{x}). \quad (1.44)$$

Durch Variation der QCD-Lagrangedichte [14] können die Ströme

$$V_0^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q, \quad (1.45)$$

$$A_0^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q, \quad (1.46)$$

$$V_i^\mu = \bar{q}\gamma^\mu T_i q, \quad (1.47)$$

$$A_i^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 T_i q, \quad (1.48)$$

sowie deren Divergenzen

$$\partial_\mu V_0^\mu = 0, \quad (1.49)$$

$$\partial_\mu A_0^\mu = 2i\bar{q}M_f\gamma_5 q, \quad (1.50)$$

$$\partial_\mu V_i^\mu = i\bar{q}[M_f, T_i] q, \quad (1.51)$$

$$\partial_\mu A_i^\mu = i\bar{q}\{M_f, T_i\}\gamma_5 q \quad (1.52)$$

ermittelt werden.

Die Erhaltung des vektoriellen Singulett-Stroms (1.49), die mit der $U(1)_V$ -Symmetrie verbunden ist und der Baryonzahlerhaltung entspricht, gilt uneingeschränkt. Betrachtet man die Quarkmassen als entartet, dann sind auch die vektoriellen Ströme (1.51), die mit der $SU(N_f)_V$ -Gruppe beschrieben werden und deren Anzahl folglich $N_f^2 - 1$ beträgt, erhalten. Geht man von masselosen Quarks¹¹ aus, so sind zusätzlich noch die $N_f^2 - 1$ axial-vektoriellen Ströme

¹¹Da Quarks nicht masselos sind, wird die chirale Symmetrie der Lagrangedichte durch die Masse der Quarks *explizit* gebrochen. Die Stärke der expliziten Symmetriebrechung ist von den Quarkmassen abhängig.

(1.52), die ihre Beschreibung in der $SU(N_f)_A$ -Gruppe finden, erhalten. Mit dieser Annahme sollte auch der axial-vektorielle Singulett-Strom (1.50), der der $U(1)_A$ -Symmetrie entspricht, erhalten bleiben, was aber nur bei der klassischen Betrachtung der Fall ist. Analog zu den Berechnungen in der QED [15] lässt sich zeigen, dass nach der Quantisierung der QCD sich für (1.50) folgendes Resultat ergibt

$$\partial_\mu A_0^\mu = 2i\bar{q}M_f\gamma_5q - \frac{g^2N_f}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\mu\nu}^aG_{\rho\sigma}^a. \quad (1.53)$$

Dies wird als $U(1)_A$ -Anomalie¹² bezeichnet. Daraus ergibt sich im Grenzfall verschwindender Quarkmassen die explizite Brechung der globalen unitären $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ -Symmetrie zu einer $U(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ -Symmetrie bzw. bei Unterdrückung der $U(1)_V$ -Phase zu einer $SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ -Symmetrie.

1.4 Spontane Symmetriebrechung

Der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung, dessen Anwendung in der Elementarteilchenphysik auf Y. Nambu¹³ zurückgeht, spielt in der QCD, aber auch in anderen Quantenfeldtheorien, wie beispielsweise in der elektroschwachen Vereinheitlichung, für das Massenspektrum der Materie, wie sich noch zeigen wird, eine wichtige Rolle. Dabei wird eine Theorie als spontan gebrochen bezeichnet, wenn ihr Grundzustand eine geringere Symmetrie aufweist als ihre Lagrangedichte.

Bevor dies an einem globalen nicht-abel'schen $SO(3)$ -symmetrischen Modell demonstriert wird, soll an dieser Stelle ein scheinbares Paradoxon bezüglich der chiralen Symmetrie in der QCD diskutiert und aufgeklärt werden [16].

Wie im vorherigen Abschnitt abgehandelt, ist die QCD im Fall von masselosen Quarks invariant unter den chiralen Transformationen. Demzufolge würde man erwarten, dass sich die chirale Symmetrie näherungsweise im Massenspektrum der leichtesten Mesonen erkennbar macht. Betrachtet man in diesem Zusammenhang folgende vektormesonische und axial-vektormesonische Triplet-Zustände

$$\vec{\rho}^\mu \equiv \bar{q}\vec{\tau}\gamma_\mu q, \quad (1.54)$$

$$\vec{a}_1^\mu \equiv \bar{q}\vec{\tau}\gamma_\mu\gamma_5q, \quad (1.55)$$

die sich unter den vektoriellen sowie den axial-vektoriellen Isospintransformationen

$$V : q = q' \longrightarrow e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}}q \simeq (1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta})q, \quad (1.56)$$

$$A : q = q' \longrightarrow e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}}q \simeq (1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta})q \quad (1.57)$$

wie folgt verhalten

$$V : \vec{\rho}^\mu = \vec{\rho}'^\mu \longrightarrow \vec{\rho}^\mu + \vec{\Theta} \times \vec{\rho}^\mu, \quad (1.58)$$

¹²Als Anomalien bezeichnet man i.Allg. Symmetrien einer klassischen Lagrangedichte, die jedoch im quantisierten Fall gebrochen werden.

¹³2008 erhielt Y. Nambu für die Entdeckung des Mechanismus zur spontanen Symmetriebrechung bzw. zu dessen Anwendung in der Elementarteilchenphysik zusammen mit zwei weiteren Teilchenphysikern M. Kobayashi und T. Maskawa, den Nobelpreis. Die beiden Letztgenannten beschäftigten sich ebenfalls mit den Konzepten zur Symmetriebrechung und lieferten fundamentale Erkenntnisse zur CP -Verletzung.

$$V : \vec{a}_1^\mu = \vec{a}_1^{\mu'} \longrightarrow \vec{a}_1^\mu + \vec{\Theta} \times \vec{a}_1^\mu \quad (1.59)$$

sowie

$$A : \vec{\rho}^\mu = \vec{\rho}^{\mu'} \longrightarrow \vec{\rho}^\mu + \vec{\Theta} \times \vec{a}_1^\mu, \quad (1.60)$$

$$A : \vec{a}_1^\mu = \vec{a}_1^{\mu'} \longrightarrow \vec{a}_1^\mu + \vec{\Theta} \times \vec{\rho}^\mu. \quad (1.61)$$

Daraus resultiert, dass sich die Felder $\vec{\rho}^\mu$ und \vec{a}_1^μ unter (1.56) in sich selbst und unter (1.57) ineinander transformieren, was die Schlussfolgerung nahe legt, dass beide Felder die gleichen Masseneigenzustände aufweisen sollten. Die experimentellen Befunde liefern mit $M_{\rho(770)} = 775.49 \text{ MeV}$ sowie $M_{a_1} = 1230 \text{ MeV}$ jedoch das Gegenteil¹⁴. Dies erweckt den Eindruck, dass die axial-vektorielle Symmetrie der QCD nicht erfüllt ist und die chirale Symmetrie folglich einer starken Symmetriebrechung unterworfen ist. Demgegenüber zeigt die PCAC Relation (B.4), dass der schwache Zerfall des Pions näherungsweise konsistent mit der Erhaltung des axial-vektoriellen Stroms ist. Einen weiteren wichtigen Anhaltspunkt für die Erhaltung des axial-vektoriellen Stroms liefert die Goldberger-Treiman Relation [16]. Den Aufschluss über das scheinbare Paradoxon geben letzten Endes die Konsequenzen der spontanen Symmetriebrechung, die bei einer globalen Symmetrie durch das Goldstone-Theorem¹⁵ beschrieben werden. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts wird, wie anfangs angedeutet, ein globales $SO(3)$ -Modell herangezogen.

Goldstone-Theorem

Die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - V(\phi_i), \quad (1.62)$$

$$V(\phi_i) = \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i + \lambda (\phi_i \phi_i)^2, \quad (1.63)$$

wobei ϕ_i mit $i = 1, 2, 3$ ein Isektor-Skalarfeld ist, mit der globalen $SO(3)$ -Symmetrie, ist symmetrisch unter der Isospintransformation, die die Gruppe G generiert

$$G : \phi_i \longrightarrow \phi'_i = (e^{-iT_k \alpha_k})_{ij} \phi_j = U_{ij} \phi_j = [U(g)\phi]_i. \quad (1.64)$$

Dabei sind α_k die Parameter, die Rotationswinkel im Isospinraum und T_k Matrizen, die der Lie-Algebra dieser Transformationsgruppe genügen.

Betrachtet man den *Wigner-Weyl Modus*, bei dem der Massenparameter $m^2 > 0$ ist, dann liegt das Minimum des Potentials (1.63) bei $\phi_0 = 0$ und der Grundzustand ist in diesem Fall invariant unter der gesamten Transformationsgruppe, da er von allen Generatoren der Gruppe G vernichtet wird

$$G : \phi_0 \longrightarrow \phi'_0 = U(g)\phi_0 = \phi_0 = 0. \quad (1.65)$$

Für den *Goldstone-Modus*, dabei ist $m^2 < 0$, liegen die Minima bei

$$|\vec{\phi}_0| = \sqrt{\phi_1 + \phi_2 + \phi_3} = \sqrt{\frac{-m^2}{4\lambda}} \equiv \phi_0, \quad (1.66)$$

¹⁴Entsprechendes ergibt sich ebenfalls für die chiralen Partner σ und $\vec{\pi}$. Deren Massen weichen deutlich voneinander ab und sind in Anhang A zu finden.

¹⁵Nicht nur globale Eichsymmetrien, wie im folgenden Beispiel diskutiert wird, sondern auch lokale Eichsymmetrien können einer spontanen Symmetriebrechung unterliegen. Dies wird durch die Anwendung des Higgsmechanismus erreicht [17].

wodurch man unendlich viele entartete Grundzustände erhält, die auf einem Kreis mit dem Radius ϕ_0 liegen und durch Rotation ineinander überführt werden können. Nur einer dieser Grundzustände, dessen Richtung willkürlich ist, ist der physikalische. Sobald eine bestimmte Richtung, beispielsweise die der dritten Achse $\vec{\phi}_0 = r\vec{e}_3$ im Isospinraum, festgelegt ist, ist die Symmetrie in diesem Modus spontan gebrochen, da der Grundzustand nicht mehr unter der gesamten Gruppe G invariant ist, sondern nur unter ihrer Untergruppe $H \subset G$

$$H : \phi_0 \longrightarrow \phi'_0 = U(h)\phi_0 = e^{-iT_3\alpha_3}\phi_0 = \phi_0. \quad (1.67)$$

Damit vernichtet nur ein Generator den Grundzustand. Das Potential $V(\phi)$ ist jedoch unter der gesamten Gruppe G invariant

$$G : V(\phi') = V(\phi), \quad \phi \longrightarrow \phi' = U(g)\phi. \quad (1.68)$$

Betrachtet man das Potential (1.63) und die Fluktuationen der physikalischen skalaren Felder ϕ_1, ϕ_2 und χ mit $\phi_3 = \chi + \phi_0$ um den Grundzustand $\vec{\phi}_0 = r\vec{e}_3$, so ergibt sich, dass nur das skalare Feld χ massiv, mit $m_\chi^2 = 8\phi_0^2\lambda$, bleibt und ϕ_1 sowie ϕ_2 , mit $m_{\phi_1} = 0$ und $m_{\phi_2} = 0$, masselos werden. Somit liefern die zwei gebrochenen Generatoren zwei masselose skalare Felder, die Goldstone-Bosonen, und der nicht gebrochene Generator führt zu dem massiven skalaren Feld χ .

Allgemein betrachtet kann die Anzahl der Goldstone-Bosonen wie folgt ermittelt werden. Man entwickelt das Potential um das Minimum bis zur zweiten Ordnung

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \chi_i \chi_j + \mathcal{O}(\chi^3) \quad (1.69)$$

mit $\chi(x) = \phi(x) - \phi_0(x)$. Da ϕ_0 das Minimum des Potentials ist, muss die Massenmatrix, deren Eigenwerte den Massen der Felder entsprechen, positiv semidefinit sein

$$M_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \geq 0. \quad (1.70)$$

Um feststellen zu können, für welche Felder die Massenmatrix verschwindet, führt man die Gruppentransformation des Potentials durch

$$V(\phi_0) = V(\phi'_0) = V(U(g)\phi_0) = V(\phi_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \delta\phi_i \delta\phi_j + \dots, \quad (1.71)$$

wobei $\delta\phi_{i,j}$ die Variationen in $\phi_{i,j}$ unter der Gruppentransformation sind. Wegen dessen Invarianz unter der gesamten Gruppe G folgt

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \delta\phi_i \delta\phi_j \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.72)$$

Bei spontan gebrochener Symmetrie müssen somit alle Eigenwerte verschwinden, denen keine verschwindende Variation des Feldes entspricht. Falls $g \in H$ ist, dann verschwindet (1.72) bedingt der Invarianz von ϕ_0 unter H wodurch $\delta\phi_i = 0$ ist, bzw.

$$\delta\phi = \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha_3} \right)_{\alpha_3=0} \phi_0 \delta\alpha_3 = 0. \quad (1.73)$$

Falls jedoch $g \notin H$, dann ergibt sich

$$\delta\phi_i = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha_j} \right)_{\alpha_j=0} \phi_0 \right]_i \delta\alpha_j \neq 0 \quad (1.74)$$

und dadurch sind die Felder $U'(0)\phi_0$ masselos, weil das entsprechende Matrixelement verschwinden muss

$$M_{ij} [U'(0)\phi_0]_j = 0, \quad (1.75)$$

um (1.72) zu genügen.

Aus dieser gruppentheoretischen Betrachtung folgt schließlich die Anzahl der masselosen Felder, ergo der Goldstone-Bosonen.

Die Anzahl der Felder, deren Masse nicht verschwinden muss, entspricht der Dimension der Untergruppe H , bei der das Vakuum invariant bleibt. In oben angeführtem Beispiel ist $H = SO(2)$, wobei $SO(2)$ isomorph zu $U(1)$ ist und demnach nur einen Generator T_3 besitzt, zu dem ein massives Feld korrespondiert. Elemente, die nicht in H , jedoch aber in der Gruppe G enthalten sind, bilden das Coset G/H und die Dimension dieses Cosets, die gleich der Anzahl der Generatoren des Cosets ist, entspricht der Anzahl der Goldstone Bosonen. Im betrachteten Beispiel sind es $3 - 1 = 2$ Generatoren, die den zwei Goldstone-Bosonen entsprechen.

Im obigen Beispiel handelte es sich um eine klassische Ausführung des Goldstone-Theorems. Auf der Quantenebene besagt dieser, dass wenn ein Feldoperator $\phi(x)$ mit einem nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswert $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle \neq 0$ existiert und kein Singulett unter der Transformation der entsprechenden kontinuierlichen Gruppe einer Lagrangedichte ist, dann existieren im Spektrum der Zustände masselose Felder.

1.5 Skalen-Anomalie

Skalen-Anomalie ist eine fundamentale Eigenschaft der QCD als Quantenfeldtheorie und hängt mit der Dilatation¹⁶

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \lambda^{-1} x^\mu, \quad (1.76)$$

die eine Skalentransformation der Raum-Zeit ist, zusammen. Dabei ist λ der Skalierungsparameter.

Falls sich eine Wirkung unter Dilatation nicht ändert, dann besitzt das entsprechende System keine charakteristische Längen- bzw. Energieskala und man spricht von Skalen-Invarianz.

Zur Veranschaulichung soll dazu ein bosonisches und ein fermionisches System diskutiert werden.

¹⁶Die Dilatation ist ein Generator der 15 parametrischen Konformen-Gruppe. Diese setzt sich einerseits aus den zehn Generatoren der Poincare-Gruppe, die die sechs Generatoren der homogenen Lorentz-Gruppe und vier Generatoren der Raum-Zeit Translationen enthält, andererseits aus der Dilatation sowie den vier speziellen konformen Transformationen zusammen. Zur Vertiefung dieses Gegenstands wird der Leser auf Standardwerke wie z.B. [18] verwiesen.

Bosonisches System

Betrachtet man eine freie Lagrangedichte mit einem masselosen skalaren Feld φ

$$\mathcal{L}_{bos} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi), \quad (1.77)$$

so muss sich φ folgendermaßen transformieren

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x) = \lambda\varphi(\lambda x), \quad (1.78)$$

um die Wirkung von (1.77) unter (1.76) invariant zu lassen

$$\begin{aligned} S'_{bos} &= \int d^4X' \mathcal{L}'_{bos} = \frac{1}{2} \int d^4X' (\partial'_\mu\varphi' \partial'^\mu\varphi') \\ &= \frac{1}{2} \int \lambda^{-4} d^4X (\lambda^2 \partial_\mu\varphi \lambda^2 \partial^\mu\varphi) = \int d^4X \mathcal{L}_{bos} = S_{bos}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Würde man nun eine etwas allgemeinere Lagrangedichte betrachten, bei der die masselosen Felder φ miteinander koppeln

$$\mathcal{L}_{bos} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi) - \mathcal{V}(\varphi), \quad (1.80)$$

so muss die Potentialdichte folgende Form haben

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{g}{2}\varphi^4, \quad (1.81)$$

wobei g eine beliebige Kopplungskonstante ist, damit

$$\mathcal{L}_{bos} \longrightarrow \mathcal{L}'_{bos} = \lambda^4 \mathcal{L}_{bos} \quad (1.82)$$

und demnach ihre Wirkung der Dilatation Folge leisten kann. Nimmt man zudem die skalaren Felder als massebehaftet an

$$\mathcal{L}_{bos} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{g}{2}\varphi^4, \quad (1.83)$$

so ergibt sich

$$\frac{m^2}{2}\varphi^2 \longrightarrow \frac{m^2}{2}\varphi'^2 = \frac{m^2}{2}\lambda^2\varphi^2 \Rightarrow S'_{bos} \neq S_{bos}, \quad (1.84)$$

wonach die Dilatation keine Symmetrie des Systems mehr ist. Man bezeichnet dies als explizite Brechung der Skalen-Invarianz.

Fermionisches System

Ebenfalls für ein masseloses Fermionsystem

$$\mathcal{L}_{fer} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi \quad (1.85)$$

hält die Dilatation-Symmetrie, wobei sich hierzu die Fermionfelder nach

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = \lambda^{3/2}\psi(\lambda x) \quad (1.86)$$

transformieren müssen

$$\begin{aligned} S'_{fer} &= \int d^4 X' \mathcal{L}'_{fer} = \int d^4 X' \bar{\psi}' (i\gamma^\mu \partial'_\mu) \psi' \\ &= \int \lambda^{-4} d^4 X \lambda^{3/2} \bar{\psi} \lambda (i\gamma^\mu \partial_\mu) \lambda^{3/2} \psi = \int d^4 X \mathcal{L}_{fer} = S_{fer}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Nimmt man auch in diesem Fall die Felder als massebehaftet an

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi, \quad (1.88)$$

so resultiert analog zum bosonischen System

$$\bar{\psi} M \psi \rightarrow \bar{\psi}' M \psi' = \lambda^{3/2} \bar{\psi} M \lambda^{3/2} \psi = \lambda^3 \bar{\psi} M \psi \Rightarrow S'_{fer} \neq S_{fer} \quad (1.89)$$

und demnach wird die Skalen-Invarianz hier ebenfalls explizit gebrochen.

Skalen-Strom

Allgemein betrachtet müssen sich die Felder wie folgt transformieren

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x) = \lambda^d \phi_i(\lambda x), \quad (1.90)$$

wobei d die Dimension des entsprechenden Feldes ist, d.h. $d = 1$ für Bosonen und $d = \frac{3}{2}$ für Fermionen¹⁷, damit sich die entsprechende Wirkung

$$S = \int d^4 X \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (1.91)$$

unter Dilatation nicht ändert. Entsprechend dem Noether-Theorem korrespondiert zur Dilatation-Symmetrie ein Strom, der Skalen-Strom

$$J^\mu = x_\nu T^{\mu\nu}, \quad (1.92)$$

wobei $T^{\mu\nu}$ der Energie-Impuls Tensor ist

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (1.93)$$

Dies führt unmittelbar auf

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= T^\mu_\mu = T^0_0 + T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 \\ &= T^{00} - T^{11} - T^{22} - T^{33}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Folglich muss bei Skalen-Invarianz die Divergenz des Skalen-Stroms, die der Spur des Energie-Impuls Tensors entspricht, verschwinden

$$\partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu = 0. \quad (1.95)$$

¹⁷Bei einem tensoriellen System müssen sich die Felder mit $d = 2$ transformieren.

Skalen-Anomalie in der QCD

Hinsichtlich der vorigen Ausführungen ist mit

$$q_f \rightarrow q'_f = \lambda^{3/2} q_f \quad (1.96)$$

und

$$A_\mu^a \rightarrow A'^a_\mu = \lambda A_\mu^a \quad (1.97)$$

bei der QCD-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - M_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (1.98)$$

auf der klassischen Ebene die Dilatation-Symmetrie, im Fall von masselosen Quarks $M_f = 0$, erhalten

$$T_\mu^\mu = 0. \quad (1.99)$$

Auf Grund der endlichen Massen der Stromquarks $M_f \neq 0$ ist die Dilatation-Symmetrie explizit gebrochen. Da diese Massen jedoch sehr klein sind, im Vergleich zu der hadronischen Skala, ist die explizite Brechung dementsprechend gering, wodurch die Dilatation-Symmetrie approximativ erhalten bleibt

$$T_\mu^\mu = \sum_{f=1}^{N_f} M_f \bar{q} q \simeq 0. \quad (1.100)$$

Betrachtet man die QCD als QFT, dann führt es zu folgendem Ergebnis

$$T_\mu^\mu = \frac{\beta(g)}{2g} \left(\frac{1}{2} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \right) + \sum_{f=1}^{N_f} M_f \bar{q} q \neq 0. \quad (1.101)$$

Abgesehen von der leichten expliziten Brechung der Skalen-Invarianz, zerstören offensichtlich die Loop-Korrekturen die Dilatation-Symmetrie, was zur Nicht-Erhaltung des Skalen-Stroms führt und als Skalen- bzw. Spur-Anomalie bezeichnet wird. Dabei ist die Skalenabhängigkeit in der Energieabhängigkeit der laufenden Kopplungskonstanten charakterisiert

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2}{4\pi} \quad (1.102)$$

und steckt in der Beta-Funktion der Renormierungsgruppe

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = b g^3, \quad (1.103)$$

dabei ergeben Rechnungen, die 1-Loop Diagramme berücksichtigen [19] für die Konstante¹⁸

$$b = \frac{11N_c - 2N_f}{48\pi^2}. \quad (1.104)$$

¹⁸Um eine asymptotisch freie Theorie zu erhalten, muss b größer Null sein, d.h. maximal 16 Quarkflavours wären möglich.

Die Beta-Funktion gibt an, wie sich die laufende Kopplungskonstante bei einer Änderung der Renormierungsskala verhält. Ihre Lösung lautet

$$\begin{aligned} \frac{dg}{g^3} &= -b \frac{d\mu}{\mu} \\ \Rightarrow \ln \frac{\mu}{\mu_0} &= -\frac{1}{b} \int_{g_0}^g g^{-3} dg = \frac{1}{2b} \left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{g_0^2} \right) \\ \Rightarrow g^2 &= \frac{g_0^2}{1 + 2bg_0^2 \ln \frac{\mu}{\mu_0}}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Durch die Renormierungsgruppe wird somit eine Skala eingeführt, die für die jeweilige laufende Kopplungskonstante bestimmt werden muss, z.B.

$$\alpha_s(M_Z = 91.2 \text{ GeV}) \simeq 0.12 \Rightarrow g \simeq 1.22 \quad (1.106)$$

siehe Abbildung 1.1. Dies fixiert einen Skalenparameter Λ , welcher die Änderung der laufenden Kopplungskonstante mit dem Impulsübertrag kontrolliert

$$\begin{aligned} 1 + 2bg_0^2 \ln \frac{\mu}{\mu_0} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \Lambda &= \mu_0 e^{-\frac{1}{2bg_0^2}}, \end{aligned} \quad (1.107)$$

damit ergibt sich für die starke Kopplung

$$g^2(\mu) = \frac{1}{2b \ln \frac{\mu}{\Lambda}}. \quad (1.108)$$

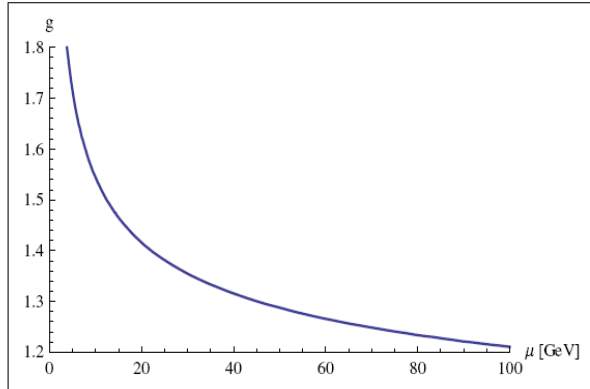


Abbildung 1.1: Energie-Skalen Parameter μ als Funktion der starken Kopplung g .

Dadurch ist es in der QCD als QFT erforderlich, nicht nur die entsprechende Lagrangedichte zu kennen, sondern auch den Skalenparameter zu spezifizieren. Bei niedrigen Impulsen von etwa 200 MeV erhält man den QCD Skalenparameter Λ_{QCD} , der die typische hadronische Längenskala von $\Lambda_{QCD}^{-1} \simeq 1 \text{ fm}$, die einem Nukleonradius entspricht, ergibt.

1.6 Mischung der Felder

An dieser Stelle soll das Prinzip der Mischung zwischen zwei Feldern veranschaulicht werden, da es in dieser Arbeit Anwendung findet [20]. Dazu betrachte man zunächst ein mechanisches Beispiel.

Die Bewegung eines klassischen Massenpunktes in einer Ebene (x, y) wird durch folgende Lagrangefunktion beschrieben

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] - V(x, y) \quad (1.109)$$

mit dem Potential eines Ellipsoids

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2). \quad (1.110)$$

Die Bewegungsgleichungen stellen zwei unabhängige harmonische Oszillatoren dar

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x = 0, \quad (1.111)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_2^2 y = 0, \quad (1.112)$$

deren allgemeine Lösungen lauten

$$x(t) = ae^{-i\omega_1 t} + a^* e^{i\omega_1 t}, \quad (1.113)$$

$$y(t) = be^{-i\omega_2 t} + b^* e^{i\omega_2 t}. \quad (1.114)$$

Dabei sind die beiden Koordinaten real und die komplexen Zahlen a und b werden durch die vier Anfangsbedingungen, die Positionen und die Geschwindigkeiten der klassischen Massenpunkte, bestimmt.

Betrachtet man nun einen x - y Mischungsterm in der Lagrangefunktion

$$L \longrightarrow L' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) - \varepsilon xy, \quad (1.115)$$

dann sind die Bewegungsgleichungen nicht mehr unabhängig

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x + \varepsilon y = 0, \quad (1.116)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_2^2 y + \varepsilon x = 0. \quad (1.117)$$

Das Potential mit dem Mischungsterm

$$V'(x, y) = \frac{1}{2} (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) - \varepsilon xy \quad (1.118)$$

ist aber ebenfalls wie (1.110) das eines Ellipsoids. Dennoch wird der Eindruck erweckt, dass sich das Problem durch den Mischungsterm in L' deutlich verkompliziert hat. Der entscheidende Unterschied beider Darstellungen ist, dass bei L die Achsen x und y mit den entsprechenden Achsen des Ellipsoids zusammenfallen im Gegensatz zu L' . Rotiert man die Achsen von L' in der x - y Ebene, so

gelangt man wieder zu den unabhängigen Bewegungsgleichungen. Diese Drehung kann mit einer $SO(2)$ -Rotation erreicht werden, was eine Matrixdarstellung des Problems erforderlich macht. Fürs Erste werden dazu folgende Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.119)$$

und der dazu transponierte

$$\vec{v}^T = (x \ y) \quad (1.120)$$

sowie eine symmetrische Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \omega_2^2 \end{pmatrix} \quad (1.121)$$

definiert. Damit lässt sich L' wie folgt darstellen

$$L' = \frac{1}{2} \frac{d\vec{v}^T}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{1}{2} \vec{v}^T \Omega \vec{v}. \quad (1.122)$$

Die Eigenwerte der Matrix Ω ergeben sich nach

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{1}_2 - \Omega) = (\lambda - \omega_1^2)(\lambda - \omega_2^2) - \varepsilon^2 = 0 \quad (1.123)$$

zu

$$\lambda_1 = \omega_1'^2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \omega_2'^2. \quad (1.124)$$

Die Eigenwertgleichung

$$\Omega \vec{v}_i = \omega_i'^2 \vec{v}_i \quad (1.125)$$

liefert nun die Eigenvektoren mit $i = 1, 2$, die der Orthogonalitätsbedingung genügen

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij}. \quad (1.126)$$

Betrachtet man dazu die orthogonale Transformationsmatrix

$$O = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \quad (1.127)$$

mit $O \in SO(2)$, so erhält man mittels dieser folgende diagonalisierte Matrix

$$O \Omega O^T = \Omega' = \begin{pmatrix} \omega_1'^2 & 0 \\ 0 & \omega_2'^2 \end{pmatrix}. \quad (1.128)$$

Die expliziten Lösungen für den vorliegenden Fall in zwei Dimensionen lauten

$$\omega_{1,2}'^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(\omega_1^2 \omega_2^2 - \varepsilon^2)} \right], \quad (1.129)$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + [(\omega_1'^2 - \omega_2^2)/\varepsilon]^2}} \begin{pmatrix} (\omega_1'^2 - \omega_2^2)/\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.130)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + [(\omega_2'^2 - \omega_2^2)/\varepsilon]^2}} \begin{pmatrix} (\omega_2'^2 - \omega_2^2)/\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.131)$$

Das Transformationsverhalten der Vektoren ist gegeben durch

$$\vec{v}' = O\vec{v}. \quad (1.132)$$

Da die Transformationsmatrix O eine orthogonale $SO(2)$ Matrix ist, kann sie explizit in Abhängigkeit des Winkels θ ausgedrückt werden, womit sich für (1.132)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.133)$$

ergibt. Die Lagrangefunktion (1.115) kann nun in Abhängigkeit von v' dargestellt werden

$$L' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} (\omega_1'^2 x'^2 + \omega_2'^2 y'^2). \quad (1.134)$$

Damit beschreibt (1.134) wie auch (1.109) zwei unabhängige Oszillatoren. Durch die $SO(2)$ -Rotation verschwindet der Mischungsterm und man erhält wieder ein symmetrisches Problem. Das Erscheinen des Mischungstermes in der Lagrangefunktion war somit die Konsequenz der falschen Wahl des Koordinatensystems. Die Transformationsmatrix O stellt somit die Relation zwischen den Koordinaten (x, y) und (x', y') dar.

Um die Eigenschaften der neuen Frequenzen ω_1' und ω_2' zu verdeutlichen, betrachte man den Grenzfall der kleinen Mischung. Dies entspricht

$$\varepsilon^2 \ll (\omega_2^2 - \omega_1^2), \quad (1.135)$$

wobei $\omega_2 > \omega_1$ angenommen wird. Damit ergibt sich für die neuen Frequenzen

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}'^2 &= \frac{1}{2} \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(\omega_1^2 \omega_2^2 - \varepsilon^2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4\varepsilon^2} \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \frac{1}{2} \left[(\omega_2^2 - \omega_1^2) + \frac{2\varepsilon^2}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \right] \end{aligned} \quad (1.136)$$

und letztlich

$$\omega_1'^2 = \omega_1^2 - \frac{\varepsilon^2}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \quad (1.137)$$

$$\omega_2'^2 = \omega_2^2 + \frac{\varepsilon^2}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}. \quad (1.138)$$

Die Frequenzen zeigen somit eine Repulsion

$$\omega_1' < \omega_1, \quad (1.139)$$

$$\omega_2' > \omega_2, \quad (1.140)$$

was ein typisches Mischungsphänomen darstellt. Aus geometrischer Sicht erhält man für das Potential ohne den Mischungsterm (1.110) im Schnittpunkt der Ebene bei $z = 1/2$ folgende Ellipsengleichung

$$\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 = 1, \quad (1.141)$$

wobei ω_1^{-1} die große und ω_2^{-1} die kleine Halbachse der Ellipse ist. Betrachtet man den Schnittpunkt der Ebene für das Potential mit dem Mischungsterm (1.118), so erhält man eine ausgedehnte Ellipse, deren große Halbachse nun

$$(\omega'_1)^{-1} > \omega_1^{-1} \quad (1.142)$$

bzw. kleine Halbachse

$$(\omega'_2)^{-1} < \omega_2^{-1} \quad (1.143)$$

ist. Die ausgedehnte Ellipse ist somit im Bezug auf die ursprüngliche gedreht, wie man der Abbildung 1.2 entnehmen kann.

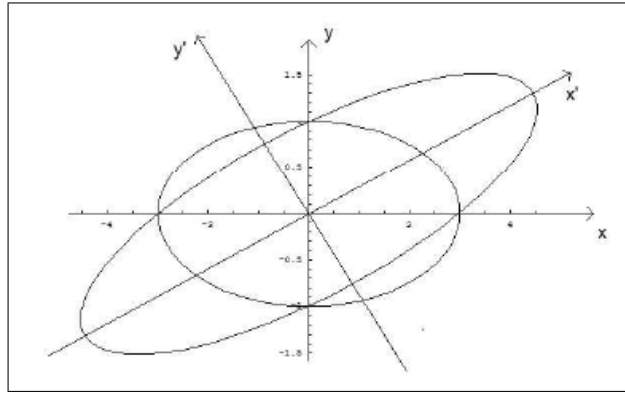


Abbildung 1.2: Beide Ellipsen im Vergleich. Dabei entspricht die Ellipse mit den Koordinaten (x', y') der Mischung von x - y .

