

Darstellungsabhängigkeit der  $O(2)$   $\sigma$ -Modelle  
bei endlichen Temperaturen

Elina Seel

Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main  
Institut für Theoretische Physik  
.1.2009



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Quantenchromodynamik . . . . .	1
1.2 Das Phasendiagramm der QCD . . . . .	2
1.3 Die Lagrangedichte der QCD . . . . .	4
1.4 Chirale Symmetrien der QCD-Lagrangedichte . . . . .	5
1.5 Chirale Transformationen der Mesonen . . . . .	7
1.6 Pionzerfall und PCAC . . . . .	9
1.7 Goldberger-Treiman Relation . . . . .	9
1.8 Spontane Symmetriebrechung . . . . .	10
1.8.1 Goldstone-Theorem . . . . .	11
1.8.2 Higgs-Mechanismus . . . . .	13
1.9 Endliche Temperaturen . . . . .	15
1.10 Effektive Wirkung . . . . .	18
1.11 CJT-Formalismus . . . . .	20
<b>2 Polardarstellungen des <math>O(2)</math> linearen <math>\sigma</math>-Modells</b>	<b>23</b>
2.1 1. Polardarstellung . . . . .	24
2.1.1 Die Lagrangedichte . . . . .	24
2.1.2 Das effektive Potential . . . . .	26
2.1.3 Die Gap-Gleichungen . . . . .	27
2.1.4 Regularisierung . . . . .	31
2.1.5 Berücksichtigung der Jacobi-Determinante . . . . .	33
2.1.6 Resultate . . . . .	39
2.1.7 Zusammenfassung . . . . .	49
2.2 2. Polardarstellung . . . . .	51
2.2.1 Motivation . . . . .	51
2.2.2 Die Lagrangedichte . . . . .	51
2.2.3 Das effektive Potential . . . . .	53
2.2.4 Die Gap-Gleichungen . . . . .	53
2.2.5 Regularisierung . . . . .	55
2.2.6 Resultate . . . . .	59
2.2.7 Zusammenfassung . . . . .	66

<b>3</b>	<b>Das <math>O(N)</math> nichtlineare <math>\sigma</math>-Modell</b>	<b>67</b>
3.1	Kartesische Darstellung . . . . .	68
3.1.1	Konstruktion der Lagrangedichte . . . . .	69
3.1.2	Das effektive Potential und die Gap-Gleichungen . . . . .	71
3.1.3	Regularisierung . . . . .	76
3.1.4	Resultate . . . . .	77
3.1.5	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	92
3.2	Polardarstellungen des $O(2)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modells . . . . .	94
3.2.1	1. Polardarstellung . . . . .	94
3.2.2	2. Polardarstellung . . . . .	101
3.2.3	Zusammenfassung . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Anhang</b>	<b>109</b>
4.1	Analytische Berechnung der Summenintegrale . . . . .	109
	Abbildungs- und Literaturverzeichnis . . . . .	117

# Vorwort

Nach dem aktuellen Wissensstand existieren vier fundamentale Naturkräfte: die Gravitation, die starke, die schwache sowie die elektromagnetische Wechselwirkung.

Alle grundlegenden Naturkräfte können auf elementarem Niveau mit Hilfe lokalsymmetrischer Quantenfeldtheorien beschrieben werden. Diese beinhalten fermionische Materiefelder, welche über bosonische Eichfeldern miteinander wechselwirken. Die Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung, ist die Quanten-Elektrodynamik (QED). Hier wechselwirkt ein geladenes Dirak-Feld  $\Psi(x)$  mit einem quantisierten elektromagnetischen Feld  $A_\mu(x)$ . Die Elektroschwache Vereinheitlichung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung findet ihre mathematische Darstellung im Weinberg-Salam-Modell. Gegenstand dieser Arbeit ist die Quantenchromodynamik (QCD), welche die Eichtheorie der stark wechselwirkenden hadronischen Materie darstellt.

Es ist eine bekannte Tatsache, dass Quanteneffekte im Vakuum die chirale  $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ -Symmetrie der QCD Lagrangedichte spontan zu  $SU(N_f)_V$  brechen. Gitter-Simulationen deuten allerdings darauf hin, dass die hadronische Materie bei einer Temperatur von etwa 150 MeV in das Quark-Gluon-Plasma übergeht, und die chirale Symmetrie restauriert wird [1]. Die dazu notwendigen Energien können in ultrarelativistischen Schwerionen Kollisionen bei CERN-SPS, BNL-RHIC und CERN-LHC erzeugt werden [2].

Bei endlichen Temperaturen, wie sie auch am Phasenübergang herrschen, bricht die perturbative Annäherung an die QCD wegen der starken Kopplung zusammen. Aus diesem Grund bedient man sich niederenergetischer effektiver Theorien, wie des  $O(N)$  linearen und nichtlinearen  $\sigma$ -Modells, um das Verhalten der stark wechselwirkenden Materie zu untersuchen [3].

Für  $N = 4$  ist die  $O(4)$ -Symmetrie des  $O(N)$  Modells lokal isomorph zur chiralen  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie der QCD Lagrangedichte mit zwei masselosen Quarks, *up* und *down*, in Abwesenheit baryonischer Freiheitsgrade,  $O(4) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R$ . Bei niedrigen Temperaturen ist die  $O(4)$ -Symmetrie spontan zu  $O(3)$  gebrochen, die wiederum isomorph zu der residualen chiralen  $SU(2)_V$ -Symmetrie des QCD Vakuums ist,  $O(3) \sim SU(2)_V$ . Als niederenergetische effektive Theorie der zwei-Flavor QCD dient das  $O(4)$  Modell zur Beschreibung der Dynamik eines massiven  $\sigma$ -Feldes, mit einem endlichen Vakuumerwartungswert, und drei Pionen, welche die leichtesten Mesonen im hadronischen Teilchenspektrum darstellen und im chiralen Limes masselos sind [4, 5]. Aufgrund derselben Symmetriebrechungsmuster ermöglicht das  $O(4)$  Modell weiterhin die Bestimmung der kritischen Temperatur und der Ordnung des chiralen Phasenübergangs. Gitter-Simulationen sagen für  $N_f = 2$  einen Phasenübergang zweiter Ordnung und für  $N_f \geq 3$  einen Phasenübergang dritter Ordnung voraus [6, 7].

Bei niedrigen Temperaturen wird die Thermodynamik der hadronischen Materie hauptsächlich durch die Fluktuationen leichter pionischer Zustände dominiert, da die Energie zu gering ist, um die massiven  $\sigma$ -Felder anzuregen. Aus diesem Grund wird beim nichtlinearen  $\sigma$ -Modell das  $\sigma$ -Feld als dynamischer Freiheitsgrad eliminiert, indem seine Masse mittels einer sehr großen Kopplungskonstante per Konstruktion gegen unendlich geschickt wird [8, 9].

Da bei endlichen Temperaturen die naive perturbative Entwicklung in der Kopplung zusammenbricht, bedient man sich in der Literatur unterschiedlicher Resummationsmethoden, um bei der Studie des  $O(N)$  Modells zuverlässige Resultate zu erhalten.

In den Arbeiten [10]-[19] wurde der CJT-Formalismus [20] angewandt, um die verschiedenen Eigenschaften des  $O(N)$  linearen  $\sigma$ -Modells bei endlichen Temperaturen zu untersuchen, siehe außerdem Petropoulos (2004) als weiteres Review [21]. Dabei wurden zum Beispiel die temperaturabhängigen Mesonenmassen und das Kondensat, sowie das effektive Potential als Funktion der skalaren Felder in Hartree-Approximation und im Large-N Limes berechnet. Bei diesen Näherungsmethoden besitzen die Gap-Gleichungen keine explizite Impulsabhängigkeit, daher können nur die Massen, jedoch keine Zerfallsbreiten für die Mesonen vorhergesagt werden. Im chiralen Limes erweist sich die Hartree-Näherung an zwei Stellen als nicht ausreichend, um die thermodynamischen Größen bei endlichen Temperaturen erwartungsgemäß zu beschreiben, siehe [15]. Erstens wird das Goldstone-Theorem verletzt, da die Pionen in der asymmetrischen Phase trotz spontan gebrochener Symmetrie nicht masselos sind. Weiterhin erhält man einen Phasenübergang erster statt zweiter Ordnung. Diese Probleme können beseitigt werden, wenn sogenannte Sonnenuntergangsdiagramme in die Auswertung einbezogen werden [22, 23].

Es gibt auch zahlreiche Studien des  $O(N)$  Modells in  $1/N$  Entwicklung. Im Vakuum wurde die führende Ordnung (LO) [24] und die nächst führende Ordnung (NLO) [25] untersucht. Bei endlichen Temperaturen erfolgte die Berechnung des LO Beitrages [26] und der NLO Korrektur [27, 28]. Ausführliche Diskussionen des  $O(N)$  Modells bei endlichen Temperaturen in  $1/N$  Entwicklung bis zur NLO einschließlich Regularisierung sind ausserdem in [29, 30] präsentiert.

In [31] erfolgte die Berechnung der Spektralfunktion, des effektiven Potentials und der Dileptonemissionsraten für das  $O(N)$  Modell bei endlichen Temperaturen mittels optimierter Störungstheorie.

Das  $O(N)$  Modell dient als Ausgangsbasis und Prototyp für viele interessante physikalische Systeme, wie zum Beispiel dem  $O(N)$  Heisenberg Magnet [32, 33]. Neben der üblichen Darstellung der internen Freiheitsgrade als ein  $N$ -komponentiges skalares Feld,  $\Phi = (\sigma, \vec{\pi})$ , werden in der Literatur auch zahlreiche alternative Repräsentationen des Feldes diskutiert, welche für die Beschreibung des jeweiligen Systems am besten geeignet sind [34, 35, 28].

In dieser Arbeit soll für  $N = 2$  die Abhängigkeit des  $O(N)$  Modells von der Darstellung der beiden internen Freiheitsgrade,  $\sigma$  und  $\pi$ , untersucht werden. Zu diesem Zweck werden neben der üblichen kartesischen Repräsentation,  $\Phi = (\sigma, \pi)$ , zwei Polardarstellungen konstruiert, bei denen das Pion mit der Winkelvariable identifiziert wird, während sein massiver skalarer chiraler Partner der Radialvariable entspricht. Anschließend werden das  $O(2)$  lineare und nichtlineare  $\sigma$ -Modell für alle drei Darstellungen des Feldes  $\Phi$  bei endlichen Temperaturen ausgewertet und die Resultate verschiedener Repräsentationen miteinander verglichen.

Eine besondere Bedeutung kommt der Untersuchung unterschiedlicher Phänomene beim Phasenübergang der hadronischen Materie in das Quark-Gluon-Plasma zu. Dies beinhaltet die Berechnung der temperaturabhängigen Mesonenmassen, sowie die Bestimmung der Ordnung des chiralen Phasenübergangs und der kritischen Temperatur. Der temperaturabhängige Vakuumerwartungswert des  $\sigma$ -Felds dient dabei als chiraler Ordnungsparameter, der beim Übergang der hadronischen Materie in das Quark-Gluon-Plasma verschwindet. Zur Berechnung der physikalischen Größen werden die  $\sigma$ -Modelle im Rahmen eines thermodynamisch konsistenten Vielteilchenresummationsschemas, dem CJT-Formalismus, in Doppelblasen-Näherung im chiralen Limes und bei explizit gebrochener Symmetrie ausgewertet. Dabei erfolgt das Aufstellen des effektiven Potentials, aus dem sich die Kondensatgleichung und die Schwinger-Dyson-Gleichungen für die vollen Propagatoren herleiten lassen, deren numerische Auswertung die Berechnung der Temperaturabhängigkeit des Kondensats und der Mesonenmassen erlaubt. Die Regularisierung divergenter Vakuumterme wird mit Hilfe des Counterterm- und des Cutoff-Verfahrens durchgeführt.

Auf diese Weise soll untersucht werden, welchen Einfluss eine Redefinition der internen Freiheitsgrade,  $\sigma$  und  $\pi$ , auf den physikalischen Inhalt und die Resultate der  $O(2)$   $\sigma$ -Modelle hat. Ausserdem kann die Zuverlässigkeit der chiralen Störungstheorie bei endlichen Temperaturen überprüft werden, bei der das Pion mit der Winkelvariable identifiziert wird, ohne die Jacobi-Determinante, die beim Übergang zu polaren Darstellungen entsteht, in die Auswertung einzubeziehen.





# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Quantenchromodynamik

Die Anfänge der Quantenchromodynamik als Theorie der stark wechselwirkenden hadronischen Materie aus Baryonen und Mesonen liegen bereits in den 1960er Jahren. Zusammen mit der Elektroschwachen Theorie stellt sie heutzutage einen fundamentalen Bestandteil des Standardmodells der elementaren Teilchenphysik dar. Die QCD wird beschrieben durch eine lokale nichtabelsche  $SU(3)_c$ -Eichsymmetrie mit bosonischen Eichfeldern, den Gluonen, und fermionischen Materiefeldern, den Quarks, welche die Konstituenten der stark wechselwirkenden Hadronen bilden. Um die fundamentale Gültigkeit des Paulschen Spin-Statistik-Theorems auch für die hadronische Materie gewährleisten zu können, wurde die Quarkflavor-Struktur der Hadronen um einen zusätzlichen inneren Freiheitsgrad, die Farbe (chromos), erweitert, siehe [36]. Aus zahlreichen experimentellen und theoretischen Untersuchungen in den 70er Jahren war es anschließend möglich, die Richtigkeit dieses Quarkmodells nachzuweisen und die Anzahl der Farbladungen zu bestimmen.

So folgt aus dem Experiment für das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte der Elektron-Positron-Vernichtung

$$R = \frac{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)} = \frac{\sum_f \sigma(e^-e^+ \rightarrow q_f \bar{q}_f)}{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)} = N_c \sum_f z_f^2 = N_c \frac{11}{9},$$

wo  $z_f \cdot e$  der Quarkladung entspricht, dass es insgesamt drei Farbfreiheitsgrade geben muss, also  $N_c = 3$ .

Diese Annahme wird durch den Zerfall des  $\tau$ -Leptons bestätigt, bei dem im wesentlichen drei Zerfallsmöglichkeiten existieren:

$$\begin{aligned}\tau^- &\rightarrow \nu_\tau + \bar{\nu}_e + e^- \\ \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu + \mu^- \\ \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + \bar{u} + d.\end{aligned}$$

Aufgrund der Universalität der schwachen Ladung koppelt das  $W^-$ -Boson mit derselben Stärke an alle Quarks und Leptonen. Daher trägt jeder Zerfallskanal, abgesehen von einer Phasenraumkorrektur bedingt durch unterschiedliche

Massen der Quarks, gleich stark zur totalen Zerfallsbreite bei. Unter Berücksichtigung der drei möglichen Farbkombinationen für das  $\bar{u}d$ - Paar,  $(r\bar{r}, b\bar{b}, g\bar{g})$ , ergibt sich folgende Beziehung für die Breiten im Zerfallskanal:  $\Gamma_{\tau e} \approx \Gamma_{\tau\mu}$ ,  $\Gamma_{\tau du} \approx 3\Gamma_{\tau\mu}$ , was in Übereinstimmung mit dem Experiment auf das richtige Verzweungsverhältnis von 1/5 führt.

Eine Besonderheit der QCD besteht darin, dass neben den Materiefeldern auch die Eichfelder Farbladungen tragen. Als Konsequenz davon können die Gluonen sowohl untereinander als auch mit den Quarks in Wechselwirkung treten.

Die sechs Quarkflavours werden ihren Massen nach in zwei Gruppen angeordnet:

$$\begin{pmatrix} m_u = 0.005 \text{ GeV} \\ m_d = 0.009 \text{ GeV} \\ m_s = 0.175 \text{ GeV} \end{pmatrix} \ll \begin{pmatrix} m_c = 1.35 \text{ GeV} \\ m_b = 5.3 \text{ GeV} \\ m_t = 175 \text{ GeV} \end{pmatrix}.$$

Bei endlichen Temperaturen nahe dem Phasenübergang der hadronischen Materie zum Quark-Gluon-Plasma, der bei etwa 170 MeV liegt, wird die Thermodynamik von den drei leichtesten Quarks, *up*, *down* und *strange*, dominiert, während die übrigen drei Quarks zu schwer sind und daher eine untergeordnete Rolle innerhalb dieser Energieskala spielen.

Ein nach wie vor nicht vollständig geklärtes Gebiet der QCD ist das Confinement. Dieser Mechanismus beschreibt das Phänomen, dass hadronische Materie in der Natur stets als farbneutrales Singlett auftritt. Bei hohen Temperaturen und Dichten erwartet man den Übergang der Hadronen in eine Phase, in der die Quarks aus dem hadronischen Verband befreit sind. Dieser Vorgang wird als Deconfinement bezeichnet. Eine wichtige Aufgabe besteht darin, den Zusammenhang zwischen dem Deconfinement für leichte Quarks und der Restauration chiraler Symmetrie zu erforschen.

Die QCD ist eine asymptotisch freie Theorie, da effektive Kopplungen zwischen Quarks und Gluonen mit steigenden Energien bzw. geringeren Distanzen abnehmen, siehe z.B. [37], [38], [39] und [40]. Dies hat zur Folge, dass bei hohen Energien, oberhalb von 1 GeV, die QCD einer Theorie von schwach wechselwirkenden Quarks und Gluonen entspricht. Für ausreichend hohe Temperaturen kann die Physik mit Hilfe von perturbativen Rechnungsmethoden beschrieben werden, wobei eine Entwicklung nach der Kopplungskonstante vorgenommen wird. Beim Übergang zu niedrigen Temperaturen steigt dagegen die Kopplungskonstante auf zunehmend hohe Werte, und die Störungstheorie bricht zusammen. Laut den Gitter-Simulationen liegt die kritische Temperatur am Phasenübergang bei etwa  $T_c \approx 170$  MeV. Da innerhalb dieser Energieskala eine starke Wechselwirkung zwischen den Hadronen besteht, bedarf es alternativer Methoden zur Störungsrechnung, um das Verhalten der hadronischen Materie in der Nähe des Phasenübergangs zu beschreiben.

## 1.2 Das Phasendiagramm der QCD

Da die QCD eine asymptotisch freie Theorie ist, sollten bei sehr hohen Temperaturen und Dichten die Wechselwirkungen, welche für den Zusammenhalt der Quarks und Gluonen innerhalb der Hadronen verantwortlich sind, ausreichend klein sein, um die einzelnen Konstituenten aus dem Hadronenverband

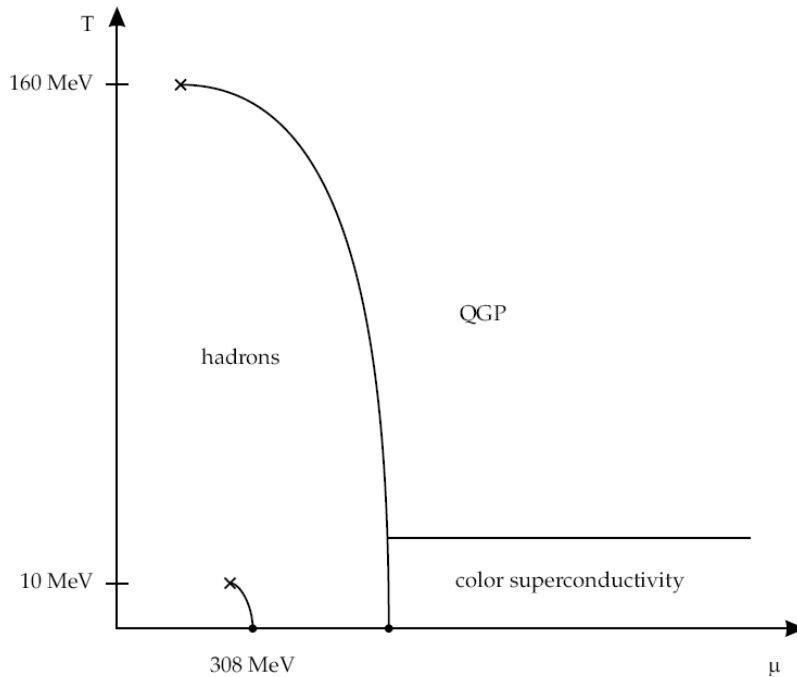


Abbildung 1.1: kenden Materie.

zu entlassen. Diese Phase, in der Quarks und Gluonen im unverbundenen Zustand existieren, wird als Quark-Gluon-Plasma (QGP) bezeichnet. Laut Gitter-Simulationen sind zur Erzeugung des QGP Temperaturen von über 150 MeV und verschwindende Baryondichten erforderlich, siehe z.B. [41]. Der Phasenübergang der hadronischen Materie in das QGP kann in Abhängigkeit von Quarkmassen und Quarkflavouranzahl sowohl erster oder zweiter Ordnung als auch ein Crossover-Phasentübergang sein. Das Verhalten des QGP ist von entscheidender kosmologischer Bedeutung bei Erforschung der Entwicklung unseres Universums. Wenige Mikrosekunden nach dem Urknall herrschten sehr hohe Temperaturen und verschwindend geringe Baryondichten. Daher lag die stark wechselwirkende Materie im primordialen Stadium des frühen Universums sicherlich in Form von QGP vor.

Im Gegensatz zu den Verhältnissen im frühen Universum herrschen im Inneren von kompakten stellaren Objekten, wie den Neutronensternen, extrem hohe Baryondichten bei geringen Temperaturen. Man vermutet, dass dort die hadronische Materie in einer farbsupraleitenden Phase vorliegt.

Um das Verhalten der hadronischen Materie unter derart extremen Bedingungen zu studieren, bemüht man sich heutzutage darum, das QGP unter kontrollierten Bedingungen an den Großbeschleunigern in ultrarelativistischen Schwerionenkollisionen zu erzeugen. Die dabei erzeugten Temperaturen und Dichten variieren mit der Schwerpunktsenergie der Kollision, wobei ein Interesse daran besteht, möglichst große Skalenbereiche abzudecken, um anschließend bis zu den Bedingungen des primordialen Universums und der kompakten stellaren Objekten extrapolieren zu können. Auf diese Weise erhält man das

QCD-Phasendiagramm [42], in dem die drei unterschiedlichen Phasen der stark wechselwirkenden Materie, nämlich die hadronische Phase, die Quark-Gluon-Plasma-Phase sowie die farbsupraleitende Phase in Abhängigkeit von der Temperatur,  $T$ , und dem quark-chemischen Potential,  $\mu$ , dargestellt sind, Ab. 1.1. Der Grundzustand der (unendlich ausgedehnten) Kernmaterie befindet sich bei  $(T, \mu)_0 = (0, 308)$  MeV. Von diesem Punkt geht eine Linie aus, die den Phasenübergang erster Ordnung zwischen der gasförmigen Phase (linke Seite) und der flüssigen Phase (rechte Seite) der Kernmaterie markiert und bis zum kritischen Endpunkt bei etwa  $T \approx 10$  MeV verläuft. An dieser Stelle liegt ein Phasenübergang zweiter Ordnung vor. Oberhalb der kritischen Temperatur ist es nicht mehr möglich, zwischen der flüssigen und gasförmigen Phase zu unterscheiden. Für Temperaturen unterhalb 160 MeV und einem quark-chemischen Potential kleiner als 350 MeV befindet sich die Kernmaterie in der hadronischen Phase. Analog zum Übergang zwischen gasförmiger und flüssiger Phase wird die hadronische Phase durch eine Linie, die einen Phasenübergang erster Ordnung markiert, von der Plasmaphase getrennt. Der Verlauf dieser Linie endet am kritischen Punkt bei etwa  $(T, \mu)_c = (160, 240)$  MeV, an dem der Phasenübergang zweiter Ordnung ist. Für kleinere chemische Potentiale findet in diesem Temperaturbereich ein Crossover-Phasenübergang zwischen der hadronischen Phase und dem Quark-Gluon-Plasma statt, daher kann in diesem Fall nicht mehr zwischen den beiden Phasen unterschieden werden. Die genaue Position des kritischen Endpunktes hängt allerdings von den Quarkmassen ab. Bei großem chemischen Potential und kleinen Temperaturen befindet sich die farbsupraleitende Phase der starkwechselwirkenden Materie. Abhängig von den Symmetrieeigenschaften des Ordnungsparameters der Kondensation von Cooper-Paaren können in diesem Bereich zahlreiche unterschiedliche farbsupraleitende Phasen existieren.

Zur Beschreibung eines Phasendiagramms bedient man sich eines geeigneten Ordnungsparameters, der beim Übergang von einer in die andere Phase verschwindet. Generell unterscheidet man zwischen drei verschiedenen Phasenübergängen: beim Phasenübergang erster Ordnung ist der Verlauf des Ordnungsparameters unstetig, während beim Phasenübergang zweiter Ordnung die Ableitung des Ordnungsparameters unstetig verläuft. Im Gegensatz dazu liegt beim Crossover-Phasenübergang ein kontinuierlicher Verlauf vor. Im Limes verschwindender Quarkmassen dienen die chiralen Kondensate  $\langle \bar{u}u \rangle$ ,  $\langle \bar{d}d \rangle$  und  $\langle \bar{s}s \rangle$  als Ordnungsparameter für chirale Symmetriebrechungsmuster.

### 1.3 Die Lagrangedichte der QCD

Die Quantenchromodynamik ist eine nicht abelsche Quantenfeldtheorie mit einer lokalen  $SU_c(3)$ -Symmetrie. Die Materiefelder innerhalb der QCD werden durch sogenannte Quarks beschrieben. Diese besitzen als Fermionen den Spin  $1/2$  und kommen insgesamt in sechs Flavours, *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* und *top*, vor. Um die fundamentale Gültigkeit des Paulischen Spin-Statistik-Theorem auch für die Quarkflavour-Struktur der Hadronen erfüllen zu können, wurde zusätzlich zum Flavour ein weiterer innerer Freiheitsgrad für Quarks, die Farbladung, im Hilbert-Raum der Quarks eingeführt. Jedem Quark-Flavour  $q_f$  kann eine der drei Farben, rot, grün oder blau, zugeordnet werden. Die Quarks stellen damit ein Triplet im Farbraum dar, da jeder Flavour mit einem drei-

komponentigen komplexen Vektor assoziiert ist

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Dabei entspricht jede Komponente einem vierkomponentigen Diracspinor im Diracspinorraum mit folgendem Verhalten unter lokalen Transformationen  $g(x)$

$$q_f \rightarrow q'_f = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \alpha_a(x) T_a\right) q_f = U[g(x)] q_f. \quad (1.2)$$

In diesem Fall sind  $T_a$  die halben Gell-Mann-Matrizen,  $T_a = \lambda_a/2$ , welche die  $N^2 - 1 = 8$  Generatoren von  $SU(3)$  repräsentieren.

Die Konstruktion einer lokal eichinvarianten Lagrangedichte erfordert die Einführung kovarianter Ableitungen mit Hilfe von Eichfeldern  $A_\mu$

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu. \quad (1.3)$$

Die Eichfelder stellen ein matrix-wertiges Vierer-Potential der Gluonen dar

$$A_\mu = g \sum_{a=1}^8 A_\mu^a T_a, \quad (1.4)$$

die sich wie folgt unter einer lokalen Transformation  $g(x)$  verhalten

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U[g(x)] \left( A_\mu - \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^\dagger[g(x)]. \quad (1.5)$$

Die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen ist flavourunabhängig. Zur Beschreibung der Wechselwirkung der Gluonen untereinander werden Gluonen-Feldstärketensoren definiert

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.6)$$

die sich wie

$$G_{\mu\nu}^a T_a \rightarrow (G_{\mu\nu}^a T_a)' = U[g(x)] G_{\mu\nu}^a T_a U^\dagger[g(x)] \quad (1.7)$$

transformieren. Einschließlich des Quark- und des Gluonanteils lautet die eichinvariante QCD Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_f^{N_f} \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

## 1.4 Chirale Symmetrien der QCD-Lagrangedichte

Für die Beschreibung chiraler Symmetrien der QCD bietet es sich an, die Quarks, welche als fermionische Materiefelder Dirac-Spinoren,  $\psi$ , sind, mit Hilfe von rechts- und linkshändigen Chiralitätsprojektionsoperatoren

$$P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}, \quad (1.9)$$

die im Diracspinorraum wirken, in ihren rechts- und linkshändigen Anteil aufzuspalten

$$\begin{aligned}\psi &= (P_R + P_L)\psi = \psi_R + \psi_L, \\ \bar{\psi} &= \bar{\psi}(\bar{P}_R + \bar{P}_L) = \bar{\psi}(P_L + P_R) = \bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Unter Berücksichtigung der Antikommutationsrelation der Gammamatrizen

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (1.11)$$

und der Beziehung  $\gamma^\mu P_{R,L} = P_{L,R} \gamma^\mu$  lautet die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QCD} &= \sum_f^{N_f} i\bar{q}_{f,R} \gamma^\mu D_\mu q_{f,R} + i\bar{q}_{f,L} \gamma^\mu D_\mu q_{f,L} \\ &\quad - \bar{q}_{f,R} m_f q_{f,L} - \bar{q}_{f,L} m_f q_{f,R} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (1.12)$$

Da die *up* und *down* Quarks im Vergleich mit typischen Hadronenmassen relativ geringe Massen besitzen,  $m_u = 0.005$  GeV,  $m_d = 0.009$  GeV  $\ll 1$  GeV, ist es legitim diese beiden leichtesten Quarkflavours als masselos zu approximieren. Im Limes verschwindender Quarkmassen wird die Lagrangedichte der QCD flavourunabhängig, und ist ausgenommen der  $U(1)_A$ -Anomalie invariant unter globalen unitären  $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ -Transformationen der Quarkfelder im Flavourraum

$$\begin{aligned}q_{f,R} &\rightarrow q'_{f,R} = U_R q_{f,R} = \exp\left(-i \sum_{a=1}^{N_f^2} \alpha_R^a T_a\right) q_{f,R}, \\ q_{f,L} &\rightarrow q'_{f,L} = U_L q_{f,L} = \exp\left(-i \sum_{a=1}^{N_f^2} \alpha_L^a T_a\right) q_{f,L}.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Bei nicht verschwindenden, entarteten Quarkmassen hingegen, wird die chirale Symmetrie explizit gebrochen, wobei die  $U_A(N_f)$ -Symmetrie komplett verletzt ist. Sind die Quarkmassen nicht entartet, so wird die chirale Symmetrie der QCD auf die residuale  $U_V(1)$ -Symmetrie reduziert, in der sich die Baryonenzahlerhaltung widerspiegelt.

Entsprechend dem Noether-Theorem [43] führt die Invarianz, beziehungsweise Nichtinvarianz der Lagrangedichte unter chiralen Transformationen zu  $2N_f^2$  erhaltenen, beziehungsweise, nicht erhaltenen Strömen. Analog dazu kann man aus der Erhaltung von Strömen auf die Existenz von Symmetrien der entsprechenden Lagrangedichte schließen. Für die Berechnung von Strömen ist es vorteilhaft, von den rechts- und linkshändigen Strömen,  $R^\mu$  und  $L^\mu$ , zu den vektoriellen

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu \quad (1.14)$$

und axialen

$$A^\mu = R^\mu - L^\mu \quad (1.15)$$

Strömen überzugehen, die mittels Variation nach den lokalen Parametern  $\alpha_{R, L}^a$  aus der Lagrangedichte abgeleitet werden können, siehe [44]:

$$\begin{aligned} V^\mu &= \bar{q}\gamma^\mu q \\ A^\mu &= \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q \\ V_a^\mu &= \bar{q}\gamma^\mu T_a q \\ V_a^\mu &= \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 T_a q, \end{aligned} \quad (1.16)$$

und sich folgendermaßen unter Paritätstransformationen verhalten:

$$\begin{aligned} P &: V^\mu(t, \vec{x}) \rightarrow V^\mu(t, -\vec{x}) \text{ gerade} \\ P &: A^\mu(t, \vec{x}) \rightarrow -A^\mu(t, -\vec{x}) \text{ ungerade.} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Aus den Divergenzen der Ströme

$$\begin{aligned} \partial_\mu V_0^\mu &= 0 \\ \partial_\mu A_0^\mu &= 2i\bar{q}M\gamma_5 q \\ \partial_\mu V_a^\mu &= i\bar{q}[M, T_a]q \\ \partial_\mu A_a^\mu &= -i\bar{q}\{M, T_a\}\gamma_5 q \end{aligned} \quad (1.18)$$

läßt sich entnehmen, dass der vektorielle Singulettstrom  $V_0^\mu$  stets erhalten bleibt, was einer Erhaltung der Baryonenzahl entspricht<sup>1</sup>. Im Falle entarteter Quarkmassen sind alle Vektorströme  $V_a^\mu$  erhalten, da die Massenmatrix proportional zur Einheitsmatrix ist. Dagegen setzt die Erhaltung axialer Vektorströme  $A_a^\mu$  verschwindende Quarkmassen voraus. Der axialvektorielle Singulett-Strom  $A_0^\mu$  und die dazu korrespondierende  $U_A(1)$ -Symmetrie ist allerdings nur unter klassischer Betrachtung der unitären Transformationseigenschaften erhalten. Die Quantisierung der QCD, in Anlehnung an die quantenelektrodynamischen Berechnungen in [45] führt zu folgendem Resultat für die Divergenz des axialen Singulettstroms

$$\partial_\mu A_0^\mu = i\bar{q}M\gamma_5 q + \frac{g^2 N_f}{16\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} G_{\alpha\beta}^a G_{\mu\nu}^a. \quad (1.19)$$

Aus dieser chiralen Anomalie folgt, dass bei verschwindenden Quarkmassen die unitäre  $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ -Symmetrie der QCD Lagrangedichte explizit zu einer  $U(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ -Symmetrie gebrochen ist.

## 1.5 Chirale Transformationen der Mesonen

Um ein besseres Verständnis für chirale Symmetrien zu erhalten, wird in diesem Abschnitt das Verhalten der leichtesten Mesonen unter vektoriellen und axialen Transformationen diskutiert, siehe [46]. Unter Beachtung von Transformationseigenschaften und Quantenzahlen der betreffenden Teilchen lassen sich die mesonischen Zustände zu

$$\begin{aligned} \text{skalarmesonische Singulettzustände:} & \quad \sigma = \bar{\psi}\psi \\ \text{pseudoskalarmesonische Triplettzustände:} & \quad \vec{\pi} = i\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_5\psi \\ \text{vektormesonische Triplettzustände:} & \quad \vec{\rho}_\mu = \bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_\mu\psi \\ \text{axialmesonische Triplettzustände:} & \quad \vec{a}_{1\mu} = \bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_\mu\gamma_5\psi \end{aligned} \quad (1.20)$$

<sup>1</sup> $V_0^\mu/3$  entspricht dem Baryonenstrom.

konstruieren. Die Triplettzustände verhalten sich wie Vektoren unter Rotationen im Isospinraum. Weiterhin erhalten alle Teilchen, die dasselbe Verhalten wie Vektoren unter Lorenztransformationen aufweisen, einen zusätzlichen Lorenzindex.

Zunächst soll das Verhalten der Mesonen unter infinitesimalen, vektoriellen Transformationen,  $\psi \rightarrow \psi(1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha})$ , untersucht werden

$$\begin{aligned} \pi_i : i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi &\rightarrow i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi + \alpha_j \left( \bar{\psi}\tau_i\gamma_5\frac{\tau_j}{2}\psi - \bar{\psi}\frac{\tau_j}{2}\tau_i\gamma_5\psi \right) \\ &= i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi + i\alpha_j\epsilon_{ijk}\bar{\psi}\gamma_5\tau_k\psi, \end{aligned} \quad (1.21)$$

wo die Kommutationsrelation zwischen den Paulimatrizen  $[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k$  berücksichtigt wurde. Zusammenfassend lautet die Transformationsvorschrift für das Pion

$$V : \vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\alpha} \times \vec{\pi}. \quad (1.22)$$

Dies entspricht einer Rotation des Pionvektors im Isospinraum um den Winkel  $\vec{\alpha}$ . Dasselbe Resultat erhält man für das  $\vec{\rho}_\mu$ - sowie das  $\vec{a}_{1\mu}$ -Meson

$$\begin{aligned} V &: \vec{\rho}_\mu \rightarrow \vec{\rho}_\mu + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_\mu, \\ V &: \vec{a}_{1\mu} \rightarrow \vec{a}_{1\mu} + \vec{\alpha} \times \vec{a}_{1\mu}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Folglich können Vektortransformationen mit Isospinrotationen identifiziert werden, während erhaltene Vektorströme den Isospinströmen entsprechen, welche bei starken Wechselwirkungen ebenfalls erhalten sind.

Als nächstes wird das Verhalten der Mesonen unter infinitesimalen, axialvektoriellen Transformationen,  $\psi \rightarrow \psi(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha})$ , betrachtet

$$\begin{aligned} \pi_i : i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi &\rightarrow i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi + \alpha_j \left( \bar{\psi}\tau_i\gamma_5\gamma_5\frac{\tau_j}{2}\psi + \bar{\psi}\gamma_5\frac{\tau_j}{2}\tau_i\gamma_5\psi \right) \\ &= i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi + \alpha_i\bar{\psi}\psi, \end{aligned} \quad (1.24)$$

wobei in diesem Fall die Antikommutation zwischen den Paulimatrizen  $\{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij}$  und die Beziehung  $\gamma_5\gamma_5 = 1$  beachtet wurden. Anschließend Summation über alle Indices liefert folgendes Ergebnis für das Pion

$$A : \vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\alpha}\sigma. \quad (1.25)$$

Analog dazu lautet das Transformationsverhalten für das  $\sigma$ -Meson

$$A : \sigma \rightarrow \sigma - \vec{\alpha}\vec{\pi}. \quad (1.26)$$

Daraus kann entnommen werden, dass das Pion und das  $\sigma$ -Meson unter axialvektoriellen Transformationen ineinander rotiert werden. Ähnlich verhält es sich mit vektormesonischen und axialvektormesonischen Triplettzuständen  $\vec{\rho}_\mu$  und  $\vec{a}_{1\mu}$

$$\begin{aligned} A &: \vec{\rho}_\mu \rightarrow \vec{\rho}_\mu + \vec{\alpha} \times \vec{a}_{1\mu}, \\ A &: \vec{a}_{1\mu} \rightarrow \vec{a}_{1\mu} + \vec{\alpha} \times \vec{\rho}_\mu. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Solche Teilchen, die durch Isospintransformationen ineinander übergehen, werden als chirale Partner bezeichnet, da sie sich nur durch entgegengesetzte Parität unterscheiden.