Dieses Szenario kann analog auf Felder übertragen werden. Man betrachte hierzu eine Lagrangedichte mit den Feldern σ und G und einem Mischungsterm

$$\mathcal{L}(\sigma, G) = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}M_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{2}M_G^2 G^2 + z\sigma G. \quad (1.144)$$

Verschwimmt der Mischungsparameter, $z = 0$, so erhält man zwei unabhängige bzw. orthogonale miteinander nicht-wechselwirkende Felder mit den entsprechenden Massen M_σ und M_G . Ist dagegen $z \neq 0$, so sind die Felder zwar immer noch frei, aber nicht mehr orthogonal zueinander. Um nun eine orthogonale Lagrangedichte zu erhalten, muss wie im mechanischen Fall, eine $SO(2)$ -Rotation vollzogen werden. Man definiere dazu

$$\varphi = \begin{pmatrix} \sigma \\ G \end{pmatrix}, \quad (1.145)$$

$$M = \begin{pmatrix} M_\sigma^2 & z \\ z & M_G^2 \end{pmatrix}, \quad (1.146)$$

womit sich die Lagrangedichte (1.144) wie folgt darstellen lässt

$$\mathcal{L}(\sigma, G) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^T)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}\varphi^T M \varphi. \quad (1.147)$$

Die Massenmatrix transformiert sich nach

$$OMO^T = M' = \begin{pmatrix} M_{\sigma'}^2 & 0 \\ 0 & M_{G'}^2 \end{pmatrix}, \quad (1.148)$$

wobei sich die rotierten Massen $M_{\sigma'}$ und $M_{G'}$, die die Eigenwerte bzw. die Masseneigenzustände der Matrix M sind, aus der Bedingung

$$\det(\lambda \cdot 1_2 - M) = (\lambda - M_{\sigma}^2)(\lambda - M_G^2) - z^2 = 0 \quad (1.149)$$

ergeben. Das Transformationsverhalten der Felder ist

$$\begin{pmatrix} \sigma' \\ G' \end{pmatrix} = \varphi' = O\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ G \end{pmatrix}, \quad (1.150)$$

dabei sind die rotierten Felder σ' und G' Funktionen der nicht-rotierten bzw. der sogenannten nackten Felder σ und G . Die rotierten Felder sowie deren Massen ergeben schlussendlich eine orthogonale Lagrangedichte, d.h. eine Lagrangedichte ohne den Mischungsterm

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma', G') &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi'^T)(\partial^\mu \varphi') - \frac{1}{2}\varphi'^T M' \varphi' \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma')^2 - \frac{1}{2}M_{\sigma'}^2 \sigma'^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu G')^2 - \frac{1}{2}M_{G'}^2 G'^2. \end{aligned} \quad (1.151)$$

Durch die $SO(2)$ -Rotation ist man zu einem System gelangt, welches die rotierten Felder und die dazu korrespondierenden rotierten bzw. physikalischen Massen, da diese in einem Experiment gemessen werden können, enthält. Im Fall von $z \neq 0$, haben die nackten Massen M_σ und M_G keine physikalische Bedeutung, da die entsprechenden Felder σ und G nicht orthogonal sind und somit keine asymptotischen Zustände beschreiben. Deren physikalische Bedeutung ist nur im Grenzfall $z \rightarrow 0$ gerechtfertigt. Wie man noch bei den Berechnungen der Zerfallsbreiten sehen wird, ist es bei bestimmten physikalischen Problemen dennoch sinnvoll, zunächst von einer Lagrangedichte, die die nackten, also unphysikalischen, Felder σ und G enthält auszugehen und erst zum späteren Zeitpunkt zu einer Lagrangedichte mit den physikalischen Feldern sowie den Masseneigenzuständen überzugehen. Die direkte Beziehung zwischen den nackten unphysikalischen und den rotierten physikalischen Feldern (1.150) zeigt ein intuitives Verständnis der Mischung. Man kann sich das Feld σ' als quantenmechanische Zusammensetzung von σ und G , wobei $\cos(\theta)$ bzw. $\sin(\theta)$ die entsprechenden Amplituden sind, vorstellen. Analog zu der mechanischen Betrachtung erhält man im Grenzfall der kleinen Mischung der Felder für die Masseneigenzustände

$$M_{\sigma'}^2 = M_\sigma^2 - \frac{z^2}{M_G^2 - M_\sigma^2} \quad (1.152)$$

und

$$M_{G'}^2 = M_G^2 + \frac{z^2}{M_G^2 - M_\sigma^2}. \quad (1.153)$$

Dabei wurde für die nackten Massen angenommen, dass $M_\sigma < M_G$ ist, wodurch sich folgende Repulsionsbedingung für die Masseneigenzustände ergibt

$$M_\sigma < M_G \Rightarrow M_{\sigma'} < M_\sigma, \quad M_{G'} > M_G. \quad (1.154)$$

1.7 Zerfälle

Eine charakteristische Eigenschaft der Elementarteilchen¹⁹ ist, dass fast alle instabil sind und spontan in leichtere Teilchen zerfallen. Ein Zerfall findet nur dann nicht statt, wenn ein Erhaltungssatz es verbietet oder die Teilchen eine zu geringe Masse besitzen. Masselose Teilchen wie beispielsweise die Photonen sind stabil, da es keine leichteren Teilchen gibt, in die sie zerfallen könnten. Neutrinos besitzen zwar eine von null verschiedene Masse, die u.a. die Neutrino-Oszillationen²⁰ fordern, sind aber dennoch stabil, da ihre Massen zu gering sind, um zerfallen zu können. Das Elektron ist das leichteste elektrisch geladene Teilchen, weshalb es aus Gründen der Ladungserhaltung nicht zerfallen kann. Die leichtesten Baryonen sind die Protonen²¹ und auf Grund der Baryonzahlerhaltung ebenfalls stabil. Quantenfeldtheoretisch können Zerfälle, wie beispielsweise die der Mesonen, aus den Feynman-Diagrammen berechnet werden. In dieser Arbeit werden, aus dem im nächsten Abschnitt noch zu konstruierenden effektiven Modell, Zwei-Körper Zerfälle der Mesonen über die starke Wechselwirkung zu berechnen sein. An dieser Stelle soll nun die allgemeine Zerfallsformel für derartige Zerfälle hergeleitet werden. Man betrachte dazu folgende Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{ww} \quad (1.155)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2}M_\chi^2 \chi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 - \frac{1}{2}M_{\varphi_1}^2 \varphi_1^2 \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 - \frac{1}{2}M_{\varphi_2}^2 \varphi_2^2 \end{aligned} \quad (1.156)$$

und

$$\mathcal{L}_{ww} = g\chi\varphi_1\varphi_2. \quad (1.157)$$

Dabei sind $\chi(X)$, $\varphi_1(X)$ und $\varphi_2(X)$ skalare Felder und g deren Kopplung, wobei $X = (t, \vec{x})$ ist. Im Folgenden wird zunächst von $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ausgegangen und angenommen, dass $M_\chi > 2M_\varphi$ ist, sodass der Zerfall $\chi \rightarrow 2\varphi$ kinematisch möglich ist. Die Übergangsamplitude für diesen Zerfall bis zur ersten Ordnung auf Baumdiagrammniveau ist gegeben durch die Feynman-Diagramme in Abbildung 1.3. Beide Diagramme liefern den gleichen Beitrag zur Übergangsamplitude, wodurch in ihr der Faktor 2 resultiert und diese im betrachteten Fall einfach eine Konstante ist

$$-i\mathcal{A} = i2g. \quad (1.158)$$

Die freien Lösungen der skalaren Felder lauten

$$\chi(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}=\frac{2\pi\vec{n}}{L}} \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}}}} (b(\vec{p})e^{-iP \cdot X} + b^\dagger(\vec{p})e^{iP \cdot X}) \quad (1.159)$$

¹⁹ Als Elementarteilchen werden normalerweise Teilchen bezeichnet, die keine Substruktur aufweisen, nach heutigem Verständnis sind es die Quarks, Leptonen und die Eichfelder. Dennoch bezeichnet man in der Hadronenphysik auch zusammengesetzte Systeme, wie beispielsweise die Mesonen, als elementar.

²⁰ Die Umwandlung der drei Neutrinoarten ν_e, ν_μ und ν_τ ineinander wird als Neutrino-Oszillation bezeichnet und ist quantenmechanischer Natur. Die Voraussetzung dafür ist eine nicht-verschwindende Masse dieser Teilchen.

²¹ Wie bereits erwähnt, werden zwar nach der Grand Unification Theory Protonenzerfälle vorhergesagt, sind jedoch bis heute noch nicht beobachtet worden.

Abbildung 1.3: Feynman Diagramme erster Ordnung für den Zerfall des χ -Feldes.

und

$$\varphi(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k} = \frac{2\pi\vec{n}}{L}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} (a(\vec{k})e^{-iK \cdot X} + a^\dagger(\vec{k})e^{iK \cdot X}). \quad (1.160)$$

Dabei ist V das Volumen der Boxnormierung, in dem die Felder betrachtet werden.

$$\vec{k} = \frac{2\pi\vec{n}}{L} \quad (1.161)$$

ist der quantisierte Impuls und

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{M_\chi^2 + \vec{p}^2} \quad (1.162)$$

sowie

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{M_\varphi^2 + \vec{k}^2} \quad (1.163)$$

sind die relativistischen Energien. Die Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren der jeweiligen Felder, $b_{\vec{p}}, b_{\vec{p}}^\dagger$ sowie $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger$, genügen folgenden Kommutationrelationen

$$[a(\vec{k}_1), a(\vec{k}_2)] = [a^\dagger(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = 0, \quad (1.164)$$

$$[a(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2). \quad (1.165)$$

Dies gilt analog auch für $b_{\vec{p}}, b_{\vec{p}}^\dagger$.

Der Anfangs- bzw. Endzustand ist gegeben durch

$$|an\rangle = b^\dagger(\vec{p})|0\rangle, \quad (1.166)$$

$$|end\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1)a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle. \quad (1.167)$$

Betrachtet man nun die skalaren Felder (1.159) und (1.160) im Wechselwirkungsbild, so lautet die Übergangsmatrix

$$\langle end|\mathcal{S}|an\rangle \simeq \langle end|\mathcal{S}^{(1)}|an\rangle, \quad (1.168)$$

mit der Streumatrix

$$\mathcal{S} = \hat{T}e^{-i \int d^4X \mathcal{H}_1(X)} \quad (1.169)$$

bzw. der Streumatrix der ersten Ordnung

$$\mathcal{S}^{(1)} = -i \int d^4X_1 T[\mathcal{H}_1(X_1)], \quad (1.170)$$

wobei T der Zeit-Ordnungsoperator ist, der die physikalische Kausalität garantiert, und

$$\mathcal{H}_1 = -\mathcal{L}_1 = -g\chi(X_1)\varphi^2(X_1) \quad (1.171)$$

ist. Daraus resultiert, unter Ausnutzung von (1.164) und (1.165), folgende Übergangsmatrix der ersten Ordnung

$$\begin{aligned}
\langle end | \mathcal{S}^{(1)} | an \rangle &= \langle end | ig \int d^4 X_1 T[\chi(X_1) \varphi^2(X_1)] | an \rangle \\
&= \frac{1}{V^{3/2}} \frac{(-i\mathcal{A})}{\sqrt{2E_{\vec{k}_1} 2E_{\vec{k}_2} 2E_{\vec{p}}}} \int d^4 X_1 e^{i(P-K_1-K_2)X_1} \\
&= \frac{1}{V^{3/2}} \frac{(-i\mathcal{A})}{\sqrt{2E_{\vec{k}_1} 2E_{\vec{k}_2} 2E_{\vec{p}}}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - K_1 - K_2). \quad (1.172)
\end{aligned}$$

Die vierdimensionale Deltafunktion garantiert die Impulserhaltung am Vertex. Die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall $\chi \rightarrow 2\varphi$ erhält man durch quadrieren des Betrages der Übergangsmatrix

$$\left| \langle end | \mathcal{S}^{(1)} | an \rangle \right|^2 = \frac{1}{V^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}_1} 2E_{\vec{k}_2} 2E_{\vec{p}}} (2\pi)^8 (\delta^{(4)}(P - K_1 - K_2))^2 |-i\mathcal{A}|^2. \quad (1.173)$$

Das Quadrieren der Übergangsmatrix liefert ein Quadrat der Deltafunktion, was ein Problem darstellt. Ein weiteres Problem stellt die, infolge der Boxnormierung, vorhandene Volumenabhängigkeit dar, denn ein Zerfall eines Teilchens ist eine intrinsische Eigenschaft und deshalb sollte dieser nicht vom Volumen abhängig sein. Das Quadrat der Deltafunktion kann nach Fermi wie folgt umgeschrieben werden

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^8 ((\delta^{(4)}(P - K_1 - K_2))^2) \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - K_1 - K_2) \int d^4 X e^{iX(P-K_1-K_2)} \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - K_1 - K_2) \int d^4 X \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - K_1 - K_2) \int d^3 \vec{x} \int_0^t dt \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - K_1 - K_2) Vt. \quad (1.174)
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun, dass die quantisierten Impulse der Teilchen $\vec{k} = \frac{2\pi\vec{n}}{L}$ im Intervall $(K_1, K_1 + d^3 K_1)$ sowie $(K_2, K_2 + d^3 K_2)$ liegen, so lässt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Zerfall $\chi \rightarrow 2\varphi$ aufstellen

$$\left| \langle \psi_{end} | \mathcal{S}^{(1)} | \psi_{an} \rangle \right|^2 V \frac{d^3 K_1}{(2\pi)^3} V \frac{d^3 K_2}{(2\pi)^3}. \quad (1.175)$$

Die Ausnutzung von (1.174) und Integration über alle Impulse im Intervall ergibt schließlich einen volumenunabhängigen Ausdruck

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \frac{|-i\mathcal{A}|^2}{2E_{\vec{k}_1} 2E_{\vec{k}_2} 2E_{\vec{p}}} \delta^{(4)}(P - K_1 - K_2) d^3 K_1 d^3 K_2 t, \quad (1.176)$$

dabei wird die Größe

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \frac{|-i\mathcal{A}(\vec{k}_1, \vec{k}_2)|^2}{2E_{\vec{k}_1} 2E_{\vec{k}_2} 2E_{\vec{p}}} \delta^{(4)}(P - K_1 - K_2) d^3 K_1 d^3 K_2 \equiv \Gamma \quad (1.177)$$

als Zerfallsbreite definiert. Die Wahrscheinlichkeit zwei Teilchen φ zur Zeit t zu finden ist

$$P_{2\varphi}(t) = \Gamma t \quad (1.178)$$

bzw. die Wahrscheinlichkeit das Teilchen χ zu finden, welches noch nicht in 2φ zerfallen ist, ist

$$P_\chi(t) = 1 - \Gamma t, \quad (1.179)$$

wobei hier die Zwangsbedingung

$$t \ll \Gamma^{-1} \quad (1.180)$$

erfüllt werden muss. Andernfalls würde man nach sehr langer Zeit eine negative Wahrscheinlichkeit erhalten und dies ergäbe keinen Sinn. Betrachtet man es rekursiv, so lässt sich eine Wahrscheinlichkeit für ein allgemeines t finden

$$\begin{aligned} P_\chi(t + dt) &= P_\chi(t)(1 - \Gamma dt) \\ \Rightarrow P_\chi(t) &= e^{-\Gamma t}, \end{aligned} \quad (1.181)$$

wobei es sich dabei um eine Näherung handelt [21]. Die mittlere Lebensdauer eines Teilchens ist definiert als

$$\tau = \Gamma^{-1}. \quad (1.182)$$

Da es sich bei Mesonen um relativistische Teilchen handelt, müssen die Effekte der speziellen Relativitätstheorie berücksichtigt werden. Obige Gleichung ist die mittlere Lebensdauer des Teilchens im bewegten System. Die Eigenzeit τ_0 des Teilchens ist gegeben durch

$$\tau' = \gamma\tau \quad (1.183)$$

mit $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Die Impulse der Teilchen sind

$$P = (M_\chi, \vec{0}), \quad K_1 = (E_{\vec{k}_1}, \vec{k}_1) \text{ und } K_2 = (E_{\vec{k}_2}, \vec{k}_2). \quad (1.184)$$

Damit kann die vierdimensionale Deltafunktion wie folgt umgeschrieben werden

$$\delta^{(4)}(P - K_1 - K_2) = \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \delta(M_\chi - E_{\vec{k}_1} - E_{\vec{k}_2}). \quad (1.185)$$

Die Integration von (1.177) über d^3K_2 ergibt

$$\Gamma = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int \frac{|-i\mathcal{A}(\vec{k}_1, -\vec{k}_1)|^2}{(2E_{\vec{k}_1})^2 2M_\chi} \delta(M_\chi - 2E_{\vec{k}_1}) d^3K_1. \quad (1.186)$$

Der Betrag des Impulses der ausgehenden Teilchen ist

$$P = K_1 + K_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{M_\chi^2}{4} - M_\varphi^2}. \quad (1.187)$$

Die Deltafunktion in (1.186) kann mit

$$k_f = \sqrt{\frac{M_\chi^2}{4} - M_\varphi^2} \quad (1.188)$$

ausgedrückt werden als

$$\delta(M_\chi - 2E_{\vec{k}_1}) = \frac{4M_\chi}{k_f} \delta\left(\left|\vec{k}_1\right| - k_f\right). \quad (1.189)$$

k_f sind die ausgehenden Impulse, die den Phasenraum darstellen, d.h. es muss $M_\chi > 2M_\varphi$ gelten, anderenfalls kann der Zerfall nicht stattfinden. Sollte eine Winkelabhängigkeit des Zerfalls gegeben sein, so ist das geeignete Koordinatensystem das Sphärische. Der Wechsel zu diesen Koordinaten ergibt

$$d^3K_1 = d\Omega \left| \vec{k}_1 \right|^2 d \left| \vec{k}_1 \right|. \quad (1.190)$$

Integriert man anschließend über $d \left| \vec{k}_1 \right|$, so folgt für die Zerfallsbreite

$$\Gamma = \frac{k_f}{32\pi^2 M_\chi^2} \int d\Omega |-i\mathcal{A}|^2. \quad (1.191)$$

Ist die Übergangsamplitude jedoch winkelunabhängig und berücksichtigt man noch den Symmetriefaktor s_f , der sicherstellt, dass bei Zerfällen in identische Teilchen die Beiträge nicht mehrfach gezählt werden, so erhält man schließlich für die Zerfallsbreite der ersten Ordnung folgendes Resultat

$$\Gamma = s_f \frac{k_f}{8\pi^2 M_\chi^2} |-i\mathcal{A}|^2. \quad (1.192)$$

Für den betrachteten Fall von zwei identischen Bosonen $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ beträgt der Symmetriefaktor $s_f = \frac{1}{2}$, somit ergibt sich für den Zerfall $\chi \rightarrow 2\varphi$ folgende Formel

$$\Gamma_{\chi \rightarrow 2\varphi} = \frac{k_f}{4\pi^2 M_\chi^2} g^2. \quad (1.193)$$

Geht man jedoch von zwei unterschiedlichen Bosonen aus $\varphi_1 \neq \varphi_2$, so müssen die ausgehenden Impulse bzw. der Phasenraum und die Übergangsamplitude für diesen Fall neu ermittelt werden. Für den Phasenraum ergibt sich

$$k_f = \frac{1}{2M_\chi} \sqrt{M_\chi^4 + (M_{\varphi_1}^2 + M_{\varphi_2}^2)^2 - 2M_\chi^2(M_{\varphi_1}^2 + M_{\varphi_2}^2)} \quad (1.194)$$

und für die Übergangsamplitude

$$-i\mathcal{A} = ig \quad (1.195)$$

und damit schließlich eine Zerfallsbreite von

$$\Gamma_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2} = \frac{k_f}{8\pi^2 M_\chi^2} g^2. \quad (1.196)$$

Kapitel 2

Konstruktion des effektiven Modells

In diesem Kapitel soll die Lagrangedichte des effektiven Modells konstruiert werden. Der Ausgangspunkt ist einerseits das effektive chirale Modell mit gewöhnlichen skalaren Quarkonia und einem skalaren Glueball [22]. Andererseits ist es das lineare Sigma-Modell mit vektoriellen und axial-vektoriellen Freiheitsgraden [23, 24], bei dem die Einkopplung des skalaren Glueball Freiheitsgrades durch das Dilaton unterzogen wird. Auf diese Weise erhält man eine effektive Lagrangedichte, die die Skalen-Anomalie berücksichtigt. Die Zustände, die das effektive Modell umfasst, sind die leichtesten mesonischen Zwei-Flavour Quark-Antiquark Zustände, wie aus der Tabelle 2.1 hervorgeht, und der skalare-isoskalare Glueball G mit den Quantenzahlen

$$I(J^{PC}) = 0(0^{++}), \quad (2.1)$$

welcher sich aus den kollektiven Gluonen zusammensetzt¹.

$N_f = 2$	$I = 0$	$I = 1$	J^{PC}
skalare Felder	σ	\vec{a}_0	0^{++}
pseudoskalare Felder	η_N	$\vec{\pi}$	0^{-+}
vektor Felder	ω^μ	$\vec{\rho}^\mu$	1^{--}
axial-vektor Felder	f_1^μ	\vec{a}_1^μ	1^{++}

Tabelle 2.1: Die Quark-Antiquark Zustände des effektiven Modells.

Da das Sigmafeld

$$\sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \quad (2.2)$$

und der skalare Glueball

$$G \equiv gg \quad (2.3)$$

die gleichen Quantenzahlen besitzen, kommt es innerhalb des effektiven Modells zu deren Mischung, die durch eine $SO(2)$ -Rotation realisiert wird. Da-

¹Die für die vorliegende Arbeit wesentlichen Eigenschaften dieser Felder sind im Anhang A zusammengefasst.

bei wird nach deren Entmischung das Sigmafeld überwiegend als die skalare-isoskalare Resonanz $f_0(1370)$ und der skalare Glueball überwiegend als die, ebenfalls skalare-isoskalare, Resonanz $f_0(1500)$ identifiziert. Ferner wird der Fokus auf die Zerfälle dieser Felder auf den pseudoskalaren und vektoriellen Sektor gerichtet sein, wie den Tabellen A.1 und A.3 nach Particle Data Group [8] zu entnehmen ist.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird sich vorerst der mesonischen Lagrangedichte zugewandt, die noch keinen skalaren Glueball Freiheitsgrad enthält. Anschließend wird zur Beschreibung des skalaren Glueball Freiheitsgrades das Dilaton eingeführt und letztlich in die mesonische Lagrangedichte eingekoppelt.

2.1 Die mesonische Lagrangedichte

Bei verschwindenden Quarkmassen muss das effektive Modell, abgesehen von der $U(1)_A$ -Anomalie, der globalen chiralen $U(2)_L \times U(2)_R$ -Symmetrie mit der Transformation

$$U_{L,R} = \exp \{ -i\theta_{L,R}^a t_a \} \quad (2.4)$$

genügen. Dabei sind $\theta_{L,R}^a$ die Parameter, die Drehwinkel, und t_a mit $a = 0, 1, 2, 3$ die Generatoren der $U(2)$ -Algebra. Die Generatoren lauten explizit $t_0 = \frac{1}{2}\mathbf{1}_2$ und $t_i = \frac{1}{2}\tau_i$ mit $i = 1, 2, 3$, wobei τ_i die Pauli Matrizen sind

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Bezüglich der Quarks können die skalaren sowie pseudoskalaren Mesonen durch folgende Matrix definiert werden

$$\Phi_{ij} = \sqrt{2}\bar{q}_{j,R}q_{i,L}. \quad (2.6)$$

Unter den global chiralen Transformationen ist das Verhalten der Quarkfelder

$$q_{i,L} \longrightarrow q'_{i,L} = U_L q_{i,L}, \quad (2.7)$$

$$q_{i,R} \longrightarrow q'_{i,R} = U_R q_{i,R} \quad (2.8)$$

und der Matrizen

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = U_L \Phi U_R^\dagger, \quad (2.9)$$

$$\Phi^\dagger \longrightarrow \Phi'^\dagger = U_R \Phi^\dagger U_L^\dagger. \quad (2.10)$$

Mit Hilfe der chiralen Projektionsoperatoren (1.29) kann die Matrix Φ folgendermaßen umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \sqrt{2}\bar{q}_{j,R}q_{i,L} = \sqrt{2}\bar{q}_j \mathcal{P}_L \mathcal{P}_L q_i = \sqrt{2}\bar{q}_j \mathcal{P}_L q_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j q_i - \bar{q}_j \gamma^5 q_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j q_i + i\bar{q}_j i\gamma^5 q_i), \end{aligned} \quad (2.11)$$

wodurch sich die skalaren sowie pseudoskalaren Ströme zu

$$S_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j q_i, \quad (2.12)$$

$$P_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i\gamma^5 q_i \quad (2.13)$$

ergeben. Man erhält somit

$$\Phi = S + iP, \quad (2.14)$$

wobei S und P hermitesche Matrizen sind, die mit den $U(2)$ -Generatoren wie folgt ausgedrückt werden können

$$S = S_a t_a, \quad (2.15)$$

$$S_a = \sqrt{2} \bar{q} t_a q \quad (2.16)$$

bzw.

$$P = P_a t_a, \quad (2.17)$$

$$P_a = \sqrt{2} \bar{q} i \gamma^5 t_a q. \quad (2.18)$$

Die skalaren und pseudoskalaren Singulett- und Triplettzustände können nun in einer Isospinstruktur als das chirale Feld realisiert werden

$$\Phi = (\sigma + i\eta_N) t_0 + (\vec{a}_0 + i\vec{\pi}) \cdot \vec{t} \quad (2.19)$$

bzw. das dazu adjungierte chirale Feld

$$\Phi^\dagger = (\sigma - i\eta_N) t_0 + (\vec{a}_0 - i\vec{\pi}) \cdot \vec{t}. \quad (2.20)$$

Entsprechend werden die vektoriellen sowie axial-vektoriellen Mesonen konstruiert. Dazu betrachte man zunächst die rechts- bzw. linkshändigen Ströme

$$R_{ij}^\mu = \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} \gamma^\mu q_{i,R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j \gamma^\mu q_i - \bar{q}_j \gamma^5 \gamma^\mu q_i), \quad (2.21)$$

$$L_{ij}^\mu = \sqrt{2} \bar{q}_{j,L} \gamma^\mu q_{i,L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j \gamma^\mu q_i + \bar{q}_j \gamma^5 \gamma^\mu q_i). \quad (2.22)$$

Daraus ergeben sich die vektoriellen bzw. axial-vektoriellen Ströme

$$V_{ij}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i, \quad (2.23)$$

$$A_{ij}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^5 \gamma^\mu q_i, \quad (2.24)$$

die analog zu (2.15) und (2.17) als hermitesche Matrizen

$$V^\mu = V_a^\mu t_a, \quad (2.25)$$

$$V_a^\mu = \sqrt{2} \bar{q} \gamma^\mu t_a q \quad (2.26)$$

bzw.

$$A^\mu = A_a^\mu t_a, \quad (2.27)$$

$$A_a^\mu = \sqrt{2} \bar{q} \gamma^5 \gamma^\mu t_a q \quad (2.28)$$

dargestellt werden können. (2.21) und (2.22) transformieren sich global chiral nach

$$R^\mu \longrightarrow R^{\mu'} = U_R R^\mu U_R^\dagger \quad (2.29)$$

sowie

$$L^\mu \longrightarrow L^{\mu'} = U_L L^\mu U_L^\dagger. \quad (2.30)$$

Für die rechts- bzw. linkshändigen Ströme wird die bereits im Abschnitt zur chiralen Symmetrie eingeführte Konvention (1.37) und (1.38) verwendet, womit sich schließlich für die vektoriellen sowie axial-vektoriellen Singulett- und Tripletzustände folgende Matrixdarstellung ergibt

$$R^\mu = (\omega^\mu - f_1^\mu)t_0 + (\vec{\rho}^\mu - \vec{a}_1^\mu) \cdot \vec{t}, \quad (2.31)$$

$$L^\mu = (\omega^\mu + f_1^\mu)t_0 + (\vec{\rho}^\mu + \vec{a}_1^\mu) \cdot \vec{t}. \quad (2.32)$$

Diesbezüglich lassen sich nun chiral invariante Terme konstruieren, beginnend mit dem skalaren Massenterm

$$-m_0^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi]. \quad (2.33)$$

Dieser ist invariant unter den globalen chiralen Transformationen (2.9) und (2.10), was aus der Unitarität des Operators U ,

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I \Rightarrow U^\dagger = U^{-1}, \quad (2.34)$$

und der zyklischen Vertauschbarkeit regulärer Operatoren innerhalb der Spur folgt

$$\begin{aligned} -m_0^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi'] &= -m_0^2 \text{Tr} [U_R \Phi^\dagger U_L^\dagger U_L \Phi U_R^\dagger] \\ &= -m_0^2 \text{Tr} [U_R \Phi^\dagger \Phi U_R^\dagger] \\ &= -m_0^2 \text{Tr} [U_R^\dagger U_R \Phi^\dagger \Phi] \\ &= -m_0^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Desweiteren können durch Quadrieren folgende skalarmesonische Selbstwechselwirkungsterme modelliert werden

$$-\lambda_1 (\text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi])^2, \quad (2.36)$$

$$-\lambda_2 \text{Tr} [(\Phi^\dagger \Phi)^2], \quad (2.37)$$

die ebenfalls wie (2.35) chiral invariant sind.

Schließlich muss noch der kinetische Term der skalaren und pseudoskalaren Freiheitsgrade, der auch der globalen Eichsymmetrie folge leistet

$$\begin{aligned} \text{Tr} [(\partial^\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi)'] &= \text{Tr} [\partial^\mu (U_R \Phi^\dagger U_L^\dagger) \partial^\mu (U_L \Phi U_R^\dagger)] \\ &= \text{Tr} [U_R \partial^\mu (\Phi^\dagger) U_L^\dagger U_L \partial^\mu (\Phi) U_R^\dagger] \\ &= \text{Tr} [U_R^\dagger U_R \partial^\mu (\Phi^\dagger) U_L^\dagger U_L \partial^\mu (\Phi)] \\ &= \text{Tr} [(\partial^\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi)], \end{aligned} \quad (2.38)$$

eingeführt werden.

Nun werden global chirale Terme mit vektoriellen bzw. axial-vektoriellen Freiheitsgraden konstruiert und in das effektive Modell eingebunden. Mit (2.31) und (2.32) lässt sich dessen Massenterm aufstellen

$$\frac{m_1^2}{2} \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2]. \quad (2.39)$$

Um die Eigendynamik der Vektormesonen zu beschreiben, sind die vektoriellen Feldstärketensoren erforderlich, die wie folgt definiert sind

$$R^{\mu\nu} = \partial^\mu R^\nu - \partial^\nu R^\mu, \quad (2.40)$$

$$L^{\mu\nu} = \partial^\mu L^\nu - \partial^\nu L^\mu \quad (2.41)$$

und sich global folgendermaßen transformieren

$$R^{\mu\nu} \longrightarrow R^{\mu\nu'} = U_R R^{\mu\nu} U_R^\dagger, \quad (2.42)$$

$$L^{\mu\nu} \longrightarrow L^{\mu\nu'} = U_L L^{\mu\nu} U_L^\dagger. \quad (2.43)$$

Mit (2.40) und (2.41) lässt sich nun der Term für die Eigendynamik der vektor-mesonischen Freiheitsgrade aufstellen

$$-\frac{1}{4} \text{Tr} [(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2]. \quad (2.44)$$

Für den kinetischen Term muss jedoch die partielle Ableitung durch eine kovariante Ableitung, die die skalaren Freiheitsgrade mit den vektoriellen Freiheitsgraden koppelt, ersetzt werden. Die kovariante Ableitung muss folgende Struktur besitzen

$$D^\mu \Phi = \partial^\mu \Phi + i g_1 (\Phi R^\mu - L^\mu \Phi) \quad (2.45)$$

bzw.

$$(D^\mu \Phi)^\dagger = \partial_\mu \Phi^\dagger - i g_1 (R_\mu \Phi^\dagger - \Phi^\dagger L_\mu), \quad (2.46)$$

um den globalen Transformationen (2.9), (2.10) und (2.29), (2.30) zu genügen

$$\begin{aligned} (D^\mu \Phi)' &= \partial^\mu (U_L \Phi U_R^\dagger) + i g_1 (U_L \Phi U_R^\dagger U_R R^\mu U_R^\dagger - U_L L^\mu U_L^\dagger U_L \Phi U_R^\dagger) \\ &= U_L \partial^\mu (\Phi) U_R^\dagger + i g_1 (U_L \Phi R^\mu U_R^\dagger - U_L L^\mu \Phi U_R^\dagger) \\ &= U_L D^\mu \Phi U_R^\dagger. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Analog gilt auch

$$(D^\mu \Phi)^\dagger' = U_R (D^\mu \Phi)^\dagger U_L^\dagger. \quad (2.48)$$

Damit ergibt sich folgender kinetischer Term

$$\text{Tr} [(D^\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)]. \quad (2.49)$$

Fernerhin lassen sich noch Terme konstruieren, die die Wechselwirkung zwischen den skalaren, pseudoskalaren, vektoriellen und axial-vektoriellen Freiheitsgraden beschreiben

$$\frac{h_1}{2} \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] \text{Tr} [L_\mu L^\mu + R_\mu R^\mu], \quad (2.50)$$

$$h_2 \text{Tr} [\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi^\dagger], \quad (2.51)$$

$$2h_3 \text{Tr} [\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu]. \quad (2.52)$$

Diese sind nach (2.9), (2.10), (2.29) und (2.30) ebenfalls global invariant

$$\begin{aligned} & \frac{h_1}{2} \text{Tr} [\Phi^\dagger' \Phi'] \text{Tr} [L'_\mu L'^\mu + R'_\mu R'^\mu] \\ &= \frac{h_1}{2} \text{Tr} [U_R \Phi^\dagger U_L^\dagger U_L \Phi U_R^\dagger] \text{Tr} [U_L L_\mu U_L^\dagger U_L L^\mu U_L^\dagger + U_R R_\mu U_R^\dagger U_R R^\mu U_R^\dagger] \\ &= \frac{h_1}{2} \text{Tr} [U_R^\dagger U_R \Phi^\dagger \Phi] \text{Tr} [U_L^\dagger U_L L_\mu L^\mu + U_R^\dagger U_R R_\mu R^\mu] \\ &= \frac{h_1}{2} \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] \text{Tr} [L_\mu L^\mu + R_\mu R^\mu], \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}
& h_2 \text{Tr}[\Phi^\dagger L'_\mu L^{\mu'} \Phi' + \Phi' R'_\mu R^{\mu'} \Phi^{\dagger'}] \\
&= h_2 \text{Tr}[U_R \Phi^\dagger U_L^\dagger U_L L_\mu U_L^\dagger U_L L^\mu U_L^\dagger U_L \Phi U_R^\dagger \\
&\quad + U_L \Phi U_R^\dagger U_R R_\mu U_R^\dagger U_R R^\mu U_R^\dagger U_R \Phi^\dagger U_L^\dagger] \\
&= h_2 \text{Tr}[U_R^\dagger U_R \Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + U_L^\dagger U_L \Phi R_\mu R^\mu \Phi^\dagger] \\
&= h_2 \text{Tr}[\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi^\dagger], \tag{2.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2h_3 \text{Tr}[\Phi' R'_\mu \Phi^{\dagger'} L^{\mu'}] \\
&= 2h_3 \text{Tr}[U_L \Phi U_R^\dagger U_R R_\mu U_R^\dagger U_R \Phi^\dagger U_L^\dagger U_L L^\mu U_L^\dagger] \\
&= 2h_3 \text{Tr}[U_L^\dagger U_L \Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu] \\
&= 2h_3 \text{Tr}[\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu]. \tag{2.55}
\end{aligned}$$

Wie im Abschnitt zur chiralen Symmetrie beschrieben, ist die QCD nur näherungsweise chiral invariant. Diesbezüglich werden nun Terme modelliert, die die leichte explizite Verletzung dieser Symmetrie generieren.