## 1.6 Pionzerfall und PCAC

Zunächst soll der schwache Zerfall des Pions diskutiert werden. In der einfachen Fermi-Theorie enthält der Hamiltonian der schwachen Wechselwirkung sowohl axiale als auch vektorielle Ströme. Aufgrund der Parität wird der schwache Zerfall des Pions durch das Matrixelement des Axialstroms zwischen dem Vakuum und dem Pion,  $\langle 0 | A_\mu | \pi \rangle$ , dominiert. Dieses Matrixelement muss proportional zum Pionimpuls sein

$$\langle 0 | A_\mu^a(x) | \pi^b(q) \rangle = -i f_\pi q_\mu \delta^{ab} e^{-iqx}, \quad (1.28)$$

wobei die Proportionalitätskonstante  $f_\pi = 92.4$  MeV experimentell ermittelt wird. Dabei sind  $a$  und  $b$  Isospin-Indices, während  $\mu$  ein Lorenzindex ist. Bildet man die Divergenz von Gl.(1.28)

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(x) | \pi^b(q) \rangle = -f_\pi q^2 \delta^{ab} e^{-iqx} = -f_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} e^{-iqx}, \quad (1.29)$$

so erhält man die sog. PCAC-Relation. Angesichts der kleinen Pionmasse innerhalb der hadronischen Skala, kann man aus dieser Relation schließen, dass der axiale Vektorstrom annäherend erhalten ist. Somit sollte die QCD unter axialen Transformationen invariant bleiben. Weiterhin folgt aus den beiden oberen Gleichungen, dass der pionische Anteil am axialen Strom durch

$$A_{\mu, Pion}^a = f_\pi \partial_\mu \Phi_a(x) \quad (1.30)$$

gegeben ist, bzw. dass die Divergenz des Axialvektorstroms bis auf eine Konstante mit dem Pionfeld  $\Phi_a(x)$  identifiziert werden kann.

## 1.7 Goldberger-Treiman Relation

Auf weitere Anhaltspunkte für partielle Erhaltung des Axialvektorstroms stößt man bei der Betrachtung des axialen Stromes eines Nukleons

$$A_{\mu, Nukleon}^a = g_a \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi_N \quad (1.31)$$

dabei ist  $\psi_N = (\psi_p, \psi_n)$  ein Isospinor, der ein Proton und ein Neutron repräsentiert. Der Faktor  $g_a = 1.25$  resultiert aus der Beobachtung des schwachen  $\beta$ -Zerfalls des Neutrons. Ausgehend von der freien Dirac Gleichung für das Nukleon kann man zeigen, dass wegen der großen Nukleonmasse die Divergenz des axialen Stromes eines Nukleons nicht verschwindet

$$\partial_\mu A_{\mu, Nukleon}^a = -i g_a M_N \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N \neq 0. \quad (1.32)$$

Bei der Formulierung des gesamten Axialstroms müssen allerdings auch pionische Beiträge berücksichtigt werden

$$A_\mu^a = g_a \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi_N + f_\pi \partial_\mu \Phi^a, \quad (1.33)$$

da eine starke Wechselwirkung zwischen dem Nukleon und dem Pion besteht. Die Forderung, dass der gesamte Axialstrom erhalten bleiben soll,  $\partial_\mu A^\mu = 0$ ,

führt zur Klein Gordon Gleichung für ein masseloses Boson, welches an ein Nukleon gekoppelt ist

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi^a = -ig_a \frac{M_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N. \quad (1.34)$$

Somit impliziert die Erhaltung des gesamten Axialstroms die Vorhersage, dass das Pion masselos sein sollte. Dieses Ergebnis ist konsistent mit den Schlußfolgerungen aus dem schwachen Zerfall des Pions.

Bei einer endlichen Pionmasse dagegen, entspricht die Divergenz des Axialstroms den PCAC-Resultaten, und man erhält eine Klein-Gordon Gleichung für das an ein Nukleon gekoppelte Pion

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_\pi^2) \Phi^a = -ig_a \frac{M_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N, \quad (1.35)$$

wobei die Pion-Nukleon Kopplungskonstante durch

$$g_{\pi NN} = g_a \frac{M_N}{f_\pi} \simeq 12.6 \quad (1.36)$$

gegeben ist. Dieser Wert stimmt gut mit den experimentellen Ergebnissen der Pion-Nukleon-Streuung überein, bei denen die Kopplungskonstante auf

$$g_{\pi NN}^{\text{exp}} = 13.4 \quad (1.37)$$

bestimmt wird.

## 1.8 Spontane Symmetriebrechung

Bei Theorien mit spontan gebrochener Symmetrie weist der Grundzustand eine geringere Symmetrie auf als der Hamiltonian. Da die QCD im Falle verschwindender Quarkmassen eine  $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ -Symmetrie besitzt, sollte die Invarianz unter vektoriellen und axialvektoriellen Transformationen auch im Massespektrum der leichtesten Hadronen, die aus *up* und *down* Quarks aufgebaut sind, erkennbar sein. Wie im Abschnitt 1.5 gezeigt, werden bei infinitesimalen vektoriellen und axialvektoriellen Isospintransformationen skalare und pseudoskalare Mesonen in sich selbst und ihre chiralen Partner rotiert. Da die QCD invariant unter axialvektoriellen Isospintransformationen ist, sollten alle chiralen Partner, die unter Axialtransformationen ineinander übergehen, die selben Eigenwerte, wie z.B. Massen, haben. Beim Vergleich der Massen von Skalarmesonen,  $\sigma$  und  $\pi$ , sowie von Vektormesonen,  $\vec{\rho}$  und  $\vec{a}_1$ , stellt man allerdings fest, dass diese Annahme nicht zutrifft. Selbst unter Berücksichtigung der Massendifferenz von *up* und *down* Quarks reicht die daraus resultierende explizite Symmetriebrechung nicht aus, um den signifikanten Massenunterschied zwischen den chiralen Partnern zu erklären. Folglich spiegelt das Massespektrum der Hadronen die Erhaltung des Axialstroms nicht wider. Im Gegensatz dazu scheint der schwache Pionzerfall konsistent mit einem partiell erhaltenen Axialstrom zu sein. Auch die Goldberger-Treiman-Relation deutet darauf hin, dass die axiale Isospintransformation eine Symmetrie der starken Wechselwirkung ist, und somit der Axialvektorstrom annäherend erhalten sein sollte.

Die Ursache für diese scheinbar widersprüchliche Phänomene liegt in der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie, die sich vorangig im skalaren Sektor eines Modells abspielt, siehe [47]. Die ersten theoretischen Ansätze zur Beschreibung dieses Mechanismus im Bereich der Festkörper-Physik stammen von Nambu und Goldstone aus dem Jahr 1960. Im Jahre 1964 erweiterte Higgs das Konzept der spontanen Symmetriebrechung auf lokalsymmetrische Eichtheorien. Basierend auf der früheren Arbeit von Glashow gelang es Weinberg und Salam [48] schließlich, das Konzept des Higgs-Mechanismus auf  $SU(2)_V \times U(1)_A$ -Eichtheorien anzuwenden und damit die Vereinigung der Theorien der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkungen zu realisieren. Zuspätkommen erhielt dieses Modells vor allem nachdem 't Hooft im Jahre 1971 den Nachweis für die Renormalisierbarkeit der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung erbracht hatte [49].

### 1.8.1 Goldstone-Theorem

Das Goldstone-Theorem lässt sich am besten exemplarisch anhand der speziellen nichtabelschen Gruppe  $SO(3)$  veranschaulichen. Der Lagrangian lautet in diesem Fall wie folgt:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - V(\phi_i), \quad (1.38)$$

wobei  $\phi_i$  ein drei-dimensionales skalares Feld und  $V(\phi_i)$  das Potential auf Baumgraphenniveau ist

$$V(\phi_i) = \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i + \lambda (\phi_i \phi_i)^2. \quad (1.39)$$

Diese Lagrangedichte besitzt eine globale  $SO(3)$ -Symmetrie, worin sich eine Invarianz des Feldes unter Isospintransformationen widerspiegelt

$$G : \phi_i \rightarrow \phi'_i = e^{i\alpha_k Q_k} \phi_i e^{-i\alpha_k Q_k} = (e^{-i\alpha_k T_k})_{ij} \phi_j = [U(g)\phi]_i. \quad (1.40)$$

Dabei entsprechen  $\alpha_k$  den Rotationswinkeln im Isospinraum,  $Q_k$  sind die Generatoren der Gruppe  $G$ , in diesem Fall  $SO(3)$ , während  $T_k$  ein Set von Matrizen bilden, welche die Lie-Algebra der Transformationsgruppe respektieren. Die dem Gruppenelement  $g$  zugeordnete Matrix  $U(g)$  ist unitär,  $U(g)^\dagger U(g) = \mathbf{1}$ ;  $\det U(g) = 1$ , für hermitesche  $T_k$ ,  $T_k^{-1} = T_k^\dagger$ . Es liegt also eine unitäre Transformation vor.

1. Im Wigner-Weyl-Modus ist der Parameter  $m^2$  positiv,  $m^2 > 0$ , und der Grundzustand, der dem Minimum des Potentials entspricht

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \right|_{\phi=\phi_0} \\ &= m^2 \phi_i + 4\lambda \phi_i^3 \Big|_{\phi=\phi_0} \\ &= \phi_0 (m^2 + 4\lambda \phi_0^2), \end{aligned} \quad (1.41)$$

liegt bei  $\phi_0 = 0$ . In diesem Modus besitzt der Grundzustand maximale Symmetrie

$$\begin{aligned} \phi_0 &\rightarrow \phi'_0 = U(g)\phi_0 \\ &= (1 - i\alpha_k T_k - \frac{1}{2}\alpha_k^2 T_k^2 \dots)\phi_0 \\ &= \phi_0, \end{aligned} \quad (1.42)$$

da er von allen  $SO(3)$ -Generatoren eliminiert wird,  $T_k\phi_0 = 0$ , und daher unter der gesamten Transformationsgruppe invariant bleibt.

2. Im Goldstone-Modus ist  $m^2$  negativ,  $m^2 < 0$ , und das Potential wird für

$$|\phi_0| = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2} = \sqrt{\frac{-m^2}{4\lambda}} \quad (1.43)$$

minimiert. Die Minima liegen auf einem Kreis mit dem Radius  $R = \sqrt{-m^2/4\lambda}$ , der ein Set aus degenerierten Vakuumzuständen bildet, welche durch Rotation ineinander transformiert werden können. Da ausschließlich der Betrag des Grundzustandes vorgegeben ist, kann die Richtung des physikalischen Zustandes beliebig gewählt werden. Durch die Festlegung einer bestimmten Richtung für den Grundzustand wird die Symmetrie im Goldstone-Modus spontan gebrochen. Deutet  $\vec{\phi}_0$  z.B. in die dritte Richtung im Isospinraum,  $\vec{\phi}_0 = \phi_0\vec{e}_3$ , so reduziert sich die Symmetrie des Grundzustandes auf die Untergruppe  $H \subseteq G$ , welche einer Rotation um die dritte Axis entspricht und von  $T_3$  generiert wird

$$H : \phi_0 \rightarrow \phi'_0 = U(h)\phi_0 = \phi_0, \quad (1.44)$$

wobei  $U(h) = e^{iT_3\alpha_3}$ . In diesem Fall ist  $T_3$  der einzige Generator, der den Grundzustand vernichtet. Andererseits bleibt das Potential weiterhin unter ganz  $G$  invariant

$$G : V(\phi') = V(\phi), \quad \phi' = U(g)\phi, \quad (1.45)$$

was die Existenz von Goldstone-Bosonen motiviert. Die physikalischen Felder  $\phi_1, \phi_2$  und  $\chi$  werden als Fluktuationen um den Grundzustand  $\vec{\phi}_0 = \phi_0\vec{e}_3$  konstruiert. Für  $\vec{\phi}^t = (\phi_1, \phi_2, \phi_0 + \chi)$  kann man aus dem Potential

$$\begin{aligned} V &= \frac{m^2}{2} \left( \phi_1^2 + \phi_2^2 + (\phi_0 + \chi)^2 \right) + \lambda \left( \phi_1^2 + \phi_2^2 + (\phi_0 + \chi)^2 \right)^2 \\ &= 4\lambda\phi_0^2\chi^2 + 4\lambda\phi_0\chi \left( \phi_1^2 + \phi_2^2 + \chi^2 \right) + \lambda \left( \phi_1^2 + \phi_2^2 + \chi^2 \right)^2 + \lambda\phi_0^4 \end{aligned} \quad (1.46)$$

entnehmen, dass nach spontaner Symmetriebrechung nur das skalare Feld  $\chi$  quadratische Beiträge und damit eine Masse erhält, während  $\phi_1, \phi_2$  zu masselosen Goldstone-Bosonen werden

$$m_\chi^2 = 8\lambda\phi_0^2, \quad m_{\phi_1} = m_{\phi_2} = 0. \quad (1.47)$$

Zur Herleitung einer Methode, mit der sich für jedes beliebige Modell mit definierter Symmetrie die Anzahl der Goldstone-Bosonen berechnen läßt, wird das Potential um den Grundzustand entwickelt. Mit der Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} \Big|_{\phi=\phi_0} = 0 \quad (1.48)$$

führt die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \chi_i \chi_j + O(\chi^3), \quad (1.49)$$

wobei  $\chi(x) = \phi(x) - \phi_0(x)$ , zu der Bedingung, dass die Massenmatrix  $M_{ij}$

$$M_{ij} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \geq 0 \quad (1.50)$$

positiv semidefinit sein muss, da  $V(\phi)$  an der Stelle  $\phi = \phi_0$  den minimalen Wert annimmt. Aus der Invarianz des Potentials unter ganz  $G$ , siehe Gl. (1.45)

$$V(\phi_0) = V(\phi'_0) = V(U(g)\phi_0) = V(\phi_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \delta \phi_i \delta \phi_j + \dots \quad (1.51)$$

folgt weiterhin, dass der zweite Term in der Entwicklung verschwinden muss

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \delta \phi_i \delta \phi_j = 0, \quad (1.52)$$

wobei  $\delta \phi_i$  die Variation in  $\phi_i$  unter der Gruppentransformation ist. Für alle  $g \in H$  ist Gl. (1.52) automatisch erfüllt, da  $\phi_0$  unter  $H$  invariant bleibt  $\phi'_0 = \phi_0$ . Somit gilt  $\delta \phi_i = 0$ , oder analog

$$\delta \phi = \left( \frac{\partial U}{\partial \alpha_3} \right)_{\alpha_3=0} \phi_0 \delta \alpha_3 = 0. \quad (1.53)$$

Wenn  $g$  dagegen nicht zu  $H$  gehört, also  $g \in G/H$ <sup>2</sup>, so ist

$$\delta \phi_i = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial \alpha_j} \right)_{\alpha_j=0} \phi_0 \right]_i \delta \alpha_j \neq 0. \quad (1.54)$$

In diesem Fall sind die zugehörigen Felder  $U'(0)\phi_0$  masselos, da das assoziierte Matrixelement Null sein muss,

$$M_{ij} = [U'(0)\phi_0]_j = 0, \quad (1.55)$$

um die Bedingung in Gl. (1.52) erfüllen zu können.

Aus dieser analytischen Betrachtung wird klar, dass die Frage, wieviele Felder massiv bleiben bzw. zu Goldstone-Bosonen werden, allein durch die Gruppentheorie bestimmt wird. Da  $\phi_0$  unter der Subgruppe  $H$  invariant bleibt,  $\delta \phi_i = 0$ , entspricht die Anzahl der Felder, deren Masse nicht Null sein muss, der Dimension der Lie Algebra der Subgruppe  $H$ <sup>3</sup>, unter der das Vakuum invariant bleibt. In unserem Beispiel ist  $H = SO(2)$  isomorph zu  $U(1)$  und besitzt nur einen Generator  $T_3$ , dem ein massives skalares Feld zugeordnet wird. Die Masse dieser Moden muss zwar nicht verschwinden, sie kann allerdings zufällig doch Null sein. Dagegen gilt für alle Elemente aus dem Coset  $G/H$ , dass  $\delta \phi_i \neq 0$ . Somit ist die Zahl der Goldstone-Bosonen gleich der Dimension des Cosets  $G/H$ , welche durch die Anzahl der Generatoren von  $G$ , die nicht in  $H$  enthalten sind, gegeben ist. In diesem Fall sind es  $3 - 1 = 2$  Generatoren, die mit zwei Goldstone-Bosonen assoziiert werden.

## 1.8.2 Higgs-Mechanismus

Das Theorem zum Higgs-Mechanismus erweitert die Anwendung des Goldstone-Theorems auf lokale Eichtheorien, die unter folgenden Transformationen des quantisierten Feldes

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi \quad (1.56)$$

<sup>2</sup>Im vorliegenden Beispiel entspricht dies der Rotation in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{e}_3$ .

<sup>3</sup>Die Dimension der Lie Algebra einer Gruppe entspricht der Anzahl ihrer Generatoren.

invariant bleiben. Eine lokal invariante Lagragedichte wird durch geeignete Kopplung an Eichfelder mittels Einführung von kovarianten Ableitungen  $D_\mu \phi_i$  und Feldstärketensoren  $F_{\mu\nu}^i$  konstruiert:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_\mu \phi_i) (D^\mu \phi_i) - \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i - \lambda (\phi_i \phi_i)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu}, \quad (1.57)$$

mit

$$D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + g \epsilon_{ijk} A_\mu^j \phi_k \quad (1.58)$$

und

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k. \quad (1.59)$$

Im Goldstone-Modus,  $m^2 < 0$ , wird das Potential in Abwesenheit von Eichfeldern für

$$|\phi_0| = R = \sqrt{\frac{-m^2}{4\lambda}} \quad (1.60)$$

minimiert. Analog zum global invarianten Fall, lässt sich die Richtung vom Vakuumzustand beliebig wählen. Für  $\vec{\phi}_0 = \phi_0 \vec{e}_3$  lauten die physikalischen Felder  $\phi_1, \phi_2$  und  $\chi = \phi_3 - \phi_0$ . Setzt man  $\vec{\phi}^t = (\phi_1, \phi_2, \phi_0 + \chi)$  in den Lagrangian ein, so wird ein gemischter Term der Form  $g\phi_0 \partial_\mu \phi_1 A_\mu^2$  und  $-g\phi_0 \partial_\mu \phi_2 A_\mu^1$  generiert. Dieser unerwünschte Effekt kann durch die Wahl einer geeigneten Eichung behoben werden. In einem lokalsymmetrischen System ist es nämlich möglich, an jedem Raum-Zeit-Punkt unabhängige Eichtransformationen durchzuführen. Mit Hilfe der physikalischen bzw. unitären Eichung ist es möglich, das Feld  $\vec{\phi}$  an jedem Punkt der Raum-Zeit in Richtung der dritten Isospin Axis deuten zu lassen

$$\vec{\phi} = \phi_3 \vec{e}_3 = (\phi_0 + \chi) \vec{e}_3. \quad (1.61)$$

Auf diese Weise werden die beiden unphysikalischen Freiheitsgrade  $\phi_1$  und  $\phi_2$  eliminiert, und man erhält mit den kovarianten Ableitungen

$$\begin{aligned} D_\mu \phi_1 &= g(\phi_0 + \chi) A_\mu^2 \\ D_\mu \phi_2 &= -g(\phi_0 + \chi) A_\mu^1 \\ D_\mu \phi_3 &= \partial_\mu \chi \end{aligned} \quad (1.62)$$

für die Lagragedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)^2 - \frac{1}{2} g^2 \phi_0^2 \left( (A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 \right) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 \\ &\quad - 4\lambda \phi_0^2 \chi^2 + \text{Terme höherer Ordnung in den Feldern.} \end{aligned} \quad (1.63)$$

Die resultierenden Teilchen sind ein massives skalares Feld, zwei massive Vektorfelder und ein masseloses Vektorfeld. Ein wichtiger Unterschied zur spontanen Brechung der globalen Symmetrie besteht darin, dass die beiden Goldstone-Bosonen verschwinden und statt dessen zwei massive Eichfelder erzeugt werden. Dieses Phänomen wird als Higgs-Mechanismus bezeichnet. Im Folgenden sind die Ergebnisse für spontan gebrochene  $O(3)$ -symmetrische Modelle zusammengefasst:

1. Goldstone-Modus (globale  $O(3)$ -Symmetrie)

$$(3 \text{ massive skalare Felder}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \text{ massives skalares Feld} \\ + 2 \text{ masselose skalare Felder} \\ \text{(Goldstonebosonen)} \end{pmatrix}$$

2. Higgs-Modus (lokale  $O(3)$ -Symmetrie)

$$\begin{pmatrix} 3 \text{ massive skalare Felder} \\ + \\ 3 \text{ masselose Vektorfelder} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \text{ massives skalares Feld} \\ + 2 \text{ massive Vektorfelder} \\ + 1 \text{ masseloses Vektorfeld} \end{pmatrix}$$

In beiden Fällen bleibt die Anzahl der Freiheitsgrade nach der Transformation erhalten. Analog zur Anzahl der massiven Felder im Goldstone-Modus entspricht im Higgs-Modus die Anzahl der masselosen Eichfelder der Dimension der Subgruppe  $H$ , unter der das Vakuum invariant bleibt. Im  $O(3)$ -Modell entspricht  $H$  der eindimensionalen Gruppe  $U(1)$ ,  $\dim H = \dim U(1) = 1$ , was im Goldstone-Modus mit einem massiven skalaren Feld und im Higgs-Modus mit einem masselosen Vektorfeld assoziiert ist. Durch Absorbition der insgesamt  $\dim G/H$  Goldstone-Moden aus dem global symmetrischen Modell erhalten die Eichfelder im lokalsymmetrischen Fall eine Masse. Somit ist die Anzahl der massiven Vektorfelder im Higgs-Modus gleich  $\dim G/H$ . Die Gesamtanzahl sowohl massiver als auch masseloser Teilchen im lokal und global symmetrischen Modell ist wie erwartet durch die Dimension der Symmetriegruppe  $G$  der betrachteten Lagrangedichte gegeben.

## 1.9 Endliche Temperaturen

Bei quantenfeldtheoretischen Betrachtungen von Elementarteilcheneigenschaften in Vielteilchensystemen wie Gasen, bedient man sich oft statistischer Methoden zur Berechnung von thermodynamischen Größen wie dem Druck, der Energie sowie der Entropie bei endlichen Temperaturen, siehe z.B. [55], [56], [57] und [58].

Den Ausgangspunkt bildet dabei ein zentrales Objekt der Statistischen Quantenmechanik, nämlich die Dichtematrix  $\hat{\rho}$ . Die Dichtematrix hat bekanntermaßen folgende Form:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (1.64)$$

wobei die Summation alle möglichen Zustände des Systems einschließt, welche mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gewichtet werden. Beim Übergang zu endlichen Temperaturen sind die Zustände asymptotisch nicht mehr frei, und der statistische Operator im kanonischen,  $\mu = 0$ , sowie im makrokanonischen,  $\mu \neq 0$ , Ensemble lautet

$$\hat{\rho} = e^{-\beta\mathcal{H}} \quad (1.65)$$

mit  $\mathcal{H} = H - \mu N$  und  $\beta = 1/T$ ,  $k_B = 1$ .

Im thermodynamischen Gleichgewicht verwendet man bei der Auswertung den Matsubara- bzw. Imaginärzeit-Formalismus anstelle des komplizierteren Realzeit-Formalismus, der auch auf nicht thermostatische Prozesse angewandt werden kann. In beiden Fällen wird durch eine Rotation zu imaginären Zeiten die aus der Statistik bekannte Dichtematrix  $e^{-\beta\mathcal{H}}$  als Zeitentwicklungsoperator,  $e^{\pm it\mathcal{H}}$ , für negative, imaginäre Zeiten interpretiert.

Mit Hilfe des Matsubara-Formalismus ist es möglich, die aus der Vakuumfeldtheorie bekannten physikalischen Größen, wie die Zweipunktfunktionen, auch bei endlichen Temperaturen zu berechnen. Ein wichtiger Bestandteil beim kanonischen Zugang an den Imaginärzeit-Formalismus ist die Kubo-Martin-Schwingerrelation. Dabei werden ausgehend vom Erwartungswert einer Observable,  $A$ , im thermischen Gleichgewicht

$$\langle A \rangle_\beta = Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \rho(\beta) A \quad (1.66)$$

und der thermischen Korrelationsfunktion zweier beliebiger Operatoren

$$\langle AB \rangle_\beta = Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \rho(\beta) AB \quad (1.67)$$

die thermischen Korrelationsfunktionen zweier Operatoren im Heisenbergbild,  $A_H(t) = e^{iHt} A e^{-iHt}$ ,  $B_H(t') = e^{iHt'} B e^{-iHt'}$ , zu unterschiedlichen Zeiten hergeleitet

$$\begin{aligned} \langle A_H(t) B_H(t') \rangle_\beta &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \rho(\beta) A_H(t) B_H(t') \\ &= \langle B_H(t') A_H(t + i\beta) \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Identifiziert man nun im Rahmen des Imaginärzeit-Formalismus die inverse Temperatur mit der negativen imaginären Zeit,  $\beta = -it = -\tau$ , so entspricht die Dichtematrix dem Zeitentwicklungsoperator für negative, imaginäre Zeiten in der Heisenbergdarstellung

$$\rho(\tau) = e^{\tau H}, \quad \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \tau} = H \rho(\tau), \quad (1.69)$$

und man erhält im Intervall  $0 \leq \tau < \beta$  folgende Zeitentwicklung für die Operatoren im Heisenbergbild bei endlichen Temperaturen

$$\phi_H(\tau) = e^{\tau H} \phi e^{-\tau H}. \quad (1.70)$$

Damit lassen sich mit Hilfe der Kubo-Martin-Schwingerrelation Gl.(1.68), analog zu kausalen Greensfunktionen der konventionellen Vakuumfeldtheorie, die Zweipunktfunktionen bei endlichen Temperaturen definieren

$$G_\beta(\tau, \tau') = \left\langle T_\tau \left( \phi_H(\tau) \phi_H^\dagger(\tau') \right) \right\rangle_\beta = Z^{-1}(\beta) \text{Tr} e^{-\beta H} T_\tau \left( \phi_H(\tau) \phi_H^\dagger(\tau') \right), \quad (1.71)$$

mit dem Ordnungsoperator der imaginären Zeit

$$T_\tau \left( \phi_H(\tau) \phi_H^\dagger(\tau') \right) = \Theta(\tau - \tau') \phi_H(\tau) \phi_H^\dagger(\tau') \pm \Theta(\tau' - \tau) \phi_H^\dagger(\tau') \phi_H(\tau). \quad (1.72)$$

Da die Greensfunktion nur von der Differenz der imaginären Zeitvariable abhängig ist, welche für  $0 \leq \tau, \tau' < \beta$  im Intervall  $-\beta \leq \tau - \tau' < \beta$  liegt, bleibt die Zweipunktgreensfunktion bei thermostatischem Gleichgewicht im Verlauf der Zeit homogen. Unter Berücksichtigung der Kubo-Martin-Schwingerrelation sowie der Kommutationsrelationen für Bosonen und Antikommutationsrelationen für Fermionen läßt sich zeigen, dass die Greensfunktion für Bosonen periodisch und für Fermionen antiperiodisch ist

$$\begin{aligned} G_\beta(0, \tau) &= \left\langle \phi_H^\dagger(\tau) \phi_H(0) \right\rangle_\beta \\ &= \left\langle \phi_H(\beta) \phi_H^\dagger(\tau) \right\rangle_\beta \\ &= \pm G_\beta(\beta, \tau). \end{aligned} \quad (1.73)$$



Da der Definitionsbereich der Greensfunktionen für die Zeitvariable auf ein endliches Intervall beschränkt ist, wird die Fouriertransformierte beim Übergang zum Impulsraum auf die Summe über sogenannte Matsubara-Frequenzen reduziert

$$\begin{aligned} G_\beta(\tau, \vec{k}) &= \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} G_\beta(i\omega_n, \vec{k}) \\ G_\beta(i\omega_n, \vec{k}) &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\beta(\tau, \vec{k}). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Für Bosonen sind die Frequenzen gerade,  $\omega_n = 2\pi nT$ , für Fermionen dagegen ungerade,  $\omega_n = (2\pi n + 1)T$ . Die räumlichen Fouriertransformationen

$$\begin{aligned} G_\beta(\tau, \vec{x}) &= \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\omega_n \tau + i\vec{k}\vec{x}} G_\beta(i\omega_n, \vec{k}) \\ G_\beta(i\omega_n, \vec{k}) &= \int_0^\beta d\tau \int d^3 x e^{i\omega_n \tau - i\vec{k}\vec{x}} G_\beta(\tau, \vec{x}) \end{aligned} \quad (1.75)$$

erlauben schließlich die Herleitung der Propagatoren für jede Quantenfeldtheorie. Betrachtet man zum Beispiel die freie Klein-Gordontheorie, so ergibt sich der Propagator bei endlichen Temperaturen nach Identifikation  $t \rightarrow -i\tau$  als Lösung der Gleichung

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) G(x) = -\delta^{(4)}(x). \quad (1.76)$$

Daraus erhält man folgenden Ansatz für die inversen Propagatoren der Skalarmesonen

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 - m^2 \right) G(\vec{x}, \tau) = -\delta^3(\vec{x}) \delta(\tau). \quad (1.77)$$

Analog dazu kann die Erweiterung auf fermionische Systeme vollzogen werden. Ein bedeutender Vorteil gegenüber der Auswertung im Realzeit-Formalismus besteht darin, dass nach Rotation zu imaginären Zeiten die Propagatoren bei endlichen Temperaturen keine Singularitäten für reellwertige Energien und Impulse mehr besitzen.

Mit der pfadintegralen Form des Imaginärzeit-Formalismus ist es möglich, das Erzeugende Funktional durch ein Pfadintegral für jede Quantenfeldtheorie darzustellen, was sich besonders für nichtabelsche Quantenfeldtheorien als nützlich erweist. Dazu betrachtet man die aus der Quantenfeldtheorie bekannte pfadintegrale Form des Übergangmatrixelements zwischen dem Anfangs- und Endzustand eines bosonischen Feldes

$$\langle \phi_f | \exp \left[ -i(t_f - t_i) \hat{H} \right] | \phi_i \rangle = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3 x \mathcal{L}[\phi] \right], \quad (1.78)$$

wobei ausschließlich über Felder integriert wird, die folgenden Randbedingungen genügen

$$\phi(t_i, \vec{x}) = \langle \phi_i | \hat{\phi}(t_i, \vec{x}) | \phi_i \rangle, \quad \phi(t_f, \vec{x}) = \langle \phi_f | \hat{\phi}(t_f, \vec{x}) | \phi_f \rangle. \quad (1.79)$$

Identifiziert man nun  $t$  mit  $-i\tau$  und wählt  $t_i = 0$ ,  $t_f = -i\beta$ , so läßt sich aus

$$\langle \phi_f | \exp[-\beta \hat{H}] | \phi_i \rangle = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E[\phi] \right] \quad (1.80)$$

die pfadintegrale Form des Erzeugenden Funktionalen herleiten

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{\phi_n} \langle \phi_n | \exp[-\beta \hat{H}] | \phi_n \rangle \\ &= N \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E[\phi] \right] \\ &= N \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E}. \end{aligned} \quad (1.81)$$

$S_E$  entspricht der euklidischen Wirkung, wobei die Integration nur solche Felder einschließt, die im Fall von Bosonen den periodischen bzw. für Fermionen den antiperiodischen Randbedingung genügen

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\tau = 0, \vec{x}) &= \hat{\phi}(\tau = \beta, \vec{x}) \text{ für Bosonen} \\ \hat{\phi}(\tau = 0, \vec{x}) &= -\hat{\phi}(\tau = \beta, \vec{x}) \text{ für Fermionen.} \end{aligned} \quad (1.82)$$

Folglich ist bei endlichen Temperaturen die Quantenfeldtheorie im wesentlichen eine euklidische Feldtheorie, bei der eine Dimension zu einem Kreis zusammengerollt ist. Aus diesem Grund wird die Fouriertransformierte auf die Summe über die Matsubara-Frequenzen reduziert

$$\phi(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\omega_n \tau + i\vec{k}\vec{x}} \tilde{\phi}(K), \quad (1.83)$$

wobei  $K = (\omega_n, \vec{k})$  ein Impulsvektor im euklidischen Raum ist.

## 1.10 Effektive Wirkung

Die effektive Wirkung stellt eine geeignete Basis für die Behandlung von Quantenfeldtheorien dar. Im Gegensatz zur konventionellen Störungstheorie bietet sie auch eine Möglichkeit für die Untersuchung nichtperturbativer Phänomene, wie dem Phasenübergang. Für die Beschreibung vieler quantenfeldtheoretischer Observablen wie der Streumatrix,

$$S_{fi} = \langle q_1, \dots, q_n; out | p_1, \dots, p_m; in \rangle \quad (1.84)$$

deren Elemente experimentell bestimmt werden können, bilden die Greenschen n-Punkt-Funktionen

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \left[ \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \right] | 0 \rangle, \quad (1.85)$$

welche als Propagatoren bezeichnet werden, den wichtigsten Ausgangspunkt, siehe [59]. Die Propagatoren werden in der Regel durch n-fache Funktionaldifferenziation der pfadintegralen Form des erzeugenden Funktionalen

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \langle 0 | T \exp \{ iJ\hat{\phi} \} | 0 \rangle = N \int \mathcal{D}\phi \exp \{ iS[\phi] + J\phi \} \quad (1.86)$$

nach den Quellen  $J$  an der Stelle  $J = 0$  hergeleitet

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (1.87)$$

siehe [60]. Aus der Sicht der klassischen Physik kann das Feld  $J$  mit einer Quelle für das  $\phi$ -Feld identifiziert werden, welche im zeitlichen Limes  $t \rightarrow \pm\infty$  ausgeschaltet wird. Mit dieser Methode werden allerdings zahlreiche topologisch äquivalente Terme generiert. Durch Logarithmieren von  $Z[J]$  kann dieser unerwünschte Effekt unmittelbar behoben werden. Folglich bietet es sich an, ein erzeugendes Funktional für zusammenhängende Propagatoren herzuleiten

$$\ln Z[J] = iW[J] = \ln N \int \mathcal{D}\phi \exp \{iS[\phi] + J\phi\}. \quad (1.88)$$

Die Funktionaldifferentiation von  $W[J]$  nach den Quellen  $J$  an der Stelle  $J = 0$  liefert wie erwünscht ausschließlich topologisch irreduzible Greensfunktionen  $G_c^{(n)}$ , welche sich nicht multiplikativ aus nicht zusammenhängenden  $n$ -Punkt-Funktionen niedrigerer Stufe konstruieren ließen, siehe [61].

Anhand einer funktionalen Legendretransformation des erzeugenden Funktionals für verbundene Propagatoren wird anschließend die effektive Wirkung konstruiert

$$\Gamma[\bar{\phi}] = W[J] - \int_x J(x)\bar{\phi}(x), \quad (1.89)$$

mit dem korrekt normierten Vakuumerwartungswert des Feldoperators  $\hat{\phi}(x)$  in Anwesenheit der Quelle  $J$

$$\bar{\phi} = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = -i \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \{iS[\phi] + J\phi\} \phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi \exp \{iS[\phi] + J\phi\}} = \frac{\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle_J}{\langle 0 | 0 \rangle_J}. \quad (1.90)$$

Betrachtet man klassische Theorien, so verschwindet im Limes  $J \rightarrow 0$  in der Regel auch der Erwartungswert des Feldes  $\bar{\phi}$ . Bei Theorien mit gebrochener Grundzustandssymmetrie existiert dagegen ein nicht verschwindender physikalischer Erwartungswert des Quantenfeldes in Abhängigkeit von  $J$ , der durch Minimieren der effektiven Wirkung bestimmt werden kann

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(x)} \Big|_{\bar{\phi}=\varphi} = -J(x). \quad (1.91)$$

Analog dazu ist es möglich, durch Auffinden des Minimums der effektiven Wirkung die Inversen der verbundenen Propagatoren zu berechnen

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(x_1) \delta \bar{\phi}(x_2)} \Big|_{\bar{\phi}=\varphi} = -\frac{\delta J[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}} \Big|_{\bar{\phi}=\varphi}. \quad (1.92)$$

Für raum-zeitlich konstante Einpunktfunktionen ist die Theorie translationsinvariant, und das effektive Potential lässt sich unmittelbar aus der effektiven Wirkung herleiten

$$\Gamma[\bar{\phi}] = -V[\bar{\phi}] \int d^4x. \quad (1.93)$$

Wird das effektive Potential im Rahmen einer quantenfeldtheoretischen Betrachtung nach der Schleifenordnung um den Erwartungswert entwickelt

$$V[\bar{\phi}] = V^{(0)}[\bar{\phi}] + \sum_{n=1}^{\infty} V^{(n)}[\bar{\phi}], \quad (1.94)$$

so ist die nullte Ordnung gleich dem klassischen Potential  $V^{(0)}[\bar{\phi}] = U[\phi]$ . Der zweite Term in der Entwicklung

$$V^{(1)}[\bar{\phi}] = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln G^{-1}(k; \bar{\phi}), \quad (1.95)$$

welcher der Einschleifennäherung entspricht, erweist sich als problematisch im Fall von Theorien mit spontan gebrochener Symmetrie bei endlicher Temperatur. So führen kleine Impulse zu Quasiteilchenanregungen mit imaginären Energien. Die daraus resultierende Verletzung der Konvexität des effektiven Potentials führt wiederum zu einer tachyonischen Propagation der Teilchen im Ortsraum, siehe [62]. Aus diesem Grund ist es naheliegend, alternative Methoden zur Störungstheorie zu entwickeln.