Die $U(1)_A$ -Axial-Symmetrie ist wegen der $U(1)_A$ -Anomalie sogar bei masselosen Quarks verletzt. Die globale chirale Symmetrie $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ wird dadurch zu $U(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ -Symmetrie explizit gebrochen. Diese Symmetriebrechung kann durch folgenden Term erzeugt werden [25]

$$c [\det(\Phi^\dagger) + \det(\Phi)]. \tag{2.56}$$

Folgende Rechnung beweist, dass (2.56) unter den globalen Transformationen (2.9) und (2.10) die $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ -Symmetrie zu $U(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ -Symmetrie bricht und in der Tat die $U(1)_A$ -Anomalie generiert

$$\begin{aligned}
& c [\det(\Phi^{\dagger'}) + \det(\Phi')] \\
&= c [\det(U_R \Phi^\dagger U_L^\dagger) + \det(U_L \Phi U_R^\dagger)] \\
&= c [\det(e^{i\theta_R^\alpha t_\alpha} \Phi^\dagger e^{-i\theta_L^\alpha t_\alpha}) + \det(e^{i\theta_L^\alpha t_\alpha} \Phi e^{-i\theta_R^\alpha t_\alpha})] \\
&= c \left[\det \left(e^{i \frac{\theta_V^\alpha - \theta_A^\alpha}{2} t_\alpha} \Phi^\dagger e^{-i \frac{\theta_V^\alpha + \theta_A^\alpha}{2} t_\alpha} \right) + \det \left(e^{i \frac{\theta_V^\alpha + \theta_A^\alpha}{2} t_\alpha} \Phi e^{-i \frac{\theta_V^\alpha - \theta_A^\alpha}{2} t_\alpha} \right) \right] \\
&= c [\det(e^{-i\theta_A^\alpha t_\alpha} \Phi^\dagger) + \det(e^{i\theta_A^\alpha t_\alpha} \Phi)] \\
&= c \left[\det(e^{-i \sum_{a=1}^{N_f^2-1} \theta_A^a t_a}) \det(e^{-i\theta_A^0 t_0}) \Phi^\dagger + \det(e^{i \sum_{a=1}^{N_f^2-1} \theta_A^a t_a}) \det(e^{i\theta_A^0 t_0}) \Phi \right] \\
&= c [\det(e^{-i\theta_A^0 t_0}) \Phi^\dagger + \det(e^{i\theta_A^0 t_0}) \Phi] = c [(e^{-i\theta_A^0 N_f}) \Phi^\dagger + (e^{i\theta_A^0 N_f}) \Phi] \\
&\neq c [\det(\Phi^\dagger) + \det(\Phi)]. \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Die Tatsache, dass die Pionen, denen die Rolle der Goldstone-Bosonen in der QCD zukommt, nicht wirklich masselos sind, führt zur expliziten Brechung der $SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ -Symmetrie. Die Brechung dieser Symmetrie wird mit dem Term

$$\text{Tr} [H (\Phi^\dagger + \Phi)] \tag{2.58}$$

generiert. Dabei ist der Parameter H wie folgt definiert

$$H = \bar{h}_a t_a \tag{2.59}$$

mit $a = 0, 1, 2, 3$, also im Fall von $N_f = 2$, ergibt sich

$$H = \bar{h}_0 t_0 + \bar{h}_1 t_1 + \bar{h}_2 t_2 + \bar{h}_3 t_3. \quad (2.60)$$

Mit Hilfe dieses Parameters wird eine endliche Strommasse der beiden Quarkflavours up und down erzeugt. Dabei wird das Potential des effektiven Modells sozusagen in eine bestimmte Richtung des vierdimensionalen Feldes, dessen Komponenten das σ -Singulett und das \vec{a}_0 -Tripletts sind, gekippt. Die Richtung wird durch die Wahl der Komponenten des \bar{h}_a Parameters definiert. Da das Sigmafeld, auf Grund der Quantenzahlen, einen nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswert

$$\langle \sigma \rangle \neq 0 \quad (2.61)$$

besitzt, ist die $U(2)_V \times SU(2)_A$ -Symmetrie dadurch gebrochen. Demzufolge ist der Parameter

$$\bar{h}_0 \neq 0. \quad (2.62)$$

Für die geladenen Felder des \vec{a}_0 -Tripletts, a_0^+ und a_0^- , gilt

$$\langle a_0^\pm \rangle = 0 \quad (2.63)$$

und somit sind die Parameter

$$\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0. \quad (2.64)$$

Daraus ergibt sich für den Parameter

$$H = \bar{h}_0 t_0 + \bar{h}_3 t_3. \quad (2.65)$$

In dieser Arbeit werden die Strommassen der Up- und Down-Quarks als entartet betrachtet, wodurch die vektorielle Symmetrie erhalten bleibt. Aus diesem Grund ergibt sich

$$\bar{h}_3 = 0 \quad (2.66)$$

und folglich muss auch für das ungeladene Feld des \vec{a}_0 -Tripletts

$$\langle a_0^0 \rangle = 0 \quad (2.67)$$

gelten. Letztlich resultiert daraus folgende mesonische Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mes} = & \text{Tr} [(D^\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - m_0^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda_2 (\Phi^\dagger \Phi)^2] - \lambda_1 (\text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi])^2 \\ & + c [\det (\Phi^\dagger) + \det (\Phi)] + \text{Tr} [H (\Phi^\dagger + \Phi)] \\ & - \frac{1}{4} \text{Tr} [(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2] + \frac{m_1^2}{2} \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] \\ & + \frac{h_1}{2} \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] \text{Tr} [L_\mu L^\mu + R_\mu R^\mu] \\ & + h_2 \text{Tr} [\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi^\dagger] + 2h_3 \text{Tr} [\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

2.2 Das Dilaton

Zur Beschreibung des Glueball Freiheitsgrades wird in diesem Abschnitt eine klassische Lagrangedichte, die Dilaton Lagrangedichte, eingeführt, die die

Eigenschaften der reinen Yang-Mills Lagrangedichte als QFT auf einer hadronischen Ebene realisiert. Diesbezüglich betrachte man zunächst die klassische reine Yang-Mills Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (2.69)$$

wobei

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.70)$$

der Feldstärketensor der Gluonen ist. Die klassische Wirkung von (2.69) ist unter (1.76) und (1.90) Skalen invariant

$$\begin{aligned} S'_{YM} &= \int d^4 X' \mathcal{L}'_{YM} = -\frac{1}{4} \int d^4 X' G_{\mu\nu}^{a'} G_a^{\mu\nu'} \\ &= -\frac{1}{4} \int \lambda^{-4} d^4 X \lambda^2 G_{\mu\nu}^a \lambda^2 G_a^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4 X G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \\ &= \int d^4 X \mathcal{L}_{YM} = S_{YM}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

was zur Folge hat, dass der Skalen-Strom

$$J^\mu = x_\nu T^{\mu\nu} \quad (2.72)$$

auf der klassischen Ebene erhalten bleibt

$$\partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu = 0. \quad (2.73)$$

Betrachtet man jedoch die reine Yang-Mills Theorie als QFT, dann erhält man für die Spur des Energie-Impuls Tensors

$$T^\mu_\mu = \frac{\beta(g)}{2g} \left(\frac{1}{2} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \right) \neq 0. \quad (2.74)$$

Die Dilatation-Symmetrie wird durch die Loop-Korrekturen zerstört, wodurch der Skalen-Strom nicht erhalten bleibt. Diese Brechung der Dilatation-Symmetrie bezeichnet man als Skalen- bzw. Spur-Anomalie. Die reine Yang-Mills Wirkung ist somit nur klassisch invariant unter Dilatation, nicht aber als Quantenfeldtheorie.

Wie bereits im Abschnitt zu Skalen-Anomalie eingehend behandelt, besitzt bei Skalen-Invarianz die betrachtete Lagrangedichte keine charakteristische Längen- bzw. Energie-Skala, was der klassischen Betrachtung entspricht. Quantenfeldtheoretisch wird jedoch durch die Renormierung eine Skala eingeführt, was sich in der Energieabhängigkeit der laufenden Kopplungskonstanten, die in der Beta-Funktion der Renormierungsgruppe steckt,

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = -bg^3, \quad (2.75)$$

zeigt. Das bedeutet, dass ihre Stärke für jede Skala neu ermittelt werden muss, was einen Skalenparameter Λ fixiert. Aus Rechnungen mit 1-Loop Diagrammen [19] folgt für die Konstante b

$$b = \frac{11N_c - 2N_f}{48\pi^2}. \quad (2.76)$$

Damit resultiert für (2.74) mit (2.76), wobei hierzu der reine gluonische Anteil mit $N_C = 3$ und $N_f = 0$ betrachtet wird, und der Strukturkonstanten der starken Wechselwirkung

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2}{4\pi} \quad (2.77)$$

$$T_\mu^\mu = -b\pi^2 \left(\frac{2\alpha_s}{\pi} \right) \left(\frac{1}{2} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \right). \quad (2.78)$$

Nimmt man nun den Vakuumerwartungswert

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = - \left\langle b\pi^2 \left(\frac{2\alpha_s}{\pi} \right) \left(\frac{1}{2} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \right) \right\rangle, \quad (2.79)$$

dann wird die Größe

$$\left\langle \frac{2\alpha_s}{\pi} \left(\frac{1}{2} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \right) \right\rangle = C^4 \quad (2.80)$$

als das Gluonkondensat definiert, welches mit QCD Sum Rules zu $C \simeq 0.360 \text{ GeV}$ [26] berechnet wurde. QCD Lattice Rechnungen ergeben für das Gluonkondensat einen deutlich größeren Wert von etwa $C \simeq 0.650 \text{ GeV}$ [27].

Um nun die mesonische Lagrangedichte durch die gluonischen Freiheitsgrade zu verallgemeinern, benötigt man offensichtlich eine klassische Lagrangedichte, die einerseits die Skalen-Invaranz sicherstellt wie (2.69), andererseits aber auch die Quanteneffekte berücksichtigt, die schließlich zur Skalen-Anomalie führen. Dies kann mit Einführung des Dilatonfeldes G , welches die kollektiven Gluonfelder, den skalaren Glueball beschreibt, bewerkstelligt werden. Die klassische Selbstwechselwirkungspotentialdichte muss, um den Forderungen zu genügen, nach [22, 28] genau folgende Form besitzen

$$\mathcal{V}(G) = \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left(G^4 \ln \left| \frac{G}{\Lambda} \right| - \frac{G^4}{4} \right). \quad (2.81)$$

Das skalare Feld G wäre wegen

$$G^4 \sim G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (2.82)$$

für sich allein genommen invariant unter Dilatation und würde somit zum verschwindenden Vakuumerwartungswert des Dilatonfeldes führen. Der Logarithmusterm in (2.81) bricht jedoch die Dilatation-Symmetrie und generiert dadurch die Skalen-Anomalie. Desweiteren enthält die Skalen-Invaranz brechende Dilaton Potentialdichte den Skalenparameter Λ . Dieser parametrisiert die Abhängigkeit des Energie-Skalen Parameters μ von der starken Strukturkonstanten $\alpha_s(Q^2)$. Fügt man schließlich noch einen kinetischen Term hinzu, so erhält man eine geeignete klassische Lagrangedichte, die Dilaton Lagrangedichte, zur Beschreibung des skalaren Glueballs

$$\mathcal{L}_{dil}(G) = \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left(G^4 \ln \left| \frac{G}{\Lambda} \right| - \frac{G^4}{4} \right). \quad (2.83)$$

Die Dilaton Potentialdichte enthält keine Quark-Antiquark Freiheitsgrade und der Grundzustand des Dilatons entspricht dem Skalenparameter

$$\frac{d\mathcal{V}}{dG} = \frac{m_G^2}{\Lambda^2} G^3 \ln \left| \frac{G}{\Lambda} \right| \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow G_0 = \Lambda. \quad (2.84)$$

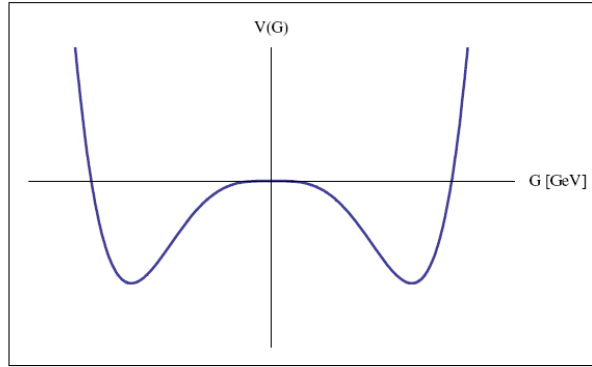


Abbildung 2.1: Die Potentialdichte des Dilatons.

Divergenz des Skalenstroms

An dieser Stelle wird zunächst die Divergenz des Skalenstroms für eine allgemeine skalare Potentialdichte $\mathcal{V}(\phi)$ hergeleitet, um diese anschließend auf die Dilaton Potentialdichte anzuwenden. Dazu betrachte man den Energie-Impuls Tensor

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\
 &= \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\
 &\equiv -\phi(\partial^\mu \partial^\nu \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

und folgende skalare Lagrangedichte mit einer beliebigen Potentialdichte $\mathcal{V}(\phi)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - \mathcal{V}(\phi) \\
 &\equiv -\frac{1}{2} \phi(\partial_\sigma \partial^\sigma \phi) - \mathcal{V}(\phi).
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

Mit der Euler-Lagrange Gleichung für Felder

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \tag{2.87}$$

folgt

$$-\frac{\partial \mathcal{V}(\phi)}{\partial \phi} = \partial_\mu \partial^\mu \phi. \tag{2.88}$$

Die Divergenz des Skalenstroms ist

$$\partial_\mu J^\mu = T^{00} - T^{11} - T^{22} - T^{33} \tag{2.89}$$

mit

$$T^{00} = -\phi \partial_0^2 \phi + \frac{1}{2} \phi(\partial_\sigma \partial^\sigma \phi) + \mathcal{V}(\phi), \tag{2.90}$$

$$T^{ii} = \phi \partial_i^2 \phi - \frac{1}{2} \phi(\partial_\sigma \partial^\sigma \phi) - \mathcal{V}(\phi), \tag{2.91}$$

so folgt schließlich eine allgemeine Form für die Divergenz des Skalenstroms für eine beliebige Potentialdichte

$$\begin{aligned}
\partial_\mu J^\mu &= 2\phi(\partial_\sigma\partial^\sigma\phi) - \phi(\partial_\sigma\partial^\sigma\phi) + 4\mathcal{V}(\phi) \\
&= \phi(\partial_\sigma\partial^\sigma\phi) + 4\mathcal{V}(\phi) \\
&= -\phi\frac{\partial\mathcal{V}(\phi)}{\partial\phi} + 4\mathcal{V}(\phi) \\
&= -[\phi\partial_\phi\mathcal{V}(\phi) - 4\mathcal{V}(\phi)].
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Damit erhält man mit (2.81)

$$\partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu = -\frac{1}{4}\frac{m_G^2}{\Lambda^2}G^4 \neq 0. \tag{2.93}$$

Für den Vakuumerwartungswert des skalaren Glueballs ergibt sich dann

$$\langle T^\mu_\mu \rangle = \left\langle -\frac{1}{4}\frac{m_G^2}{\Lambda^2}G^4 \right\rangle = -\frac{1}{4}\frac{m_G^2}{\Lambda^2}G_0^4 = -\frac{1}{4}m_G^2\Lambda^2. \tag{2.94}$$

Daraus folgt für den Skalenparameter mit (2.79), (2.80) und (2.76)

$$\Lambda = \frac{\sqrt{11}}{2m_G}C^2. \tag{2.95}$$

2.3 Einkopplung des Dilatons

Will man schließlich den skalaren Glueball Freiheitsgrad, der durch die Dilaton Lagrangedichte beschrieben wird, in die mesonische Lagrangedichte einkoppeln, so muss das effektive Modell einerseits, entsprechend der physikalischen Gegebenheiten, mit der Skalen-Invarianz konsistent sein. Andererseits muss in ihm das effektive Modell ohne skalaren Glueball Freiheitsgrad (2.68) als Grenzfall enthalten sein. Dazu wird folgender Grenzfall in Betracht gezogen

$$m_G \longrightarrow \infty, \tag{2.96}$$

wobei der Skalenparameter Λ konstant bleibt. Auf diese Weise wird erreicht, dass der skalare Glueball im Grundzustand unendlich schwer wird, wodurch es keine Fluktuationen mehr geben kann und somit auch keinen dynamischen skalaren Glueball Freiheitsgrad und folglich auch keine Mischung mehr. Für den Skalenparameter bedeutet dies

$$G_0 = \Lambda = \text{const.} \tag{2.97}$$

Die einzige Skala in der QCD als QFT wird durch die reine Yang-Mills Lagrangedichte induziert, demzufolge sollte der einzige dilatationbrechende, genauer gesagt Skalen-Anomalie erzeugende, Term im effektiven Modell das Dilaton sein. Alle Terme in (2.68), abgesehen von den beiden Massentermen sowie dem Term für die explizite Symmetriebrechung und dem zur Beschreibung der Axial-Anomalie, skalieren unter Dilatation mit λ^4 , wodurch ihre Wirkung Skalen

invariant bleibt. Wendet man sich fürs Erste dem Massenterm der skalarmesonischen Freiheitsgrade

$$-m_0^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi], \quad (2.98)$$

sowie dem der vektormesonischen Freiheitsgrade zu

$$\frac{m_1^2}{2} \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2], \quad (2.99)$$

so sieht man, dass diese keine Dilatation-Symmetrie besitzen, da sie unter Dilatation jeweils nur mit λ^2 skalieren. Um die Skalen-Invarianz zu erreichen, würde man den Massenterm der skalarmesonischen Freiheitsgrade allgemein wie folgt hinschreiben

$$-aG^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi]. \quad (2.100)$$

Für den skalaren Massenparameter bedeutet dies, dass

$$m_0^2 = aG_0^2, \quad (2.101)$$

wobei die dimensionslose Konstante $a > 0$ ist und somit den Ursprung der spontanen Symmetriebrechung darstellt. Im Fall des vektormesonischen Massenterms würde man analog vorgehen. Unterzieht man nun beide Massenterme einer geeigneten Modifikation

$$-m_0^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] \longrightarrow -m_0^2 \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] \quad (2.102)$$

sowie

$$\frac{m_1^2}{2} \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] \longrightarrow \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2], \quad (2.103)$$

so wird zum Einen die erforderliche Skalen-Invarianz sichergestellt

$$\begin{aligned} -m_0^2 \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] &= -m_0^2 \left(\frac{G'}{G_0} \right)^2 \text{Tr} [\Phi^{\dagger'} \Phi'] \\ &= -m_0^2 \left(\frac{\lambda G}{G_0} \right)^2 \text{Tr} [\lambda \Phi^{\dagger'} \lambda \Phi'] \\ &\Rightarrow S'_{m_0} = S_{m_0}, \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] &= \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G'}{G_0} \right)^2 \text{Tr} [(L^{\mu'})^2 + (R^{\mu'})^2] \\ &= \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{\lambda G}{G_0} \right)^2 \text{Tr} [(\lambda L^\mu)^2 + (\lambda R^\mu)^2] \\ &\Rightarrow S'_{m_1} = S_{m_1}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

zum Anderen erhält man im Grenzfall, also im Grundzustand, wie gefordert die Terme (2.98) und (2.99) des effektiven Modells ohne skalaren Glueball Freiheitsgrad (2.68).

Betrachtet man nun den Term der expliziten Symmetriebrechung

$$\text{Tr} [H (\Phi^\dagger + \Phi)], \quad (2.106)$$

so ist auch hier ersichtlich, dass dieser nicht Skalen invariant ist. Dennoch bedarf dieser keiner Modifizierung, um der Dilatation-Symmetrie Folge zu leisten, da die explizite Symmetriebrechung durch die endlichen Quarkmassen bewirkt wird und diese, wie (1.89) zeigt, die Skalen-Invarianz explizit brechen.

Letztlich bleibt noch der Axial-Anomalie Term, der ebenfalls keine Dilatation-Symmetrie besitzt. Dieser könnte analog der beiden Massenterme mit $\left(\frac{G}{G_0}\right)^2$ modifiziert werden, wodurch er im Fall von $N_f = 2$ der Dilatation-Symmetrie genügen würde

$$\begin{aligned} c \left(\frac{G}{G_0}\right)^2 [\det(\Phi^\dagger) + \det(\Phi)] &= c \left(\frac{G'}{G_0}\right)^2 [\det(\Phi'^\dagger) + \det(\Phi')] \\ &= c \left(\frac{\lambda G}{G_0}\right)^2 [\lambda^2 \det(\Phi^\dagger) + \lambda^2 \det(\Phi)] \\ &\Rightarrow S'_A = S_A. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Würde man jedoch in das effektive Modell einen weiteren Flavour-Freiheitsgrad einführen, so müsste man den Axial-Anomalie Term mit $\left(\frac{G}{G_0}\right)$ modifizieren, um Skalen-Invarianz zu erhalten. Dabei wäre dieser der Einzige im effektiven Modell, bei dem die Dimension des zu modifizierenden Terms von der Anzahl der Flavour-Freiheitsgrade abhängen würde. Die beiden Massenterme (2.98) und (2.99) würden bei beliebiger Anzahl der Flavour-Freiheitsgrade stets mit $\left(\frac{G}{G_0}\right)^2$ modifiziert, um der Dilatation-Symmetrie zu genügen.

Eine derartige Eigenschaft in einem effektiven Modell wäre eine besondere und bedürfte einer physikalischen Rechtfertigung. Da der Axial-Anomalie Term im Fall von $N_f = 2$ nicht zur Wechselwirkung-Lagrangedichte beiträgt, und somit zur Berechnung der Zerfallsbreiten nicht relevant ist, wird im Rahmen dieser Arbeit die einfachste Realisierung gewählt. Somit resultiert folgende effektive Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \text{Tr} \left[(D^\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - m_0^2 \left(\frac{G}{G_0}\right)^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda_2 (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right] - \lambda_1 (\text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi])^2 \\ &\quad + c [\det(\Phi^\dagger) + \det(\Phi)] + \text{Tr} [H (\Phi^\dagger + \Phi)] \\ &\quad - \frac{1}{4} \text{Tr} [(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2] + \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0}\right)^2 \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] \\ &\quad + \frac{h_1}{2} \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] \text{Tr} [L_\mu L^\mu + R_\mu R^\mu] + h_2 \text{Tr} [\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi^\dagger] \\ &\quad + 2h_3 \text{Tr} [\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu] + \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left(G^4 \ln \left| \frac{G}{\Lambda} \right| - \frac{G^4}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.108)$$

2.4 Vakuum Erwartungswerte

Im vorliegenden effektiven Modell besitzen ausschließlich das Sigmafeld und der skalare Glueball einen von null verschiedenen Vakuum Erwartungswert (VEW),

$$\langle \sigma \rangle \equiv \sigma_0 = \text{const} \neq 0 \quad (2.109)$$

und

$$\langle G \rangle \equiv G_0 = \text{const} \neq 0. \quad (2.110)$$

Dies geht aus deren Quanteneigenschaften hervor. Beide Felder besitzen eine positive Parität, einen Gesamtspin 0, Isospin 0 und eine positive Ladungskonjugation sowie G-Parität, was den Quantenzahlen des Vakuums entspricht. Die übrigen Felder erfüllen nicht die Eigenschaften des Vakuums. Die Felder $\vec{\pi}$, $\vec{\rho}$, \vec{a}_0 und \vec{a}_1^μ besitzen einen von null verschiedenen Isospin und somit keinen VEW, da dies sonst die Isospin-Symmetrie des Vakuums verletzen würden. Das η_N Feld ist ein Pseudoskalar, besitzt demnach eine negative Parität und hat aus diesem Grund keinen VEW. ω^μ sowie f_1^μ sind vektorielle Felder mit Spin 1 und besitzen dementsprechend auch keinen VEW, da dies zur Verletzung des Vakuum-Spins führen würde. Folglich werden zur Berechnung der beiden Vakuumerwartungswerte σ_0 und G_0 alle Felder, bis auf das Sigmafeld und den skalaren Glueball, gleich null gesetzt, was zu folgender Potentialdichte führt

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\sigma, G) &= \frac{1}{2} \left[m_0^2 \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 - c \right] \sigma^2 + \frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma^4 - \bar{h}_0 \sigma \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left(G^4 \ln \left| \frac{G}{\Lambda} \right| - \frac{G^4}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Daraus resultiert für das Vakuum des Sigmafeldes eine kubische Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma} &= \left[m_0^2 \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 - c \right] \sigma + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma^3 - \bar{h}_0 = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_0, G_0} &= (m_0^2 - c) \sigma_0 + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma_0^3 - \bar{h}_0 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_0^3 + \frac{(m_0^2 - c)}{\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right)} \sigma_0 - \frac{\bar{h}_0}{\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right)} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.113)$$

Betrachtet man zunächst den chiralen Limes $\bar{h}_0 \rightarrow 0$, so ergibt sich für den Fall spontan gebrochener Symmetrie, bei dem der Massenparameter $m_0^2 < 0$ sein muss, ein globales Maximum bei

$$\sigma_{0,1} = 0 \quad (2.114)$$

und zwei globale Minima, die betragsmäßig gleich sind

$$\sigma_{0,2,3} = \pm \sqrt{\frac{-(m_0^2 - c)}{\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right)}}. \quad (2.115)$$

Ist die Symmetrie zusätzlich explizit gebrochen $\bar{h}_0 \neq 0$, so existieren zur Lösung der kubischen Gleichung nach Cardano drei Fälle, wobei der irreduzible Fall, der drei verschiedene reelle Lösungen liefert, der Richtige ist. Hierzu lassen sich durch trigonometrischen Lösungsansatz Komplexe Ausdrücke vermeiden. Demnach folgt ein globales Maximum bei

$$\sigma_{0,1} = -2 \sqrt{\frac{1}{3} \left| \frac{-(m_0^2 - c)}{\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right)} \right|} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \quad (2.116)$$

und ein lokales Minimum bei

$$\sigma_{0,2} = -2\sqrt{\frac{1}{3}\left|\frac{-(m_0^2 - c)}{(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2})}\right|}\cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right). \quad (2.117)$$

Für das globale Minimum und somit den VEW des Sigmafeldes ergibt sich

$$\sigma_{0,3} = 2\sqrt{\frac{1}{3}\left|\frac{-(m_0^2 - c)}{(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2})}\right|}\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right). \quad (2.118)$$

Wie sich im weiteren Verlauf der Arbeit zeigen wird, kann der Vakuumerwartungswert des Sigmafeldes mit der Pion-Vakuumzerfallskonstante identifiziert werden

$$\sigma_0 = Zf_\pi, \quad (2.119)$$

wobei Z der Renormierungsfaktor ist, dessen Notwendigkeit im letzten Abschnitt dieses Kapitels gerechtfertigt wird.

Für das Minimum des Dilatons folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial G} &= m_0^2\frac{\sigma^2}{G^2}G + \frac{m_G^2\ln\left|\frac{G}{\Lambda}\right|}{\Lambda^2}G^3 \\ \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial G}\Big|_{\sigma_0, G_0} &= \frac{m_0^2\sigma_0^2}{G_0} + \frac{m_G^2\ln\left|\frac{G_0}{\Lambda}\right|}{\Lambda^2}G_0^3 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{m_0^2\sigma_0^2\Lambda^2}{m_G^2} = G_0^4\ln\left|\frac{G_0}{\Lambda}\right|, \quad (2.121)$$

wobei für den allgemeinen Fall

$$G_0 \neq \Lambda \quad (2.122)$$

und für den Limes $m_G \rightarrow \infty$

$$G_0 = \Lambda \quad (2.123)$$

gilt.

2.5 Berechnung der Lagrangedichte

Im folgenden Abschnitt werden die einzelnen Terme der effektiven Lagrangedichte berechnet und in ihrer expliziten Form dargestellt, um später die relevanten Vertizes zur Berechnungen der Zerfallsbreiten isolieren zu können. Der kinetische Term berechnet sich mit (2.19), (2.20), (2.31), (2.32), (2.45), sowie (2.46)

zu

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} [(D^\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)] \\
&= \text{Tr} [\{\partial^\mu \Phi + ig_1(\Phi R^\mu - L^\mu \Phi)\}^\dagger \{\partial^\mu \Phi + ig_1(\Phi R^\mu - L^\mu \Phi)\}] \\
&= \text{Tr} [\{(\partial_\mu \sigma - i\partial_\mu \eta_N)t_0 + (\partial_\mu a_{0,i} + i\partial_\mu \pi_i)t_i - ig_1(f_1^\mu(\sigma - i\eta_N)t_0 \\
&\quad + f_1^\mu(a_{0,i} - i\pi_i)t_i + a_{1,i}^\mu(\sigma - i\eta_N)t_i \\
&\quad - (a_{0,i} - i\pi_i)(-i\epsilon_{ijk}\rho_j^\mu t_k - a_{1,i}^\mu \delta_{ij}t_0)\} \{(\partial^\mu \sigma + i\partial^\mu \eta_N)t_0 \\
&\quad + (\partial^\mu a_{0,i} + i\partial^\mu \pi_i)t_i + ig_1[f_1^\mu(\sigma + i\eta_N)t_0 + f_1^\mu(a_{0,i} + i\pi_i)t_i] \\
&\quad - (a_{0,i} + i\pi_i)(i\epsilon_{ijk}\rho_j^\mu t_k - a_{1,i}^\mu \delta_{ij}t_0)\}] \\
&= \frac{1}{2} [(\partial^\mu \sigma)^2 + (\partial^\mu \eta_N)^2 + (\partial^\mu \vec{a}_0)^2 + (\partial^\mu \vec{\pi})^2] \\
&\quad - g_1 [f_1^\mu(\sigma \partial_\mu \eta_N - \eta_N \partial_\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \vec{a}_0 - \partial_\mu \vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}) \\
&\quad + \vec{a}_1^\mu \cdot (\vec{a}_0 \partial_\mu \eta_N - \vec{\pi} \partial_\mu \sigma + \sigma \partial_\mu \vec{\pi} - \eta_N \partial_\mu \vec{a}_0) \\
&\quad + \vec{\rho}^\mu \cdot (\partial_\mu \vec{a}_0 \times \vec{a}_0 + \partial_\mu \vec{\pi} \times \vec{\pi})] + \frac{g_1^2}{2} \{(\sigma^2 + \eta_N^2)[(f_1^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu)^2] \\
&\quad + (\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu)^2 + (\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu)^2 + (\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0)^2 + (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi})^2 \\
&\quad + (f_1^\mu)^2 (\vec{a}_0^2 \cdot \vec{\pi}^2) + 4f_1^\mu \vec{a}_1^\mu \cdot (\sigma \vec{a}_0 + \eta_N \vec{\pi}) \\
&\quad + 4f_1^\mu \vec{\rho}^\mu \cdot (\vec{a}_0 \times \vec{\pi}) + 2\vec{a}_1^\mu \cdot (\sigma \vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu - \eta_N \vec{a}_0 \times \vec{\rho}^\mu)\} \\
&= \frac{1}{2} [\partial^\mu \sigma + g_1(\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta_N f_1^\mu)]^2 + \frac{1}{2} [\partial^\mu \eta_N - g_1(\sigma f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu)]^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} [\partial^\mu \vec{a}_0 + g_1(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta_N \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi})]^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} [\partial^\mu \vec{\pi} - g_1(\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + \sigma \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0)]^2. \tag{2.124}
\end{aligned}$$

Für den Massenterm der skalarmesonischen Freiheitsgrade ergibt sich

$$\begin{aligned}
& -m_0^2 \left(\frac{G}{G_0}\right)^2 \text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi] \\
&= -m_0^2 \left(\frac{G}{G_0}\right)^2 \text{Tr} [\{(\sigma - i\eta_N)t_0 + (a_{0,i} - i\pi_i)t_i\} \\
&\quad \cdot \{(\sigma + i\eta_N)t_0 + (a_{0,j} + i\pi_j)t_j\}] \\
&= -m_0^2 \left(\frac{G}{G_0}\right)^2 \text{Tr} [\frac{1}{2}(\sigma^2 + \eta_N^2)t_0 + \frac{1}{2}(\sigma a_{0,j} + i\sigma \pi_j - i\eta_N a_{0,j} + \eta_N \pi_j)t_j \\
&\quad + \frac{1}{2}(a_{0,i}\sigma + ia_{0,i}\eta_N - i\pi_i\sigma + \pi_i\eta_N)t_i \\
&\quad + (a_{0,i}a_{0,j} + ia_{0,i}\pi_j - i\pi_i a_{0,j} + \pi_i\pi_j)t_i t_j] \\
&= -\frac{m_0^2}{2} \left(\frac{G}{G_0}\right)^2 (\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2). \tag{2.125}
\end{aligned}$$

Mit $\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi]$ aus der vorherigen Rechnung folgt für den ersten skalarmesonischen Selbstwechselwirkungsterm

$$-\lambda_1 (\text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi])^2 = -\frac{\lambda_1}{4} (\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)^2. \tag{2.126}$$

Für den zweiten skalarmesonischen Selbstwechselwirkungsterm erhält man

$$\begin{aligned}
& -\lambda_2 \text{Tr} \left[(\Phi^\dagger \Phi)^2 \right] \\
= & -\lambda_2 \text{Tr} \left[\frac{1}{8} (\sigma^2 + \eta_N^2)^2 t_0 + \frac{1}{8} (\sigma - i\eta_N)^2 (\sigma + i\eta_N) (a_{0,l} + i\pi_l) t_l \right. \\
& + \frac{1}{8} (\sigma - i\eta_N) (\sigma + i\eta_N)^2 (a_{0,k} - i\pi_k) t_k \\
& + \frac{1}{4} (\sigma^2 + \eta_N^2) (a_{0,k} - i\pi_k) (a_{0,l} + i\pi_l) t_k t_l \\
& + \frac{1}{8} (\sigma - i\eta_N)^2 (\sigma + i\eta_N)^2 (a_{0,j} + i\pi_j) t_j \\
& + \frac{1}{4} (\sigma - i\eta_N)^2 (a_{0,j} + i\pi_j) (a_{0,l} + i\pi_l) t_j t_l \\
& + \frac{1}{4} (\sigma^2 + \eta_N^2) (a_{0,j} + i\pi_j) (a_{0,k} - i\pi_k) t_j t_k \\
& + \frac{1}{2} (\sigma - i\eta_N) (a_{0,j} + i\pi_j) (a_{0,k} - i\pi_k) (a_{0,l} + i\pi_l) t_j t_k t_l \\
& + \frac{1}{8} (\sigma - i\eta_N) (\sigma + i\eta_N)^2 (a_{0,i} - i\pi_i) t_i \\
& + \frac{1}{4} (\sigma^2 + \eta_N^2) (a_{0,i} - i\pi_i) (a_{0,l} + i\pi_l) t_i t_l \\
& + \frac{1}{4} (\sigma + i\eta_N)^2 (a_{0,i} - i\pi_i) (a_{0,k} - i\pi_k) t_i t_k \\
& + \frac{1}{2} (\sigma + i\eta_N) (a_{0,i} - i\pi_i) (a_{0,k} - i\pi_k) (a_{0,l} + i\pi_l) t_i t_k t_l \\
& + \frac{1}{4} (\sigma^2 + \eta_N^2) (a_{0,i} - i\pi_i) (a_{0,j} + i\pi_j) t_i t_j \\
& + \frac{1}{2} (\sigma - i\eta_N) (a_{0,i} - i\pi_i) (a_{0,j} + i\pi_j) (a_{0,l} + i\pi_l) t_i t_j t_l \\
& + \frac{1}{2} (\sigma + i\eta_N) (a_{0,i} - i\pi_i) (a_{0,j} + i\pi_j) (a_{0,k} - i\pi_k) t_i t_j t_k \\
& \left. + (a_{0,i} - i\pi_i) (a_{0,j} + i\pi_j) (a_{0,k} - i\pi_k) (a_{0,l} + i\pi_l) t_i t_j t_k t_l \right] \\
= & -\frac{\lambda_2}{8} [\sigma^4 + \eta_N^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + (\vec{\pi}^2)^2 + 2\sigma^2 \eta_N^2 + 2\eta_N^2 \vec{a}_0^2 + 2\sigma^2 \vec{\pi}^2 \\
& - 4(\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 + 6\sigma^2 \vec{a}_0^2 + 6\eta_N^2 \vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2 \vec{\pi}^2 + 8\sigma \eta_N \vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}]. \quad (2.127)
\end{aligned}$$

Der Term, der die Axial-Anomalie beschreibt, berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
& c[\det(\Phi^\dagger) + \det(\Phi)] \\
= & c[\det((\sigma - i\eta_N)t_0 + (a_{0,i} - i\pi_i)t_i + \det((\sigma + i\eta_N)t_0 + (a_{0,i} + i\pi_i)t_i) \\
= & \frac{c}{4} [(\sigma - i\eta_N)^2 - (a_{0,i} - i\pi_i)^2 + (\sigma + i\eta_N)^2 - (a_{0,i} + i\pi_i)^2] \\
= & \frac{c}{2} (\sigma^2 - \eta_N^2 - \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2). \quad (2.128)
\end{aligned}$$

Mit dem bereits ermittelten Parameter $H = \bar{h}_0 t_0$ ergibt sich für den Term der expliziten Symmetriebrechung

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} [H (\Phi^\dagger + \Phi)] \\
= & \text{Tr} [\bar{h}_0 t_0 (2\sigma t_0 + 2\vec{a}_0 \cdot \vec{t})] = \bar{h}_0 \sigma. \quad (2.129)
\end{aligned}$$

Für den Term, der die Eigendynamik der vektoriellen- und axial-vektoriellen Freiheitsgrade beschreibt, folgt mit (2.40) und (2.41)

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\text{Tr} [(L^{\mu\nu})^2 + (R^{\mu\nu})^2] \\
= & -\frac{1}{4}\text{Tr}[\{(\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu + \partial^\mu f_1^\nu - \partial^\nu f_1^\mu)t_0 \\
& + (\partial^\mu\rho_i^\nu - \partial^\nu\rho_i^\mu + \partial^\mu a_{1,i}^\nu - \partial^\nu a_{1,i}^\mu)t_i\}^2 \\
& + \{(\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu - \partial^\mu f_1^\nu + \partial^\nu f_1^\mu)t_0 \\
& + (\partial^\mu\rho_i^\nu - \partial^\nu\rho_i^\mu - \partial^\mu a_{1,i}^\nu + \partial^\nu a_{1,i}^\mu)t_i\}^2] \\
= & -\frac{1}{4}[(\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu)^2 + (\partial^\mu f_1^\nu - \partial^\nu f_1^\mu)^2 \\
& + (\partial^\mu\vec{\rho}^\nu - \partial^\nu\vec{\rho}^\mu)^2 + (\partial^\mu\vec{a}_1^\nu - \partial^\nu\vec{a}_1^\mu)^2] \tag{2.130}
\end{aligned}$$

und für ihren Massenterm ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0}\right)^2 \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] \\
= & \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0}\right)^2 \text{Tr}[(\frac{1}{2}(\omega^\mu + f_1^\mu)^2 t_0 + (\rho_i^\mu + a_{1,i}^\mu)(\rho_j^\mu + a_{1,j}^\mu)t_i t_j) \\
& + (\frac{1}{2}(\omega^\mu - f_1^\mu)^2 t_0 + (\rho_i^\mu - a_{1,i}^\mu)(\rho_j^\mu - a_{1,j}^\mu)t_i t_j)] \\
= & \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0}\right)^2 (\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}). \tag{2.131}
\end{aligned}$$