## 1.11 CJT-Formalismus

Der CJT-Formalismus ist eine thermodynamisch konsistente Vorschrift für die Konstruktion des effektiven Potentials bei endlichen Temperaturen für eine gegebene Theorie mittels Resummation von einteilchenirreduziblen Diagrammen, siehe z.B. [20], [63] und [64]. Das Aufstellen der stationären Bedingungen für das effektive Potential liefert anschließend im Falle spontan gebrochener Symmetrie die Gleichung für die Einpunktfunktion und ermöglicht die Herleitung der Schwinger-Dyson Gleichungen für die vollen Propagatoren.

Zunächst wird analog zur Vorgehensweise im vorherigen Abschnitt die effektive Wirkung für Ein- und Zweipunktfunktionen konstruiert. Dazu führt man zusätzlich zur lokalen Quelle  $J$  eine bilokale Quelle  $K$  ein und definiert damit das erzeugende Funktional für zusammenhängende Greensfunktionen

$$W[J, K] = \ln Z[J, K] = \ln \int D\phi \exp \left\{ I[\phi] + \phi J + \frac{1}{2} \phi K \phi \right\}, \quad (1.96)$$

$I[\phi] = \int_x \mathcal{L}$  ist die klassische Wirkung und

$$\phi J \equiv \int_x \phi(x) J(x), \quad (1.97)$$

$$\phi K \phi = \int_{x,y} \phi(x) K(x,y) \phi(y). \quad (1.98)$$

Das Aufsuchen des Minimums von  $W[J, K]$  liefert die Erwartungswerte für die Einpunktfunktion sowie für die zusammenhängenden Zweipunktfunktionen in Anwesenheit von den beiden Quellen  $J$  und  $K$

$$\frac{\delta W[J, K]}{\delta J(x)} = \bar{\phi}(x), \quad (1.99)$$

$$\frac{\delta W [J, K]}{\delta K(x, y)} = \frac{1}{2} [G(x, y) + \bar{\phi}(x)\bar{\phi}(y)]. \quad (1.100)$$

Mittels doppelter Legendretransformation, bei der die beiden Quellen eliminiert werden, lässt sich die effektive Wirkung als Funktional von  $\bar{\phi}$  und  $G$  formulieren

$$\Gamma [\bar{\phi}, G] = W [J, K] - \bar{\phi}J - \frac{1}{2}\bar{\phi}K\bar{\phi} - \frac{1}{2}GK, \quad (1.101)$$

wobei

$$GK \equiv \int_{x,y} G(x, y)K(y, x). \quad (1.102)$$

Die Funktionalableitung der effektiven Wirkung nach  $\bar{\phi}$  und  $G$  ergibt folgende stationäre Bedingungen

$$\frac{\delta \Gamma [\bar{\phi}, G]}{\delta \bar{\phi}(x)} = J(x) - \int_y K(x, y)\bar{\phi}(y), \quad (1.103)$$

$$\frac{\delta \Gamma [J, K]}{\delta G(x, y)} = -\frac{1}{2}K(x, y), \quad (1.104)$$

welche im Limes  $J \rightarrow 0$  und  $K \rightarrow 0$  die Erwartungswerte für das Quantenfeld  $\varphi(x)$  sowie die Propagatoren  $\mathcal{G}(x, y)$  in Abwesenheit von Quellen liefern

$$\left. \frac{\delta \Gamma [\bar{\phi}, G]}{\delta \bar{\phi}(x)} \right|_{\bar{\phi}=\varphi, G=\mathcal{G}} = 0 \quad (1.105)$$

$$\left. \frac{\delta \Gamma [J, K]}{\delta G(x, y)} \right|_{\bar{\phi}=\varphi, G=\mathcal{G}} = 0 \quad (1.106)$$

Die Gleichung (1.106) entspricht dabei der Schwinger-Dyson Gleichungen für die vollen Propagatoren.

Durch weitere Umformungen kann die effektive Wirkung auf folgende Darstellung gebracht werden

$$\Gamma [\bar{\phi}, G] = I [\bar{\phi}] - \frac{1}{2}Tr(\ln G^{-1}) - \frac{1}{2}Tr(\ln D^{-1}G - 1) + \Gamma_2 [\bar{\phi}, G]. \quad (1.107)$$

In diesem Fall repräsentieren  $D_i^{-1}$  die inversen Propagatoren auf Baumgraphenniveau

$$D^{-1}(x, y; \bar{\phi}) = -\frac{\delta^2 I [\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(x)\delta \bar{\phi}(y)} \Big|_{\bar{\phi}=\bar{\phi}}, \quad (1.108)$$

während  $\Gamma_2 [\bar{\phi}, G]$  die Summe aller zweiteilchenirreduziblen Diagramme enthält. Bei translationsinvarianten Theorien mit raum-zeitlich konstanten Einpunktfunktionen  $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi}$  ist es mit der Beziehung  $V = -T\Gamma/\Omega$  erneut möglich, aus der effektiven Wirkung das effektive Potential herzuleiten

$$V [\bar{\phi}, G] = U(\bar{\phi}) + \frac{1}{2} \int_k [\ln G^{-1}(k) + D^{-1}(k; \bar{\phi})G(k) - 1] + V_2 [\bar{\phi}, G], \quad (1.109)$$

mit

$$D^{-1}(k; \bar{\phi}) = -k^2 + U''(\bar{\phi}) \quad (1.110)$$

und  $V_2 = -T\Gamma_2/\Omega$ . Aus den stationären Bedingungen

$$\frac{\delta V [\bar{\phi}, G]}{\delta \bar{\phi}(x)} \Big|_{\bar{\phi}=\varphi, G=\mathcal{G}} = 0 \quad (1.111)$$

$$\frac{\delta V [\bar{\phi}, G]}{\delta G(k)} \Big|_{\bar{\phi}=\varphi, G=\mathcal{G}} = 0 \quad (1.112)$$

erhält man mittels Variation des effektiven Potentials nach  $G$  folgende Schwinger-Dyson Gleichungen für die vollen Propagatoren

$$\mathcal{G}^{-1}(k) = D^{-1}(\varphi; k) + \Sigma(k), \quad (1.113)$$

wobei

$$\Sigma(k) = 2 \frac{\delta V_2 [\bar{\phi}, G]}{\delta G(x)} \Big|_{\bar{\phi}=\varphi, G=\mathcal{G}} \quad (1.114)$$

der Selbstenergie entspricht. In Abwesenheit erhaltener Ladungen ist der thermodynamische Druck abgesehen von dem Vorzeichen identisch mit der Dichte der freien Energie

$$p = -V [\varphi, \mathcal{G}]. \quad (1.115)$$

## Kapitel 2

# Polardarstellungen des $O(2)$ linearen $\sigma$ -Modells

In diesem Kapitel soll die Abhängigkeit des  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modells von der Darstellung der beiden internen Freiheitsgrade,  $\sigma$  und  $\pi$ , untersucht werden. Zu diesem Zweck erfolgt die Konstruktion von zwei unterschiedlichen Polardarstellungen, bei denen das Pion mit der Winkelvariable und sein massiver skalärer chiraler Partner mit der Radialvariable identifiziert wird.

In der kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , besitzt das lineare  $\sigma$ -Modell, welches als niederenergetisches effektives Modell zur Beschreibung der Dynamik eines Pions und eines  $\sigma$ -Feldes dient, eine  $O(2)$ -Symmetrie. Da ein globaler Isomorphismus zwischen  $O(2)$  und  $U(1)$  besteht, ist es naheliegend die beiden internen Freiheitsgrade in einer alternativen  $U(1)$ -symmetrischen polaren Darstellung anzuordnen.

Beide Polardarstellungen werden im Rahmen des CJT-Formalismus in Hartree-Näherung im chiralen Limes und bei explizit gebrochener Symmetrie ausgewertet, um das Verhalten der hadronischen Materie am Phasenübergang zu untersuchen. Aus den stationären Bedingungen für das CJT-effektive Potential, werden die Schwinger-Dyson-Gleichungen für die vollen Propagatoren und die Kondensatgleichung hergeleitet, deren numerische Auswertung die Berechnung der temperaturabhängigen Mesonenmassen und des Kondensats erlaubt. Dies ermöglicht die Bestimmung der Ordnung und der kritischen Temperatur am Phasenübergang, wobei das Kondensat als chiraler Ordnungsparameter dient, der beim Übergang der hadronischen Materie in das Quark-Gluon-Plasma verschwindet. Die Regularisierung divergenter Vakuumterme erfolgt vorzugsweise mit dem Counterterm-Verfahren. Das Cutoff-Verfahren erweist sich dagegen als problematisch, da das regularisierte System bereits für relativ geringe Cutoff-Werte trivial wird.

Die numerischen Ergebnisse beider Polardarstellungen für die Mesonenmassen und das Kondensat als Funktion der Temperatur werden präsentiert, diskutiert und mit den Resultaten der kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , verglichen, bei der das Pion und das  $\sigma$ -Feld in einem 2-komponentigen skalaren Feld angeordnet sind.

## 2.1 1. Polardarstellung

Ausgehend vom globalen Isomorphismus zwischen  $O(2)$  und  $U(1)$  erfolgt in diesem Abschnitt die Konstruktion einer  $U(1)$ -symmetrischen polaren Darstellung der internen Freiheitsgrade,  $\sigma$  und  $\pi$ , innerhalb des  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modells, bei der das massive  $\sigma$ -Feld der Radialvariable und das Pion der Winkelvariable entspricht. Die Lagrangedichte wird mit Hilfe des CJT-Formalismus in Hartree-Näherung ausgewertet, wobei die Jacobi-Determinante, die beim Übergang zur Polardarstellung entsteht, zunächst nicht berücksichtigt wird. Das Aufstellen der stationären Bedingungen für das effektive Potential ermöglicht die Herleitung eines geschlossenen Systems aus vier gekoppelten Gleichungen, deren numerische Lösung das Kondensat, die Polmassen für das Pion und das  $\sigma$ -Feld sowie den Wellenrenormierungsparameter des Pions als Funktion der Temperatur ergibt. Ausgehend von der Bedingung, dass der Wellenrenormierungsparameter des Pions im Vakuum eins betragen soll, bietet es sich an, die divergenten Vakuumbeiträge der Selbstenergien mit Hilfe von Countertermen zu regularisieren.

Als nächstes wird eine Möglichkeit vorgestellt, die Jacobi-Determinante mittels eines vier-dimensionalen Cutoffs in die Konstruktion der Lagrangedichte und die anschließende Auswertung einzubeziehen. In diesem Fall wird eine konsistente Regularisierung der divergenten Vakuumbeiträge mit Hilfe des Cutoff-Verfahrens durchgeführt, was allerdings eine Redefinition der Winkelkomponente in der Polardarstellung des Feldes erfordert.

### 2.1.1 Die Lagrangedichte

Motiviert durch die “mexican-hat” Form des Potentials auf Baumgraphenniveau im linearen  $\sigma$ -Modell bietet es sich an, das Pion und das  $\sigma$ -Feld in folgender Polardarstellung anzuordnen

$$\Phi = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{i\pi/\phi}, \quad (2.1)$$

was wiederum einer komplexen Darstellung der Form

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} (\cos \pi/\phi + i \sin \pi/\phi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

entspricht. Das massive  $\sigma$ -Feld wird mit dem Radius identifiziert, da eine Auslenkung in die radiale Richtung bzw. eine Anregung der Radialkomponente stets mit Energieaufwand verbunden ist. Das Pion, welches im chiralen Limes masselos ist, kann mit der Winkelkomponente identifiziert werden, da eine Rotation entlang des Tals mit konstantem Radius keine Energie erfordert.

In diesem Fall wird beim Übergang von der kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , zur polaren Darstellung eine Jacobi-Determinante generiert

$$\mathfrak{J} = \left| \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(\sigma, \pi)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos \pi/\phi & -\sigma/\phi \sin \pi/\phi \\ \sin \pi/\phi & \sigma/\phi \cos \pi/\phi \end{array} \right| = \frac{\sigma}{\phi}, \quad (2.3)$$



die einen unendlichen Beitrag zur effektiven Wirkung leistet

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \frac{\sigma}{\phi} \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L} \right] \quad (2.4)$$

$$= \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L} + \delta^4(0) \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \ln\left(\frac{\sigma}{\phi}\right) \right], \quad (2.5)$$

und daher eine Regularisierung erforderlich macht, siehe [35], S.302. Im Abschnitt 2.1.6 wird eine Möglichkeit vorgestellt, den Determinantenterm (2.3) mittels Cutoff-Regularisierung in die Konstruktion der Lagrangedichte einzubeziehen. Vorerst soll dieser Term jedoch als divergenter Beitrag bei der Auswertung des Modells nicht berücksichtigt werden.

Die allgemeine Lagrangedichte für komplexe Felder lautet

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - U, \quad (2.6)$$

wobei das Potential auf Baumgraphenniveau durch

$$U = m^2 \Phi^* \Phi + 2\lambda (\Phi^* \Phi)^2 - h\phi_1 \quad (2.7)$$

gegeben ist.

Im Goldstone-Modus ist der skalare Massenparameter negativ,  $m^2 < 0$ , und das massive  $\sigma$ -Feld besitzt einen endlichen Vakuumerwartungswert  $\phi$ . Setzt man nun  $\Phi$  aus (2.1) mit dem um seinen Erwartungswert verschobenen  $\sigma$ -Feld

$$\sigma \rightarrow \sigma + \phi \quad (2.8)$$

in (2.6) ein, so erhält man folgenden Ausdruck für  $\mathcal{L}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 \left( \frac{\sigma^2 + 2\sigma\phi + \phi^2}{\phi^2} \right) - \frac{m^2}{2} (\sigma^2 + 2\sigma\phi + \phi^2) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} (\sigma^4 + \phi^4 + 6\sigma^2\phi^2 + 4\sigma^3\phi + 4\sigma\phi^3) + h(\sigma + \phi) \cos \frac{\pi}{\phi}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Diese Lagrangedichte ist symmetrisch unter  $U(1)$  Transformationen der polaren Darstellung des Feldes (2.1).

Als nächstes wird der explizite Symmetriebrechungsterm  $h(\sigma + \phi) \cos(\pi/\phi)$  bis zur vierten Ordnung in den Feldern entwickelt

$$\cos(\pi/\phi) = 1 - \frac{1}{2} (\pi/\phi)^2 + \frac{1}{4!} (\pi/\phi)^4 \dots,$$

um daraus die für die Hartree-Näherung relevanten Doppelblasendiagramme konstruieren zu können. Nach Ausmultiplikation und Zusammenfassen ist es unmittelbar möglich, aus der resultierenden Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - \frac{\sigma^2}{2} (m^2 + 6\lambda\phi^2) - \pi^2 \frac{h}{2\phi} \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \sigma^4 + \frac{1}{2\phi^2} (\partial_\mu \pi)^2 \sigma^2 + \frac{h}{4!\phi^3} \pi^4 \\ &\quad + \frac{1}{\phi} (\partial_\mu \pi)^2 \sigma - 2\lambda\sigma^3\phi - \frac{h}{2\phi^2} \sigma\pi^2 \\ &\quad - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{2} \phi^4 + h\phi \end{aligned} \quad (2.10)$$

die inversen Propagatoren auf Baumgraphenniveau

$$\begin{aligned} D_\sigma^{-1}(k; \phi) &= -k^2 + m^2 + 6\lambda\phi^2, \\ D_\pi^{-1}(k; \phi) &= -k^2 + \frac{h}{\phi} \end{aligned} \quad (2.11)$$

und die Massen auf Baumgraphenniveau

$$\begin{aligned} m_\sigma^2 &= m^2 + 6\lambda\phi^2, \\ m_\pi^2 &= \frac{h}{\phi} \end{aligned} \quad (2.12)$$

für die beiden Mesonen,  $\sigma$  und  $\pi$ , abzulesen.

## 2.1.2 Das effektive Potential

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe des quantenfeldtheoretischen CJT-Formalismus das effektive Potential für die im Abschnitt 2.1.1 konstruierte Polardarstellung der beiden Freiheitsgrade im  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modell in Hartree-Näherung aufgestellt. Wie bereits im ersten Kapitel 1.12 erklärt, ermöglicht dieses thermodynamisch konsistente Vielteilchenresummationsschema die Konstruktion des effektiven Potentials bei endlichen Temperaturen für eine gegebene Theorie. Aus den stationären Bedingungen für das effektive Potential lassen sich anschließend die Schwinger-Dyson Gleichungen für die vollen Propagatoren und im Falle spontan gebrochener Symmetrie die Gleichung für die Einpunktfunktion herleiten, deren numerische Auswertung die temperaturabhängigen Mesonenmassen und das Kondensat liefert. Im Rahmen der Hartree-Näherung beschränkt sich der Beitrag zweiteilchenirreduzibler Diagramme zum effektiven Potential auf die Selektion sogenannter Doppelblasendiagramme, die aus den drei Vierervertizes in der Lagrangedichte (2.10) konstruiert werden

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\phi^2} (\partial_\mu \pi)^2 \sigma^2 &\rightarrow \frac{1}{2\phi^2} \int_k k^2 G_\pi(k) \int_l G_\sigma(l), \\ -\frac{\lambda}{2} \sigma^4 &\rightarrow -\frac{3}{2} \lambda \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2, \\ \frac{h}{4! \phi^3} \pi^4 &\rightarrow \frac{h}{8\phi^3} \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

wobei die Bestimmung der Koeffizienten kombinatorischen Regeln gehorcht. Die Summe dieser Diagramme ergibt  $V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma)$

$$\begin{aligned} V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma) &= -\frac{1}{2\phi^2} \int_k k^2 G_\pi(k) \int_l G_\sigma(l) + \frac{3}{2} \lambda \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2 \\ &\quad - \frac{h}{8\phi^3} \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

An dieser Stelle wurde beachtet, dass das Potential mit einem negativen Vorzeichen in die Wirkung eingeht,  $S = \int_x \mathcal{L}$  mit  $\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - U$ .

Damit lautet das CJT-effektive Potential:

$$\begin{aligned}
V_{eff}(\phi; G_\pi, G_\sigma) &= \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^4 - h\phi \\
&+ \frac{1}{2} \int [\ln G_\sigma^{-1}(k) + D_\sigma^{-1}(k; \phi)G_\sigma(k) - 1] \\
&+ \frac{1}{2} \int [\ln G_\pi^{-1}(k) + D_\pi^{-1}(k; \phi)G_\pi(k) - 1] \\
&+ V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Die hier eingeführten Integrale über die vollen Propagatoren

$$\int_k G_i(k) = \int_k \frac{d^4k}{-k^2 + M_i^2} \equiv T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} f(2\pi inT, \vec{k}) \tag{2.16}$$

werden im Anhang mittels Matsubarasummation im Rahmen des Imaginärzeitformalismus analytisch ausgewertet.

### 2.1.3 Die Gap-Gleichungen

Aus den stationären Bedingungen für das effektive Potential

$$\frac{\delta V_{eff}}{\delta \phi} = 0, \quad \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_i(k)} = 0; \quad i = \pi, \sigma \tag{2.17}$$

erhält man durch Variation nach dem Kondensat  $\phi$  die Kondensatgleichung

$$\begin{aligned}
h &= m^2\phi + 2\lambda\phi^3 + 6\lambda\phi \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) - \frac{h}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \\
&+ \frac{3}{8} \frac{h}{\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right]^2 + \frac{1}{\phi^3} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k) \int_l \mathcal{G}_\sigma(l).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Die Funktionalableitungen des effektiven Potentials nach  $G_\sigma(k)$  und  $G_\pi(k)$  liefern die Dyson-Swinger-Gleichungen für die Inversen der vollen Propagatoren

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\sigma^{-1}(k) &= D_\sigma^{-1}(k; \phi) + 2 \frac{\delta V_2}{\delta G_\sigma(k)} \\
&= -k^2 + m_\sigma^2 + \Sigma_\sigma,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\pi^{-1}(k) &= D_\pi^{-1}(k; \phi) + 2 \frac{\delta V_2}{\delta G_\pi(k)} \\
&= -k^2 + m_\pi^2 + \Sigma_\pi,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

wobei die Funktionalableitungen von  $V_2$  nach den vollen Propagatoren

$$\Sigma_i = 2 \frac{\delta V_2}{\delta G_i(k)} \tag{2.21}$$

den Selbstenergien entsprechen

$$\begin{aligned}
\Sigma_\sigma &= 6\lambda\phi^2 + 6\lambda \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k) \\
&= \Sigma_\sigma^*,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_\pi &= \frac{h}{\phi} - \frac{h}{2\phi^3} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) - \frac{k^2}{\phi^2} \int \mathcal{G}_\sigma(k) \\
&= \Sigma_\pi^* - k^2 \Sigma_\pi^{**}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

In der verwendeten Hartree-Näherung bestehen die Selbstenergien aus sogenannten Tadpolediagrammen, die aus Doppelblasendiagrammen mittels Durchschneiden einer der beiden Schleifen resultieren. Da diese Diagramme keine explizite Impulsabhängigkeit besitzen, erhalten die Selbstenergien keinen imaginären Anteil. Folglich können mit dieser Approximation nur die Massen jedoch nicht die Lebensdauer der Mesonen vorhergesagt werden. In diesem Fall ist es naheliegend folgenden Ansatz für die vollen Propagatoren zu wählen:

$$\mathcal{G}_i(k) = \frac{1}{Z_i^2(-k^2 + M_i^2/Z_i^2)}, \quad (2.24)$$

wobei  $M_i/Z_i$  die physikalische Polmasse beschreibt. Für den Wellenrenormierungsparameter  $Z_i$  und den Massenparameter  $M_i$  gelten dabei die Beziehungen

$$M_i^2 = m_i^2 + \Sigma_i^*, \quad (2.25)$$

$$Z_i^2 = 1 + \Sigma_i^{**}. \quad (2.26)$$

Für das  $\sigma$ -Feld ist keine Wellenrenormierung erforderlich, und die temperaturabhängige  $\sigma$ -Masse kann gemäß Gl. (2.25) bestimmt werden

$$\begin{aligned} M_\sigma^2 &= m_\sigma^2 + \Sigma_\sigma^* \\ &= m^2 + 6\lambda\phi^2 + 6\lambda \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Das Pion bedarf einer Wellenrenormierung, wobei der Term mit Impulsen vor dem Integral  $-\frac{k^2}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k)$  innerhalb der Pion-Selbstenergie Gl. (2.23) zum Wellenrenormierungsparameter  $Z_\pi$  beiträgt

$$\begin{aligned} Z_\pi^2 &= 1 + \Sigma_\pi^{**} \\ &= 1 + \frac{1}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k), \end{aligned} \quad (2.28)$$

während die restlichen Terme in  $\Sigma_\pi$  den temperaturabhängigen Massenparameter für das Pion ergeben

$$\begin{aligned} M_\pi^2 &= m_\pi^2 + \Sigma_\pi^* \\ &= \frac{h}{\phi} \left[ 1 - \frac{1}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Damit lauten die Inversen der vollen Propagatoren

$$\mathcal{G}_\sigma^{-1}(k) = -k^2 + M_\sigma^2, \quad (2.30)$$

$$\mathcal{G}_\pi^{-1}(k) = Z_\pi^2(-k^2 + M_\pi^2/Z_\pi^2), \quad (2.31)$$

wobei  $M_\pi/Z_\pi$  die physikalische Polmasse des Pions beschreibt.

Die vier Gleichungen für das Kondensat (2.18), die Massen (2.27), (2.29) und den Wellenrenormierungsparameter des Pions (2.28) bilden ein geschlossenes System aus gekoppelten Gleichungen, dessen numerische Lösung die Berechnung der Temperaturabhängigkeit für das Kondensat und die Mesonenmassen ermöglicht.

### Bestimmung der Parameter

Unter Vernachlässigung divergenter Vakuumterme  $\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k(M)}$  können die freien Parameter des Modells aus dem trivial regularisierten Gleichungssystem bei  $T = 0$  bestimmt werden:

$$h = m_\pi^2 f_\pi, \quad \lambda = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{4f_\pi^2}, \quad m^2 = -\frac{m_\sigma^2 - 3m_\pi^2}{2}. \quad (2.32)$$

Die Werte für die Pionenzerfallskonstante und die Vakuummassen der Mesonen werden aus particle data group entnommen:  $f_\pi = 92.4$  MeV,  $m_\sigma = 400$  MeV - 1200 MeV,  $m_\pi = 139.5$  MeV.

### Chiraler Limes: $m_\pi = 0$

Im chiralen Limes,  $h = m_\pi = 0$ , lässt sich aus der Gleichung für die Pionmasse (2.29) entnehmen, dass das Pion masselos ist

$$\begin{aligned} M_\pi^2 &= \frac{h}{\phi} \left[ 1 - \frac{1}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

In diesem Fall entspricht der Beitrag  $\int_k k^2 G_\pi(k)$  einer divergenten Konstante, welche für die Beschreibung thermodynamischer Größen des Systems irrelevant ist und daher vernachlässigt werden darf. Aus diesem Grund wird der Term  $\frac{1}{2\phi^2} \int_k k^2 G_\pi(k) \int_l G_\sigma(l)$  innerhalb des effektiven Potentials (2.15) als divergente Konstante in die Auswertung nicht einbezogen. Damit lautet das auszuwertende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= m^2 \phi + 2\lambda \phi^3 + 6\lambda \phi \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) = \phi [M_\sigma^2 - 4\lambda \phi^2], \\ M_\sigma^2 &= m^2 + 6\lambda \phi^2 + 6\lambda \int_k \mathcal{G}_\sigma(k), \end{aligned} \quad (2.34)$$

wobei der Wellenrenormierungsparameter des Pions eins beträgt,  $Z_\pi^2 = 1$ .

**1.  $\phi > 0$ :** In der asymmetrischen Phase wird das Goldstone-Theorem respektiert, da das Pion wie gefordert in der Phase spontan gebrocher Symmetrie masselos ist. Die  $\sigma$ -Masse und das Kondensat werden durch die beiden Gleichungen

$$0 = m^2 + 2\lambda \phi^2 + 6\lambda \int_k \mathcal{G}_\sigma(k), \quad (2.35)$$

$$M_\sigma = \sqrt{4\lambda} \phi \quad (2.36)$$

beschrieben. Die Temperatur  $T_*$ , bei der das Kondensat auf Null sinkt<sup>1</sup>, kann anhand der Kondensatgleichung (2.35) für  $\phi = 0$  und  $M_\sigma = 0$  berechnet werden

$$0 = m^2 + 6\lambda \frac{T_*^2}{12}. \quad (2.37)$$

<sup>1</sup> $T_*$  ist nicht zu verwechseln mit der kritischen Temperatur  $T_c$ , bei der ein Phasenübergang der hadronischen Materie in das QGP statt findet. Um  $T_c$  zu bestimmen muss das effektive Potential als Funktion des Kondensats bei gegebener Temperatur für  $T \geq T_*$  betrachtet werden.

Setzt man für die freien Parameter des Modells  $\lambda$  und  $m^2$  die Werte aus (2.32) ein,  $\lambda = m_\sigma^2/4f_\pi^2$ ,  $m^2 = -m_\sigma^2/2$ , so folgt:  $T_* = 2f_\pi$ .

**2.  $\phi = \mathbf{0}$ :** In der symmetrischen Phase ist die Temperaturabhängigkeit der  $\sigma$ -Masse durch die Gleichung

$$M_\sigma^2 = m^2 + 6\lambda \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \quad (2.38)$$

gegeben. Das Pion hingegen, bleibt im chiralen Limes,  $h = 0$ , auch nach dem Übergang in die symmetrischen Phase weiterhin masselos

$$M_\pi^2 = 0. \quad (2.39)$$

Die Ursache dafür liegt darin, dass alle Beiträge zur Pionmasse per Konstruktion durch die Entwicklung des expliziten Symmetriebrechungsterms  $h(\sigma + \phi) \cos \pi/\phi$  generiert werden, der im chiralen Limes verschwindet.

### 2.1.4 Regularisierung

In diesem Abschnitt erfolgt die Regularisierung der Gap-Gleichungen mit Hilfe des Counterterm-Verfahrens. Dabei wird die UV-Divergenz der Vakuumterme mit Hilfe sogenannter Counterterme subtrahiert

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k(M)} \equiv Q_\mu(M) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ M^2 \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - M^2 + \mu^2 \right], \quad (2.40)$$

wobei ein Regularisierungsparameter  $\mu$  eingeführt wird, siehe [15], S.12. Das Integral über die vollen Propagatoren lässt sich nun folgendermaßen schreiben

$$\int_k G(k) \equiv Q(M, T) = Q_T(M) + Q_\mu(M). \quad (2.41)$$

Dabei ist  $Q_T(M)$  der temperaturabhängige Bose-Einstein Term, siehe Anhang Gl. (4.14) und  $Q_\mu(M)$  der regularisierte Vakuumbeitrag.

#### Explizite Symmetriebrechung: $m_\pi \neq 0$

Mit der Beziehung (2.41) lautet bei explizit gebrochener Symmetrie das regularisierte Gleichungssystem in Hartree-Näherung

$$\begin{aligned} h &= m^2\phi + 2\lambda\phi^3 + 6\lambda\phi [Q_T(M_\sigma) + Q_\mu(M_\sigma)] - \frac{h}{2\phi^2 Z_\pi^2} [Q_T(M_\pi/Z_\pi) + Q_\mu(M_\pi/Z_\pi)] \\ &\quad + \frac{M_\pi^2}{\phi^3 Z_\pi^4} [Q_T(M_\pi/Z_\pi) + Q_\mu(M_\pi/Z_\pi)] [Q_T(M_\sigma) + Q_\mu(M_\sigma)] \\ &\quad + \frac{3h}{8\phi^4 Z_\pi^4} [Q_T(M_\pi/Z_\pi) + Q_\mu(M_\pi/Z_\pi)]^2, \\ M_\sigma^2 &= m^2 + 6\lambda\phi^2 + 6\lambda [Q_T(M_\sigma) + Q_\mu(M_\sigma)] \\ &\quad - \frac{M_\pi^2}{\phi^2 Z_\pi^4} [Q_T(M_\pi/Z_\pi) + Q_\mu(M_\pi/Z_\pi)], \\ M_\pi^2 &= \frac{h}{\phi} - \frac{h}{2\phi^3 Z_\pi^2} [Q_T(M_\pi/Z_\pi) + Q_\mu(M_\pi/Z_\pi)], \\ Z_\pi^2 &= 1 + \frac{1}{\phi^2} [Q_T(M_\sigma) + Q_\mu(M_\sigma)]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

#### Bestimmung der Parameter

Ein sinnvoller Ansatz zur Bestimmung von  $\mu$  ist die Bedingung, dass der Wellenrenormierungsparameter für das Pion bei  $T = 0$  eins betragen soll

$$\begin{aligned} 1 &= Z_\pi^2(T = 0) \\ &= 1 + \frac{1}{f_\pi^2} Q_\mu(m_\sigma). \end{aligned}$$

Diese Bedingung erfordert  $Q_\mu(m_\sigma) = 0$ , was nur für  $\mu = m_\sigma$  erfüllt ist. Die übrigen drei Parameter des Modells  $h$ ,  $\lambda$  und  $m^2$  werden derart gewählt, dass

das Gleichungssystem (2.42) bei  $T = 0$  die richtigen Werte für das Kondensat sowie die beiden Mesonenmassen liefert:

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{m_\pi^2 f_\pi}{\left(1 - \frac{1}{2f_\pi^2} Q_\mu(m_\pi)\right)}, \\
 m^2 &= m_\sigma^2 - 6\lambda f_\pi^2 + \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} Q_\mu(m_\pi), \\
 \lambda &= \frac{m_\sigma^2}{4f_\pi^2} + \frac{m_\pi^2}{4f_\pi^4} Q_\mu(m_\pi) \\
 &\quad - \frac{h}{4f_\pi^3} \left[ 1 + \frac{1}{2f_\pi^2} Q_\mu(m_\pi) + \frac{3}{8} \frac{1}{f_\pi^4} Q_\mu^2(m_\pi) \right]. \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

**Chiraler Limes:**  $m_\pi = 0$

Im chiralen Limes ist das Pion masselos,  $M_\pi^2 = 0$ , und bedarf keiner Wellennormierung,  $Z_\pi^2 = 1$ . In der asymmetrischen Phase lautet das Gleichungssystem für das Kondensat und die Masse des  $\sigma$ -Feldes bei Counterterm-Regularisierung:

$$\begin{aligned}
 0 &= \phi [M_\sigma^2 - 4\lambda\phi^2], \\
 M_\sigma^2 &= m^2 + 6\lambda\phi^2 + 6\lambda [Q_T(M_\sigma) + Q_\mu(M_\sigma)]. \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

In diesem Fall existiert nur eine sinnvolle Möglichkeit für die Wahl des Regularisierungsparameters, damit die Temperatur  $T_*$ , bei der das Kondensat auf Null sinkt, unabhängig von  $\mu$  bleibt:  $\mu^2 = m_\sigma^2/e$ . Bei dieser Wahl des Regularisierungsparameters behält die Kopplungskonstante  $\lambda$  ihren klassischen Wert auf Baumgraphenniveau bei, während der Massenparameter  $m^2$  bedingt durch die Regularisierung zusätzliche Beiträge erhält

$$\lambda = \frac{m_\sigma^2}{4f_\pi^2}, \quad m^2 = -m_\sigma^2/2 - 6\lambda\mu^2/16\pi^2. \quad (2.45)$$



### 2.1.5 Berücksichtigung der Jacobi-Determinante

In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit vorgestellt, die Jacobi-Determinante, die beim Übergang von der kartesischen Repräsentation  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$  zur polaren Darstellung  $\Phi = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{i\pi/\phi}$  generiert wird, bei der Auswertung des  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modells zu berücksichtigen. In diesem Fall wird der Jacobian anhand eines vier-dimensionalen Cutoffs  $\Lambda$  in die Konstruktion der Lagrangedichte einbezogen. Mit Hilfe des CJT-Formalismus erfolgt danach das Aufstellen des effektiven Potentials in Doppelblasen-Approximation, welches die Herleitung eines geschlossenen Gleichungssystems für die Mesonenmassen und das Kondensat erlaubt. Anschließend erfolgt eine konsistente Regularisierung der divergenten Vakuumbeiträge anhand des Cutoff-Verfahrens. Dabei wird eine Redefinition des Winkelanteils in der Polardarstellung des Feldes erforderlich, um weiterhin die Bedingung erfüllen zu können, dass der Wellenrenormierungsparameter für das Pion im Vakuum eins betragen soll.

#### Die Lagrangedichte

Wie bereits erwähnt, leistet die Jacobi-Determinante Gl. (2.3), welche beim Übergang zur Polardarstellung entsteht, einen divergenten Beitrag zur effektiven Wirkung Gl. (2.4), der einer Regularisierung bedarf. Eine Möglichkeit besteht darin, den Determinantenterm mit Hilfe eines vier-dimensionalen UV-Cutoffs in die Konstruktion der Lagrangedichte einzubeziehen

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L} + \delta^4(0) \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \ln\left(\frac{\sigma}{\phi}\right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L}' \right], \end{aligned} \quad (2.46)$$

wo

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \Lambda^4 \ln\left(\frac{\sigma}{\phi}\right). \quad (2.47)$$

Setzt man das um seinen Vakuumerwartungswert verschobene  $\sigma$ -Feld  $\sigma \rightarrow \sigma + \phi$  in Gl.(2.47) ein,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 \left( \frac{\sigma^2 + 2\sigma\phi + \phi^2}{\phi^2} \right) - \frac{m^2}{2} (\sigma^2 + 2\sigma\phi + \phi^2) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} (\sigma + \phi)^4 + h(\sigma + \phi) \cos \frac{\pi}{\phi} + \Lambda^4 \ln\left(\frac{\sigma + \phi}{\phi}\right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

und entwickelt alle Terme bis zur vierten Ordnung in den Feldern, so lassen sich mit

$$\ln\left(\frac{\sigma + \phi}{\phi}\right) = \ln\left(1 + \frac{\sigma}{\phi}\right) = \frac{\sigma}{\phi} - \frac{\sigma^2}{2\phi^2} + \frac{\sigma^3}{3\phi^3} - \frac{\sigma^4}{4\phi^4} \dots \quad (2.49)$$

aus der resultierenden Lagrangedichte

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - \frac{\sigma^2}{2} \left( m^2 + 6\lambda\phi^2 + \frac{\Lambda^4}{\phi^2} \right) - \pi^2 \frac{h}{2\phi} \\
 &\quad - \frac{\lambda}{2} \sigma^4 + \frac{1}{2\phi^2} (\partial_\mu \pi)^2 \sigma^2 + \frac{h}{4!\phi^3} \pi^4 - \frac{\Lambda^4}{4\phi^4} \sigma^4 \\
 &\quad + \frac{1}{\phi} (\partial_\mu \pi)^2 \sigma - 2\lambda\phi\sigma^3 - \frac{h}{2\phi^2} \sigma\pi^2 + \frac{\Lambda^4}{3\phi^3} \sigma^3 \\
 &\quad - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{2} \phi^4 + h\phi \\
 &\quad + \text{Terme h\"oherer Ordnung in den Feldern}
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

die inversen Propagatoren

$$\begin{aligned}
 D_\sigma^{-1}(k; \phi) &= -k^2 + m^2 + 6\lambda\phi^2 + \frac{\Lambda^4}{\phi^2}, \\
 D_\pi^{-1}(k; \phi) &= -k^2 + \frac{h}{\phi}
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

sowie die Massen

$$\begin{aligned}
 m_\sigma^2 &= m^2 + 6\lambda\phi^2 + \frac{\Lambda^4}{\phi^2}, \\
 m_\pi^2 &= \frac{h}{\phi}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

auf Baumgraphenniveau ablesen.