Die Wechselwirkungsterme zwischen den Skalar-, Pseudoskalar-, Vektor- und Axial-Vektormesonen lauten

$$\begin{aligned}
& \frac{h_1}{2}\text{Tr}[\Phi^\dagger\Phi]\text{Tr}[L_\mu L^\mu + R_\mu R^\mu] \\
= & \frac{h_1}{4}(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)(\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}), \tag{2.132}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h_2\text{Tr}[\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi^\dagger] \\
= & h_2\text{Tr}[\{\frac{1}{2}(\sigma^2 + \eta_N^2 + a_{0,i}^2 + \pi_i^2)t_0\}\{(\omega^\mu + f_1^\mu)^2 t_0^2 \\
& + (\rho_i^\mu + a_{1,i}^\mu)(\rho_j^\mu + a_{1,j}^\mu)t_i t_j\} \\
& + \{\frac{1}{2}(\sigma^2 + \eta_N^2 + a_{0,i}^2 + \pi_i^2)t_0\}\{(\omega^\mu - f_1^\mu)^2 t_0^2 \\
& + (\rho_i^\mu - a_{1,i}^\mu)(\rho_j^\mu - a_{1,j}^\mu)t_i t_j\}] \\
= & \frac{h_2}{4}[\sigma^2\omega^{\mu 2} + \sigma^2 f_1^{\mu 2} + \sigma^2\vec{\rho}^{\mu 2} + \sigma^2\vec{a}_1^{\mu 2} + \eta_N^2\omega^{\mu 2} + \eta_N^2 f_1^{\mu 2} \\
& + \eta_N^2\vec{\rho}^{\mu 2} + \eta_N^2\vec{a}_1^{\mu 2} + \vec{a}_0^2\omega^{\mu 2} + \vec{a}_0^2 f_1^{\mu 2} + \vec{a}_0^2\vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_0^2\vec{a}_1^{\mu 2} \\
& + \vec{\pi}^2\omega^{\mu 2} + \vec{\pi}^2 f_1^{\mu 2} + \vec{\pi}^2\vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{\pi}^2\vec{a}_1^{\mu 2} + 4\vec{a}_1^\mu \cdot \vec{\pi} f^\mu \eta_N + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu f_1^\mu]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4\vec{\pi} \cdot \vec{\rho}^\mu \eta_N \omega^\mu + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{\rho}^\mu \sigma \omega^\mu - 4\omega^\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu \times \vec{\pi})] \\
= & \frac{h_2}{4} [(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)(\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}) + 4\vec{a}_1^\mu \cdot \vec{\pi} f_1^\mu \eta_N \\
& + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu f_1^\mu \sigma + 4\vec{\pi} \cdot \vec{\rho}^\mu \eta_N \omega^\mu + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{\rho}^\mu \sigma \omega^\mu + 4f_1^\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) \\
& - 4\omega^\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu \times \vec{\pi})], \tag{2.133}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2h_3 \text{Tr}[\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu] \\
= & 2h_3 \text{Tr}[\{(\sigma + i\eta_N)t_0 + (a_{0,i} + i\pi_i)t_i\}\{(\omega^\mu - f_1^\mu)t_0 + (\rho_j^\mu - a_{1,j}^\mu)t_j\} \\
& \cdot \{(\sigma - i\eta_N)t_0 + (a_{0,k} - i\pi_k)t_k\}\{(\omega^\mu + f_1^\mu)t_0 + (\rho_l^\mu + a_{1,l}^\mu)t_l\}] \\
= & \frac{h_3}{4} \{(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)(\omega^{\mu 2} - f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} - \vec{a}_1^{\mu 2}) \\
& + 4(\sigma \vec{a}_0 + \eta_N \vec{\pi})(\omega^\mu \vec{\rho}^\mu - f_1^\mu \vec{a}_1^\mu) + 4(\vec{a}_0 \times \vec{\pi})(\omega^\mu \vec{a}_1^\mu - f_1^\mu \vec{\rho}^\mu) \\
& + 4(\eta_N \vec{a}_0 - \sigma \vec{\pi})(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_1^\mu) - 2[(\vec{a}_0 \times \vec{\rho}^\mu)^2 - (\vec{a}_0 \times \vec{a}_1^\mu)^2 \\
& + (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 - (\vec{\pi} \times \vec{a}_1^\mu)^2]\}. \tag{2.134}
\end{aligned}$$

2.6 Verschiebung der vollen Lagrangedichte

Zur Untersuchung der Fluktuationen um die beiden Grundzustände werden die Felder σ und G um ihren Vakuumerwartungswert nach $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$ und $G \rightarrow G + G_0$ verschoben. Dies liefert folgende effektive Lagrangedichte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)^2 + g_1(\partial^\mu \sigma)(\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta_N f_1^\mu) + \frac{g_1^2}{2}(\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta_N f_1^\mu)^2 \\
& + \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta_N)^2 - g_1(\partial^\mu \eta_N)[(\sigma + \sigma_0) f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu] + \frac{g_1^2}{2}[(\sigma + \sigma_0) f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu]^2 \\
& + \frac{1}{2}(\partial^\mu \vec{a}_0)^2 + g_1(\partial^\mu \vec{a}_0) \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta_N \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi}) \\
& + \frac{g_1^2}{2}(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta_N \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi})^2 \\
& + \frac{1}{2}(\partial^\mu \vec{\pi})^2 - g_1(\partial^\mu \vec{\pi}) \cdot [\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma + \sigma_0) \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0] \\
& + \frac{g_1^2}{2}[\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma + \sigma_0) \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0]^2 \\
& - \frac{m_0^2}{2} \left(\frac{G + G_0}{G_0} \right)^2 [(\sigma + \sigma_0)^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2] \\
& - \frac{\lambda_1}{4} [(\sigma + \sigma_0)^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2]^2 \\
& - \frac{\lambda_2}{8} [(\sigma + \sigma_0)^4 + \eta_N^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + (\vec{\pi}^2)^2 + 2(\sigma + \sigma_0)^2 \eta_N^2 + 2\eta_N^2 \vec{a}_0^2 \\
& + 2(\sigma + \sigma_0)^2 \vec{\pi}^2 - 4(\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 + 6(\sigma + \sigma_0)^2 \vec{a}_0^2 + 6\eta_N^2 \vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2 \vec{\pi}^2 \\
& + 8(\sigma + \sigma_0) \eta_N \vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}] + \frac{c}{2} [(\sigma + \sigma_0)^2 - \eta_N^2 - \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2] + \bar{h}_0(\sigma + \sigma_0) \\
& - \frac{1}{4}(\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial^\mu f_1^\nu - \partial^\nu f_1^\mu)^2 \\
& - \frac{1}{4}(\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial^\mu \vec{a}_1^\nu - \partial^\nu \vec{a}_1^\mu)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G + G_0}{G_0} \right)^2 (\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}) \\
& + \frac{h_1}{4} ((\sigma + \sigma_0)^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) (\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}) \\
& + \frac{h_2}{4} \{ [(\sigma + \sigma_0)^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2] (\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}) \\
& + 4\vec{a}_1^\mu \cdot \vec{\pi} f^\mu \eta + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu f_1^\mu \sigma + 4\vec{\pi} \cdot \vec{\rho}^\mu \eta \omega^\mu + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{\rho}^\mu (\sigma + \sigma_0) \omega^\mu \\
& + 4f_1^\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) - 4\omega^\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu \times \vec{\pi}) \} \\
& + \frac{h_3}{4} \{ [(\sigma + \sigma_0)^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2] (\omega^{\mu 2} - f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} - \vec{a}_1^{\mu 2}) \\
& + 4[(\sigma + \sigma_0) \vec{a}_0 + \eta \vec{\pi}] (\omega^\mu \vec{\rho}^\mu - f_1^\mu \vec{a}_1^\mu) + 4(\vec{a}_0 \times \vec{\pi}) (\omega^\mu \vec{a}_1^\mu - f_1^\mu \vec{\rho}^\mu) \\
& + 4[\eta \vec{a}_0 - (\sigma + \sigma_0) \vec{\pi}] (\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_1^\mu) - 2[(\vec{a}_0 \times \vec{\rho}^\mu)^2 - (\vec{a}_0 \times \vec{a}_1^\mu)^2 \\
& + (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 - (\vec{\pi} \times \vec{a}_1^\mu)^2] \} \\
& + \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left[(G + G_0)^4 \ln \left(\frac{G + G_0}{\Lambda} \right) - \frac{(G + G_0)^4}{4} \right]. \quad (2.135)
\end{aligned}$$

Durch die Verschiebung des Sigmafeldes um dessen VEW ergeben sich in dem kinetischen Term der effektiven Lagrangedichte

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} [(D^\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)] \\
& = \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)^2 + g_1 (\partial^\mu \sigma) (\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta_N f_1^\mu) + \frac{g_1^2}{2} (\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta_N f_1^\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta_N)^2 \\
& - g_1 (\partial^\mu \eta_N) [(\sigma + \sigma_0) f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu] + \frac{g_1^2}{2} [(\sigma + \sigma_0) f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu]^2 \\
& + \frac{1}{2} (\partial^\mu \vec{a}_0)^2 + g_1 (\partial^\mu \vec{a}_0) \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta_N \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi}) \\
& + \frac{g_1^2}{2} (\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta_N \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi})^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu \vec{\pi})^2 \\
& - g_1 (\partial^\mu \vec{\pi}) \cdot [\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma + \sigma_0) \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0] \\
& + \frac{g_1^2}{2} [\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma + \sigma_0) \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0]^2 \quad (2.136)
\end{aligned}$$

nicht-diagonale Terme

$$-g_1 \partial^\mu \eta_N \sigma_0 f_1^\mu \quad (2.137)$$

sowie

$$-g_1 \partial^\mu \vec{\pi} \sigma_0 \cdot \vec{a}_1^\mu. \quad (2.138)$$

Diese sind unphysikalisch, da sie einer Mischung zwischen der longitudinalen Komponente der axial-vektoriellen Mesonen und den Goldstone-Bosonen, die durch die spontane Symmetriebrechung hervorgehen, entsprechen. Um diese Terme aus der effektiven Lagrangedichte zu eliminieren, werden die axial-vektoriellen Freiheitsgrade wie folgt redefiniert [24, 29, 30]

$$f_1^\mu = f_1^{\mu,phy} + w \partial^\mu \eta_N, \quad (2.139)$$

$$\vec{a}_1^\mu = \vec{a}_1^{\mu,phy} + w \partial^\mu \vec{\pi}. \quad (2.140)$$

Dabei ist die Größe

$$w = \frac{g_1 \sigma_0}{M_{a_1}^2} \quad (2.141)$$

entsprechend definiert, um die Elimination der nicht-diagonalen Terme zu gewährleisten. Der Index „phy“ für die neuen physikalischen Felder wird im Folgenden weggelassen. Substituiert man die redefinierten Felder (2.139) und (2.140) in der effektiven Lagrangedichte (2.135), so erfordern die pseudoskalaren Freiheitsgrade einer Renormierung der Wellenfunktion nach

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta_N)^2 \longrightarrow \frac{1}{2Z^2}(\partial_\mu \eta_N)^2 \quad (2.142)$$

und

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 \longrightarrow \frac{1}{2Z^2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2, \quad (2.143)$$

wobei

$$Z = \left(1 - \frac{g_1^2 \sigma_0^2}{M_{a_1}^2}\right)^{-1/2}. \quad (2.144)$$

Entsprechend müssen auch die pseudoskalaren Freiheitsgrade substituiert werden, um eine geeignete Normierung zu erhalten

$$\eta_N \longrightarrow Z\eta_N \quad (2.145)$$

sowie

$$\vec{\pi} \longrightarrow Z\vec{\pi}. \quad (2.146)$$

Nach der Redefinition der pseudoskalaren Felder und der Renormierung der Wellenfunktionen erhält man schließlich die effektive Lagrangedichte, die zur Berechnung der Zerfallsbreiten herangezogen werden kann

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\{\partial^\mu \sigma + g_1[Z\vec{\pi} \cdot (\vec{a}_1^\mu + Zw\partial_\mu \vec{\pi}) + Z\eta_N(f_1^\mu + Zw\partial_\mu \eta_N)]\}^2 \\ & + \frac{1}{2}\{Z\partial^\mu \eta_N - g_1\{(\sigma_0 + \sigma)(f_1^\mu + Zw\partial_\mu \eta_N) + \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + Zw\partial_\mu \vec{\pi})\}\}^2 \\ & + \frac{1}{2}\{\partial^\mu \vec{a}_0 + g_1[\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + Z\eta_N(\vec{a}_1^\mu + Zw\partial_\mu \vec{\pi}) \\ & + (f_1^\mu + Zw\partial_\mu \eta_N)Z\vec{\pi}]\}^2 + \frac{1}{2}\{Z\partial^\mu \vec{\pi} - g_1[Z\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu \\ & + (\sigma_0 + \sigma)(\vec{a}_1^\mu + Zw\partial_\mu \vec{\pi}) + (f_1^\mu + Zw\partial_\mu \eta_N)\vec{a}_0]\}^2 \\ & - \frac{m_0^2}{2} \frac{1}{G_0^2} (G + G_0)^2 [(\sigma + \sigma_0)^2 + Z^2 \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + Z^2 \vec{\pi}^2] \\ & - \frac{\lambda_1}{4} [(\sigma + \sigma_0)^2 + Z^2 \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + Z^2 \vec{\pi}^2]^2 \\ & - \frac{\lambda_2}{8} [(\sigma + \sigma_0)^4 + Z^4 \eta_N^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + Z^4 (\vec{\pi}^2)^2 + 2(\sigma + \sigma_0)^2 Z^2 \eta_N^2 \\ & + 2Z^2 \eta_N^2 \vec{a}_0^2 + 2(\sigma + \sigma_0)^2 Z^2 \vec{\pi}^2 - 4Z^2 (\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 + 6(\sigma + \sigma_0)^2 \vec{a}_0^2 \\ & + 6Z^2 \eta_N^2 Z^2 \vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2 Z^2 \vec{\pi}^2 + 8(\sigma_0 + \sigma)Z^2 \eta_N \vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}] \\ & - \frac{1}{4}(\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu)^2 - \frac{1}{4}[\partial^\mu (f_1^\nu + Zw\partial_\nu \eta_N) - \partial^\nu (f_1^\mu + Zw\partial_\mu \eta_N)]^2 \\ & - \frac{1}{4}(\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu)^2 - \frac{1}{4}[\partial^\mu (\vec{a}_1^\nu + Zw\partial_\nu \vec{\pi}) - \partial^\nu (\vec{a}_1^\mu + Zw\partial_\mu \vec{\pi})]^2 \\ & + \frac{m_1^2}{2} \frac{1}{G_0^2} (G + G_0)^2 [\omega^{\mu^2} + (f_1^\mu + Zw\partial_\mu \eta_N)^2 + \vec{\rho}^{\mu^2} + (\vec{a}_1^\mu + Zw\partial_\mu \vec{\pi})^2] \\ & + \frac{c}{2} [(\sigma + \sigma_0)^2 - Z^2 \eta_N^2 - \vec{a}_0^2 + Z^2 \vec{\pi}^2] + \bar{h}_0 (\sigma + \sigma_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left[(G + G_0)^4 \ln \left(\frac{G + G_0}{\Lambda} \right) - \frac{(G + G_0)^4}{4} \right] \\
& + \frac{h_1}{4} \{ [(\sigma + \sigma_0)^2 + Z^2 \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + Z^2 \vec{\pi}^2] \\
& \cdot [\omega^{\mu 2} + (f_1^\mu + Zw \partial_\mu \eta_N)^2 + \vec{\rho}^{\mu 2} + (\vec{a}_1^\mu + Zw \partial_\mu \vec{\pi})^2] \} \\
& + \frac{h_2}{4} \{ [(\sigma + \sigma_0)^2 + Z^2 \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + Z^2 \vec{\pi}^2] \\
& \cdot [\omega^{\mu 2} + (f_1^\mu + Zw \partial_\mu \eta_N)^2 + \vec{\rho}^{\mu 2} + (\vec{a}_1^\mu + Zw \partial_\mu \vec{\pi})^2] \\
& + 4(\vec{a}_1^\mu + Zw \partial_\mu \vec{\pi}) \cdot Z \vec{\pi} (f_1^\mu + Zw \partial_\mu \eta_N) Z \eta_N \\
& + 4\vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + Zw \partial_\mu \vec{\pi}) (f_1^\mu + Zw \partial_\mu \eta_N) (\sigma + \sigma_0) \\
& + 4Z \vec{\pi} \cdot \vec{\rho}^\mu Z \eta_N \omega^\mu + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{\rho}^\mu (\sigma + \sigma_0) \omega^\mu \\
& + 4(f_1^\mu + Zw \partial_\mu \eta_N) \vec{a}_0 \cdot (Z \vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) - 4\omega^\mu \vec{a}_0 \cdot [(\vec{a}_1^\mu + Zw \partial_\mu \vec{\pi}) \times Z \vec{\pi}] \} \\
& + \frac{h_3}{4} \{ [(\sigma + \sigma_0)^2 + Z^2 \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + Z^2 \vec{\pi}^2] \\
& \cdot [\omega^{\mu 2} - (f_1^\mu + Zw \partial_\mu \eta_N)^2 + \vec{\rho}^{\mu 2} - (\vec{a}_1^\mu + Zw \partial_\mu \vec{\pi})^2] \\
& + 4[(\sigma + \sigma_0) \vec{a}_0 + Z^2 \eta_N \vec{\pi}] [\omega^\mu \vec{\rho}^\mu - (f_1^\mu + Zw \partial_\mu \eta_N) (\vec{a}_1^\mu + Zw \partial_\mu \vec{\pi})] \\
& + 4(\vec{a}_0 \times Z \vec{\pi}) [\omega^\mu (\vec{a}_1^\mu + Zw \partial_\mu \vec{\pi}) - (f_1^\mu + Zw \partial_\mu \eta_N) \vec{\rho}^\mu] \\
& + 4[Z \eta_N \vec{a}_0 - (\sigma + \sigma_0) Z \vec{\pi}] [\vec{\rho}^\mu \times (\vec{a}_1^\mu + Zw \partial_\mu \vec{\pi})] \\
& - 2\{ (\vec{a}_0 \times \vec{\rho}^\mu)^2 - [\vec{a}_0 \times (\vec{a}_1^\mu + Zw \partial_\mu \vec{\pi})]^2 + (Z \vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 \\
& - [Z \vec{\pi} \times (\vec{a}_1^\mu + Zw \partial_\mu \vec{\pi})]^2 \}. \tag{2.147}
\end{aligned}$$

Kapitel 3

Mischung zwischen Sigmafeld und Glueball

Auf Grund von gleichen Quantenzahlen,

$$J^{PC} = 0^{++}, \quad (3.1)$$

kommt es innerhalb dieses effektiven Modells zu einer Mischung zwischen dem nackten Sigmafeld σ und dem nackten skalaren Glueball G . Die entmischten Felder werden mit den skalaren-isoskalaren Resonanzen

$$\sigma' \equiv f_0(1370) \quad (3.2)$$

und

$$G' \equiv f_0(1500) \quad (3.3)$$

identifiziert, wobei $f_0(1370)$ überwiegend den Quark-Antiquark Zustand

$$\sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \quad (3.4)$$

und $f_0(1500)$ überwiegend den Gluon-Gluon Zustand

$$G \equiv gg \quad (3.5)$$

darstellt. In Folgendem wird der Mischungswinkel zwischen den nackten Feldern sowie deren rotierte Massen auf Baumdiagrammniveau bestimmt.

3.1 Lagrangedichte für den Mischungswinkel

Setzt man im effektiven Modell (2.108) alle Freiheitsgrade, bis auf die skalaren-isoskalaren

$$\sigma \neq 0 \quad (3.6)$$

und

$$G \neq 0, \quad (3.7)$$

gleich null

$$\eta_N = \vec{a}_0 = \vec{\pi} = \omega^\mu = \vec{\rho}^\mu = f_1^\mu = \vec{a}_1^\mu = 0, \quad (3.8)$$

so erhält man folgende effektive Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{misch}} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} \left[m_0^2 \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 - c \right] \sigma^2 - \frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma^4 + \bar{h}_0 \sigma \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left(G^4 \ln \left| \frac{G}{\Lambda} \right| - \frac{G^4}{4} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{2} \left[m_0^2 \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 - c \right] \sigma^2 + \frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma^4 - \bar{h}_0 \sigma \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left(G^4 \ln \left| \frac{G}{\Lambda} \right| - \frac{G^4}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Wie im letzten Kapitel beschrieben, besitzen das Sigmafeld und der skalare Glueball bei spontan gebrochener chiralen Symmetrie einen nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswert

$$\langle \sigma \rangle \equiv \sigma_0 = \text{const} \neq 0 \quad (3.11)$$

bzw.

$$\langle G \rangle \equiv G_0 = \text{const} \neq 0. \quad (3.12)$$

Zur Untersuchung der Fluktuationen um die beiden Grundzustände, werden die Felder um ihren VEW mit $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$ sowie $G \rightarrow G + G_0$ verschoben. Dies führt nach der Verschiebung und Entwicklung bis zur zweiten Ordnung um das Minimum auf folgende Potentialdichte

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{V}(\sigma_0, G_0) + \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_0, G_0} \sigma + \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial G} \right|_{\sigma_0, G_0} G + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \sigma^2} \right|_{\sigma_0, G_0} \sigma^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial G^2} \right|_{\sigma_0, G_0} G^2 + \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \sigma \partial G} \right|_{\sigma_0, G_0} \sigma G, \end{aligned} \quad (3.13)$$

wobei die explizite Form der einzelnen Terme, beginnend mit der Potentialdichte nullter Ordnung, wie folgt ist

$$\mathcal{V}(\sigma_0, G_0) = \frac{1}{2} (m_0^2 - c) \sigma_0^2 + \frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma_0^4 - \bar{h}_0 \sigma_0 + \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left(G_0^4 \ln \left| \frac{G_0}{\Lambda} \right| - \frac{G_0^4}{4} \right). \quad (3.14)$$

Für das Minimum des Sigmafeldes ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma} &= \left[m_0^2 \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 - c \right] \sigma + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma^3 - \bar{h}_0 = 0 \\ \Rightarrow \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_0, G_0} &= (m_0^2 - c) \sigma_0 + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma_0^3 - \bar{h}_0 \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Aus der effektiven Lagrangedichte (2.135) kann man die Massengleichung für Pionen

$$M_\pi^2 = Z^2 \left[m_0^2 - c + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma_0^2 \right], \quad (3.16)$$

sowie auch die Massengleichungen (3.25), (3.26) und (4.33) erhalten. Die Berechnung dieser Massen der Zustände als Funktion der Parameter ist in vorliegender

Arbeit nicht explizit dargestellt. In diesem Zusammenhang wird auf [24] verwiesen. Verwendet man nun die Massengleichung (3.16), so folgt für (3.15)

$$\bar{h}_0 = \frac{M_\pi^2}{Z^2} \sigma_0. \quad (3.17)$$

Mit der Renormierung der pionischen Freiheitsgrade (2.146) ergibt sich für die Divergenz der axialen Ströme

$$\partial_\mu A_i^\mu = \frac{M_\pi^2}{Z} \sigma_0 \pi_i, \quad (3.18)$$

wodurch, unter Ausnutzung der PCAC-Relation (B.4), der Vakuumerwartungswert des Sigamafeldes mit der Pion-Vakuumzerfallskonstante, welche experimentell zu $f_\pi = 0.0924 \text{ GeV}$ ermittelt wurde, identifiziert wird

$$\sigma_0 = Z f_\pi. \quad (3.19)$$

Das Minimum des Dilatonfeldes lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial G} &= m_0^2 \frac{\sigma^2}{G^2} G + \frac{m_G^2 \ln \left| \frac{G}{\Lambda} \right|}{\Lambda^2} G^3 \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial G} \Big|_{\sigma_0, G_0} &= \frac{m_0^2 \sigma_0^2}{G_0} + \frac{m_G^2 \ln \left| \frac{G_0}{\Lambda} \right|}{\Lambda^2} G_0^3 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{m_0^2 \sigma_0^2 \Lambda^2}{m_G^2} &= G_0^4 \ln \left| \frac{G_0}{\Lambda} \right|. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die zweiten Ableitungen nach den jeweiligen Feldern liefern die nackte Masse des Sigamafeldes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \sigma^2} &= m_0^2 \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 - c + 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \sigma^2} \Big|_{\sigma_0, G_0} &= m_0^2 - c + 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma_0^2 = M_\sigma^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

und des skalaren Glueballs

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial G^2} &= \frac{m_0^2 \sigma^2}{G_0^2} + \frac{G^2 m_G^2 (1 + 3 \ln \left| \frac{G}{\Lambda} \right|)}{\Lambda^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial G^2} \Big|_{\sigma_0, G_0} &= \frac{m_0^2 \sigma_0^2}{G_0^2} + \frac{G_0^2 m_G^2 (1 + 3 \ln \left| \frac{G_0}{\Lambda} \right|)}{\Lambda^2} = M_G^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

An dieser Stelle sei noch einmal der Unterschied der beiden nackten skalaren Glueballmassen m_G und M_G erwähnt. Die Masse M_G ist in der Potentialdichte enthalten, die Quark-Antiquark Freiheitsgrade besitzt. Bei m_G handelt es sich um die Masse aus der Dilaton Potentialdichte, die keine Quarkzustände enthält. Der letzte Term ist die gemischte zweite Ableitung nach den Feldern, aus der nun der Mischungsparameter z resultiert

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \sigma \partial G} &= \frac{2m_0^2}{G_0^2} \sigma G \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \sigma \partial G} \Big|_{\sigma_0, G_0} &= \frac{2m_0^2 \sigma_0}{G_0} \equiv z. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Damit ergibt sich für die Potentialdichte bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \mathcal{V}(\sigma_0, G_0) + \frac{1}{2} (\sigma, G) \begin{pmatrix} M_\sigma^2 & \frac{2m_0^2\sigma_0}{G_0} \\ \frac{2m_0^2\sigma_0}{G_0} & M_G^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ G \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{V}(\sigma_0, G_0) + \frac{1}{2} M_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} M_G^2 G^2 + \frac{2m_0^2\sigma_0}{G_0} \sigma G \\
&= \frac{1}{2} (m_0^2 - c) \sigma_0^2 + \frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma_0^4 - \bar{h}_0 \sigma_0 \\
&\quad + \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left(G_0^4 \ln \left| \frac{G_0}{\Lambda} \right| - \frac{G_0^4}{4} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} (m_0^2 - c) \sigma^2 + \frac{3}{2} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma_0^2 \sigma^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{m_0^2 \sigma_0^2}{G_0^2} G^2 + \frac{1}{2} \frac{G_0^2 m_G^2 (1 + 3 \ln \left| \frac{G_0}{\Lambda} \right|)}{\Lambda^2} G^2 \\
&\quad + \frac{2m_0^2\sigma_0}{G_0} \sigma G, \tag{3.24}
\end{aligned}$$

wobei die Terme erster Ordnung wegen der Stationarität verschwinden. Mit den Massengleichungen

$$M_\sigma^2 = m_0^2 - c + 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma_0^2, \tag{3.25}$$

$$M_{\eta_N}^2 = Z^2 \left[m_0^2 + c + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma_0^2 \right] \tag{3.26}$$

und (3.16) ergibt sich für die Kopplungen der skalarmesonischen Selbstwechselwirkungsterme

$$\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) = \frac{1}{2Z^2 f_\pi^2} \left(M_\sigma^2 - \frac{M_\pi^2}{Z^2} \right) \tag{3.27}$$

und für den Massenparameter

$$\begin{aligned}
m_0^2 &= \frac{1}{2} \left[M_\sigma^2 + \frac{M_{\eta_N}^2}{Z^2} - 4 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma_0^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[M_\sigma^2 + \frac{M_{\eta_N}^2}{Z^2} - 2 \left(M_\sigma^2 - \frac{M_\pi^2}{Z^2} \right) \right] \\
&= \left(\frac{M_\pi}{Z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{M_{\eta_N}}{Z} \right)^2 - M_\sigma^2 \right]. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

3.2 $SO(2)$ -Rotation der Felder

Die Felder σ und G in der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\sigma, G) = \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{2} M_G^2 G^2 + z \sigma G \tag{3.29}$$

beschreiben keine asymptotischen Zustände, da sie nicht zueinander orthogonal sind. Dies bringt der Mischungsterm zum Ausdruck. Folglich sind die nackten

Massen des Sigmafeldes M_σ und des skalaren Glueballs M_G nicht die Masseneigenzustände. Durch $SO(2)$ -Rotation wird die Lagrangedichte diagonalisiert, die nicht-diagonalen Terme verschwinden und man erhält die Lagrangedichte mit den physikalischen Feldern σ' und G' und den Masseneigenzuständen $M_{\sigma'}$ und $M_{G'}$, also den im Experiment messbaren physikalischen Massen

$$\mathcal{L}(\sigma', G') = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma')^2 - \frac{1}{2}M_{\sigma'}^2 \sigma'^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu G')^2 - \frac{1}{2}M_{G'}^2 G'^2. \quad (3.30)$$

Das Transformationsverhalten der Felder ist

$$\begin{pmatrix} \sigma' \\ G' \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} \sigma \\ G \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_0(1370) \\ f_0(1500) \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ G \end{pmatrix} = O^T \begin{pmatrix} \sigma' \\ G' \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

bzw. der Massenmatrix

$$M' = OMO^T = O \begin{pmatrix} M_\sigma^2 & z \\ z & M_G^2 \end{pmatrix} O^T = \begin{pmatrix} M_\sigma^2 \cos^2(\theta) + M_G^2 \sin^2(\theta) + z \sin(2\theta) & \frac{1}{2}(M_G^2 - M_\sigma^2) \sin(2\theta) + z \cos(2\theta) \\ \frac{1}{2}(M_G^2 - M_\sigma^2) \sin(2\theta) + z \cos(2\theta) & M_G^2 \cos^2(\theta) + M_\sigma^2 \sin^2(\theta) - z \sin(2\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

wobei

$$O = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

die orthogonale Drehmatrix ist.

Die Eigenvektoren

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \sigma' \\ G' \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

sind gegeben durch die Eigenwertgleichung

$$M\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}. \quad (3.36)$$

Die rotierten Massen $M_{\sigma'}$ und $M_{G'}$ sind die Eigenwerte der nicht-rotierten Matrix M , d.h. für eine nicht triviale Lösung muss folgende Bedingung erfüllt sein

$$\det(\lambda 1_2 - M) \stackrel{!}{=} 0 = (\lambda - M_\sigma^2)(\lambda - M_G^2) - z^2 = 0 \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = M_{\sigma'}^2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = M_{G'}^2 \Rightarrow z \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.38)$$

$$\Rightarrow M' = \begin{pmatrix} M_{\sigma'}^2 & 0 \\ 0 & M_{G'}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Durch die $SO(2)$ -Rotation erhält man die erwünschte Potentialdichte mit den physikalischen, entmischten Feldern und den Masseneigenzuständen

$$\mathcal{V}(\sigma', G') = \frac{1}{2}(\sigma', G') \begin{pmatrix} M_{\sigma'}^2 & 0 \\ 0 & M_{G'}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma' \\ G' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}M_{\sigma'}^2 \sigma'^2 + \frac{1}{2}M_{G'}^2 G'^2. \quad (3.40)$$

3.3 Mischungswinkel und Massen der Felder

Nach der $SO(2)$ -Rotation ergibt sich für den Mischungswinkel θ folgende Bedingung

$$\frac{1}{2}(M_G^2 - M_\sigma^2) \sin(2\theta) + z \cos(2\theta) \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \theta &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{-2z}{M_G^2 - M_\sigma^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{-4m_0^2 \sigma_0}{G_0 (M_G^2 - M_\sigma^2)} \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

und die Masseneigenzustände $M_{\sigma'}$ und $M_{G'}$ erhält man über

$$\begin{aligned} M_{\sigma'}^2 &= M_\sigma^2 \cos^2(\theta) + M_G^2 \sin^2(\theta) + z \sin(2\theta) \\ &= M_\sigma^2 \cos^2(\theta) + M_G^2 \sin^2(\theta) + \frac{2m_0^2 \sigma_0}{G_0} \sin(2\theta), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} M_{G'}^2 &= M_G^2 \cos^2(\theta) + M_\sigma^2 \sin^2(\theta) - z \sin(2\theta) \\ &= M_G^2 \cos^2(\theta) + M_\sigma^2 \sin^2(\theta) - \frac{2m_0^2 \sigma_0}{G_0} \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dabei wird der Masseneigenzustand des entmischten Sigmafeldes mit der Resonanzmasse

$$M_{\sigma'} \equiv M_{f_0(1370)} \quad (3.45)$$

und der Masseneigenzustand des entmischten skalaren Glueballs mit der Resonanzmasse

$$M_{G'} \equiv M_{f_0(1500)} \quad (3.46)$$

identifiziert, wobei $M_{f_0(1500)}$, wie Anhang A zu entnehmen ist, im Gegensatz zur $M_{f_0(1370)}$, experimentell sehr gut bekannt ist. Wie bereits im Abschnitt zur Mischung der Felder gezeigt, muss im Grenzfall einer kleinen Mischung die Repulsionsbedingung (1.154) erfüllt sein. Mit Bezug darauf wird angenommen, dass für die nicht bekannten nackten Massen des Sigmafeldes sowie des skalaren Glueballs die Bedingung

$$M_\sigma < m_G < M_G \quad (3.47)$$

erfüllt sein muss.

Kapitel 4

Zerfallsbreiten

Im folgenden Kapitel werden aus dem effektiven Modell für die zu untersuchenden Zerfallskanäle des entmischten Sigmafeldes

$$\sigma' \equiv f_0(1370) \quad (4.1)$$

sowie des entmischten skalaren Glueballs

$$G' \equiv f_0(1500) \quad (4.2)$$

die entsprechenden Zerfall-Lagrangedichten aufgestellt. Diese liefern die Vertices für die Übergangsamplituden, die zur Berechnung der Zerfallsbreiten notwendig sind.