### Das effektive Potential und die Gap-Gleichungen

Die Entwicklung des Terms  $\Lambda^4 \ln(\frac{\sigma}{\phi})$  erzeugt einen zus\u00e4tzlichen Vierervertex  $-\frac{\Lambda^4}{4\phi^4} \sigma^4$ . Daraus wird ein weiteres Doppelblasendiagramm konstruiert

$$-\frac{\Lambda^4}{4\phi^4} \sigma^4 \rightarrow -\frac{3\Lambda^4}{4\phi^4} \left[ \int_k G_\sigma(k) \right]^2, \tag{2.53}$$

welches zu  $V_2$  (2.14) beitr\u00e4gt

$$\begin{aligned}
 V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma) &= -\frac{1}{2\phi^2} \int_k k^2 G_\pi(k) \int_l G_\sigma(l) + \frac{3}{2} \lambda \left[ \int_k G_\sigma(k) \right]^2 \\
 &\quad - \frac{h}{8\phi^3} \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2 + \frac{3\Lambda^4}{4\phi^4} \left[ \int_k G_\sigma(k) \right]^2.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Damit lautet das CJT-effektive Potential

$$\begin{aligned}
 V_{eff}(\phi; G_\pi, G_\sigma) &= \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^4 - h\phi \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int \ln G_\sigma^{-1}(k) + D_\sigma^{-1}(k; \phi) G_\sigma(k) - 1 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int [\ln G_\pi^{-1}(k) + D_\pi^{-1}(k; \phi) G_\pi(k) - 1] \\
 &\quad + V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma).
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Die Variation nach dem Kondensat  $\phi$  und den vollen Propagatoren  $G_\pi$  und  $G_\sigma$  führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
h &= m^2\phi + 2\lambda\phi^3 + 6\lambda\phi \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) - \frac{h}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \\
&\quad + \frac{3h}{8\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right]^2 + \frac{1}{\phi^3} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k) \int_l \mathcal{G}_\sigma(l) \\
&\quad - \frac{\Lambda^4}{\phi^3} \left[ 1 + \frac{3}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right] \int_k \mathcal{G}_\sigma(k), \\
M_\sigma^2 &= m^2 + 6\lambda\phi^2 + 6\lambda \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k) \\
&\quad + \frac{\Lambda^4}{\phi^2} \left[ 1 + \frac{3}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right], \\
M_\pi^2 &= \frac{h}{\phi} \left[ 1 - \frac{1}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right], \\
Z_\pi^2 &= 1 + \frac{1}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k). \tag{2.56}
\end{aligned}$$

### Redefinition des Winkelanteils und die Herleitung des regularisierten Gleichungssystems

Da die Jacobi-Determinante unter Einführung eines vier-dimensionalen Cutoffs in die Auswertung des Modells einbezogen wird, ist es konsistent, die divergenten Vakuumbeiträge anhand des Cutoff-Verfahrens, siehe [15] S.9, zu regularisieren

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k(M)} \equiv Q_\Lambda(M) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln\left(\frac{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M}\right) \right]. \tag{2.57}$$

Da  $Q(\Lambda, m_\sigma)$  für  $\Lambda > 0$  stets größer Null ist, erfordert die Bedingung, dass der Wellenrenormierungsparameter für das Pion im Vakuum eins betragen soll,

$$\begin{aligned}
1 &= Z_\pi^2(T=0) \\
&= 1 + \frac{1}{f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\sigma) \tag{2.58}
\end{aligned}$$

eine Redefinition der Winkelkomponente in der Polardarstellung des Feldes

$$\Phi = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{i\pi/\phi} \rightarrow \Phi' = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{iz\pi/\phi}. \tag{2.59}$$

Dabei ist  $z$  ein Parameter, dessen genauer Wert im Verlauf der Auswertung bestimmt wird. Die Redefinition der Winkelkomponente muss auch bei der Formulierung der Jacobi-Determinante

$$\mathfrak{S}' = \left| \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(\sigma, \pi)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos z\pi/\phi & -z\sigma/\phi \sin z\pi/\phi \\ \sin z\pi/\phi & z\sigma/\phi \cos z\pi/\phi \end{array} \right| = \frac{z\sigma}{\phi} \tag{2.60}$$

und der Lagrangedichte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{z^2}{2} (\partial_\mu \pi)^2 \left( \frac{\sigma^2 + 2\sigma\phi + \phi^2}{\phi^2} \right) - \frac{m^2}{2} (\sigma^2 + 2\sigma\phi + \phi^2) \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} (\sigma + \phi)^4 + h(\sigma + \phi) \cos \frac{z\pi}{\phi} + \Lambda^4 \ln\left(z \frac{\sigma + \phi}{\phi}\right) \tag{2.61}
\end{aligned}$$

beachtet werden. Nach Ausmultiplikation und anschließendem Zusammenfassen können aus

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{z^2}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - \frac{\sigma^2}{2} (m^2 + 6\lambda\phi^2 + z^2 \frac{\Lambda^4}{\phi^2}) - z^2 \pi^2 \frac{h}{2\phi} \\
 &\quad - \frac{\lambda}{2} \sigma^4 + \frac{z^2}{2\phi^2} (\partial_\mu \pi)^2 \sigma^2 + \frac{z^4 h}{4! \phi^3} \pi^4 - \frac{z^4 \Lambda^4}{4\phi^4} \sigma^4 \\
 &\quad + \frac{z^2}{\phi} (\partial_\mu \pi)^2 \sigma - 2\lambda\phi\sigma^3 - \frac{z^2 h}{2\phi^2} \sigma \pi^2 + \frac{z^3 \Lambda^4}{3\phi^3} \sigma^3 \\
 &\quad - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{2} \phi^4 + h\phi \\
 &\quad + \text{Terme höherer Ordnung in den Feldern}
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

die inversen Propagatoren

$$\begin{aligned}
 D_\sigma^{-1}(k; \phi) &= -k^2 + m^2 + 6\lambda\phi^2 + z^2 \frac{\Lambda^4}{\phi^2}, \\
 D_\pi^{-1}(k; \phi) &= z^2 \left( -k^2 + \frac{h}{\phi} \right)
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

und die Massen auf Baumgraphenniveau

$$\begin{aligned}
 m_\sigma^2 &= m^2 + 6\lambda\phi^2 + z^2 \frac{\Lambda^4}{\phi^2}, \\
 m_\pi^2 &= z^2 \frac{h}{\phi}
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

bestimmt werden. Aus dem effektiven Potential

$$\begin{aligned}
 V_{eff}(\phi; G_\pi, G_\sigma) &= \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^4 - h\phi \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int [\ln G_\sigma^{-1}(k) + D_\sigma^{-1}(k; \phi) G_\sigma(k) - 1] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int [\ln G_\pi^{-1}(k) + D_\pi^{-1}(k; \phi) G_\pi(k) - 1] \\
 &\quad + V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma),
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

wo  $V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma)$  nach Redefinition durch

$$\begin{aligned}
 V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma) &= -\frac{z^2}{2\phi^2} \int_k k^2 G_\pi(k) \int_l G_\sigma(l) + \frac{3}{2} \lambda \left[ \int_k G_\sigma(k) \right]^2 \\
 &\quad - \frac{z^4 h}{8\phi^3} \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2 + \frac{3z^4 \Lambda^4}{4\phi^4} \left[ \int_k G_\sigma(k) \right]^2
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

gegeben ist, lässt sich schließlich das regularisierte Gleichungssystem für das Kondensat, die Mesonenmassen und den Wellenrenormierungsparameter des Pi-

ons herleiten:

$$\begin{aligned}
h &= m^2\phi + 2\lambda\phi^3 + 6\lambda\phi \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) - \frac{z^2 h}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \\
&\quad + \frac{3}{8} \frac{z^4 h}{\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right]^2 + \frac{z^2}{\phi^3} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k) \int_l \mathcal{G}_\sigma(l) \\
&\quad - \frac{z^2 \Lambda^4}{\phi^3} \left[ 1 + \frac{3z^2}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right] \int_k \mathcal{G}_\sigma(k), \\
M_\sigma^2 &= m^2 + 6\lambda\phi^2 + 6\lambda \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) - \frac{z^2}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k) \\
&\quad + \frac{z^2 \Lambda^4}{\phi^2} \left[ 1 + \frac{3z^2}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right], \\
M_\pi^2 &= \frac{z^2 h}{\phi} \left[ 1 - \frac{z^2}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right], \\
Z_\pi^2 &= z^2 \left[ 1 + \frac{1}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right]. \tag{2.67}
\end{aligned}$$

Das Integral  $\int_k G(k)$  ist bei der Cutoff-Regularisierung durch

$$\int_k G(k) \equiv Q(M, T) = Q_T(M) + Q_\Lambda(M) \tag{2.68}$$

gegeben, wo  $Q_T(M)$  den temperaturabhängigen Anteil, Gl. (4.14), und  $Q_\Lambda(M)$  den regularisierten Vakuumbeitrag, Gl. (2.57), repräsentiert.

### Bestimmung der Parameter

Bei der Cutoff-Regularisierung ist  $\Lambda$  ein variabler Parameter, der frei wählbar ist. Alle anderen Parameter des Modells können aus dem Gleichungssystem (2.67) im Vakuum

$$\begin{aligned}
h &= m^2 f_\pi + 2\lambda f_\pi^3 + 6\lambda f_\pi Q_\Lambda(m_\sigma) - \frac{z^2 h}{2f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\pi) \\
&\quad + \frac{3}{8} \frac{z^4 h}{f_\pi^4} Q_\Lambda^2(m_\pi) + \frac{z^2 m_\pi^2}{f_\pi^3} Q_\Lambda(m_\pi) Q_\Lambda(m_\sigma) \\
&\quad - \frac{z^2 \Lambda^4}{f_\pi^3} \left[ 1 + \frac{3z^2}{f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\sigma) \right] Q_\Lambda(m_\sigma), \\
m_\sigma^2 &= m^2 + 6\lambda f_\pi^2 + 6\lambda Q_\Lambda(m_\sigma) - \frac{z^2 m_\pi^2}{f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\pi) \\
&\quad + \frac{z^2 \Lambda^4}{f_\pi^2} \left[ 1 + \frac{3z^2}{f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\sigma) \right], \\
m_\pi^2 &= \frac{z^2 h}{f_\pi} \left[ 1 - \frac{z^2}{2f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\pi) \right], \\
1 &= z^2 \left[ 1 + \frac{1}{f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\sigma) \right] \tag{2.69}
\end{aligned}$$

berechnet werden:

$$\begin{aligned}
z^2 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\sigma)}, \\
h &= \frac{m_\pi^2 f_\pi}{z^2 \left[ 1 - \frac{z^2}{2f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\pi) \right]}, \\
m^2 &= m_\sigma^2 - 6\lambda f_\pi^2 - 6\lambda Q_\Lambda(m_\sigma) + \frac{z^2 m_\pi^2}{f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\pi) \\
&\quad - \frac{z^2 \Lambda^4}{f_\pi^2} \left[ 1 + \frac{3z^2}{f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\sigma) \right], \\
\lambda &= \frac{m_\sigma^2}{4f_\pi^2} - \frac{z^2 \Lambda^4}{4f_\pi^4} \left[ 1 + z^2 \frac{3}{f_\pi^4} Q_\Lambda^2(m_\sigma) + \frac{4}{f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\sigma) \right] \\
&\quad + \frac{z^2 m_\pi^2}{4f_\pi^4} Q_\Lambda(m_\pi) + \frac{z^2 m_\pi^2}{4f_\pi^6} Q_\Lambda(m_\pi) Q_\Lambda(m_\sigma) \\
&\quad + \frac{h}{4f_\pi^3} \left[ -1 - \frac{z^2}{2f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\pi) + \frac{3}{8} \frac{z^4}{f_\pi^4} Q_\Lambda^2(m_\pi) \right]. \tag{2.70}
\end{aligned}$$

Die Parameter werden dabei derart bestimmt, dass die Lösung des regularisierten Gleichungssystems im Vakuum die richtigen Werte für das Kondensat und die Mesonenmassen ergibt.

### 2.1.6 Resultate

In diesem Abschnitt werden zunächst die numerischen Resultate für die im Abschnitt 2.1 konstruierte 1.Polardarstellung ohne Berücksichtigung der Jacobi-Determinante präsentiert. Es erfolgt eine separate Betrachtung von zwei unterschiedlichen Fällen: dem chiralen Limes und der explizit gebrochenen Symmetrie. Dabei werden die Ergebnisse bei trivialer und Counterterm-Regularisierung präsentiert, diskutiert und mit den Resultaten der kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , der beiden Freiheitsgrade im  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modell verglichen.

Anschließend werden die numerischen Ergebnisse der 1.Polardarstellung unter Einbeziehung der Jacobi-Determinante gezeigt, wobei die divergenten Vakuumbeiträge mit Hilfe der Cutoff-Methode regularisiert werden.

Zur Auswertung der gekoppelten Gleichungen dient ein FORTRAN77 Programm. Die Lösungen der Gleichungssysteme liefern die Temperaturabhängigkeit für das Kondensat, den Wellenrenormierungsparameter des Pions und die Polmassen für das Pion und das  $\sigma$ -Feld.

#### Resultate für die Polardarstellung ohne Berücksichtigung der Jacobi-Determinante

##### Explizit gebrochene Symmetrie: $m_\pi \neq 0$

Abbildungen 2.1, 2.2 und 2.3 zeigen die mesonischen Polmassen, das Kondensat und den Wellenrenormierungsparameter des Pions als Funktion der Temperatur für explizit gebrochene Symmetrie bei trivialer und Counterterm-Regularisierung.

In beiden Fällen liefert die numerische Auswertung einen Crossover-Phasenübergang für das Kondensat. Im trivial regularisierten System beträgt die kritische Temperatur etwa 275 MeV. Die Masse des Pions sinkt mit steigender Temperatur und schmilzt bei 370 MeV auf Null. Bei Counterterm-Regularisierung liegt die kritische Temperatur etwas niedriger, bei ungefähr 260 MeV, wobei das Pion bereits bei einer Temperatur von 315 MeV masselos wird. Oberhalb der kritischen Temperatur schmilzt das Kondensat weiter, allerdings findet auch für höhere Energien keine Massentartung der chiralen Partner,  $\sigma$  und  $\pi$ , statt. Während die  $\sigma$ -Masse nahezu linear wächst, bleibt das Pion masselos.

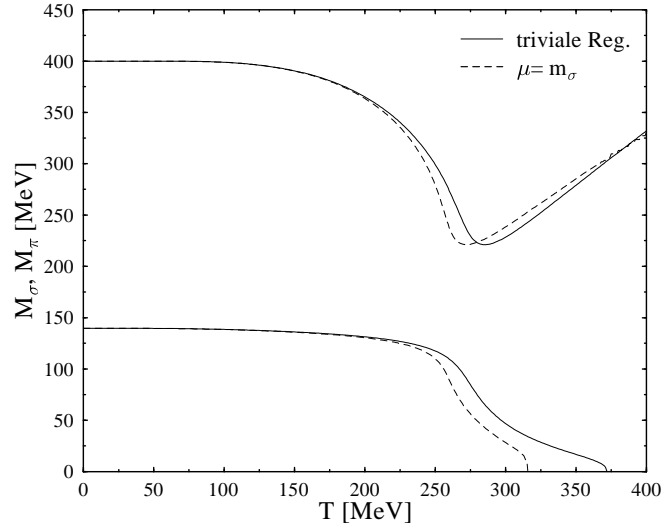


Abbildung 2.1: Die Mesonenmassen,  $M_\sigma$  und  $M_\pi$ , als Funktion der Temperatur in der 1. Polardarstellung für  $m_\pi = 139.5$  MeV bei trivialer und bei Counterterm-Regularisierung mit  $\mu = m_\sigma$ .

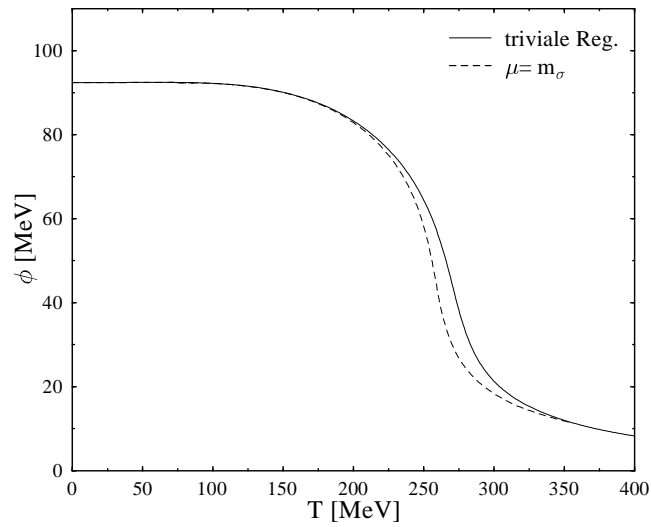


Abbildung 2.2: Das Kondensat als Funktion der Temperatur in der 1. Polardarstellung für  $m_\pi = 139.5$  MeV bei trivialer und bei Counterterm-Regularisierung mit  $\mu = m_\sigma$ .