4.1 Γ -Lagrangedichte

Man betrachte vorerst eine aus dem effektiven Modell resultierende Lagrangedichte, die die Basis zur Aufstellung der Zerfall-Lagrangedichten der zu untersuchenden Zerfallskanäle darstellt

$$\mathcal{L}_\Gamma = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{ww}, \quad (4.3)$$

wobei

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}M_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{2}M_G^2 G^2 + z\sigma G \quad (4.4)$$

die freie Lagrangedichte mit dem Mischungsparameter

$$z = \frac{2m_0^2 \sigma_0}{G_0} \quad (4.5)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ww} = & \text{Tr} \left[(D^\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - m_0^2 \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda_2 (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right] \\ & - \lambda_1 (\text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi])^2 + \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] \\ & + \mathcal{L}_h \end{aligned} \quad (4.6)$$

die Wechselwirkung-Lagrangedichte, welche die entsprechenden Zerfallsvertices enthält, ist. Die Lagrangedichte \mathcal{L}_h enthält die weiteren global invarianten Terme, die die skalaren, pseudoskalaren, vektoriellen und axial-vektoriellen Freiheitsgrade miteinander koppeln. Wie bereits zuvor berechnet, ergibt sich nach Ausführung der Spur für die Wechselwirkung-Lagrangedichte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{ww} = & \frac{1}{2} [\partial^\mu \sigma + g_1 (\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta_N f_1^\mu)]^2 + \frac{1}{2} [\partial^\mu \eta_N - g_1 (\sigma f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu)]^2 \\
& + \frac{1}{2} [\partial^\mu \vec{a}_0 + g_1 (\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta_N \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi})]^2 \\
& + \frac{1}{2} [\partial^\mu \vec{\pi} - g_1 (\vec{\pi}^\mu \times \vec{\rho}^\mu + \sigma \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0)]^2 \\
& - \frac{m_0^2}{2} \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 (\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) \\
& - \frac{\lambda_1}{4} (\sigma^4 + \eta_N^4 + \vec{a}_0^4 + \vec{\pi}^4 + 2\sigma^2 \eta_N^2 + 2\sigma^2 \vec{a}_0^2 + 2\sigma^2 \vec{\pi}^2 \\
& + 2\eta_N^2 \vec{a}_0^2 + 2\eta_N^2 \vec{\pi}^2 + 2\vec{a}_0^2 \vec{\pi}^2) \\
& - \frac{\lambda_2}{8} [\sigma^4 + \eta_N^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + (\vec{\pi}^2)^2 + 2\sigma^2 \eta_N^2 + 2\eta_N^2 \vec{a}_0^2 + 2\sigma^2 \vec{\pi}^2 \\
& - (4\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 + 6\sigma^2 \vec{a}_0^2 + 6\eta_N^2 \vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2 \vec{\pi}^2 + 8\sigma \eta_N \vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}] \\
& + \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 (\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}) + \mathcal{L}_h
\end{aligned} \tag{4.7}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{h_1} = & \frac{h_1}{4} (\sigma^2 \omega^{\mu 2} + \sigma^2 f_1^{\mu 2} + \sigma^2 \vec{\rho}^{\mu 2} + \sigma^2 \vec{a}_1^{\mu 2} + \eta_N^2 \omega^{\mu 2} + \eta_N^2 f_1^{\mu 2} \\
& + \eta_N^2 \vec{\rho}^{\mu 2} + \eta_N^2 \vec{a}_1^{\mu 2} + \vec{a}_0^2 \omega^{\mu 2} + \vec{a}_0^2 f_1^{\mu 2} + \vec{a}_0^2 \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_0^2 \vec{a}_1^{\mu 2} \\
& + \vec{\pi}^2 \omega^{\mu 2} + \vec{\pi}^2 f_1^{\mu 2} + \vec{\pi}^2 \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{\pi}^2 \vec{a}_1^{\mu 2}),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{h_2} = & \frac{h_2}{4} [(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)(\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}) + 4\vec{a}_1^\mu \cdot \vec{\pi} f_1^\mu \eta_N \\
& + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu f_1^\mu \sigma + 4\vec{\pi} \cdot \vec{\rho}^\mu \eta_N \omega^\mu + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{\rho}^\mu \sigma \omega^\mu + 4f_1^\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) \\
& - 4\omega^\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu \times \vec{\pi})],
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{h_3} = & \frac{h_3}{4} \{(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)(\omega^{\mu 2} - f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} - \vec{a}_1^{\mu 2}) \\
& + 4(\sigma \vec{a}_0 + \eta_N \vec{\pi})(\omega^\mu \vec{\rho}^\mu - f_1^\mu \vec{a}_1^\mu) + 4(\vec{a}_0 \times \vec{\pi})(\omega^\mu \vec{a}_1^\mu - f_1^\mu \vec{\rho}^\mu) \\
& + 4(\eta_N \vec{a}_0 - \sigma \vec{\pi})(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_1^\mu) - 2[(\vec{a}_0 \times \vec{\rho}^\mu)^2 - (\vec{a}_0 \times \vec{a}_1^\mu)^2 \\
& + (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 - (\vec{\pi} \times \vec{a}_1^\mu)^2]\}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Berücksichtigt man weiter die Redefinition der axial-vektoriellen Freiheitsgrade, bedingt durch die Verschiebung der Felder $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$ und $G \rightarrow G + G_0$, und die dadurch erforderliche Renormierung der Wellenfunktionen der pseudoskalaren Freiheitsgrade, so ergeben sich letzten Endes die Terme der Wechselwirkung-Lagrangedichte, die zur Berechnung der Zerfallsbreiten relevant sind.

Der kinetische Term

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}[(D^\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)] \\
= & \frac{1}{2} \{ \partial^\mu (\sigma_0 + \sigma) + g_1 [Z\vec{\pi} \cdot (\vec{a}_1^\mu + Zw\partial_\mu \vec{\pi}) + Z\eta_N (f_1^\mu + Zw\partial_\mu \eta_N)] \}^2 \\
& + \frac{1}{2} \{ Z\partial^\mu \eta_N - g_1 [(\sigma_0 + \sigma) (f_1^\mu + Zw\partial_\mu \eta_N) + \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + Zw\partial_\mu \vec{\pi})] \}^2 \\
& + \frac{1}{2} \{ \partial^\mu \vec{a}_0 + g_1 (\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + Z\eta_N (\vec{a}_1^\mu + Zw\partial_\mu \vec{\pi}) + (f_1^\mu + Zw\partial_\mu \eta_N) \vec{\pi}) \}^2 \\
& + \frac{1}{2} \{ \partial^\mu (Z\vec{\pi}) - g_1 [Z\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma_0 + \sigma) (\vec{a}_1^\mu + Zw\partial_\mu \vec{\pi}) \\
& + (f_1^\mu + Zw\partial_\mu \eta_N) \vec{a}_0] \}^2. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Der Massenterm der skalaren und pseudo-skalaren Freiheitsgrade sowie des skalaren Glueballs

$$\begin{aligned}
& -m_0^2 \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 \text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi] \\
= & -\frac{m_0^2}{2} \frac{1}{G_0^2} (G^2 + G_0^2 + 2GG_0) (\sigma^2 + \sigma_0^2 + 2\sigma\sigma_0 \\
& + Z^2 \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + Z^2 \vec{\pi}^2). \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Die Selbstwechselwirkungsterme der skalaren und pseudo-skalaren Freiheitsgrade

$$\begin{aligned}
& -\lambda_1 (\text{Tr} [\Phi^\dagger \Phi])^2 \\
= & -\frac{\lambda_1}{4} [\sigma^4 + 4\sigma^3\sigma_0 + 6\sigma^2\sigma_0^2 + 4\sigma\sigma_0^3 + \sigma_0^4 + Z^4 \eta_N^4 \\
& + \vec{a}_0^4 + Z^4 \vec{\pi}^4 + 2(\sigma^2 + \sigma_0^2 + 2\sigma\sigma_0) Z^2 \eta_N^2 \\
& + 2(\sigma^2 + \sigma_0^2 + 2\sigma\sigma_0) \vec{a}_0^2 + 2(\sigma^2 + \sigma_0^2 + 2\sigma\sigma_0) Z^2 \vec{\pi}^2 \\
& + 2Z^2 \eta_N^2 \vec{a}_0^2 + 2Z^2 \eta_N^2 Z^2 \vec{\pi}^2 + 2\vec{a}_0^2 Z^2 \vec{\pi}^2], \tag{4.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_2 \text{Tr}[(\Phi^\dagger \Phi)^2] \\
= & -\frac{\lambda_2}{8} [\sigma^4 + 4\sigma^3\sigma_0 + 6\sigma^2\sigma_0^2 + 4\sigma\sigma_0^3 + \sigma_0^4 + Z^4 \eta_N^4 \\
& + (\vec{a}_0^2)^2 + Z^4 (\vec{\pi}^2)^2 + 2(\sigma^2 + \sigma_0^2 + 2\sigma\sigma_0) Z^2 \eta_N^2 + 2Z^2 \eta_N^2 \vec{a}_0^2 \\
& + 2(\sigma^2 + \sigma_0^2 + 2\sigma\sigma_0) Z^2 \vec{\pi}^2 - 4Z^2 (\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 \\
& + 6(\sigma^2 + \sigma_0^2 + 2\sigma\sigma_0) \vec{a}_0^2 + 6Z^2 \eta_N^2 Z^2 \vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2 Z^2 \vec{\pi}^2 \\
& + 8(\sigma_0 + \sigma) Z^2 \eta_N \vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}]. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Der Massenterm der vektoriellen und axial-vektoriellen Freiheitsgrade sowie des skalaren Glueballs

$$\begin{aligned}
& \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2] \\
= & + \frac{m_1^2}{2} \frac{1}{G_0^2} (G^2 + G_0^2 + 2GG_0) [\omega^{\mu^2} + f_1^{\mu^2} + Z^2 w^2 (\partial_\mu \eta_N)^2 \\
& + 2f_1^\mu Z w \partial_\mu \eta_N + \vec{\rho}^{\mu^2} + \vec{a}_1^{\mu^2} + Z^2 w^2 (\partial_\mu \vec{\pi})^2 + 2\vec{a}_1^\mu Z w \partial_\mu \vec{\pi}]. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Die Selbstwechselwirkungsterme der Quark-Antiquark Freiheitsgrade

$$\begin{aligned}
& \frac{h_1}{2} \text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi] \text{Tr}[L_\mu L^\mu + R_\mu R^\mu] \\
= & \frac{h_1}{4} \{[(\sigma + \sigma_0)^2 + Z^2 \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + Z^2 \vec{\pi}^2][\omega^{\mu^2} + (f_1^\mu + Z w \partial_\mu \eta_N)^2 \\
& + \vec{\rho}^{\mu^2} + (\vec{a}_1^\mu + Z w \partial_\mu \vec{\pi})^2]\}, \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h_2 \text{Tr}[\Phi^\dagger L_\mu L^\mu \Phi + \Phi R_\mu R^\mu \Phi^\dagger] \\
= & \frac{h_2}{4} \{[(\sigma + \sigma_0)^2 + Z^2 \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + Z^2 \vec{\pi}^2] \\
& \cdot [\omega^{\mu^2} + (f_1^\mu + Z w \partial_\mu \eta_N)^2 + \vec{\rho}^{\mu^2} + (\vec{a}_1^\mu + Z w \partial_\mu \vec{\pi})^2] \\
& + 4(\vec{a}_1^\mu + Z w \partial_\mu \vec{\pi}) \cdot Z \vec{\pi} (f_1^\mu + Z w \partial_\mu \eta_N) Z \eta_N \\
& + 4\vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + Z w \partial_\mu \vec{\pi}) (f_1^\mu + Z w \partial_\mu \eta_N) (\sigma + \sigma_0) \\
& + 4Z \vec{\pi} \cdot \vec{\rho}^\mu Z \eta_N \omega^\mu + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{\rho}^\mu (\sigma + \sigma_0) \omega^\mu \\
& + 4(f_1^\mu + Z w \partial_\mu \eta_N) \vec{a}_0 \cdot (Z \vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) \\
& - 4\omega^\mu \vec{a}_0 \cdot [(\vec{a}_1^\mu + Z w \partial_\mu \vec{\pi}) \times Z \vec{\pi}]\}, \quad (4.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2h_3 \text{Tr}[\Phi R_\mu \Phi^\dagger L^\mu] \\
= & \frac{h_3}{4} \{[(\sigma + \sigma_0)^2 + Z^2 \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + Z^2 \vec{\pi}^2][\omega^{\mu^2} - (f_1^\mu + Z w \partial_\mu \eta_N)^2 \\
& + \vec{\rho}^{\mu^2} - (\vec{a}_1^\mu + Z w \partial_\mu \vec{\pi})^2] + 4[(\sigma + \sigma_0) \vec{a}_0 + Z^2 \eta_N \vec{\pi}] \\
& \cdot [\omega^\mu \vec{\rho}^\mu - (f_1^\mu + Z w \partial_\mu \eta_N)(\vec{a}_1^\mu + Z w \partial_\mu \vec{\pi})] + 4(\vec{a}_0 \times Z \vec{\pi}) \\
& \cdot [\omega^\mu (\vec{a}_1^\mu + Z w \partial_\mu \vec{\pi}) - (f_1^\mu + Z w \partial_\mu \eta_N) \vec{\rho}^\mu] + 4[Z \eta_N \vec{a}_0 \\
& - (\sigma + \sigma_0) Z \vec{\pi}][\vec{\rho}^\mu \times (\vec{a}_1^\mu + Z w \partial_\mu \vec{\pi})] - 2\{(\vec{a}_0 \times \vec{\rho}^\mu)^2 \\
& - [\vec{a}_0 \times (\vec{a}_1^\mu + Z w \partial_\mu \vec{\pi})]^2 + (Z \vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 \\
& - [Z \vec{\pi} \times (\vec{a}_1^\mu + Z w \partial_\mu \vec{\pi})]^2\}. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

4.2 Zerfallsbreiten $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \pi\pi}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow \pi\pi}$

Im ersten Abschnitt werden die Zerfälle in zwei Pionen untersucht, $\sigma' \rightarrow \pi\pi$ sowie $G' \rightarrow \pi\pi$. Zur Berechnung der Zerfallsbreiten $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \pi\pi}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow \pi\pi}$ gehe man von einer Lagrangedichte aus, die vorerst noch die nackten Felder σ und

G enthält

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{zer,\pi\pi} \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{2} M_G^2 G^2 + z\sigma G \\
&\quad + A_1 \sigma \vec{\pi}^2 + A_2 \sigma (\partial^\mu \vec{\pi})^2 + A_3 (\partial^\mu \sigma) (\partial_\mu \vec{\pi}) \vec{\pi} \\
&\quad + B_1 G \vec{\pi}^2 + B_2 G (\partial^\mu \vec{\pi})^2 \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{2} M_G^2 G^2 + z\sigma G \\
&\quad + A_1 \sigma \vec{\pi}^2 + (A_2 - A_3) \sigma (\partial^\mu \vec{\pi})^2 - A_3 \sigma (\partial_\mu \partial^\mu \vec{\pi}) \vec{\pi} \\
&\quad + B_1 G \vec{\pi}^2 + B_2 G (\partial^\mu \vec{\pi})^2, \tag{4.19}
\end{aligned}$$

wobei die Konstanten A_1, A_2, A_3, B_1 und B_2 von den Parametern des effektiven Modells abhängen und noch explizit dargestellt werden. In der Zerfall-Lagrangedichte $\mathcal{L}_{zer,\pi\pi}$ sind die Vertices für den Zerfall des Sigmafeldes bzw. des skalaren Glueballs in zwei Pionen, die aus der Wechselwirkung-Lagrangedichte (4.6) isoliert wurden, enthalten. Dazu liefert der kinetische Term (4.11) folgende Beiträge

$$\begin{aligned}
g_1 w Z^2 \vec{\pi} (\partial^\mu \sigma) (\partial_\mu \vec{\pi}) &= -g_1 w Z^2 \sigma (\partial_\mu \partial^\mu \vec{\pi}) \vec{\pi} - g_1 w Z^2 \sigma (\partial^\mu \vec{\pi})^2 \\
&= +g_1 w Z^2 \sigma M_\pi^2 \vec{\pi}^2 - g_1 w Z^2 \sigma (\partial^\mu \vec{\pi})^2 \tag{4.20}
\end{aligned}$$

und

$$-g_1 w Z^2 \sigma (\partial^\mu \vec{\pi})^2. \tag{4.21}$$

Der Massenterm der skalaren Freiheitsgrade (4.12) ergibt

$$-\frac{m_0^2}{G_0} Z^2 G \vec{\pi}^2. \tag{4.22}$$

Für die beiden Selbstwechselwirkungsterme der skalaren Freiheitsgrade (4.13) und (4.14) erhält man folgenden Beitrag

$$-\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}\right) Z^2 \sigma_0 \sigma \vec{\pi}^2. \tag{4.23}$$

Aus dem Massenterm der vektoriellen Freiheitsgrade resultiert

$$\frac{m_1^2}{G_0} Z^2 w^2 G (\partial^\mu \vec{\pi}^2)^2. \tag{4.24}$$

Schließlich noch der Beitrag der Terme (4.16), (4.17) und (4.18), in denen alle Quark-Antiquark Freiheitsgrade, die im effektiven Modell enthalten sind, miteinander koppeln

$$(h_1 + h_2 + h_3) \frac{w^2 Z^2 \sigma_0}{2} \sigma (\partial^\mu \vec{\pi}^2)^2. \tag{4.25}$$

Die Konstanten A_1, A_2, A_3, B_1 und B_2 , ergeben sich aus (4.11) bis (4.18) folglich zu

$$A_1 = -\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}\right) \sigma_0 Z^2, \tag{4.26}$$

$$A_2 = g_1^2 w^2 Z^2 \sigma_0 - g_1 w Z^2 + \frac{w^2 Z^2 \sigma_0}{2} (h_1 + h_2 + h_3), \quad (4.27)$$

$$A_3 = g_1 w Z^2, \quad (4.28)$$

$$B_1 = -\frac{m_0^2}{G_0} Z^2, \quad (4.29)$$

$$B_2 = \frac{m_1^2}{G_0} w^2 Z^2, \quad (4.30)$$

dabei sind

$$\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) = \frac{1}{2Z^2 f_\pi^2} \left(M_\sigma^2 - \frac{M_\pi^2}{Z^2} \right) \quad (4.31)$$

und

$$m_0^2 = \left(\frac{M_\pi}{Z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{M_{\eta_N}}{Z} \right)^2 - M_\sigma^2 \right]. \quad (4.32)$$

Mit der aus dem effektiven Modell resultierenden Massengleichung der vektoriellen Freiheitsgrade

$$M_\omega^2 = M_\rho^2 = m_1^2 + \frac{\sigma_0^2}{2} (h_1 + h_2 + h_3) \quad (4.33)$$

ergibt sich für (4.27)

$$A_2 = g_1^2 w^2 Z^2 \sigma_0 - g_1 w Z^2 + \frac{w^2 Z^2}{\sigma_0} (M_\rho^2 - m_1^2). \quad (4.34)$$

Wie sich noch zeigen wird, kommen die Parameter h_1 , h_2 und h_3 in den zu untersuchenden Zerfallskanälen in dieser Arbeit nur als Summe, identisch wie bei (4.27), vor. Damit kann die Gleichung (4.33) als Zwangsbedingung verwendet werden.

Für die Übergangsamplituden der nackten Felder σ und G folgt

$$\begin{aligned} -i\mathcal{A}_{\sigma \rightarrow \pi\pi}(X_{M_\sigma}) &= i \left[A_1 - (A_2 - A_3) \frac{X_{M_\sigma}^2 - 2M_\pi^2}{2} + A_3 M_\pi^2 \right] \\ &= i \left(A_1 - A_2 \frac{X_{M_\sigma}^2 - 2M_\pi^2}{2} + A_3 \frac{X_{M_\sigma}^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$-i\mathcal{A}_{G \rightarrow \pi\pi}(X_{M_G}) = i \left(B_1 - B_2 \frac{X_{M_G}^2 - 2M_\pi^2}{2} \right). \quad (4.36)$$

Diese ergeben als Funktion der laufenden Masse des nackten Sigmafeldes X_{M_σ} bzw. des nackten skalaren Glueballs X_{M_G} in der Abbildung 4.1 bzw. 4.2 dargestellten Verlauf. An dieser Stelle bietet sich an, die nackten Felder durch die entmischten zu substituieren $G \rightarrow G'$ und $\sigma \rightarrow \sigma'$. Dadurch erhält man die Übergangsamplituden der physikalischen Felder G' und σ' , wobei sie nun von den laufenden Massen $X_{M_{\sigma'}}$ sowie $X_{M_{G'}}$ abhängen,

$$-i\mathcal{A}_{\sigma' \rightarrow \pi\pi}(X_{M_{\sigma'}}) = i \left[\cos(\theta) \mathcal{A}_{\sigma \rightarrow \pi\pi}(X_{M_\sigma}) + \sin(\theta) \mathcal{A}_{G \rightarrow \pi\pi}(X_{M_G}) \right], \quad (4.37)$$

$$-i\mathcal{A}_{G' \rightarrow \pi\pi}(X_{M_{G'}}) = i \left[-\sin(\theta) \mathcal{A}_{\sigma \rightarrow \pi\pi}(X_{M_\sigma}) + \cos(\theta) \mathcal{A}_{G \rightarrow \pi\pi}(X_{M_G}) \right]. \quad (4.38)$$

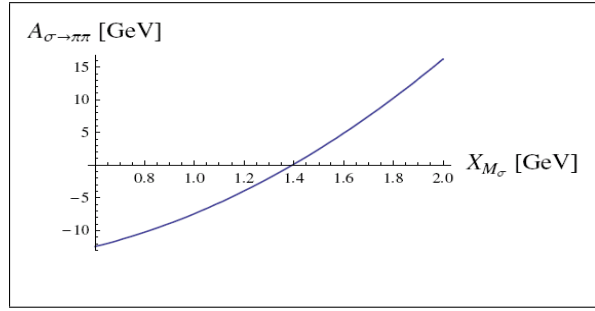


Abbildung 4.1: Übergangsamplitude $A_{\sigma \rightarrow \pi\pi}$ als Funktion der laufenden Sigmamasse X_{M_σ} .

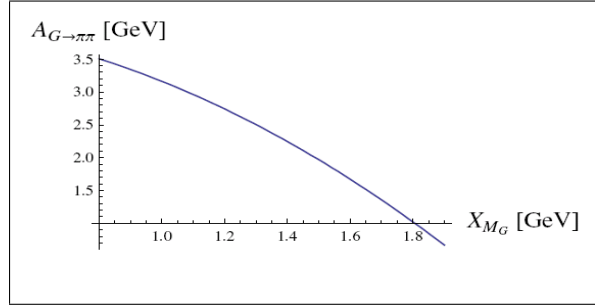


Abbildung 4.2: Übergangsamplitude $A_{G \rightarrow \pi\pi}$ als Funktion der laufenden skalaren Glueballmasse X_{M_G} .

Da der Mischungswinkel positiv ist, siehe dazu Tabelle 5.3, und dadurch nur, wie den Abbildungen 4.1 und 4.2 zu entnehmen ist, die Übergangsamplitude $\mathcal{A}_{\sigma \rightarrow \pi\pi}(X_{M_{\sigma'}})$ negativ wird, da die relevanten rotierten Sigmamassen $M_{\sigma'}$ unterhalb 1.4 MeV liegen, ergibt sich für die Übergangsamplituden der entmischten Felder (4.37) und (4.38) jeweils eine destruktive Interferenz. Die Zerfälle in zwei Pionen können nun, nach der im Abschnitt zu Zerfällen hergeleiteten Formel (1.192), wie folgt berechnet werden

$$\Gamma_{\sigma' \rightarrow \pi\pi} = \frac{k_f}{8\pi M_{\sigma'}^2} \left[\sqrt{6} \mathcal{A}_{\sigma' \rightarrow \pi\pi} \right]^2 \quad (4.39)$$

mit

$$k_f = \sqrt{\frac{M_{\sigma'}^2}{4} - M_\pi^2}, \quad (4.40)$$

sowie

$$\Gamma_{G' \rightarrow \pi\pi} = \frac{k_f}{8\pi M_{G'}^2} \left[\sqrt{6} \mathcal{A}_{G' \rightarrow \pi\pi} \right]^2 \quad (4.41)$$

mit

$$k_f = \sqrt{\frac{M_{G'}^2}{4} - M_\pi^2}, \quad (4.42)$$

wobei k_f die jeweiligen ausgehenden Impulse sind, die den Phasenraum darstellen. Der Faktor $\sqrt{6}$ in (4.39) und (4.41) kommt aus folgenden Gründen zustande. Der skalare Glueball G' bzw. das Sigmafeld σ' zerfällt in zwei identische Pionen, wodurch sich für diesen Zerfall zwei Feynman-Diagramme erster Ordnung mit gleichem Vertex ergeben. Dies führt dazu, dass die Übergangsamplitude einen Faktor 2 erhält und der Symmetriefaktor sich zu $s_f = 1/2$ ergibt. Berücksichtigt man weiterhin, dass nach dem Zerfall die Pionen eine der drei möglichen Konstellationen aufweisen können, nämlich $\pi^+\pi^-$, $\pi^-\pi^+$ und $\pi^0\pi^0$, so resultiert letztendlich der Faktor $\sqrt{6}$.

Will man für die Zerfälle $\sigma' \rightarrow \pi\pi$ sowie $G' \rightarrow \pi\pi$ den Grenzfall kleiner Mischungswinkel betrachten, dann führt es auf

$$\theta \longrightarrow 0 \Rightarrow \Gamma_{\sigma' \rightarrow \pi\pi} \rightarrow \Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} \quad (4.43)$$

bzw.

$$\theta \longrightarrow 0 \Rightarrow \Gamma_{G' \rightarrow \pi\pi} \rightarrow \Gamma_{G \rightarrow \pi\pi} \quad (4.44)$$

und man erhält folgende Zerfallsbreiten

$$\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} = \frac{\sqrt{\frac{M_G^2}{4} - M_\pi^2}}{8\pi M_\sigma^2} \left\{ \sqrt{6} \left[A_1 - (A_2 - A_3) \frac{X_{M_\sigma}^2 - 2M_\pi^2}{2} + A_3 M_\pi^2 \right] \right\}^2 \quad (4.45)$$

und

$$\Gamma_{G \rightarrow \pi\pi} = \frac{\sqrt{\frac{M_G^2}{4} - M_\pi^2}}{8\pi M_G^2} \left[\sqrt{6} \left(B_1 - B_2 \frac{M_G^2 - 2M_\pi^2}{2} \right) \right]^2. \quad (4.46)$$

4.3 Zerfallsbreiten $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi}$

Die Lagrangedichte, aus der sich nach der $SO(2)$ -Rotation die Zerfälle $\sigma' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$ und $G' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$ berechnen lassen, lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{zer,\rho\rho} \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{2} M_G^2 G^2 + z\sigma G \\ &\quad + A_\rho \sigma \vec{\rho}^{\mu 2} + B_\rho G \vec{\rho}^{\mu 2}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die Konstanten A_ρ und B_ρ berechnen sich aus (4.15) bis (4.18) zu

$$A_\rho = \frac{\sigma_0}{2} (h_1 + h_2 + h_3) \quad (4.48)$$

$$B_\rho = \frac{m_1^2}{G_0}. \quad (4.49)$$

Bei den in dieser Studie betrachteten in Vier-Pion Zerfällen, zerfallen σ' und G' zunächst in $\rho\rho$ bevor jedes Rho-Meson unmittelbar in zwei Pionen zerfällt. Dieser Zwischenzerfall dürfte aus kinematischen Gründen,

$$M_{\sigma',G'} < 2M_\rho, \quad (4.50)$$

normalerweise nicht stattfinden. Da Resonanzen, wie die Rho-Mesonen, sehr kurzlebig sind und dadurch eine endliche Zerfallsbreite besitzen,

$$\Gamma = \tau^{-1}, \quad (4.51)$$

kann der Zwischenzerfall $\sigma' \rightarrow \rho\rho$ bzw. $G' \rightarrow \rho\rho$ dennoch stattfinden. Die Form der Resonanzen wird durch die Breit-Wigner Verteilung gegeben. Dies bedeutet, dass die Masse des Rho-Mesons, wie auch jeder anderer Resonanz, statistischen Schwankungen unterworfen ist und es somit innerhalb der Verteilung jede Masse mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit annehmen kann. Dadurch ist es möglich, mit Hilfe der Spektralfunktion [31], die die Massenverteilung der entsprechenden Resonanzen wiedergibt, vorerst die Zerfallsbreite $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \rho\rho}$ bzw. $\Gamma_{G' \rightarrow \rho\rho}$ und anschließend die Zerfallsbreite des Gesamtzerfalls $\sigma' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$ bzw. $G' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$ zu berechnen. Dieser ist wegen

$$M_{\sigma', G'} > 4M_\pi \quad (4.52)$$

kinematisch erlaubt. Da es sich bei Rho-Mesonen um vektorielle Teilchen handelt, muss bei der Berechnung der Zerfallsbreiten ihre Polarisation berücksichtigt werden. Ebenfalls wie bei den in Zwei-Pion Zerfällen werden auch in diesem Fall zuerst die Übergangsamplituden für die Zerfälle $\sigma \rightarrow \rho\rho$ sowie $G \rightarrow \rho\rho$ berechnet, aus denen sich dann leicht die Übergangsamplituden für die entmischten Felder σ' sowie G' ermitteln lassen. Im Anschluss daran werden die jeweiligen Zerfallsbreiten berechnet.

Die Übergangsamplitude für den Zerfall $\sigma \rightarrow \rho\rho$ lautet

$$-i\mathcal{A}_{\sigma \rightarrow \rho\rho}^{\alpha, \beta} = iA_\rho \left[\varepsilon_\mu^{(\alpha)}(K_1) \varepsilon^{(\beta)\mu}(K_2) \right], \quad (4.53)$$

wobei $\varepsilon_\mu^{(\alpha)}(K_1)$ sowie $\varepsilon^{(\beta)\mu}(K_2)$, mit $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, die Polarisationsvektoren sind. Dadurch ergibt sich folgende mittlere Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$\begin{aligned} \overline{|-i\mathcal{A}_{\sigma \rightarrow \rho\rho}|^2} &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \overline{|-i\mathcal{A}_{\sigma \rightarrow \rho\rho}^{\alpha, \beta}|^2} \\ &= A_\rho^2 \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left[\varepsilon_\mu^{(\alpha)}(K_1) \varepsilon^{(\beta)\mu}(K_2) \varepsilon_\nu^{(\alpha)}(K_1) \varepsilon^{(\beta)\nu}(K_2) \right] \\ &= A_\rho^2 \sum_{\alpha=1}^3 \left[\varepsilon_\mu^{(\alpha)}(K_1) \varepsilon_\nu^{(\alpha)}(K_1) \right] \sum_{\beta=1}^3 \left[\varepsilon^{(\beta)\nu}(K_2) \varepsilon^{(\beta)\mu}(K_2) \right]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Mit der Beziehung

$$\sum_{\alpha=1}^3 \varepsilon_\mu^{(\alpha)} \varepsilon_\nu^{(\alpha)} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu \cdot K_\nu}{M_\rho^2} \right) \quad (4.55)$$

folgt für die Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$\overline{|-i\mathcal{A}_{\sigma \rightarrow \rho\rho}|^2} = A_\rho^2 \left[4 - \frac{X_{1, M_\rho}^2 + X_{2, M_\rho}^2}{M_\rho^2} + \frac{(M_\sigma^2 - X_{1, M_\rho}^2 - X_{2, M_\rho}^2)^2}{4M_\rho^4} \right]. \quad (4.56)$$

Dabei sind X_{1, M_ρ} und X_{2, M_ρ} die laufenden nackten Massen der Rho-Mesonen, die sie laut der Breit-Wigner Verteilung annehmen können. Analog dazu ergibt sich mit

$$-i\mathcal{A}_{G \rightarrow \rho\rho}^{\alpha, \beta} = iB_\rho \left[\varepsilon_\mu^{(\alpha)}(K_1) \varepsilon^{(\beta)\mu}(K_2) \right] \quad (4.57)$$

für den Zerfall $G \rightarrow \rho\rho$ folgende Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$\overline{|-i\mathcal{A}_{G \rightarrow \rho\rho}|^2} = B_\rho^2 \left[4 - \frac{X_{1,M_\rho}^2 + X_{2,M_\rho}^2}{M_\rho^2} + \frac{(M_G^2 - X_{1,M_\rho}^2 - X_{2,M_\rho}^2)^2}{4M_\rho^4} \right]. \quad (4.58)$$

Nach Substitution der Felder $\sigma \rightarrow \sigma'$ sowie $G \rightarrow G'$ in der Zerfall-Lagrangedichte (4.47) erhält man

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{zer,\rho\rho}(\sigma', G') \\ &= A_\rho [\cos(\theta)\sigma' - \sin(\theta)G'] \vec{\rho}^{\mu 2} + B_\rho [\sin(\theta)\sigma' + \cos(\theta)G'] \vec{\rho}^{\mu 2} \\ &= \sigma' [\cos(\theta)A_\rho + \sin(\theta)B_\rho] \vec{\rho}^{\mu 2} + G' [\cos(\theta)B_\rho - \sin(\theta)A_\rho] \vec{\rho}^{\mu 2}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Daraus resultiert für die Wahrscheinlichkeitsamplituden der Zerfälle $\sigma' \rightarrow \rho\rho$ sowie $G' \rightarrow \rho\rho$

$$\begin{aligned} \overline{|-i\mathcal{A}_{\sigma' \rightarrow \rho\rho}|^2} &= [\cos(\theta)A_\rho + \sin(\theta)B_\rho]^2 \\ &\cdot \left[4 - \frac{X_{1,M_\rho}^2 + X_{2,M_\rho}^2}{M_\rho^2} + \frac{(M_{\sigma'}^2 - X_{1,M_\rho}^2 - X_{2,M_\rho}^2)^2}{4M_\rho^4} \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \overline{|-i\mathcal{A}_{G' \rightarrow \rho\rho}|^2} &= [\cos(\theta)B_\rho - \sin(\theta)A_\rho]^2 \\ &\cdot \left[4 - \frac{X_{1,M_\rho}^2 + X_{2,M_\rho}^2}{M_\rho^2} + \frac{(M_{G'}^2 - X_{1,M_\rho}^2 - X_{2,M_\rho}^2)^2}{4M_\rho^4} \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ist die für den Zerfall $\sigma' \rightarrow \rho\rho$ erforderliche Bedingung

$$M_{\sigma'} > X_{1,M_\rho} + X_{2,M_\rho} \quad (4.62)$$

erfüllt, dann ergibt sich für den Zerfall $\sigma' \rightarrow \rho\rho$ folgende Zerfallsbreite

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\sigma' \rightarrow \rho\rho}(X_{1,M_\rho}, X_{2,M_\rho}) \\ &= \frac{k_f(X_{1,M_\rho}, X_{2,M_\rho})}{8\pi M_{\sigma'}^2} \overline{|-i\sqrt{6}\mathcal{A}_{\sigma' \rightarrow \rho\rho}|^2} \Theta(M_{\sigma'} - X_{1,M_\rho} - X_{2,M_\rho}). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Da das Sigmafeld σ' , wie auch der skalare Glueball G' , entweder in $\rho^0\rho^0$ oder $\rho^+\rho^-$ oder $\rho^-\rho^+$ zerfallen können, ergibt sich, aus den gleichen Gründen wie bereits beim Zwei-Pion Zerfall erläutert, der Faktor $\sqrt{6}$ in (4.63) bzw. in (4.69). Zudem ist $\Theta(M_\sigma - X_{1,M_\rho} - X_{2,M_\rho})$ die Sprungfunktion, die die Bedingung (4.62) sicherstellt, und

$$k_f = \frac{1}{2M_{\sigma'}} \sqrt{M_{\sigma'}^4 + (X_{1,M_\rho}^2 - X_{2,M_\rho}^2)^2 - 2M_{\sigma'}^2(X_{1,M_\rho}^2 + X_{2,M_\rho}^2)} \quad (4.64)$$

der Impuls der ausgehenden Teilchen, der den Phasenraum ergibt. Damit lässt sich nun die Zerfallsbreite des Zerfalls $\sigma' \rightarrow 4\pi$ wie folgt berechnen

$$\Gamma_{\sigma' \rightarrow 4\pi} = \int_0^\infty \int_0^\infty \Gamma_{\sigma' \rightarrow \rho\rho}(X_{1,M_\rho}, X_{2,M_\rho}) d_\rho(X_{1,M_\rho}) d_\rho(X_{2,M_\rho}) dX_{1,M_\rho} dX_{2,M_\rho}, \quad (4.65)$$

wobei

$$d_\rho(X_{M_\rho}) = N \frac{X_{M_\rho}^2 \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}(X_{M_\rho})}{(X_{M_\rho}^2 - M_\rho^2)^2 + X_{M_\rho}^2 \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}^2(X_{M_\rho})} \Theta(X_{M_\rho} - 2M_\pi) \quad (4.66)$$

die bereits erwähnte Spektralfunktion des Rho-Mesons ist und

$$N = \left[\int_0^\infty \frac{X_{M_\rho}^2 \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}(X_{M_\rho})}{(X_{M_\rho}^2 - M_\rho^2)^2 + X_{M_\rho}^2 \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}^2(X_{M_\rho})} \Theta(X_{M_\rho} - 2M_\pi) dX_{M_\rho} \right]^{-1} \quad (4.67)$$

der Normierungsfaktor, der garantiert, dass die Wahrscheinlichkeit erhalten bleibt

$$\int_0^\infty d_\rho(X_{M_\rho}) dX_{M_\rho} = 1. \quad (4.68)$$

Die Spektralfunktion des Rho-Mesons (4.66) zeigt die in Abbildung 4.3 dargestellte Massenverteilung. Wie bei jedem Zerfall notwendig, muss auch beim

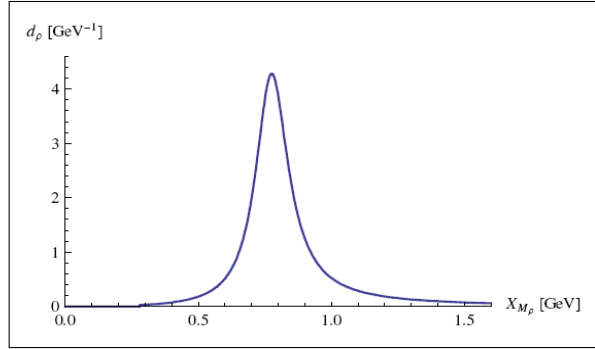


Abbildung 4.3: Massenverteilung des ρ -Mesons.

Zerfall des Rho-Mesons in zwei Pionen die kinematische Bedingung $X_{M_\rho} > 2M_\pi$ erfüllt sein, damit der Prozess stattfinden kann. Dies wird gleicherweise wie bei (4.63) mit der Sprungfunktion realisiert.

Analog dazu erhält man die Zerfallsbreite für den skalaren Glueballzerfall $G' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$. Die Zerfallsbreite für den Zerfall $G' \rightarrow \rho\rho$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \Gamma_{G' \rightarrow \rho\rho}(X_{1,M_\rho}, X_{2,M_\rho}) \\ &= \frac{k_f(X_{1,M_\rho}, X_{2,M_\rho})}{8\pi M_{G'}^2} \left| -i\sqrt{6}\mathcal{A}_{G' \rightarrow \rho\rho} \right|^2 \Theta(M_{G'} - X_{1,M_\rho} - X_{2,M_\rho}) \end{aligned} \quad (4.69)$$

mit

$$k_f = \frac{1}{2M_{G'}} \sqrt{M_{G'}^4 + (X_{1,M_\rho}^2 - X_{2,M_\rho}^2)^2 - 2M_{G'}^2(X_{1,M_\rho}^2 + X_{2,M_\rho}^2)}, \quad (4.70)$$

sodass schließlich

$$\Gamma_{G' \rightarrow 4\pi} = \int_0^\infty \int_0^\infty \Gamma_{G' \rightarrow \rho\rho}(X_{1,M_\rho}, X_{2,M_\rho}) d_\rho(X_{1,M_\rho}) d_\rho(X_{2,M_\rho}) dX_{1,M_\rho} dX_{2,M_\rho} \quad (4.71)$$

resultiert.

4.4 Zerfallsbreiten $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \eta\eta}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta}$

Die Lagrangedichte, aus der sich nach diversen Substitutionen die Zerfälle $\sigma' \rightarrow \eta\eta$ und $\sigma' \rightarrow \eta\eta'$, wobei der Zerfallskanal $\sigma' \rightarrow \eta\eta'$ in Particle Data Group [8] nicht aufgeföhrt ist und sehr wahrscheinlich auch, bedingt durch den zu kleinen Phasenraum, nicht möglich ist, sowie $G' \rightarrow \eta\eta$ und $G' \rightarrow \eta\eta'$ berechnen lassen, lautet

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{zer,eta} \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{2} M_G^2 G^2 + z\sigma G \\
&\quad + A_1 \sigma \eta_N^2 + A_2 \sigma (\partial^\mu \eta_N)^2 + A_3 (\partial^\mu \sigma) (\partial_\mu \eta_N) \eta_N \\
&\quad + B_1 G \eta_N^2 + B_2 G \partial^\mu \eta_N^2 \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{2} M_G^2 G^2 + z\sigma G \\
&\quad + A_1 \sigma \eta_N^2 + (A_2 - A_3) \sigma (\partial^\mu \eta_N)^2 - A_3 \sigma (\partial_\mu \partial^\mu \eta_N) \eta_N \\
&\quad + B_1 G \eta_N^2 + B_2 G \partial^\mu \eta_N^2. \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Das Etafeld $\eta_N = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d})$ im effektivem Modell resultiert aus der Mischung zwischen den Feldern η und η' (958) nach

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_N \\ \eta_S \end{pmatrix}. \tag{4.73}$$

Um nun die Zerfälle des physikalischen Sigmafeldes $\sigma' \rightarrow \eta\eta$ und $\sigma' \rightarrow \eta\eta'$ berechnen zu können, muss das nicht-physikalische Feld η_N durch die physikalischen Felder η und η' (958) ersetzt werden $\eta_N \rightarrow \cos(\varphi)\eta - \sin(\varphi)\eta'$. Bedingt durch die Tatsache, dass die Gluonen an alle Quarkflavours in gleicher Stärke koppeln, muss bei den Glueballzerfällen $G' \rightarrow \eta\eta$ und $G' \rightarrow \eta\eta'$ auch der Strange-Anteil, $\eta_S = s\bar{s}$, des Etafeldes, η bzw. η' (958), berücksichtigt werden, im Gegensatz zum Sigmafeld, bei dem die Zerfälle in die Etas mit Strange-Anteil unterdrückt sind. Demnach erfordert dies fürs Erste folgender Substitution der betroffenen Terme

$$\eta_N \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) = \eta_N + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_S, \tag{4.74}$$

womit man

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{zer,eta} &= +A_1 \sigma \eta_N^2 + (A_2 - A_3) \sigma (\partial^\mu \eta_N)^2 - A_3 \sigma (\partial_\mu \partial^\mu \eta_N) \eta_N \\
&\quad + B_1 G \left(\eta_N + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_S \right)^2 + B_2 G \left[\partial^\mu \left(\eta_N + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_S \right) \right]^2 \tag{4.75}
\end{aligned}$$

erhält. Als nächstes müssen in der Zerfall-Lagrangedichte die nicht-physikalischen Felder η_N und η_S nach $\eta_N \rightarrow \cos(\varphi)\eta - \sin(\varphi)\eta'$ und $\eta_S \rightarrow \sin(\varphi)\eta + \cos(\varphi)\eta'$

substituiert werden. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{zer,eta} \\
= & A_1 \sigma [\cos^2(\varphi)\eta^2 + \sin^2(\varphi)\eta'^2 - 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)\eta\eta'] \\
& + (A_2 - A_3)\sigma[\cos^2(\varphi)(\partial^\mu\eta)^2 + \sin^2(\varphi)(\partial^\mu\eta')^2 - 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta'] \\
& - A_3\sigma[\cos^2(\varphi)(\partial_\mu\partial^\mu\eta)\eta + \sin^2(\varphi)(\partial_\mu\partial^\mu\eta')\eta' - \cos(\varphi) \sin(\varphi)(\partial_\mu\partial^\mu\eta)\eta' \\
& - \sin(\varphi) \cos(\varphi)(\partial_\mu\partial^\mu\eta')\eta] \\
& + B_1 G \{ [\cos^2(\varphi) + \frac{1}{2} \sin^2(\varphi) + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(\varphi) \sin(\varphi)] \eta^2 \\
& + [\sin^2(\varphi) + \frac{1}{2} \cos^2(\varphi) - \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\varphi) \cos(\varphi)] \eta'^2 \\
& + [\frac{2}{\sqrt{2}} \cos^2(\varphi) - \frac{2}{\sqrt{2}} \sin^2(\varphi) - \cos(\varphi) \sin(\varphi)] \eta\eta' \} \\
& + B_2 G \{ [\cos^2(\varphi) + \frac{1}{2} \sin^2(\varphi) + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(\varphi) \sin(\varphi)] (\partial^\mu\eta)^2 \\
& + [\sin^2(\varphi) + \frac{1}{2} \cos^2(\varphi) - \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\varphi) \cos(\varphi)] (\partial^\mu\eta')^2 \\
& + [\frac{2}{\sqrt{2}} \cos^2(\varphi) - \frac{2}{\sqrt{2}} \sin^2(\varphi) - \sin(\varphi) \cos(\varphi)] \partial_\mu\eta\partial^\mu\eta' \}. \tag{4.76}
\end{aligned}$$

Die Terme der Wechselwirkung-Lagrangedichte (4.11) bis (4.18) liefern die entsprechenden Konstanten

$$A_1 = - \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \sigma_0 Z^2, \tag{4.77}$$

$$A_2 = g_1^2 w^2 Z^2 \sigma_0 - g_1 w Z^2 + \frac{w^2 Z^2 \sigma_0}{2} (h_1 + h_2 + h_3) \tag{4.78}$$

$$= g_1^2 w^2 Z^2 \sigma_0 - g_1 w Z^2 + \frac{w^2 Z^2}{\sigma_0} (M_\rho^2 - m_1^2), \tag{4.79}$$

$$A_3 = g_1 w Z^2, \tag{4.80}$$

$$B_1 = - \frac{m_0^2}{G_0} Z^2 \tag{4.81}$$

und

$$B_2 = \frac{m_1^2}{G_0} w^2 Z^2, \tag{4.82}$$

die identisch mit den in Zwei-Pion Zerfällen (4.26) bis (4.30) sind. Diese führen auf die Übergangsamplituden der nicht-physikalischen Felder σ sowie G

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{A}_{\sigma \rightarrow \eta\eta}(X_{M_\sigma}) &= i \cos^2(\varphi) \left[A_1 - (A_2 - A_3) \frac{X_{M_\sigma}^2 - 2M_\eta^2}{2} + A_3 M_\eta^2 \right] \\
&= i \cos^2(\varphi) \left(A_1 - A_2 \frac{X_{M_\sigma}^2 - 2M_\eta^2}{2} + A_3 \frac{X_{M_\sigma}^2}{2} \right), \tag{4.83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\mathcal{A}_{G\rightarrow\eta\eta}(X_{M_G}) \\
= & i \left[\cos^2(\varphi) + \frac{1}{2} \sin^2(\varphi) + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \right] \\
& \cdot \left(B_1 - B_2 \frac{X_{M_G}^2 - 2M_\eta^2}{2} \right), \tag{4.84}
\end{aligned}$$

welche von den laufenden nackten Massen X_{M_σ} und X_{M_G} abhängen. Dies zeigen die beiden Abbildungen 4.4 und 4.5. Werden an dieser Stelle die Felder nach

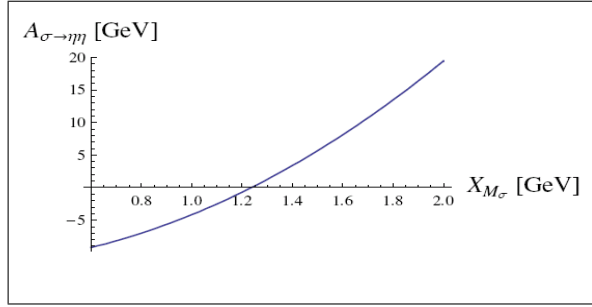


Abbildung 4.4: Übergangsamplitude $A_{\sigma\rightarrow\eta\eta}$ als Funktion der laufenden Sigmamasse X_{M_σ} .

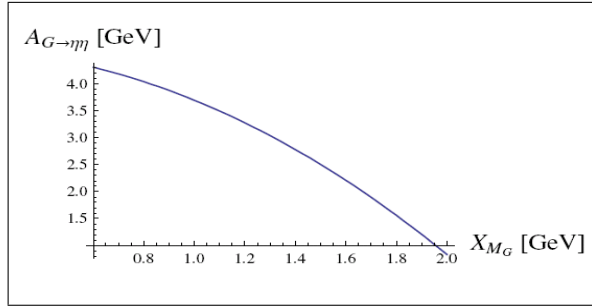


Abbildung 4.5: Übergangsamplitude $A_{G\rightarrow\eta\eta}$ als Funktion der laufenden skalaren Glueballmasse X_{M_G} .

$G \rightarrow G'$ und $\sigma \rightarrow \sigma'$ substituiert, so erhält man die Übergangsamplituden der entmischten physikalischen Felder G' und σ' , wobei sie nun Funktionen der laufenden physikalischen Massen $X_{M_{\sigma'}}$ sowie $X_{M_{G'}}$ sind,

$$-i\mathcal{A}_{\sigma'\rightarrow\eta\eta}(X_{M_{\sigma'}}) = i \left[\cos(\theta)\mathcal{A}_{\sigma\rightarrow\eta\eta}(X_{M_{\sigma'}}) + \sin(\theta)\mathcal{A}_{G\rightarrow\eta\eta}(X_{M_{\sigma'}}) \right], \tag{4.85}$$

$$-i\mathcal{A}_{G'\rightarrow\eta\eta}(X_{M_{G'}}) = i \left[-\sin(\theta)\mathcal{A}_{\sigma\rightarrow\eta\eta}(X_{M_{G'}}) + \cos(\theta)\mathcal{A}_{G\rightarrow\eta\eta}(X_{M_{G'}}) \right]. \tag{4.86}$$

Gleiche Gründe wie bei den Zerfällen in zwei Pionen führen dazu, dass sich für die Übergangsamplituden $\mathcal{A}_{\sigma'\rightarrow\pi\pi}(X_{M_{\sigma'}})$ und $\mathcal{A}_{G'\rightarrow\pi\pi}(X_{M_{G'}})$ jeweils eine destruktive Interferenz ergibt.

Mit (4.85) und (4.86) sowie der Formel für Zwei-Körper Zerfälle (1.192) können die Zerfallsbreiten $\Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta}$ und $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \eta\eta}$ wie folgt berechnet werden

$$\Gamma_{\sigma' \rightarrow \eta\eta} = \frac{k_f}{8\pi M_{\sigma'}^2} \left[\sqrt{2} \mathcal{A}_{\sigma' \rightarrow \eta\eta} \right]^2 \quad (4.87)$$

mit

$$k_f = \sqrt{\frac{M_{\sigma'}^2}{4} - M_{\eta}^2}, \quad (4.88)$$

sowie

$$\Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta} = \frac{k_f}{8\pi M_{G'}^2} \left[\sqrt{2} \mathcal{A}_{G' \rightarrow \eta\eta} \right]^2 \quad (4.89)$$

mit

$$k_f = \sqrt{\frac{M_{G'}^2}{4} - M_{\eta}^2}, \quad (4.90)$$

wobei k_f die jeweiligen ausgehenden Impulse sind. Der Faktor $\sqrt{2}$ in (4.87) und (4.89) ergibt sich wie folgt. Das Sigmafeld σ' bzw. der skalare Glueball G' zerfällt in zwei identische Eta-Mesonen. Dies liefert, wie im Fall der Pionen bzw. der Rho-Mesonen, zwei Feynman-Diagramme erster Ordnung mit gleichem Vertex und ergibt somit einen Faktor 2 bei den Übergangsamplituden. Der Symmetriefaktor ist ebenfalls $s_f = 1/2$. Da es sich bei Eta-Mesonen um Singulett handelt, gibt es, im Gegensatz zu den Pionen bzw. Rho-Mesonen, die als Triplets vorkommen, nur eine Zerfallsmöglichkeit, $\eta\eta$. Somit ergibt sich mit Berücksichtigung der Vertices, des Symmetriefaktors und des Isospins der Faktor $\sqrt{2}$.

4.5 Zerfallsbreiten $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \eta\eta'}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta'}$

Zur Berechnung der Zerfälle $\sigma' \rightarrow \eta\eta'$ und $G' \rightarrow \eta\eta'$ geht man von der Lagrangedichte (4.72) bzw. (4.76) aus. Der wesentliche Unterschied zu den Zerfällen $\sigma' \rightarrow \eta\eta$ und $G' \rightarrow \eta\eta$ ist einerseits, dass das Sigmafeld und der Glueball in zwei verschiedene Bosonen zerfallen, wodurch sich kein zusätzlicher Faktor in den Zerfallsformeln ergibt. Andererseits ergibt sich aus kinematischer Sicht für beide Zerfälle folgende Situation

$$M_{\sigma', G'} < M_{\eta} + M_{\eta'}, \quad (4.91)$$

die, wie bereits bei den Zerfällen $\sigma' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$ und $G' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$, mittels der Spektralfunktion behandelt werden muss. Die Lagrangedichte (4.76) liefert folgende Übergangsamplituden

$$\begin{aligned} & -i\mathcal{A}_{\sigma' \rightarrow \eta\eta'}(X_{M_{\sigma'}}) \\ = & -i2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ & \cdot \left[A_1 - (A_2 - A_3) \frac{X_{M_{\sigma'}}^2 - M_{\eta}^2 - M_{\eta'}^2}{2} + A_3 \frac{M_{\eta}^2 + M_{\eta'}^2}{2} \right], \quad (4.92) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\mathcal{A}_{G\rightarrow\eta\eta'}(X_{M_G}) \\
= & -i\left[-\frac{2}{\sqrt{2}}\cos^2(\varphi) + \frac{2}{\sqrt{2}}\sin^2(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varphi)\right] \\
& \cdot \left[B_1 - B_2\frac{X_{M_G}^2 - M_\eta^2 - M_{\eta'}^2}{2}\right]. \tag{4.93}
\end{aligned}$$

Substitution $\sigma \rightarrow \sigma'$ und $G \rightarrow G'$ der nicht-orthogonalen Felder in der Zerfall-Lagrangedichte liefert

$$-i\mathcal{A}_{\sigma'\rightarrow\eta\eta'}(X_{M_{\sigma'}}) = -i\left[\cos(\theta)\mathcal{A}_{\sigma\rightarrow\eta\eta'}(X_{M_{\sigma'}}) + \sin(\theta)\mathcal{A}_{G\rightarrow\eta\eta'}(X_{M_{\sigma'}})\right], \tag{4.94}$$

$$-i\mathcal{A}_{G'\rightarrow\eta\eta'}(X_{M_{G'}}) = -i\left[-\sin(\theta)\mathcal{A}_{\sigma\rightarrow\eta\eta'}(X_{M_{G'}}) + \cos(\theta)\mathcal{A}_{G\rightarrow\eta\eta'}(X_{M_{G'}})\right]. \tag{4.95}$$

Der Zerfall $\sigma' \rightarrow \eta\eta'$ kann nur dann erfolgen, wenn

$$X_{M_{\sigma'}} > M_\eta + M_{\eta'} \tag{4.96}$$

gilt. In diesem Fall wäre die Zerfallsbreite

$$\Gamma_{\sigma'\rightarrow\eta\eta'}(X_{M_{\sigma'}}) = \frac{k_f(X_{M_{\sigma'}})}{8\pi M_{\sigma'}^2} [\mathcal{A}_{\sigma'\rightarrow\eta\eta'}]^2 \Theta(X_{M_{\sigma'}} - M_\eta - M_{\eta'}) \tag{4.97}$$

mit

$$k_f = \frac{1}{2X_{\sigma'}} \sqrt{X_{\sigma'}^4 + (M_\eta^2 - M_{\eta'}^2)^2 - 2X_{\sigma'}^2(M_\eta^2 + M_{\eta'}^2)}, \tag{4.98}$$

wobei die Sprungfunktion $\Theta(X_{M_{\sigma'}} - M_\eta - M_{\eta'})$ die kinematische Forderung realisiert. Da jedoch die Masse des Sigmafeldes $M_{\sigma'} = 1200 - 1500 \text{ MeV}$ beträgt, kann der Zerfall $\sigma' \rightarrow \eta\eta'$ nur mit Hilfe der Spektralfunktion berechnet werden

$$\Gamma_{\sigma'\rightarrow\eta\eta'} = \int_0^\infty \Gamma_{\sigma'\rightarrow\eta\eta'}(X_{M_{\sigma'}}) d_{\sigma'}(X_{M_{\sigma'}}) dX_{M_{\sigma'}}, \tag{4.99}$$

wobei

$$d_{\sigma'}(X_{M_{\sigma'}}) = N \frac{X_{M_{\sigma'}}^2 \Gamma_{\sigma'\rightarrow\eta\eta'}(X_{M_{\sigma'}})}{(X_{M_{\sigma'}}^2 - M_{\sigma'}^2)^2 + X_{M_{\sigma'}}^2 \Gamma_{\sigma'\rightarrow\eta\eta'}^2(X_{M_{\sigma'}})} \Theta(X_{M_{\sigma'}} - M_\eta - M_{\eta'}) \tag{4.100}$$

die entsprechende Spektralfunktion ist und

$$N = \mathcal{N}^{-1}, \tag{4.101}$$

wobei

$$\mathcal{N} \equiv \int_0^\infty \frac{X_{M_{\sigma'}}^2 \Gamma_{\sigma'\rightarrow\eta\eta'}(X_{M_{\sigma'}})}{(X_{M_{\sigma'}}^2 - M_{\sigma'}^2)^2 + X_{M_{\sigma'}}^2 \Gamma_{\sigma'\rightarrow\eta\eta'}^2(X_{M_{\sigma'}})} \Theta(X_{M_{\sigma'}} - M_\eta - M_{\eta'}) dX_{M_{\sigma'}}, \tag{4.102}$$

die Normierungskonstante, die sicherstellt, dass die Wahrscheinlichkeit erhalten bleibt

$$\int_0^\infty d_{\sigma'}(X_{M_{\sigma'}}) dX_{M_{\sigma'}} = 1. \tag{4.103}$$

Analog für den Glueball muss $X_{M_{G'}} > M_\eta + M_{\eta'}$ gelten, um die Zerfallsbreite nach

$$\Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta'}(X_{M_{G'}}) = \frac{k_f(X_{M_{G'}})}{8\pi M_{G'}^2} [\mathcal{A}_{G' \rightarrow \eta\eta'}]^2 \Theta(X_{M_{G'}} - M_\eta - M_{\eta'}) \quad (4.104)$$

mit

$$k_f = \frac{1}{2X_{G'}} \sqrt{X_{G'}^4 + (M_\eta^2 - M_{\eta'}^2)^2 - 2X_{G'}^2(M_\eta^2 + M_{\eta'}^2)} \quad (4.105)$$

berechnen zu können. Die Masse des skalaren Glueballs ist mit $M_{G'} = (1505 \pm 6) MeV$ nur etwas kleiner als die Summe der Massen von η und η' , somit muss zur Berechnung des Zerfalls $G' \rightarrow \eta\eta'$ ebenfalls die Spektralfunktion herangezogen werden. Dies führt auf

$$\Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta'} = \int_0^\infty \Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta'}(X_{M_{G'}}) d_{G'}(X_{M_{G'}}) dX_{M_{G'}} \quad (4.106)$$

mit

$$d_{G'}(X_{M_{G'}}) = N \frac{X_{M_{G'}}^2 \Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta'}(X_{M_{G'}})}{(X_{M_{G'}}^2 - M_{G'}^2)^2 + X_{M_{G'}}^2 \Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta'}^2(X_{M_{G'}})} \Theta(X_{M_{G'}} - M_\eta - M_{\eta'}). \quad (4.107)$$

Die Spektralfunktion des Sigmafeldes bzw. des skalaren Glueballs zeigt folgende Massenverteilung

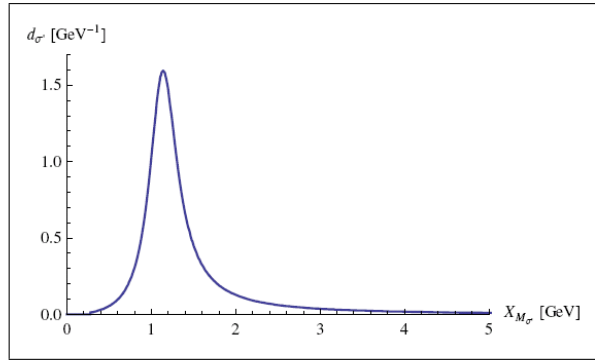


Abbildung 4.6: Massenverteilung des Sigmafeldes.

4.6 Zerfallsbreiten $\Gamma_{\sigma' \rightarrow K\bar{K}}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow K\bar{K}}$

Die Konstituenten der Kaonen sind unter Anderem die Strange-Quarks. Ungeachtet dessen, dass das in dieser Arbeit entwickelte effektive Modell keine Strange-Freiheitsgrade enthält, lassen sich die Zerfälle des Sigmafeldes und des skalaren Glueballs in Kaonen berechnen. Dazu betrachte man das effektive Modell mit der $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Symmetrie in [32], welches die Strange-Freiheitsgrade berücksichtigt und folgende Relationen liefert

$$\frac{\Gamma_{\sigma \rightarrow K\bar{K}}}{\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}} = \frac{1}{3} \quad (4.108)$$

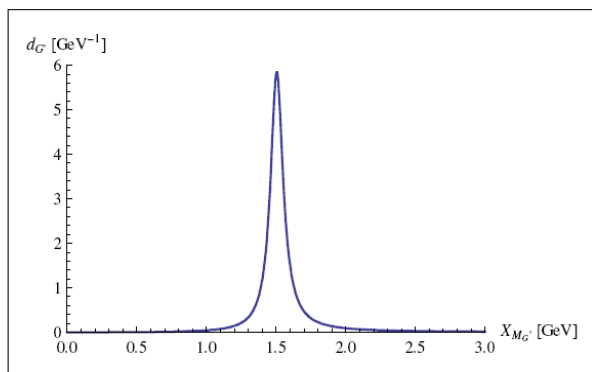


Abbildung 4.7: Massenverteilung des skalaren Glueballs.

sowie

$$\frac{\Gamma_{G \rightarrow K\bar{K}}}{\Gamma_{G \rightarrow \pi\pi}} = \frac{4}{3}. \quad (4.109)$$

Durch Symmetriebetrachtungen können diese zur Berechnung der Zerfälle $\sigma' \rightarrow K\bar{K}$ sowie $G' \rightarrow K\bar{K}$ im vorliegenden effektiven Modell herangezogen werden. Die entsprechende Lagrangedichte würde wie folgt aussehen

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{zer,kaon} \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{2} M_G^2 G^2 + z\sigma G \\ &\quad + A_1 \sigma K^+ K^- + A_2 \sigma (\partial_\mu K^+) (\partial^\mu K^-) + A_3 (\partial^\mu \sigma) (\partial_\mu K^+) K^- \\ &\quad + B_1 G K^+ K^- + B_2 G (\partial_\mu K^+) (\partial^\mu K^-) \\ &\quad + A_1 \sigma K^0 \bar{K}^0 + A_2 \sigma (\partial_\mu K^0) (\partial^\mu \bar{K}^0) + A_3 (\partial^\mu \sigma) (\partial_\mu K^0) \bar{K}^0 \\ &\quad + B_1 G K^0 \bar{K}^0 + B_2 G (\partial_\mu K^0) (\partial^\mu \bar{K}^0) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{2} M_G^2 G^2 + z\sigma G \\ &\quad + A_1 \sigma K^+ K^- + (A_2 - A_3) \sigma (\partial_\mu K^+) (\partial^\mu K^-) - A_3 \sigma (\partial_\mu \partial^\mu K^+) K^- \\ &\quad + B_1 G K^+ K^- + B_2 G (\partial_\mu K^+) (\partial^\mu K^-) \\ &\quad + A_1 \sigma K^0 \bar{K}^0 + (A_2 - A_3) \sigma (\partial_\mu K^0) (\partial^\mu \bar{K}^0) - A_3 \sigma (\partial_\mu \partial^\mu K^0) \bar{K}^0 \\ &\quad + B_1 G K^0 \bar{K}^0 + B_2 G (\partial_\mu K^0) (\partial^\mu \bar{K}^0). \end{aligned} \quad (4.110)$$

Um die erforderlichen Übergangsamplituden zu ermitteln, werden die bereits berechneten Zerfallsbreiten (4.41) sowie (4.39) verwendet. Dabei werden zunächst die Übergangsamplituden (4.35) und (4.36), mit den Konstanten (4.26), (4.27), (4.28), (4.29) und (4.30), entsprechend der Relationen (4.108) und (4.109) skaliert und zugleich die entsprechenden Massen substituiert $M_\pi \rightarrow M_K$. Dies

ergibt folgende Übergangsamplituden

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{A}_{\sigma \rightarrow K\bar{K}}(X_{M_\sigma}) &= -i\sqrt{\frac{1}{3}}\mathcal{A}_{\sigma \rightarrow \pi\pi}(X_{M_\sigma}) \\
 &= i\sqrt{\frac{1}{3}}\left[A_1 - (A_2 - A_3)\frac{X_{M_\sigma}^2 - 2M_K^2}{2} + A_3M_K^2\right] \\
 &= i\sqrt{\frac{1}{3}}\left(A_1 - A_2\frac{X_{M_\sigma}^2 - 2M_K^2}{2} + A_3\frac{X_{M_\sigma}^2}{2}\right), \quad (4.111)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{A}_{G \rightarrow K\bar{K}}(X_{M_G}) &= -i\sqrt{\frac{4}{3}}\mathcal{A}_{G \rightarrow \pi\pi}(X_{M_G}) \\
 &= i\sqrt{\frac{4}{3}}\left(B_1 - B_2\frac{X_{M_G}^2 - 2M_K^2}{2}\right), \quad (4.112)
 \end{aligned}$$

die weiterhin Funktionen der laufenden nackten Massen des Sigmafeldes X_{M_σ} bzw. des Glueballs X_{M_G} sind, wie die Abbildungen 4.8 und 4.9 zeigen. Nun wird

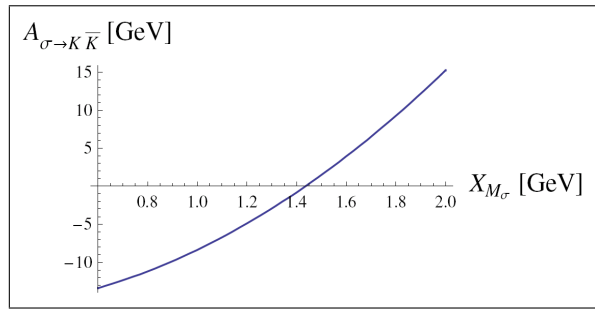


Abbildung 4.8: Übergangsamplitude $A_{\sigma \rightarrow K\bar{K}}$ als Funktion der laufenden Sigma-masse X_{M_σ} .

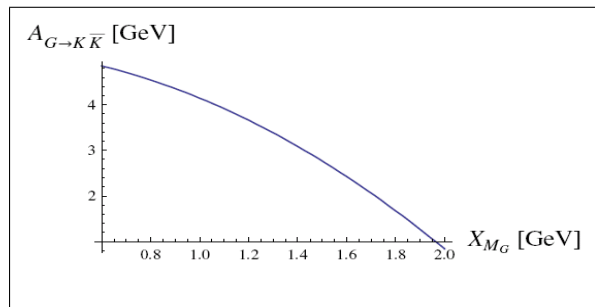


Abbildung 4.9: Übergangsamplitude $A_{G \rightarrow K\bar{K}}$ als Funktion der laufenden skalaren Glueball-masse X_{M_G} .

analog der Zwei-Pion Zerfälle vorgegangen. Zunächst werden die Felder $G \rightarrow$

G' und $\sigma \rightarrow \sigma'$ substituiert, worauf man die Übergangsamplituden der $SO(2)$ rotierten Felder G' und σ' erhält

$$\begin{aligned} & -i\mathcal{A}_{\sigma' \rightarrow K\bar{K}}(X_{M_{\sigma'}}) \\ = & i [\cos(\theta)\mathcal{A}_{\sigma \rightarrow K\bar{K}}(X_{M_{\sigma'}}) + \sin(\theta)\mathcal{A}_{G \rightarrow K\bar{K}}(X_{M_{\sigma'}})], \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} & -i\mathcal{A}_{G' \rightarrow K\bar{K}}(X_{M_{G'}}) \\ = & i [-\sin(\theta)\mathcal{A}_{\sigma \rightarrow K\bar{K}}(X_{M_{G'}}) + \cos(\theta)\mathcal{A}_{G \rightarrow K\bar{K}}(X_{M_{G'}})]. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Anschließend werden sie in (1.192) eingesetzt, was die Formeln zur Berechnung der Zerfallsbreiten $\Gamma_{G' \rightarrow K\bar{K}}$ und $\Gamma_{\sigma' \rightarrow K\bar{K}}$ liefert

$$\Gamma_{\sigma' \rightarrow K\bar{K}} = \frac{k_f}{8\pi M_{\sigma'}^2} [\mathcal{A}_{\sigma' \rightarrow K\bar{K}}]^2 \quad (4.115)$$

mit

$$k_f = \sqrt{\frac{M_{\sigma'}^2}{4} - M_K^2}, \quad (4.116)$$

sowie

$$\Gamma_{G' \rightarrow K\bar{K}} = \frac{k_f}{8\pi M_{G'}^2} [\mathcal{A}_{G' \rightarrow K\bar{K}}]^2 \quad (4.117)$$

mit

$$k_f = \sqrt{\frac{M_{G'}^2}{4} - M_K^2}. \quad (4.118)$$

Wie bei den Pionen ergeben analoge Betrachtungen auch im Fall der Kaonen, siehe dazu die Abbildungen 4.8 und 4.9, dass sich für die Übergangsamplituden mit den physikalischen Feldern jeweils eine destruktive Interferenz ergibt.

Kapitel 5

Resultate

In diesem Kapitel sollen die in dieser Arbeit erzielten Resultate präsentiert und diskutiert werden.

5.1 χ^2 -Funktion

Um die im vorigen Kapitel hergeleiteten Zerfallsbreiten explizit berechnen zu können, mussten zunächst die dafür notwendigen freien Parameter bestimmt werden. Dabei handelt es sich um das Gluonkondensat C^4 , die nackte Sigma-masse M_σ , die aus der Dilaton Potentialdichte nackte Glueballmasse m_G und den Massenparameter der vektoriellen Freiheitsgrade m_1 . Um die bestmöglichen Werte dieser Parameter zu ermitteln, wurde auf die χ^2 -Analysis zurückgegriffen. Dazu wurden einerseits die in Kapitel drei und vier hergeleiteten theoretischen Größen

$$M_{G'}^2 = M_G^2 \cos^2(\theta) + M_\sigma^2 \sin^2(\theta) - z \sin(2\theta), \quad (5.1)$$

$$M_{\sigma'}^2 = M_\sigma^2 \cos^2(\theta) + M_G^2 \sin^2(\theta) + z \sin(2\theta), \quad (5.2)$$

$$\Gamma_{G' \rightarrow \pi\pi} = \frac{\sqrt{\frac{M_{G'}^2}{4} - M_\pi^2}}{8\pi M_{G'}^2} \left[\sqrt{6} \mathcal{A}_{G' \rightarrow \pi\pi} \right]^2, \quad (5.3)$$

$$\Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta} = \frac{\sqrt{\frac{M_{G'}^2}{4} - M_\eta^2}}{8\pi M_{G'}^2} \left[\sqrt{2} \mathcal{A}_{G' \rightarrow \eta\eta} \right]^2 \quad (5.4)$$

und

$$\Gamma_{G' \rightarrow K\bar{K}} = \frac{\sqrt{\frac{M_{G'}^2}{4} - M_K^2}}{8\pi M_{G'}^2} \left[\mathcal{A}_{G' \rightarrow K\bar{K}} \right]^2, \quad (5.5)$$

andererseits die in der Tabelle A.1 zusammengefassten experimentellen Befunde [8] herangezogen. Die entsprechende χ^2 -Funktion sieht nun wie folgt aus

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \chi^2(C, M_\sigma, m_G, m_1) \\ &= \left(\frac{M_{G'} - M_{G'}^{ex}}{\Delta M_{G'}^{ex}} \right)^2 + \left(\frac{M_{\sigma'} - M_{\sigma'}^{ex}}{\Delta M_{\sigma'}^{ex}} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma_{G' \rightarrow \pi\pi} - \Gamma_{G' \rightarrow \pi\pi}^{ex}}{\Delta \Gamma_{G' \rightarrow \pi\pi}^{ex}} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta} - \Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta}^{ex}}{\Delta \Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta}^{ex}} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma_{G' \rightarrow K\bar{K}} - \Gamma_{G' \rightarrow K\bar{K}}^{ex}}{\Delta \Gamma_{G' \rightarrow K\bar{K}}^{ex}} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Der Mischungswinkel θ , der in (5.1) und (5.2) sowie auch in den Übergangsamplituden der Zerfallsbreiten (5.3) bis (5.5) steckt, ist unter Anderem Funktion der nackten Sigmamasse M_σ . Für die numerische Berechnung von (5.6) konnte der Mischungswinkel, wie auch die restlichen Größen, die Tabelle 5.3 bzw. 5.4 enthält, als Funktion der durch die χ^2 -Funktion zu bestimmenden freien Parameter ausgedrückt und anschließend berechnet werden. Die dazu entsprechenden expliziten Gleichungen sind den beiden letzten Kapiteln zu entnehmen. Die Zerfallsbreiten $\Gamma_{G' \rightarrow \eta\eta'}$ und $\Gamma_{G' \rightarrow 4\pi}$ wurden bei der Parameterbestimmung mit (5.6) nicht berücksichtigt. Der Zerfall $G' \rightarrow \eta\eta'$ besitzt einen sehr kleinen Phasenraum und einen großen experimentellen Fehler von etwa 50 % und wurde deshalb nicht in die χ^2 -Funktion miteinbezogen. Im Fall von $G' \rightarrow 4\pi$ wurden in dieser Arbeit nicht alle Zerfallskanäle in Betracht gezogen und aus diesem Grund auch $\Gamma_{G' \rightarrow 4\pi}$ bei der Berechnung der freien Parameter ausgelassen. Beispielsweise kann der skalare Glueball nicht nur über zwei Rho-Mesonen in vier Pionen zerfallen, sondern auch über die skalare Resonanz $f_0(600)$,

$$G' \rightarrow f_0(600)f_0(600) \rightarrow 4\pi. \quad (5.7)$$

Demnach sollte, für den in dieser Arbeit berechneten Zerfallskanal $G' \rightarrow 4\pi$, die Obergrenze

$$\Gamma_{G' \rightarrow 4\pi}^{th} < \Gamma_{G' \rightarrow 4\pi}^{ex} \quad (5.8)$$

nicht überschritten werden und wie die Tabelle 5.5 zeigt, wird diese Forderung erfüllt.

5.2 Die freien Parameter

Bei der Minimierung von (5.6) findet man ein lokales Minimum, das der im Kapitel drei geforderten Bedingung

$$M_\sigma < m_G < M_G \quad (5.9)$$

genügt. Die dazu entsprechenden Parameter sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Parameter	Wert [MeV]
C	698 ± 39
M_σ	1275 ± 29
m_G	1369 ± 26
m_1	809 ± 18

Tabelle 5.1: Die freien Parameter des effektiven Modells mit $\chi^2 \simeq 1.2$.

Die Bestimmung der Fehler, sowohl der Parameter als auch der Zerfallsbreiten selbst, erfolgte anhand der χ^2 -Analysis und ist in Anhang C erläutert. Betrachtet man die Massengleichung der vektoriellen Freiheitsgrade

$$M_\omega^2 = M_\rho^2 = m_1^2 + \frac{\sigma_0^2}{2} (h_1 + h_2 + h_3), \quad (5.10)$$

so muss für den vektoriellen Massenparameter m_1 , der, wie der Term

$$\frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 \text{Tr} [(L^\mu)^2 + (R^\mu)^2]$$

zeigt, proportional zum Gluonkondensat ist, die Zwangsbedingung

$$0 \leq m_1^2 \leq M_\rho^2 \quad (5.11)$$

erfüllt sein. Denn wäre $m_1^2 < 0$, würde es zu imaginären Massen der vektoriellen Freiheitsgrade nach Restauration der chiralen Symmetrie, d.h. im Grenzfall $\sigma_0 \rightarrow 0$, führen und im Fall von $m_1 > M_\rho$ müsste

$$\sum_{i=1}^3 h_i < 0 \quad (5.12)$$

sein und dies würde bedeuten, dass bei (5.10) der Beitrag, der proportional zum Quarkkondensat ist, negativ wäre. Da aber NJL-Modelle [35, 36] positive Quarkmassen vorhersagen und für diese

$$M_{meson} \propto \sigma_0^2 > 0 \quad (5.13)$$

gilt, wird deshalb angenommen, dass

$$\sum_{i=1}^3 h_i \geq 0 \quad (5.14)$$

gelten muss. Würde man bei der Parameterbestimmung die Zwangsbedingung (5.11) direkt durch Einführung einer fiktiven Funktion fordern, so ergäbe sich für das Minimum des vektoriellen Massenparameters

$$m_1 = M_\rho = 775 \text{ MeV}. \quad (5.15)$$

Fixiert man nun $m_1 = 775 \text{ MeV}$, so findet man ein lokales Minimum von (5.6), welches ebenfalls der (5.9) genügt, für Parameter, die der Tabelle (5.2) zu entnehmen sind.

Parameter	Wert [MeV]
C	670 ± 30
M_σ	1220 ± 9
m_G	1388 ± 22

Tabelle 5.2: Die freien Parameter des effektiven Modells mit $\chi^2 \simeq 4$.

Die erhaltenen Parameter liefern unmittelbar zwei interessante und wichtige Erkenntnisse dieser Studie. Dazu betrachte man erneut die Massengleichung der vektoriellen Freiheitsgrade (5.10), deren Beiträge einerseits zum Gluonkondensat und andererseits zum Quarkkondensat proportional sind. Auf Grund von $m_1 = 775 \text{ MeV}$ bedeutet dies, dass die Masse der vektoriellen Zustände nicht durch das Quarkkondensat, sondern durch das Gluonkondensat generiert wird und somit innerhalb des entwickelten effektiven Modells keine Brown-Rho Skalierung zu erwarten ist [34].

Des Weiteren wurde in vorliegender Arbeit eine Verbindung zwischen einer nicht perturbativen Größe, dem Gluonkondensat

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} (G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}) \right\rangle = C^4, \quad (5.16)$$

und einer phänomenologischen, zu der die messbaren Zerfälle zählen, hergestellt. Der genaue Wert des Gluonkondensats ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht genau bekannt. Im Abschnitt zum Dilaton wurde erwähnt, dass das Gluonkondensat zum Einen mit QCD Sum Rules [26] und zum Anderen mit QCD Lattice Rechnungen [27] ermittelt wurde. Die Ergebnisse beider Methoden liegen jedoch deutlich auseinander. Die QCD Lattice Rechnungen ergaben einen Wert für das Gluonkondensat von etwa

$$C^4 \simeq (650 \text{ MeV})^4 \quad (5.17)$$

und aus den QCD Sum Rules Rechnungen folgte

$$C^4 \simeq (360 \text{ MeV})^4. \quad (5.18)$$

Die nun zweite interessante Erkenntnis ist somit, dass der Wert des Gluonkondensats, welches aus dem effektiven Modell hervorgeht, in etwa dem der QCD Lattice Rechnungen entspricht.

Fall mit fixiertem vektoriellen Massenparameter $m_1 = 775 \text{ MeV}$.

Mit den erhaltenen freien Parameter in Tabelle 5.2 konnten weiterhin, die in Tabelle 5.3 aufgeführten Größen auf Baumdiagrammniveau berechnet werden. Dabei handelt es sich um die Masseneigenzustände des Sigmafeldes

$$\sigma' \equiv f_0(1370), \quad (5.19)$$

welches überwiegend als der Quark-Antiquark Zustand

$$\sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \quad (5.20)$$

interpretiert wird, bzw. des skalaren Glueballs

$$G' \equiv f_0(1500), \quad (5.21)$$

welcher überwiegend als Gluon-Gluon Zustand

$$G \equiv gg \quad (5.22)$$

interpretiert wird, den Mischungswinkel, den Grundzustand des Dilatons sowie dem Skalenparameter.

Größe	Theorie	Experiment
$M_{\sigma'}$	$(1150 \pm 9) \text{ MeV}$	$(1200 - 1500) \text{ MeV}$
$M_{G'}$	$(1504 \pm 5) \text{ MeV}$	$(1505 \pm 6) \text{ MeV}$
θ	$(24.9 \pm 2.7)^\circ$	–
G_0	$(554 \pm 39) \text{ MeV}$	–
Λ	$(540 \pm 40) \text{ MeV}$	–

Tabelle 5.3: Mit freien Parametern der Tabelle 5.2 berechnete Größen.

Für die Mischungsmatrix erhält man

$$\begin{pmatrix} f_0(1370) \equiv \sigma' \\ f_0(1500) \equiv G' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.91 & 0.42 \\ -0.42 & 0.91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \\ G \equiv gg \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

was konkret bedeutet, dass im Rahmen dieses effektiven Modells die Resonanz $f_0(1500)$ als skalarer Mischzustand zu betrachten ist, welcher zu 82 % den nackten skalaren Glueball G und zu 18 % das nackte Quarkonium σ darstellt. Für die skalare Resonanz $f_0(1370)$ ist es entsprechend umgekehrt. Die Vorzeichen in der Mischungsmatrix sind eindeutig festgelegt. Da der Mischungswinkel θ positiv ist, ergeben sich daraus für die Übergangsamplituden, wie die Abbildungen 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.8 und 4.9 zeigen, jeweils destruktive Interferenzen.

Fall mit nicht fixiertem vektoriellen Massenparameter $m_1 = 809 \text{ MeV}$.

Wirft man einen Blick auf die experimentelle Masse des Rho-Mesons

$$M_{\rho(770)} = (775.49 \pm 0.34) \text{ MeV} \quad (5.24)$$

und den Wert des ermittelten vektoriellen Massenparameter in der Tabelle 5.1, so zeigt sich, dass Experiment und Theorie in Rahmen der jeweiligen Fehler miteinander überlappen und demnach die Zwangsbedingung (5.11) als erfüllt betrachtet werden kann. Dies rechtfertigt die Parameter in Tabelle 5.1 zur Berechnung der Zerfallsbreiten zu verwenden. Daraus resultieren zunächst die in Tabelle 5.4 erfassten Ergebnisse.

Größe	Theorie	Experiment
$M_{\sigma'}$	$(1191 \pm 25) \text{ MeV}$	$(1200 - 1500) \text{ MeV}$
$M_{G'}$	$(1505 \pm 5) \text{ MeV}$	$(1505 \pm 6) \text{ MeV}$
θ	$(29.6 \pm 3.7)^\circ$	–
G_0	$(605 \pm 57) \text{ MeV}$	–
Λ	$(591 \pm 59) \text{ MeV}$	–

Tabelle 5.4: Mit freien Parametern der Tabelle 5.1 berechnete Größen.

Für die Mischungsmatrix ergibt sich

$$\begin{pmatrix} f_0(1370) \equiv \sigma' \\ f_0(1500) \equiv G' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.87 & 0.50 \\ -0.50 & 0.87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \\ G \equiv gg \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

was für diesen Fall bedeutet, dass die Resonanz $f_0(1500)$ zu 75 % dem nackten skalaren Glueball G und zu 25 % dem nackten Quarkonium σ entspricht. Für die skalare Resonanz $f_0(1370)$ ist es auch hier entsprechend umgekehrt.

In beiden Fällen liegen die erhaltenen Masseneigenzustände des Sigmafeldes näherungsweise am unteren Wert der entsprechenden experimentellen Massen. Die Masseneigenzustände des skalaren Glueballs stimmen mit dem Experiment überein. Demzufolge können diese Resultate als erste Bestätigung der Annahme gedeutet werden, dass in vorliegender Arbeit der Quark-Antiquark Zustand mit der skalaren-isoskalaren Resonanz $f_0(1370)$ und der skalare Glueball mit der ebenfalls skalaren-isoskalaren Resonanz $f_0(1500)$ identifiziert wird.

5.3 Zerfallsbreiten

Hinsichtlich der in obigen Abschnitten präsentierten Parameter ließen sich letztlich die Zerfallsbreiten des skalaren Glueballs G' und des physikalischen Sigmafeldes σ' berechnen. Diese sind für den Fall, bei dem der vektorielle Massenparameter fixiert wurde $m_1 = 775 \text{ MeV}$ den Tabellen 5.5 und 5.6 zu entnehmen. Im

Fall von $m_1 = 809 \text{ MeV}$ sich ergebende Zerfallsbreiten sind in den Tabellen 5.7 und 5.8 zu finden. In Bezug auf die numerischen Berechnungen sei noch angemerkt, dass in dieser Arbeit für den Renormierungsfaktor der Wellenfunktionen, der über die Masse des axial-vektoriellen Mesons \vec{a}_1 definiert ist

$$Z = \left(1 - \frac{g_1^2 \sigma_0^2}{M_{a_1}^2} \right)^{-1/2}, \quad (5.26)$$

der Wert

$$Z = 1.67 \pm 0.2 \quad (5.27)$$

verwendet wurde [8, 24]. Wie (5.26) ist auch der Parameter

$$w = \frac{g_1 \sigma_0}{M_{a_1}^2}, \quad (5.28)$$

der auf Grund der Redefinition der axial-vektoriellen Freiheitsgrade hervorgeht, über die Masse des \vec{a}_1 -Mesons definiert. Nach [8] lautet seine Masse

$$M_{a_1} = (1230 \pm 0.40) \text{ MeV}, \quad (5.29)$$

wobei dies nur einer Schätzung entspricht. In vorliegender Arbeit wurde der Massenwert

$$M_{a_1} = 1050 \text{ MeV} \quad (5.30)$$

verwendet [39].

Fall mit fixiertem vektoriellem Massenparameter $m_1 = 775 \text{ MeV}$.

Zerfallskanal	$\Gamma^{th} [\text{MeV}]$	$\Gamma^{ex} [\text{MeV}]$
$G' \rightarrow \pi\pi$	34.3 ± 4.4	38.04 ± 4.95
$G' \rightarrow \eta\eta$	7.2 ± 0.7	5.56 ± 1.34
$G' \rightarrow KK$	8.7 ± 1.7	9.37 ± 1.69
$G' \rightarrow 4\pi$	23	53.96 ± 7.06
$G' \rightarrow \eta\eta'$	0.6	2.07 ± 1.01

Tabelle 5.5: Zerfallsbreiten des skalaren Glueballs mit $m_1 = 775 \text{ MeV}$.

Zerfallskanal	$\Gamma^{th} [\text{MeV}]$
$\sigma' \rightarrow \pi\pi$	359 ± 51
$\sigma' \rightarrow \eta\eta$	57 ± 4
$\sigma' \rightarrow KK$	6.7 ± 2.7
$\sigma' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$	0.2

Tabelle 5.6: Zerfallsbreiten des physikalischen Sigmafeldes mit $m_1 = 775 \text{ MeV}$.

Fall mit nicht fixiertem vektoriellen Massenparameter $m_1 = 809 \text{ MeV}$.

Zerfallskanal	$\Gamma^{th} [\text{MeV}]$	$\Gamma^{ex} [\text{MeV}]$
$G' \rightarrow \pi\pi$	38 ± 5	38.04 ± 4.95
$G' \rightarrow \eta\eta$	5.3 ± 1.3	5.56 ± 1.34
$G' \rightarrow K\bar{K}$	9.3 ± 1.7	9.37 ± 1.69
$G' \rightarrow 4\pi$	30	53.96 ± 7.06
$G' \rightarrow \eta\eta'$	0.8	2.07 ± 1.01

Tabelle 5.7: Zerfallsbreiten des skalaren Glueballs mit $m_1 = 809 \text{ MeV}$.

Zerfallskanal	$\Gamma^{th} [\text{MeV}]$
$\sigma' \rightarrow \pi\pi$	284 ± 95
$\sigma' \rightarrow \eta\eta$	72 ± 14
$\sigma' \rightarrow K\bar{K}$	4.6 ± 3.3
$\sigma' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi$	0.1

Tabelle 5.8: Zerfallsbreiten des physikalischen Sigmafeldes mit $m_1 = 809 \text{ MeV}$.

Die aus der effektiven Lagrangedichte berechneten Zerfallsbreiten, sowohl des skalaren Glueballs G' , als auch des physikalischen Sigmafeldes σ' ergeben in ihrer Gesamtheit eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

Die beste Übereinstimmung ist in beiden Fällen bei den Zerfallskanälen

$$G' \rightarrow \pi\pi, \quad G' \rightarrow \eta\eta \quad \text{und} \quad G' \rightarrow K\bar{K} \quad (5.31)$$

erzielt worden. Wie Tabelle 5.7 zeigt, stimmen die Ergebnisse im Fall von $m_1 = 809 \text{ MeV}$ sogar sehr genau mit den experimentellen Befunden überein.

Die Zerfallsbreite des Zerfalls

$$G' \rightarrow \eta\eta' \quad (5.32)$$

ergibt hingegen, ebenfalls in beiden Fällen, einen kleineren Wert als im Experiment gemessen. Die Erklärung für die zu kleine theoretische Zerfallsbreite könnte der extrem kleine Phasenraum, wie dies die beiden Massen der pseudoskalaren Resonanzen η und η' ,

$$M_\eta = (547.853 \pm 0.024) \text{ MeV} \quad (5.33)$$

und

$$M_{\eta'} = (957.78 \pm 0.06) \text{ MeV}, \quad (5.34)$$

zeigen, zusammen mit einer destruktiven Interferenz in der Übergangsamplitude sein. Bei diesem Zerfall wurde zudem auf die Berechnung des Fehlers verzichtet, da die Zerfallsbreite sehr klein ist und der numerische Aufwand in Relation zu einer qualitativ besseren Aussagekraft des Ergebnisses zu hoch war. Die deutlich kleinere theoretische Zerfallsbreite beim Zerfall des skalaren Glueballs in vier Pionen als die im Experiment erhaltene, erklärt sich aus der bereits in Abschnitt zu χ^2 -Funktion erwähnten Tatsache, dass im betrachteten Fall nicht alle möglichen Zerfallskanäle untersucht worden sind, sondern nur der über die Rho-Mesonen,

$$G' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi. \quad (5.35)$$

Diesbezüglich wurde auch hier auf die Berechnung des Fehlers verzichtet. Schaut man sich die Zerfälle des Sigmafeldes σ' an, so liefert das effektive Modell ein qualitativ gutes Ergebnis. Obwohl die einzelnen Zerfallskanäle von σ' experimentell nicht bekannt sind, siehe dazu die in Tabelle A.3 zusammengefassten experimentellen Befunde [8], und der Bereich der Gesamtzerfallsbreite mit

$$\Gamma_{f_0(1370)}^{ex} = (200 - 500) \text{ MeV} \quad (5.36)$$

ziemlich groß ist, befindet sich die theoretische Gesamtzerfallsbreite sowohl im Fall von $m_1 = 775 \text{ MeV}$ mit

$$\Gamma_{\sigma'}^{th} \simeq (420 \pm 60) \text{ MeV}, \quad (5.37)$$

als auch im Fall von $m_1 = 806 \text{ MeV}$ mit

$$\Gamma_{\sigma'}^{th} \simeq (361 \pm 112) \text{ MeV}, \quad (5.38)$$

innerhalb der experimentellen.

Beim Zerfallskanal

$$\sigma' \rightarrow K\bar{K} \quad (5.39)$$

würde man in beiden Fällen, auf Grund von Symmetriebetrachtungen, eine größere Zerfallsbreite, etwa ein Drittel von $\Gamma_{\sigma' \rightarrow \pi\pi}$, als die ermittelte erwarten. Eine mögliche Erklärung könnte auch hier die destruktive Interferenz in der Übergangsamplitude sein.

Die Ursache für die sehr kleine Zerfallsbreite des Zerfalls

$$\sigma' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi \quad (5.40)$$

liegt in dem sehr geringen Phasenraum des Zwischenzerfalls

$$\sigma' \rightarrow \rho\rho. \quad (5.41)$$

Aus gleichen Gründen wie bei $G' \rightarrow \eta\eta'$ wurde auch hier der Fehler nicht berechnet.

Abschließend kann gesagt werden, dass die erzielten Resultate in dieser Arbeit der Annahme in Bezug auf die Identifikation der Resonanz $f_0(1370)$ bzw. $f_0(1500)$ überwiegend als Quarkonium bzw. als skalarer Glueball gerecht wurden.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In vorliegender Arbeit wurde ein lineares Sigma-Modell mit vektorialen sowie axial-vektoriellen Freiheitsgraden durch Einkopplung des Dilatons verallgemeinert, wodurch Kontakt mit der Skalen-Anomalie erzielt wurde. Anschließend war die Intention, die Zerfallsbreiten des entmischten Sigmafeldes sowie des entmischten skalaren Glueballs, die mit den skalaren-isoskalaren Resonanzen $f_0(1370)$ und $f_0(1500)$ identifiziert wurden, auf Baumdiagrammniveau zu berechnen und mit experimentellen Befunden zu vergleichen, um Aussagen über die Natur dieser Resonanzen im Rahmen der durchgeführten Studie machen zu können.

Basierend auf [22, 23, 24, 28] wurde als Erstes eine effektive Lagrangedichte konstruiert, die einerseits die leichtesten skalaren, pseudoskalaren, vektorialen sowie axial-vektoriellen Zwei-Flavour Quark-Antiquark Freiheitsgrade enthält und andererseits den Glueball Freiheitsgrad. Die mesonischen Quark-Antiquark Freiheitsgrade wurden dabei in einer Isospinstruktur realisiert. Die Beschreibung des skalaren Glueball Freiheitsgrades erfolgte mittels einer klassischen Dilaton Potentialdichte. Die Einbeziehung des skalaren Glueball Freiheitsgrades führte unmittelbar auf die Skalen-Anomalie, durch die der Skalenparameter Λ im effektiven Modell eingeführt wurde. Dieser Skalenparameter manifestiert im gesamten Modell die einzige Skala, der nach, bis auf die explizite Symmetriebrechung, alle dimensionalen Größen generiert werden. Bei verschwindenden Quarkmassen, abgesehen von der $U(1)_A$ -Anomalie, unterliegt die effektive Lagrangedichte der globalen chiralen $U(2)_L \times U(2)_R$ -Symmetrie. Schaut man sich in diesem Zusammenhang die Quarkmassen an, die in Tabelle 1.1 erfasst sind, so können diese approximativ in zwei Gruppen aufgeteilt werden

$$M_{u,d,s} \ll 1\text{GeV} \leq M_{c,b,t}. \quad (6.1)$$

Die Größenordnung von 1 GeV zeigt sich bei den typischen Hadronenmassen, beispielsweise $M_{\rho(770)} = 775\text{ MeV}$. Betrachtet man in Bezug darauf die Massen der Konstituenten des Rho-Mesons, so konnte, im Fall von $N_f = 2$, wegen

$$M_{\rho(770)} \gg M_u + M_d, \quad (6.2)$$

der chirale Limes $M_{u,d} \rightarrow 0$ angenommen werden. Da die Quarks de facto nicht masselos sind und dadurch die chirale Symmetrie explizit brechen, wurde in der effektiven Lagrangedichte ein entsprechender Term eingeführt, der diesen Umstand erzeugt. Dabei konnte bedingt der geringen Strommassendifferenz der Up- und Down-Quarks von deren Entartung ausgegangen werden, wodurch sich die residuale $SU(2)_V$ -Symmetrie ergab. Außer der expliziten Symmetriebrechung kann die chirale Symmetrie auch spontan gebrochen werden, wodurch das Vakuum eine geringere Symmetrie als die Lagrangedichte aufweist. Betrachtet man in diesem Fall das Vakuum, so wird dabei die $SU(2)_A$ -Symmetrie spontan gebrochen, was mit einem nicht-verschwindenden Quarkkondensat,

$$\langle q\bar{q} \rangle \neq 0, \quad (6.3)$$

verbunden ist. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die spontane Brechung der chiralen Symmetrie in Bezug auf die Massenerzeugung die dominierende ist. Weiterhin treten dabei nach dem Goldstone Theorem drei masselose Goldstone-Bosonen,

$$N_f = 2 \rightarrow N_f^2 - 1 = 3, \quad (6.4)$$

auf. In der Natur sind jedoch keine masselose Goldstone-Bosonen beobachtet worden. Die leichtesten in der Natur vorkommenden bosonischen Materieteilchen sind die drei Pionen, die für den betrachteten Fall (6.4) als *pseudo* Goldstone-Bosonen interpretiert werden. Entsprechend wurde auch der Sachverhalt der spontanen Symmetriebrechung bei der Modellierung der effektiven Lagrangedichte berücksichtigt. Das Sigmafeld, welches als Quark-Antiquark Zustand

$$\sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}), \quad (6.5)$$

und der skalare Glueball, welcher als Gluon-Gluon Zustand

$$G \equiv gg \quad (6.6)$$

interpretiert wurde, besitzen die Quantenzahlen des Vakuums

$$J^{PC} = 0^{++}. \quad (6.7)$$

Zur Untersuchung ihrer Fluktuationen wurden beide Felder um ihren Vakuumerwartungswert entsprechend verschoben. Nach der Verschiebung des Sigmafeldes um dessen Vakuumerwartungswert ergaben sich in der effektiven Lagrangedichte nicht-diagonale Terme. Um diese zu eliminieren, wurden die axial-vektoriellen Freiheitsgrade redefiniert. Diesbezüglich mussten anschließend die Wellenfunktionen der pseudoskalaren Freiheitsgrade renormiert werden. Dieser Sachverhalt wurde nach [24, 29, 30] behandelt.

Bedingt durch die gleichen Quantenzahlen des Sigmafeldes σ und des skalaren Glueballs G , kommt es innerhalb des effektiven Modells zu deren Mischung, die durch eine $SO(2)$ -Rotation realisiert wurde. Nach deren Entmischung wurde das Sigmafeld überwiegend als die skalare-isoskalare Resonanz

$$\sigma' \equiv f_0(1370) \quad (6.8)$$

und der skalare Glueball überwiegend als die, ebenfalls skalare-isoskalare, Resonanz

$$G' \equiv f_0(1500) \quad (6.9)$$

identifiziert. Im Anschluss dazu wurden aus der effektiven Lagrangedichte für die jeweiligen Zerfallskanäle die entsprechenden Vertizes isoliert, sodass die Übergangsamplituden und letztendlich nach der im Abschnitt zu Zerfällen hergeleiteten Formel die Zerfallsbreiten ermittelt werden konnten. Bei den Zerfallskanälen

$$\sigma' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi, \quad (6.10)$$

$$G' \rightarrow \rho\rho \rightarrow 4\pi \quad (6.11)$$

und

$$G' \rightarrow \eta\eta' \quad (6.12)$$

wurde aus kinematischen Gründen zu Berechnung derer Zerfallsbreiten die Spektralfunktion herangezogen [31]. Ein Problem lieferten die beiden Zerfallskanäle

$$\sigma' \rightarrow K\bar{K} \quad (6.13)$$

und

$$G' \rightarrow K\bar{K}, \quad (6.14)$$

da die in der vorliegenden Arbeit konstruierte effektive Lagrangedichte keine Strange-Freiheitsgrade enthält. Dennoch konnten die entsprechenden Zerfallsbreiten, auf Grund von Symmetriebetrachtungen in Anlehnung auf ein $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Modell [32], berechnet werden. Um die Zerfallsbreiten explizit berechnen zu können, wurden einerseits die aus der Konstruktion der effektiven Lagrangedichte sich ergebenden Kopplungen durch messbare, physikalische Größen, den Massen der Felder sowie der Pion-Vakuumzerfallskonstante, ersetzt. Andererseits wurden mittels der χ^2 -Analysis die dazu erforderlichen freien Parameter, das Gluonkondensat C , die nackte Masse des Sigmafeldes M_σ , die aus der Dilaton Potentialdichte nackte Glueballmasse m_G und der vektorielle Massenparameter m_1 bestimmt. In Rahmen der in das effektive Modell gesteckten Annahmen kann abschließend gesagt werden, dass die erzielten Resultate, wie sie den vorherigen Kapitel zu entnehmen sind, qualitativ die experimentellen Befunde reproduzieren.

Das in dieser Arbeit konstruierte effektive Modell bietet einige interessante Möglichkeiten der Weiterentwicklung. Zunächst wäre es sinnvoll die Tetraquark Zustände, die jeweils überwiegend als die skalare-isoskalare Resonanz $f_0(600)$ identifiziert werden [33], in das effektive Modell einzubinden. Im Fall von $N_f = 2$ enthielte das effektive Modell einen Tetraquark Zustand. Dadurch könnte man die insgesamt drei skalaren-isoskalaren Resonanzen, $f_0(1370)$, $f_0(1500)$ und $f_0(600)$, die die neue effektive Lagrangedichte nun besitzen würde, mittels der $SO(3)$ -Rotation entmischen. Im Zusammenhang mit der Untersuchung von Zerfallsbreiten hätte man die Möglichkeit zusätzliche Zerfälle berechnen zu können, wie z.B.

$$G' \rightarrow f_0(600)f_0(600) \rightarrow 4\pi. \quad (6.15)$$

Damit hätte man einen weiteren Beitrag in dem Vier-Pion Zerfallskanal. Das durch die Einkopplung von $f_0(600)$ erweiterte effektive Modell, welches folglich drei Kondensate hätte, würde damit einen weiteren Beitrag zum besseren Verständnis der bis heute noch nicht endgültig geklärten Natur dieser skalaren-isoskalaren Resonanzen leisten. Eine weitere Verallgemeinerung des effektiven Modells würde man erreichen, indem man tensorielle sowie auch baryonische

Freiheitsgrade einführt [40] oder auch die globale chirale Symmetrie unter Einbeziehung des Strange-Freiheitsgrades auf die $U(3)_L \times U(3)_R$ -Symmetrie erweitert. Bezüglich der Einführung des Strange-Freiheitsgrades, $N_f = 3$, ergäben sich nun neun Tetraquark Zustände im effektiven Modell, was eine kompliziertere Mischung zu Folge hätte.

Eine sehr nahe liegende Weiterentwicklung dieser Arbeit wäre das Verhalten der effektiven Lagrangedichte bei endlichen Temperaturen bzw. endlichen Dichten zu untersuchen. Dies könnte zum besseren Verständnis des in Abbildung 6.1 dargestellten Phasendiagramms der stark wechselwirkenden Kernmaterie führen [41]. Das wäre unter Anderem von sehr großer kosmologischer Bedeutung, denn nach heutigem Wissensstand vermutet man, dass das frühe, sehr heiße Universum, kurz nach dem sogenannten Urknall, in der Quark-Gluon-Plasma Phase vorlag. Als sich das Universum anschließend abkühlte, soll ein Phasenübergang zur hadronischen Materie stattgefunden haben. Dies sei die Voraussetzung dafür gewesen, dass sich nach entsprechender Zeit Strukturen im Universum bilden konnten. Wird die Kernmaterie in diesem Kontext hohen Dichten ausgesetzt, mit solchen man in stellaren kompakten Objekten wie z.B. den Neutronensternen rechnet, so befindet sich diese in einer farbsupraleitenden Phase. Eine entsprechende Weiterentwicklung des in der vorliegenden Arbeit konstruierten effektiven Modells würde die Untersuchung der Kernmaterie unter solchen extremen Bedingungen ermöglichen, das bedeutet derartige Phasenübergänge bei hohen Temperaturen bzw. die farbsupraleitende Phase bei hohen Dichten zu studieren.

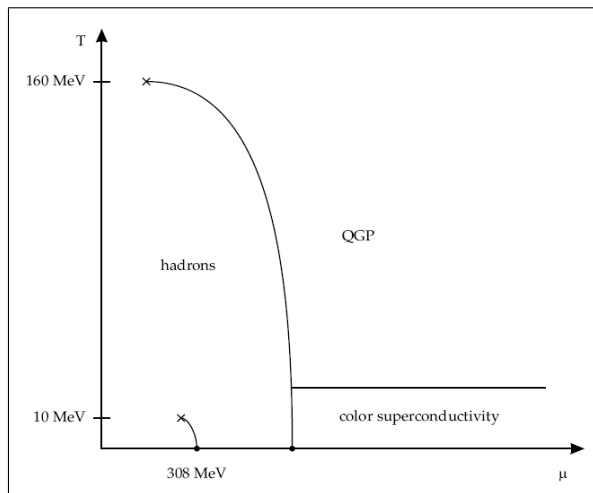


Abbildung 6.1: Phasendiagramm der stark wechselwirkenden Kernmaterie.

Anhang A

Die Mesonen

Im Folgenden werden die für diese Arbeit relevante Eigenschaften der vorkommenden Teilchen in knapper Form zusammengefasst [8, 37]. Es handelt sich dabei um die leichtesten mesonischen Zustände, deren Konstituenten die Up- und Down-Quarks sind, bei Berücksichtigung der Kaonen wären es zusätzlich noch die Strange-Quarks, sowie den skalaren Glueball, der sich aus kollektiven Gluonen zusammensetzt. Der skalare Glueball stellt ebenfalls einen mesonischen Zustand dar, da seine Baryonzahl, wie bei einem Quark-Antiquark Zustand, null ist.

A.1 Der skalare Glueball

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, ist die QCD eine nicht-abel'sche lokale Eichtheorie mit der $SU(3)_c$ -Symmetrie. Dies hat zur Konsequenz, dass ihre Eichfelder, die Gluonen, selbst die Farbladung tragen und somit einer Selbstwechselwirkung unterliegen. Dadurch sind die Gluonen in der Lage gebundene Zustände, die Gluballs, zu generieren. In dieser Arbeit wird der skalare-isoskalare Glueball

$$G \equiv gg, I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{++}) \quad (\text{A.1})$$

überwiegend mit der Resonanz

$$f_0(1500), I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{++}) \quad (\text{A.2})$$

identifiziert [5]. Die Masse sowie die volle Zerfallsbreite dieser Resonanz sind experimentell sehr gut bekannt und betragen

$$M_{f_0(1500)} = (1505 \pm 6) \text{ MeV} \quad \text{und} \quad \Gamma_{f_0(1500)} = (109 \pm 7) \text{ MeV}. \quad (\text{A.3})$$

In der Tabelle A.1 sind die Zerfallskanäle dieser Resonanz mit den entsprechenden Zerfallsbreiten dargestellt.

Zerfallskanal von $f_0(1500)$	Fraktion (Γ_i/Γ)	Zerfallsbreite Γ_i
$\pi\pi$	$(34.9 \pm 2.3) \%$	$(38.04 \pm 4.95) \text{ MeV}$
$\rho\rho \rightarrow 4\pi$	$(49.5 \pm 3.3) \%$	$(53.96 \pm 7.06) \text{ MeV}$
$\eta\eta$	$(5.1 \pm 0.9) \%$	$(5.56 \pm 1.34) \text{ MeV}$
$\eta\eta'(958)$	$(1.9 \pm 0.8) \%$	$(2.07 \pm 1.01) \text{ MeV}$
KK	$(8.6 \pm 1.0) \%$	$(9.37 \pm 1.69) \text{ MeV}$

Tabelle A.1: Zerfallskanäle der Resonanz $f_0(1500)$ [8].

A.2 Die Quark-Antiquark Zustände

In Tabelle A.2 sind die Quantenzahlen der drei leichtesten Quarks dargestellt. Bei Antiquarks ändert sich das Vorzeichen der entsprechenden Ladungen. Dabei ist

$$Y \equiv B + S \quad (\text{A.4})$$

die Hyperladung und

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (\text{A.5})$$

die Ladung.

Quarkflavour	Spin	B	Q	I_3	S	Y
u	1/2	1/3	2/3	1/2	0	1/3
d	1/2	1/3	-1/3	-1/2	0	1/3
s	1/2	1/3	-1/3	0	-1	-2/3

Tabelle A.2: Quantenzahlen der Quarks.

Die Zwei-Flavour Mesonen stellen im Isospinraum, welcher durch die $SU(2)$ -Gruppe beschrieben wird, den Triplet- und den Singulett Zustand dar

$$2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1, \quad (\text{A.6})$$

deren Wellenfunktionen wie folgt aussehen

$$\begin{aligned} |I = 1, I_3 = 1\rangle &= u\bar{d}, \\ |I = 1, I_3 = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \\ |I = 1, I_3 = -1\rangle &= d\bar{u} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

und

$$|I = 0, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}). \quad (\text{A.8})$$

Berücksichtigt man den Strange-Quark, so stellen die Drei-Flavour Mesonen einen Nonett der $SU(3)$ -Gruppe dar

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \quad (\text{A.9})$$

mit einem $SU(3)$ -Oktett und einem $SU(3)$ -Singulett

$$|I = 0, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}). \quad (\text{A.10})$$

A.2.1 Skalare Mesonen

Die skalaren Quark-Antiquark Zustände in dieser Arbeit sind der Singulett $f_0(1370)$ und das Triplett a_0 im Isospinraum. Sie haben Spin $S = 1$ und Drehimpuls $L = 1$. Damit lassen sich für den Gesamtdrehimpuls folgende Konstellationen erreichen

$$J^{CP} = L + S \begin{cases} 0^{++} \\ 1^{++} \\ 2^{++} \end{cases} . \quad (\text{A.11})$$

Ist der Drehimpuls bzw. auch der Spin eines Mesons bekannt, so lassen sich nach

$$P = (-1)^L \quad (\text{A.12})$$

und

$$C = (-1)^{L+S} \quad (\text{A.13})$$

seine Parität sowie Ladungskonjugation berechnen. Für die skalaren Mesonen - sowie auch für die axial-vektoriellen Mesonen, die noch diskutiert werden - ergibt sich demnach sowohl eine positive Parität als auch Ladungskonjugation¹. Da es sich hierbei um skalare Teilchen handelt, muss der Gesamtdrehimpuls verschwinden $J = 0$. Demzufolge müssen S und L antiparallel zueinander ausgerichtet sein. Tensorielle Teilchen, $J^{CP} = 2^{++}$, sind im effektiven Modell dieser Arbeit nicht enthalten und werden somit nicht betrachtet.

Die Resonanz $f_0(1370)$

Im effektiven Modell dieser Arbeit wird der Quark-Antiquark Zustand

$$\sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}), \quad I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{++}) \quad (\text{A.14})$$

überwiegend mit der Resonanz

$$f_0(1370), \quad I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{++}) \quad (\text{A.15})$$

identifiziert. Ihre Masse und die volle Zerfallsbreite betragen

$$M_{f_0(1370)} = (1200 - 1500) \text{ MeV} \quad \text{und} \quad \Gamma = (200 - 500) \text{ MeV}. \quad (\text{A.16})$$

Die in Tabelle A.3 zusammengefassten Zerfälle von $f_0(1370)$ sind zwar experimentell nicht exakt bekannt, wurden aber beobachtet.

Die Resonanz $a_0(1450)$

$a_0(1450)$ ist ein Triplett im Isospinraum mit $I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{++})$ und die explizite Quarkzusammensetzung dieser Zustände lautet: $a_0^+ = u\bar{d}$, $a_0^- = d\bar{u}$ und $a_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$. Die Masse und die volle Zerfallsbreite von $a_0(1450)$ betragen

$$M_{a_0(1450)} = (1474 \pm 19) \text{ MeV} \quad \text{und} \quad \Gamma = (265 \pm 13) \text{ MeV}. \quad (\text{A.17})$$

¹Neben den kontinuierlichen Symmetrien, die bereits in der Einleitung behandelt wurden, besitzt die starke Wechselwirkung auch diskrete Symmetrien, wie z.B. die Parität oder die Ladungskonjugation. Diese sind zur Charakterisierung der Hadronen von Bedeutung. Eine Vertiefung dieses Sachverhalts liefern Standardwerke wie z.B. [37, 38].

Zerfallskanal von $f_0(1370)$	Fraktion (Γ_i/Γ)
$\pi\pi$	<i>gesehen</i>
$\rho\rho \rightarrow 4\pi$	<i>gesehen</i>
$\eta\eta$	<i>gesehen</i>
$K\bar{K}$	<i>gesehen</i>

Tabelle A.3: Zerfallskanäle der Resonanz $f_0(1370)$ [8].

A.2.2 Pseudo-skalare Mesonen

Die pseudoskalaren Mesonen, die in vorliegender Arbeit vorkommen, sind die beiden Singulets η und $\eta'(958)$, das Pionen-Triplett π sowie die zwei Kaonen-Dubletts K^+ , K^- und K^0 , \bar{K}^0 im Isospinraum. Zusammenbetrachtet stellen sie das oben erwähnte Nonett, $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$, der $SU(3)$ -Gruppe dar.

Sie haben Spin $S = 0$ und Drehimpuls $L = 0$. Wie für skalare Teilchen erforderlich, verschwindet der Gesamtdrehimpuls $J^{PC} = 0^{-+}$. Nach (A.12) und (A.13) ergibt sich für sie eine negative Parität und eine positive Ladungskonjugation.

Die Eta Teilchen

Die physikalischen Felder η und $\eta'(958)$ mit den Quantenzahlen $I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{-+})$ besitzen folgende Massen

$$M_\eta = (547.853 \pm 0.024) \text{ MeV} \quad \text{bzw.} \quad M_{\eta'} = (957.78 \pm 0.06) \text{ MeV} \quad (\text{A.18})$$

sowie folgende volle Zerfallsbreiten

$$\Gamma = (1.30 \pm 0.07) \text{ keV} \quad \text{bzw.} \quad \Gamma = (204 \pm 15) \text{ keV}. \quad (\text{A.19})$$

Diese beiden physikalischen Felder mischen miteinander nach

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_N \\ \eta_S \end{pmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

dabei werden die nackten Felder $\eta_N = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$ und $\eta_S = s\bar{s}$ durch folgende Lagrangedichte beschrieben

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta_N)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta_S)^2 - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta_N & \eta_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{\eta_N}^2 & -z \\ -z & M_{\eta_S}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_N \\ \eta_S \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Dies ergibt folgende Gleichungen für die physikalischen Massen sowie den Mischungswinkel

$$M_\eta^2 = M_{\eta_N}^2 \cos^2(\varphi) + M_{\eta_S}^2 \sin^2(\varphi) - z \sin(2\varphi), \quad (\text{A.22})$$

$$M_{\eta'}^2 = M_{\eta_N}^2 \sin^2(\varphi) + M_{\eta_S}^2 \cos^2(\varphi) + z \sin(2\varphi) \quad (\text{A.23})$$

und

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2z}{M_{\eta_S}^2 - M_{\eta_N}^2} \right). \quad (\text{A.24})$$

Die Massen der nackten Felder betragen

$$M_{\eta_N} = 716 \text{ MeV} \quad \text{und} \quad M_{\eta_S} = 839 \text{ MeV}. \quad (\text{A.25})$$

Der Mischungswinkel ist

$$\varphi = -36.0033^\circ \quad (\text{A.26})$$

und der Mischungsparameter

$$z = -0.294 \text{ GeV}. \quad (\text{A.27})$$

Die Pionen

Die Quarkzusammensetzung der Pionen ist $\pi_0^+ = u\bar{d}$, $\pi_0^- = d\bar{u}$ und $\pi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$. Die Masse und die mittlere Lebensdauer der geladenen Pionen betragen

$$M_{\pi^\pm} = (139.57018 \pm 0.00035) \text{ MeV} \quad \text{und} \quad \tau = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8} \text{ s} \quad (\text{A.28})$$

bzw. des ungeladenen Pions

$$M_{\pi^0} = (134.9766 \pm 0.0006) \text{ MeV} \quad \text{und} \quad \tau = (8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17} \text{ s}. \quad (\text{A.29})$$

Die Kaonen

Die in vorliegender Arbeit konstruierte effektive Lagrangedichte enthält keine Strange-Freiheitsgrade, dennoch können, auf Grund von Symmetriebetrachtungen, die Zerfälle sowohl des Glueballs als auch des Sigmafeldes in Kaonen berechnet werden. Die Quantenzahlen der Kaonen sind $I(J^P) = 1/2(0^-)$ und die Quarkzusammensetzung der beiden Kaonen-Dubletts lautet: $K^+ = u\bar{s}$, $K^- = s\bar{u}$, $K^0 = d\bar{s}$ und $\bar{K}^0 = s\bar{d}$. Die Masse der geladenen Kaonen beträgt

$$M_{K^\pm} = (493.677 \pm 0.016) \text{ MeV} \quad (\text{A.30})$$

bzw. der ungeladenen

$$M_{K^0} = (497.614 \pm 0.024) \text{ MeV}. \quad (\text{A.31})$$

A.2.3 Vektorielle Mesonen

Die vektoriellen Mesonen im effektiven Modell sind das Singulett $\omega(782)$ und das Triplett $\rho(770)$ im Isospinraum. Sie haben Spin $S = 1$ und Drehimpuls $L = 0$, woraus sich für den Gesamtdrehimpuls $J^{PC} = 1^{--}$ ergibt. Auf Grund des Spins und Drehimpulses erhält man für sie über die (A.12) und (A.13) sowohl eine negative Parität als auch Ladungskonjugation.

Das Omega Teilchen $\omega(782)$

Die Quarkzusammensetzung des Omega-Mesons lautet $\omega(782) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$ mit $I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$. Seine Masse und volle Zerfallsbreite betragen

$$M_{\omega(782)} = (782.65 \pm 0.12) \text{ MeV} \quad \text{sowie} \quad \Gamma = (8.49 \pm 0.08) \text{ MeV}. \quad (\text{A.32})$$

Das Rho Teilchen $\rho(770)$

Die explizite Quarkzusammensetzung des Rho-Tripletts $\rho(770)$ im Isospinraum ist $\rho_0^+ = u\bar{d}$, $\rho_0^- = d\bar{u}$ und $\rho_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$ mit $I^G(J^{PC}) = 1^+(1^{--})$. Die Masse und die volle Zerfallsbreite betragen

$$M_{\rho(770)} = (775.49 \pm 0.34) \text{ MeV} \quad \text{sowie} \quad \Gamma = (149.4 \pm 1.0) \text{ MeV}. \quad (\text{A.33})$$

Das Rho-Meson zerfällt fast zu 100 % in zwei Pionen, $\rho \rightarrow \pi\pi$.

A.2.4 Axial-vektorielle Mesonen

Die axial-vektoriellen Mesonen sind in dieser Arbeit das Singulett $f_1(1285)$ und das Triplet $a_1(1260)$ im Isospinraum. Sie haben Spin $S = 1$ und Drehimpuls $L = 1$. Für ein vektorielles Teilchen ergibt sich daraus für den Gesamtdrehimpuls $J^{CP} = 1^{++}$.

Das $f_1(1285)$ Teilchen

Dieses Singulett im Isospinraum hat folgende Quarkzusammensetzung $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$ mit $I^G(J^{PC}) = 0^+(1^{++})$. Seine Masse und volle Zerfallsbreite betragen

$$M_{f_1(1285)} = (1281.8 \pm 0.6) \text{ MeV} \quad \text{sowie} \quad \Gamma = (24.3 \pm 1.1) \text{ MeV}. \quad (\text{A.34})$$

Das $a_1(1260)$ Teilchen

$a_1(1260)$ ist ein Triplet im Isospinraum mit $I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{++})$ und die explizite Quarkzusammensetzung dieser Zustände lautet $a_1^+ = u\bar{d}$, $a_1^- = d\bar{u}$ und $a_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$. Die Masse und die volle Zerfallsbreite von $a_1(1260)$ betragen

$$M_{a_1} = (1230 \pm 0.40) \text{ MeV} \quad \text{und} \quad \Gamma = (250 - 600) \text{ MeV}, \quad (\text{A.35})$$

wobei diese Masse nach [8] nur eine Schätzung ist. Für die numerischen Berechnungen wurde die Masse

$$M_{a_1} = 1050 \text{ MeV} \quad (\text{A.36})$$

verwendet [39].

Anhang B

PCAC-Relation

Betrachtet man die Fermi-Theorie, so zeigt sich, dass in der Hamiltondichte der schwachen Wechselwirkung vektorielle sowie auch axiale Ströme vorhanden sind. Bei der sogenannten PCAC-Relation (Partial Conservation of the Axial-Vector Current) wird der schwache axiale Strom zu dem stark wechselwirkenden Pion-Triplett $\pi^a(x)$ in Beziehung gesetzt. Dazu betrachte man vorerst den schwachen Zerfall des Pions, welcher wegen der negativen Parität durch das Matrixelement des axialen Stroms zwischen dem Vakuum und dem Pion

$$\langle 0 | A_\mu | \pi \rangle \quad (\text{B.1})$$

dominiert wird. Dieses Matrixelement muss zum Impuls des Pions proportional sein

$$\langle 0 | A_\mu^a(x) | \pi^b(q) \rangle = -i f_\pi q_\mu \delta^{ab} e^{-iq \cdot x}. \quad (\text{B.2})$$

Aus experimentellen Befunden ergibt sich für die Proportionalitätskonstante

$$f_\pi = 92.4 \text{ MeV}. \quad (\text{B.3})$$

Die Indizes a und b beziehen sich auf den Isospin und μ ist ein gewöhnlicher Lorentzindex. Bildet man nun die Divergenz von (B.2), so erhält man die PCAC-Relation

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(x) | \pi^b(q) \rangle = -f_\pi q^2 \delta^{ab} e^{-iq \cdot x} = -f_\pi M_\pi^2 \delta^{ab} e^{-iq \cdot x}. \quad (\text{B.4})$$

Auf Grund der geringen Masse der Pionen im Vergleich zu der hadronischen Skala, kann der axiale Strom in der starken Wechselwirkung als näherungsweise erhalten betrachtet werden. Dies impliziert, dass die QCD annähernd invariant unter den axialen Transformationen ist. Aus den Beziehungen (B.2) sowie (B.4) folgt, dass der axiale Strom des Pions durch folgende Gleichung

$$A_{\mu, \text{Pion}}^a = f_\pi \partial_\mu \pi^a(x) \quad (\text{B.5})$$

gegeben ist, die ebenfalls als PCAC-Relation bezeichnet wird.

Anhang C

Fehlerbestimmung mittels χ^2 -Analysis

In diesem Teil des Anhangs soll erklärt werden, wie bei einem System, welches von n freien Parametern x_1, x_2, \dots, x_n abhängt, anhand der χ^2 -Analysis die Fehler dieser Parameter bestimmt werden können.

χ^2 -Funktion und die Hesse-Matrix

Zunächst werden die Parameter selbst ermittelt, indem man das Minimum von

$$\begin{aligned} \chi^2[x_1, x_2, \dots, x_n] &= \left(\frac{A_1[x_1, x_2, \dots, x_N] - A_1^{ex}}{\delta A_1^{ex}} \right)^2 + \left(\frac{A_2[x_1, x_2, \dots, x_N] - A_2^{ex}}{\delta A_2^{ex}} \right)^2 \\ &+ \dots + \left(\frac{A_q[x_1, x_2, \dots, x_N] - A_q^{ex}}{\delta A_q^{ex}} \right)^2, \end{aligned} \quad (C.1)$$

wobei $A_i[x_1, x_2, \dots, x_N]$ mit $i = 1, 2, \dots, q$ und $q > n$ theoretische Funktionen sind, zu denen experimentelle Befunde A_i^{ex} mit entsprechendem Fehler δA_i^{ex} vorliegen, bestimmt. Das Minimum von (C.1) ist an der Stelle $P = \{x_1^{\min}, x_2^{\min}, \dots, x_n^{\min}\}$ realisiert. Nun wird folgender Vektor definiert

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^{\min} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{\min} \end{pmatrix} = x - x^{\min}. \quad (C.2)$$

Bezüglich den Variablen y_i ist das Minimum offensichtlich bei $P = \{0, 0, \dots, 0\}$. Entwickelt man (C.1) um $y_i = 0$, so erhält man

$$\chi^2[y] = \chi_0^2 + y^T H y, \quad (C.3)$$

wobei H die Hesse-Matrix ist

$$H_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \chi^2[y_1, y_2, \dots, y_n]}{\partial y_i \partial y_j} \right). \quad (C.4)$$

Diagonalisierung der Hesse-Matrix

An dieser Stelle werden zur Diagonalisierung der Hesse-Matrix neue Variablen eingeführt

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = By = B(x - x^{\min}), \quad (\text{C.5})$$

wobei $B \in SO(n)$ ist, sodass

$$BHB^T = \lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}. \quad (\text{C.6})$$

Dabei sind λ_i die Eigenwerte der Hesse-Matrix H . Die Matrix B bzw. B^T können dargestellt werden als

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

bzw.

$$B^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \dots \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Die Funktion χ^2 ausgedrückt hinsichtlich der neuen Variablen z_i sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} \chi^2[z] &= \chi_0^2 + z^T BHB^T z = \chi_0^2 + z^T \lambda z \\ &= \chi_0^2 + z_1^2 \lambda_1 + z_2^2 \lambda_2 + \dots + z_n^2 \lambda_n. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Für die Fehler der Variablen z_i ergibt sich

$$\delta z_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}. \quad (\text{C.10})$$

Dies entspricht der Variation von ± 1 für χ^2

$$\chi^2[0, 0, \dots, z_i = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}, 0, \dots, 0] = \chi_0^2 + 1. \quad (\text{C.11})$$

Verschiebt man zusätzlich alle z_i , so folgt

$$\chi^2[\pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, z_i = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}] = \chi_0^2 + n. \quad (\text{C.12})$$

Dies entspricht der maximal erlaubten Variation.

Bestimmung des Fehlers einer beliebigen Funktion F

Die theoretischen Größen die man bestimmen will, sind Funktionen der freien Parameter x_i . Hierzu betrachte man folgende Funktion

$$F = F[x_1, x_2, \dots, x_N], \quad (\text{C.13})$$

die nun bestimmt werden soll. Die Funktion am Minimum lautet

$$F_0 = F[x_1^{\min}, x_2^{\min}, \dots, x_N^{\min}]. \quad (\text{C.14})$$

Die Schwierigkeit ist nun den Fehler dieser Funktion δF zu ermitteln, da nur die Fehler der Variablen z_i bekannt sind. Dazu muss zunächst die Funktion hinsichtlich der Variablen z_i ausgedrückt werden $F = F[z]$, worauf sich anschließend ihr Fehler nach

$$\delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial z_1} \delta z_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z_2} \delta z_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial z_n} \delta z_n\right)^2} \quad (\text{C.15})$$

ermitteln lässt. Anstatt dies explizit zu berechnen, fällt auf, dass

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial z_1}, \quad (\text{C.16})$$

wobei die Ableitungen $\frac{\partial x_1}{\partial z_1}, \frac{\partial x_2}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial z_1}$ die erste Spalte der Matrix B^T darstellen. An dieser Stelle ist es sinnvoll die folgende Matrix D

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{x=x^{\min}} \quad (\text{C.17})$$

sowie das Matrixprodukt

$$D \cdot B^T \cdot \lambda^{-1/2} \quad (\text{C.18})$$

einzuführen. Man betrachte dann den Vektor α

$$\alpha = \begin{pmatrix} \left(D \cdot B^T \cdot \lambda^{-1/2}\right)_{11} \\ \vdots \\ \left(D \cdot B^T \cdot \lambda^{-1/2}\right)_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.19})$$

dessen Komponenten den Diagonalelementen von (C.18) entsprechen. Damit ergibt sich für den Fehler der Funktion F

$$\delta F = \sqrt{\alpha^T \cdot \alpha}. \quad (\text{C.20})$$

Betrachtet man nun eine andere Funktion G , so verläuft alles analog vorausgesetzt, dass die Matrix D entsprechend berechnet wurde

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{x=x^{\min}}. \quad (\text{C.21})$$

Fehler der ursprünglichen Parameter x_i

Man betrachte den Spezialfall $G = x_1$. Damit ergibt sich für die Matrix D

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (\text{C.22})$$

Man erhält den Fehler des ursprünglichen Parameters nach

$$\delta x_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial z_1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial z_2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 + \dots} \quad (\text{C.23})$$

Dieser kann auch anderweitig bestimmt werden. Dazu betrachte man noch einmal die diagonalisierte Hesse-Matrix

$$BHB^T = \lambda \quad (\text{C.24})$$

und folglich

$$B(B^T\lambda^{-1}B) = 1, \quad (\text{C.25})$$

sodass sich daraus die Inverse der Hesse-Matrix identifizieren lässt

$$H^{-1} = B^T\lambda^{-1}B. \quad (\text{C.26})$$

Man betrachte nun das Element H_{11}^{-1} , welches sich zu

$$H_{11}^{-1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial z_1}\right)^2 \frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{\partial x_1}{\partial z_2}\right)^2 \frac{1}{\lambda_2} + \dots \quad (\text{C.27})$$

ergibt und demzufolge

$$\delta x_1 = \sqrt{H_{11}^{-1}}. \quad (\text{C.28})$$

Der Fehler des ursprünglichen Parameters x_1 ist die Wurzel des ersten Elements der inversen Hesse-Matrix. Allgemein betrachtet bedeutet dies, dass die Wurzel des Diagonalelements der Hesse-Matrix

$$\delta x_i = \sqrt{H_{ii}^{-1}} \quad (\text{C.29})$$

dem Fehler des ursprünglichen Parameters x_i entspricht. Bedingt des erhaltenen Fehlers δx_i könnte man verleitet werden, den Fehler der Funktion F wie folgt zu berechnen

$$\delta F_{neu} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\delta x_n\right)^2}. \quad (\text{C.30})$$

Die Parameter x_i diagonalisieren nicht die Hesse-Matrix und Korrelationen werden nicht eliminiert, demnach ergibt sich

$$\delta F_{neu} \geq \delta F. \quad (\text{C.31})$$

Der Fehler δF_{neu} wird gegenüber dem tatsächlichen Fehler überschätzt. Der Grund liegt darin, dass die Parameter x_i innerhalb des Hypervolumens $x_i \pm \delta x_i$ nicht beliebig variiert werden können, da somit die Korrelation vernachlässigt wird und man einen größeren Wert von χ^2 erreicht, als den oben errechneten Grenzwert $\chi_0^2 + n$.

Anhang D

Die explizite effektive Lagrangedichte

Nach Berechnung der einzelnen Terme erhält man folgende nicht-verschobene effektive Lagrangedichte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)^2 + g_1(\partial^\mu \sigma)(\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta_N f_1^\mu) + \frac{g_1^2}{2}(\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta_N f_1^\mu)^2 \\
& + \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta_N)^2 - g_1(\partial^\mu \eta_N)(\sigma f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu) + \frac{g_1^2}{2}(\sigma f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu)^2 \\
& + \frac{1}{2}(\partial^\mu \vec{a}_0)^2 + g_1(\partial^\mu \vec{a}_0) \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta_N \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi}) \\
& + \frac{g_1^2}{2}(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta_N \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi})^2 \\
& + \frac{1}{2}(\partial^\mu \vec{\pi})^2 - g_1(\partial^\mu \vec{\pi}) \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + \sigma \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0) \\
& + \frac{g_1^2}{2}(\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + \sigma \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0)^2 \\
& - \frac{m_0^2}{2} \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 (\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda_1}{4} (\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)^2 \\
& - \frac{\lambda_2}{8} [\sigma^4 + \eta_N^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + (\vec{\pi}^2)^2 + 2\sigma^2 \eta_N^2 + 2\eta_N^2 \vec{a}_0^2 + 2\sigma^2 \vec{\pi}^2 - 4\vec{a}_0^2 \vec{\pi}^2 \\
& + 6\sigma^2 \vec{a}_0^2 + 6\eta_N^2 \vec{\pi}^2 + 6(\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 + 8\sigma \eta_N \vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}] + \frac{c}{2} (\sigma^2 - \eta_N^2 - \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) + \bar{h}_0 \sigma \\
& - \frac{1}{4} (\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu)^2 - \frac{1}{4} (\partial^\mu f_1^\nu - \partial^\nu f_1^\mu)^2 \\
& - \frac{1}{4} (\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu)^2 - \frac{1}{4} (\partial^\mu \vec{a}_1^\nu - \partial^\nu \vec{a}_1^\mu)^2 \\
& + \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 (\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h_1}{4}(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)(\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}) \\
& + \frac{h_2}{4}[(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)(\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}) + 4\vec{a}_1^\mu \cdot \vec{\pi} f^\mu \eta_N \\
& + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu f_1^\mu \sigma + 4\vec{\pi} \cdot \vec{\rho}^\mu \eta_N \omega^\mu + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{\rho}^\mu \sigma \omega^\mu \\
& + 4f_1^\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) - 4\omega^\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu \times \vec{\pi})] \\
& + \frac{h_3}{4}\{(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)(\omega^{\mu 2} - f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} - \vec{a}_1^{\mu 2}) \\
& + 4(\sigma \vec{a}_0 + \eta_N \vec{\pi})(\omega^\mu \vec{\rho}^\mu - f_1^\mu \vec{a}_1^\mu) + 4(\vec{a}_0 \times \vec{\pi})(\omega^\mu \vec{a}_1^\mu - f_1^\mu \vec{\rho}^\mu) \\
& + 4(\eta_N \vec{a}_0 - \sigma \vec{\pi})(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_1^\mu) - 2[(\vec{a}_0 \times \vec{\rho}^\mu)^2 - (\vec{a}_0 \times \vec{a}_1^\mu)^2 \\
& + (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 - (\vec{\pi} \times \vec{a}_1^\mu)^2]\} + \frac{1}{2}(\partial^\mu G)^2 - \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left(G^4 \ln \left| \frac{G}{\Lambda} \right| - \frac{G^4}{4} \right) \quad (\text{D.1})
\end{aligned}$$

mit der effektiven Potentialdichte

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} = & -\frac{g_1^2}{2}(\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta_N f_1^\mu)^2 - \frac{g_1^2}{2}(\sigma f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu)^2 \\
& -\frac{g_1^2}{2}(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta_N \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi})^2 - \frac{g_1^2}{2}(\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + \sigma \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0)^2 \\
& + \frac{m_0^2}{2} \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 (\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) \\
& + \frac{\lambda_1}{4}(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)^2 + \frac{\lambda_2}{8}[\sigma^4 + \eta_N^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + (\vec{\pi}^2)^2 + 2\sigma^2 \eta_N^2 \\
& + 2\eta_N^2 \vec{a}_0^2 + 2\sigma^2 \vec{\pi}^2 - 4(\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 + 6\sigma^2 \vec{a}_0^2 + 6\eta_N^2 \vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2 \vec{\pi}^2 \\
& + 8\sigma \eta_N \vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}] - \frac{c}{2}(\sigma^2 - \eta_N^2 - \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) - \bar{h}_0 \sigma \\
& - \frac{m_1^2}{2} \left(\frac{G}{G_0} \right)^2 (\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}) \\
& - \frac{h_1}{4}(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)(\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}) \\
& - \frac{h_2}{4}[(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)(\omega^{\mu 2} + f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} + \vec{a}_1^{\mu 2}) + 4\vec{a}_1^\mu \cdot \vec{\pi} f^\mu \eta_N \\
& + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu f_1^\mu \sigma + 4\vec{\pi} \cdot \vec{\rho}^\mu \eta_N \omega^\mu + 4\vec{a}_0 \cdot \vec{\rho}^\mu \sigma \omega^\mu \\
& + 4f_1^\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) - 4\omega^\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu \times \vec{\pi})] \\
& - \frac{h_3}{4}\{(\sigma^2 + \eta_N^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)(\omega^{\mu 2} - f_1^{\mu 2} + \vec{\rho}^{\mu 2} - \vec{a}_1^{\mu 2}) \\
& + 4(\sigma \vec{a}_0 + \eta_N \vec{\pi})(\omega^\mu \vec{\rho}^\mu - f_1^\mu \vec{a}_1^\mu) + 4(\vec{a}_0 \times \vec{\pi})(\omega^\mu \vec{a}_1^\mu - f_1^\mu \vec{\rho}^\mu) \\
& + 4(\eta_N \vec{a}_0 - \sigma \vec{\pi})(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_1^\mu) - 2[(\vec{a}_0 \times \vec{\rho}^\mu)^2 - (\vec{a}_0 \times \vec{a}_1^\mu)^2 \\
& + (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 - (\vec{\pi} \times \vec{a}_1^\mu)^2]\} + \frac{1}{4} \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \left(G^4 \ln \left| \frac{G}{\Lambda} \right| - \frac{G^4}{4} \right), \quad (\text{D.2})
\end{aligned}$$

die wegen $m_0^2 < 0$ spontan gebrochen ist.

Anhang E

Bewegungsgleichungen der Felder

Da sich die vorliegende Arbeit mit Elementarteilchen beschäftigt, sollen an dieser Stelle die relevanten Bewegungsgleichungen kurz diskutiert werden. Mit dem Lagrangeformalismus der klassischen Mechanik erhält man über das Hamilton'sche Prinzip die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes bzw. eines Massenpunktsystems mit N Freiheitsgraden. Das Hamilton'sche Prinzip besagt, dass die vom Massenpunktsystem tatsächlich durchlaufene Bahn derjenigen entspricht, für welche die Variation der Wirkung S verschwindet

$$\delta S = 0. \quad (\text{E.1})$$

Die Wirkung lautet

$$S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (\text{E.2})$$

und ist ein Funktional der generalisierten Koordinaten q_i mit $i = 1, \dots, N$. $L = T - V$ ist dabei die Lagrangefunktion. Dies führt auf die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (\text{E.3})$$

Beim Übergang zur Feldtheorie werden die generalisierten Koordinaten, wobei im Folgenden der einfachste Fall mit $N = 1$ betrachtet wird, durch Felder ersetzt

$$q(t) \rightarrow \phi(X) \quad (\text{E.4})$$

und die generalisierten Geschwindigkeiten durch die Ableitungen der Felder

$$\dot{q}(t) \rightarrow \partial_\mu \phi(X), \quad (\text{E.5})$$

wobei $X = (t, \vec{x})$ der vierer Vektor im Minkowski-Raum ist. In diesem Fall erhält man die Lagrangefunktion durch Integration über die Lagrangedichte

$$L = \int_V d^3x \mathcal{L}(\phi(X), \partial_\mu \phi(X), t). \quad (\text{E.6})$$

Für die Wirkung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} S[\phi(X)] &= \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \mathcal{L}(\phi(X), \partial_\mu \phi(X), t) d^3x \\ &= \int_{V_4} \mathcal{L} d^4X \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Analog zur klassischen Mechanik erhält man die Bewegungsgleichungen für Felder in der klassischen Feldtheorie über das Hamilton'sche Prinzip. Dazu werden die Felder variiert

$$\phi(X) \rightarrow \phi(X) + \delta\phi(X), \quad (\text{E.8})$$

$$\partial_\mu \phi(X) \rightarrow \partial_\mu \phi(X) + \delta(\partial_\mu \phi(X)). \quad (\text{E.9})$$

Dabei sind $\phi(t_1, \vec{x})$ sowie $\phi(t_2, \vec{x})$ konstant, woraus folgt, dass die Variation bei t_1 und t_2 verschwindet

$$\delta\phi(t_1, \vec{x}) = \delta\phi(t_2, \vec{x}) = 0. \quad (\text{E.10})$$

Für die Variation der Wirkung ergibt sich mit

$$\delta(\partial_\mu \phi(X)) = \partial_\mu(\phi(X) + \delta\phi(X)) - \partial_\mu \phi(X) = \partial_\mu(\delta\phi(X)) \quad (\text{E.11})$$

sowie der Annahme $|\delta\phi| \ll |\phi|$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \int_{V_4} d^4X \mathcal{L}((\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)) \\ &= \int_{V_4} d^4X \left(\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) \\ &= \int_{V_4} d^4X \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Nach partieller Integration des zweiten Termes und Berücksichtigung der Zwangsbedingung (E.10), wodurch der Oberflächenterm keinen Beitrag leistet und somit weggelassen wird, folgt

$$0 = \delta S = \int_{V_4} d^4X \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi. \quad (\text{E.13})$$

Da die Variation des Feldes $\delta\phi$ beliebig ist, folgen daraus schließlich die Euler-Lagrange Gleichungen für Felder

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(X)} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(X))}. \quad (\text{E.14})$$

Diese liefern bei Kenntnis der Lagrangedichte des Systems die entsprechenden Bewegungsgleichungen der klassischen Felder.

E.1 Klein-Gordon Gleichung

Freie massive ($m \neq 0$), neutrale, d.h. ohne sämtliche Ladung, skalare Felder, also bosonische Felder mit Spin 0, werden durch die Klein-Gordon Gleichung

beschrieben. Man erhält sie aus dem relativistischen¹ Energiesatz

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2. \quad (\text{E.15})$$

Nach der Substitution des klassischen Impulses durch den Impulsoperator

$$p_\mu \rightarrow i\partial_\mu \quad (\text{E.16})$$

ergibt sich die Klein-Gordon Gleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi(X) = (\square + m^2) \varphi(X) = 0. \quad (\text{E.17})$$

Setzt man nun die folgende Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{K.G.} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2)$$

in die Euler-Lagrange Gleichungen (E.14) ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi \quad (\text{E.18})$$

sowie

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi \quad (\text{E.19})$$

und dies führt schließlich auf die Klein-Gordon Gleichung (E.17).

E.2 Dirac Gleichung

Die Konstituenten der Mesonen sind Quarks und Antiquarks. Diese sind Spin $\frac{1}{2}$ Fermionen und werden damit mit der Dirac Gleichung beschrieben. Die Lagrangedichte, die auf die Dirac Gleichung für freie, massive Spin $\frac{1}{2}$ Felder führt, lautet

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi. \quad (\text{E.20})$$

Dabei sind

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.21})$$

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ -\tau_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.22})$$

die 4×4 Dirac Matrizen und M die Massenmatrix. Man erhält nun die Dirac Gleichung, indem die Euler-Lagrange Gleichungen für Felder (E.14) auf das adjungierte Feld $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$ in der Lagrangedichte (E.20) angewendet werden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi, \quad (\text{E.23})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \quad (\text{E.24})$$

$$\Rightarrow (i\gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi = 0. \quad (\text{E.25})$$

Analog ergibt sich die adjungierte Dirac-Gleichung

$$\bar{\psi} (i\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}^\mu + M) = 0. \quad (\text{E.26})$$

¹Die Schrödinger Gleichung ist die nicht-relativistische Approximation der Klein-Gordon Gleichung.

E.3 Proca Gleichung

Massive ($m \neq 0$) Spin 1 Felder, wie z.B. die Rho-Mesonen, werden mit der Proca Gleichung beschrieben. Die Lagrangedichte dazu lautet

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}\rho_{\mu\nu}\rho^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M_\rho^2\rho_\mu\rho^\mu, \quad (\text{E.27})$$

mit $\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu$. Wie bereits zuvor wird auch (E.27) in (E.14) eingesetzt, wodurch man die Proca Gleichung erhält

$$(\square + M_\rho^2)\rho^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu\rho^\mu) = 0. \quad (\text{E.28})$$

Multipliziert man (E.28) mit ∂_ν , so erhält man die Divergenz

$$(\square + M_\rho^2)\partial_\nu\rho^\nu - \partial_\nu\partial^\nu(\partial_\mu\rho^\mu) = 0. \quad (\text{E.29})$$

Daraus folgt

$$M_\rho^2\partial_\nu\rho^\nu = 0 \quad (\text{E.30})$$

und damit reduziert sich die Proca Gleichung auf vier Klein-Gordon Gleichungen

$$(\square + M_\rho^2)\rho^\nu = 0. \quad (\text{E.31})$$

Literaturverzeichnis

- [1] T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, Spektrum Verlag, Heidelberg-Berlin (2003)
- [2] L. H. Ryder: *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1996)
- [3] S. Weinberg, arXiv: hep-ph/0401010v1 (2004)
- [4] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 235 (1918)
- [5] C. Amsler, F. E. Close, Phys. Rev. D 53, 295 (1996)
- [6] R. L. Jaffe, Phys. Rep. 409, 1 (2005)
- [7] Y. Chen *et al.* Phys. Rev. D 73, 014516 (2006)
- [8] C. Amsler et al. (Particle Data Group), Phys. Lett. B 667, 1 (2008) and 2009 partial update for the 2010 edition
- [9] W. Pauli, Phys. Rev. 58, 716 (1940)
- [10] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 44, 189 (1972)
- [11] D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973)
- [12] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30, 1346 (1973)
- [13] J. Schechter, arXiv: hep-ph/0112205v1 (2001)
- [14] M. Gell-Mann, M. Levi, Nuovo Cim. 16, 705 (1960)
- [15] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. 42, 1195 (1979)
- [16] V. Koch, arXiv: nucl-th/9706075v2 (1997)
- [17] J. Bernstein, Rev. Mod. Phys. 46, 7 (1974)
- [18] W. Greiner: *Relativistische Quantenmechanik*, Verlag Harri Deutsch (1987)
- [19] Anthony W. Thomas, Wolfram Weise: *"The Structure of the Nucleon"*, WILEY-VCH (2001)
- [20] F. Giacosa: *Glueball phenomenology within a nonlocal approach*, Universität Tübingen (2005)
- [21] F. Giacosa and G. Pagliara, arXiv: 1005.4817v1 [hep-ph] (2010)

- [22] H. Gomm, P. Jain, R. Johnson and J. Schechter, *Phys. Rev. D* 33, 801 (1986)
- [23] S. Strüber and D. H. Rischke, *Phys. Rev. D* 77, 085004 (2008)
- [24] D. Parganlija, F. Giacosa and D. H. Rischke, arXiv: 1003.4934v1 [hep-ph] (2010)
- [25] G. 't Hooft, *Phys. Rept.* 142, 357 (1986)
- [26] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, *Phys. Rev. Lett.* 42, 297 (1979)
- [27] E. I. Lashin, *Int. J. Mod. Phys. A* 21, 3699 (2006)
- [28] A. A. Migdal and M. A. Shifman, *Phys. Lett. B* 114, 445 (1982)
- [29] S. Gasiorowicz and D. A. Geffen, *Rev. Mod. Phys.* 41, 531 (1969)
- [30] R. D. Pisarski, arXiv: hep-ph/9503330v1 (1995)
- [31] F. Giacosa, G. Pagliara, *Phys. Rev. C* 76, 065204 (2007)
- [32] F. Giacosa, Th. Gutsche, E. V. Lyubovitskij, A. Feassler, *Phys. Rev. D* 72, 094006 (2005)
- [33] A. Heinz, S. Strüber, F. Giacosa, D. H. Rischke, *Phys. Rev. D* 79, 037502 (2009)
- [34] G. E. Brown, M. Rho, *Phys. Rev. Lett.* 66, 2720 (1991)
- [35] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* 122, 345 (1961)
Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* 124, 246 (1961)
- [36] T. Hatsuda and T. Kunihiro, arXiv: hep-ph/9401310v1 (1994)
- [37] F. Halzen, A. D. Martin: *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley and Sons, Inc. (1984)
- [38] W. Greiner, J. Reinhardt: *Feldquantisierung*, Verlag Harri Deutsch (1993)
- [39] M. Urban, M. Buballa, J. Wambach, *Nucl. Phys. A* 697, 338 (2002)
- [40] S. Gallas, F. Giacosa, D. H. Rischke, arXiv: 0907.5084v1 [hep-ph] (2009)
- [41] D. H. Rischke, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 52, 197 (2004)