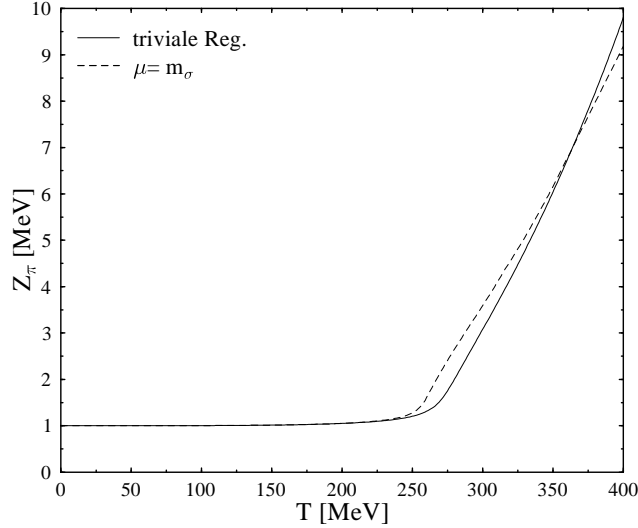


Abbildung 2.3: Die Wellenrenormierungsfunktion für das Pion als Funktion der Temperatur in der 1. Polardarstellung für  $m_\pi = 139.5$  MeV bei trivialer und bei Counterterm-Regularisierung mit  $\mu = m_\sigma$ .

### Chiraler Limes: $m_\pi = 0$

In den Abbildungen 2.4 und 2.5 ist der Verlauf der  $\sigma$ -Masse und des Kondensats als Funktion der Temperatur im chiralen Limes veranschaulicht. Wie bei explizit gebrochener Symmetrie werden auch die Ergebnisse bei Counterterm-Regularisierung präsentiert.

**1.  $\phi \neq 0$ :** In der asymmetrischen Phase liefert die Auswertung einen Phasenübergang erster Ordnung. Das Pion ist in Übereinstimmung mit dem Goldstone-Theorem masselos,  $M_\pi = 0$ , wobei der Wellenrenormierungsparameter des Pions eins beträgt,  $Z_\pi = 1$ . Die  $\sigma$ -Masse verläuft gemäß der Gleichung  $M_\sigma = \sqrt{4\lambda}\phi$  und sinkt bei einer Temperatur von  $2f_\pi = 184.6$  MeV auf Null.

**2.  $\phi = 0$ :** In der symmetrischen Phase wächst die  $\sigma$ -Masse mit steigender Temperatur, wogegen das Pion weiterhin masselos bleibt,  $M_\pi = 0$ . Es findet somit keine Massenentartung der chiralen Partner statt, obwohl die spontane Symmetriebrechung aufgehoben ist.

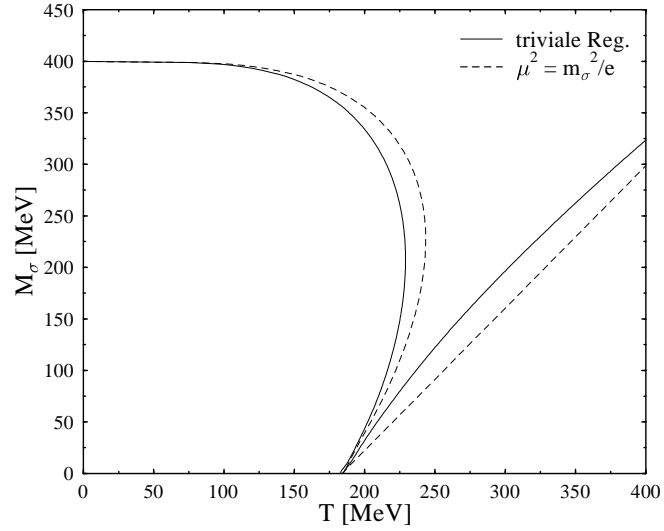


Abbildung 2.4: Die  $\sigma$ -Masse als Funktion der Temperatur in der 1. Polardarstellung für  $m_\pi = 0$  MeV bei trivialer und bei Counterterm-Regularisierung mit  $\mu^2 = m_\sigma^2/e$ .

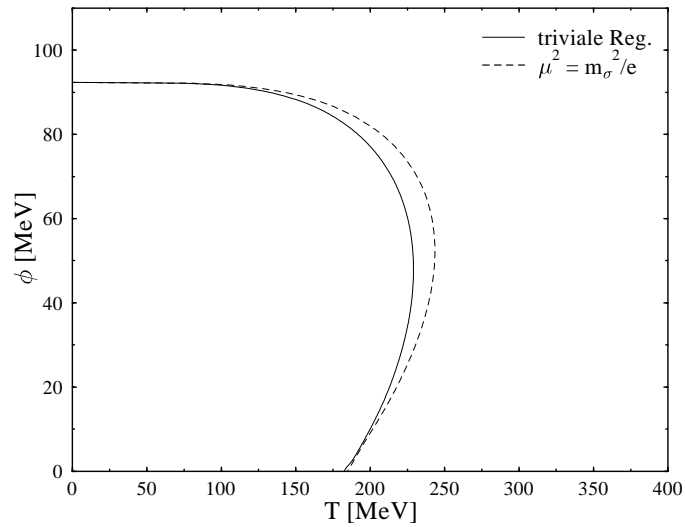


Abbildung 2.5: Das Kondensat als Funktion der Temperatur in der 1. Polardarstellung für  $m_\pi = 0$  MeV bei trivialer und bei Counterterm-Regularisierung mit  $\mu^2 = m_\sigma^2/e$ .

### Vergleich zwischen kartesischer und polarer Darstellung

Anschließend sollen die numerischen Resultate für die 1.Polardarstellung,  $\Phi = \sigma e^{i\pi/\phi}/\sqrt{2}$ , mit den Resultaten der kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , der beiden Freiheitsgrade im  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modell verglichen werden.

#### Explizit gebrochene Symmetrie: $m_\pi \neq 0$

Bei explizit gebrochener Symmetrie verläuft das Kondensat crossover-artig, Abb. 2.7, wobei die kritische Temperatur in der kartesischen Repräsentation etwa 250 MeV beträgt und damit rund 25 MeV niedriger liegt als in der 1.Polardarstellung. In beiden Fällen liefert die numerische Auswertung einen ähnlichen Verlauf für die  $\sigma$ -Masse, mit einem kontinuierlichen Anstieg oberhalb der kritischen Temperatur, Abb. 2.6. Für den Verlauf der temperaturabhängigen Pionmasse kann dagegen ein deutlicher Unterschied beobachtet werden. Während in der kartesischen Repräsentation ein klarer Phasenübergang stattfindet, der sich in einer Massenentartung zwischen dem Pion und seinem chiralen Partner,  $\sigma$ , manifestiert, sinkt in der 1.Polardarstellung die Pionmasse oberhalb von etwa 370 MeV auf Null und vermag auch für höhere Temperaturen nicht mehr zu steigen.

In der 1.Polardarstellung muss bei der Auswertung des Modells in Hartree-Näherung der explizite Symmetriebrechungsterm  $h(\sigma + \phi) \cos(\pi/\phi)$  bis zur vierten Ordnung in den Feldern entwickelt werden, um daraus die relevanten Doppelblasendiagramme konstruieren zu können. Beim Übergang zu endlichen Temperaturen werden die physikalischen Felder als Fluktuationen um den Grundzustand realisiert, der bei  $\pi = 0$  und  $\sigma = \phi = f_\pi$  liegt. Für niedrigen Temperatur ist die Approximation  $\pi/\phi \ll 1$  erfüllt, da thermische Anregungen pionischer Zustände relativ klein sind. Daher ist es legitim, den expliziten Symmetriebrechungsterm  $h(\sigma + \phi) \cos(\pi/\phi)$  nur bis zur vierten Ordnung zu entwickeln und die Terme höherer Ordnung zu vernachlässigen. Für höhere Temperaturen liefert diese Näherung keine physikalisch zuverlässigen Ergebnisse mehr. Aus diesem Grund werden mit steigender Temperatur zunehmend größere Unterschiede für den Verlauf der Pionmasse zwischen der polaren und kartesischen Darstellung beobachtet.

In der Nähe der kritischen Temperatur erweisen sich generell alle Terme der Form  $\pi/\phi$ ,  $\sigma/\phi$  als problematisch, da dort die Felder sehr stark fluktuieren, während das Kondensat auf infinitesimal kleine Werte schmilzt. Folglich ist der Übergang zur 1.Polardarstellung nicht geeignet, um das Verhalten der hadronischen Materie am Phasenübergang zu beschreiben.

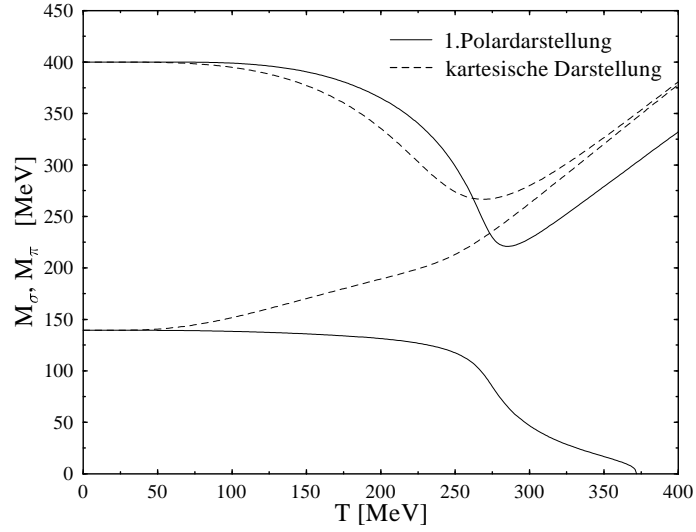


Abbildung 2.6: Die Mesonenmassen,  $M_\sigma$  und  $M_\pi$ , als Funktion der Temperatur für die 1. Polardarstellung,  $\Phi^t = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{i\pi/\phi}$ , und die kartesische Repräsentation,  $\Phi = (\sigma, \pi)$ , der beiden Freiheitsgrade im  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modell für  $m_\pi = 139.5$  MeV bei trivialer Regularisierung.

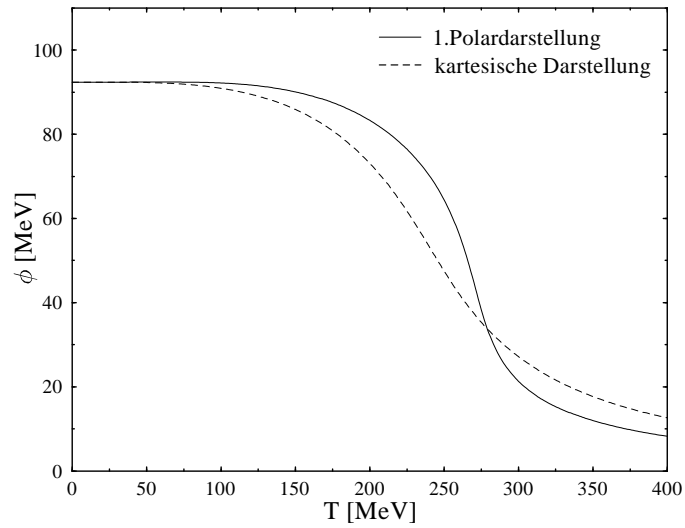


Abbildung 2.7: Das Kondensat als Funktion der Temperatur für die 1. Polardarstellung,  $\Phi = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{i\pi/\phi}$ , und die kartesische Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , der beiden Freiheitsgrade im  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modell für  $m_\pi = 139.5$  MeV bei trivialer Regularisierung.

**Chiraler Limes:**  $m_\pi = 0$ 

Im chiralen Limes ergibt die numerische Auswertung einen Phasenübergang erster statt zweiter Ordnung für das Kondensat, Abb. 2.9, wobei die Temperatur, bei der das Kondensat auf Null schmilzt, in kartesischer Repräsentation  $\sqrt{3}f_\pi$  beträgt und damit rund 30 MeV niedriger liegt als in der Polardarstellung<sup>2</sup>. Die temperaturabhängige  $\sigma$ -Masse verläuft gemäß der Gleichung  $M_\sigma = \sqrt{4}\lambda\phi$ , Abb. 2.8, und ist somit direkt proportional zum Verlauf des Kondensats. In der asymmetrischen Phase besitzt das Pion in der kartesischen Darstellung eine endliche Masse, obwohl die Symmetrie spontan gebrochen ist. Dies ist mit einer Verletzung des Goldstone-Theorems verbunden, laut dem eine spontan gebrochene  $O(2)$ -Symmetrie die Existenz eines masselosen Bosons impliziert. Dieses Defizit wird beim Übergang zur 1.Polardarstellung behoben, da das Pion wie gefordert masselos ist und somit mit dem Goldstone-Boson identifiziert werden kann.

Der Übergang in die symmetrischen Phase zeichnet sich in kartesischer Darstellung mit einer für den Phasenübergang charakteristischen Massenentartung der beiden chiralen Partner,  $\sigma$  und  $\pi$ , aus, Abb. 2.8. In der polaren Darstellung bleibt dagegen das Pion auch in der symmetrischen Phase masselos, während die  $\sigma$ -Masse mit steigender Temperatur wächst.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass beim Übergang zur 1.Polardarstellung die numerische Auswertung sowohl bei explizit gebrochener Symmetrie als auch im chiralen Limes vergleichbare Ergebnisse für den Verlauf des Kondensats und der  $\sigma$ -Masse liefert wie für die kartesische Repräsentation. Bei der Beschreibung der temperaturabhängigen Masse des Pions, welches mit der Winkelvariable identifiziert wird, weist die 1.Polardarstellung dagegen Mängel auf. So wird einerseits das Goldstone-Theorem respektiert, andererseits bleibt das Pion im chiralen Limes auch in der symmetrischen Phase masselos, was eine Entartung mit seinem chiralen Partner,  $\sigma$ , ausschließt. Auch bei explizit gebrochener Symmetrie findet keine Massenentartung zwischen  $\sigma$  und  $\pi$  statt, da das Pion oberhalb von 370 MeV masselos wird.

---

<sup>2</sup>Im Polarmodell sinkt das Kondensat bei einer Temperatur von  $\sqrt{2}f_\pi$  auf Null. Diese Temperatur entspricht jedoch nicht der kritischen Temperatur. Um die kritische Temperatur zu ermitteln, ist es notwendig, sich das effektive Potential als Funktion von  $\phi$  bei gegebener Temperatur anzuschauen.

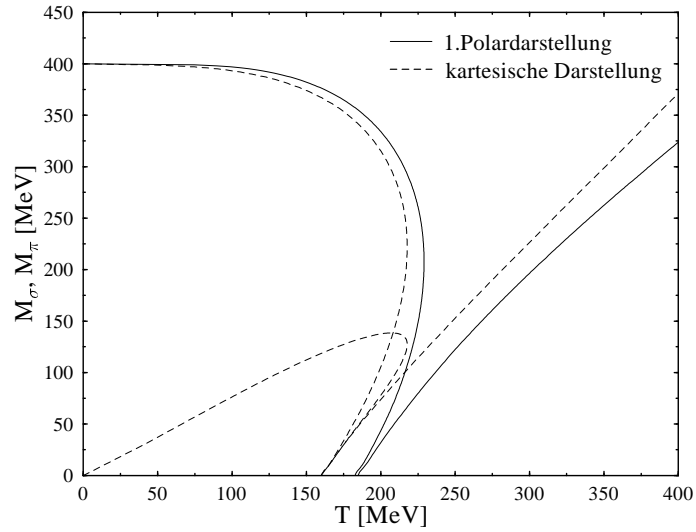


Abbildung 2.8: Die Mesonenmassen  $M_\sigma$  und  $M_\pi$  als Funktion der Temperatur für die 1. Polardarstellung,  $\Phi = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}e^{i\pi/\phi}$ , und die kartesische Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , der beiden Freiheitsgrade im  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modell für  $m_\pi = 0$  MeV bei trivialer Regularisierung.

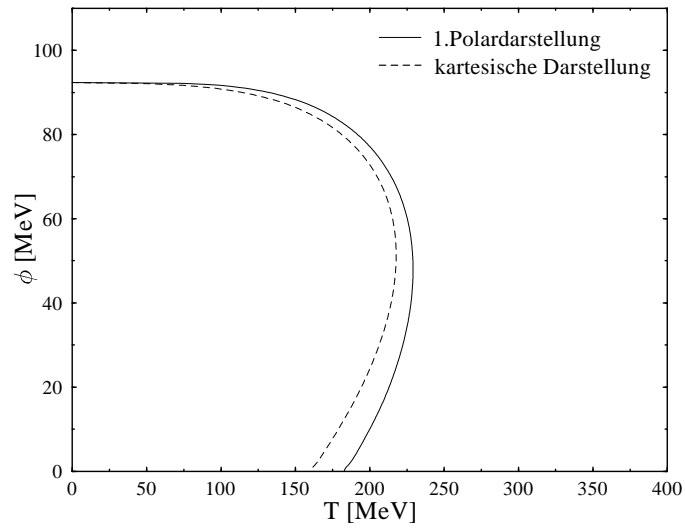


Abbildung 2.9: Das Kondensat als Funktion der Temperatur für die 1. Polardarstellung,  $\Phi = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}e^{i\pi/\phi}$ , und die kartesische Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , der beiden Freiheitsgrade im  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modell für  $m_\pi = 0$  MeV bei trivialer Regularisierung.

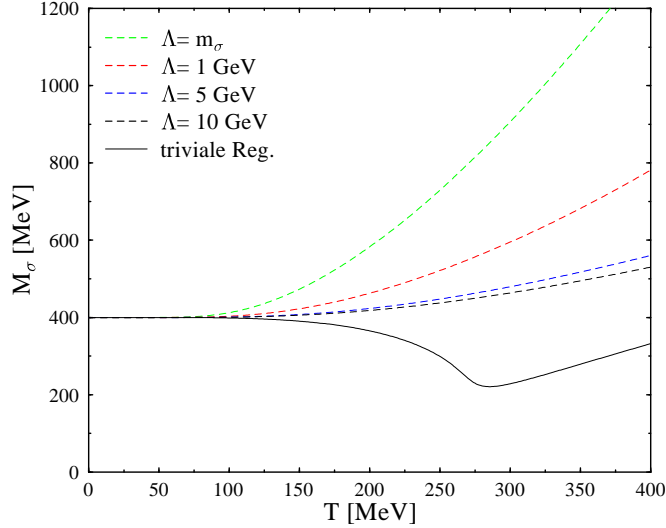


Abbildung 2.10: Die  $\sigma$ -Masse als Funktion der Temperatur in der 1.Polardarstellung unter Berücksichtigung der Jacobi-Determinante für  $m_\pi = 139.5$  MeV bei trivialer und bei Cutoff-Regularisierung.

### Resultate für die 1.Polardarstellung unter Berücksichtigung der Jacobi-Determinante

Abbildungen 2.11, 2.10, 2.12 und 2.13 zeigen die Polmassen, das Kondensat und den Wellenrenormierungsparameter des Pions für die 1.Polardarstellung unter Berücksichtigung der Jacobi-Determinante bei explizit gebrochener Symmetrie, wobei die divergenten Vakuumbeiträge anhand der Cutoff-Methode regularisiert werden. In diesem Fall wächst die  $\sigma$ -Masse sowie der Wellenrenormierungsparameter des Pions kontinuierlich mit der Temperatur, während das Kondensat und die Pionmasse langsam schmelzen. Allerdings wird das Modell bereits für relativ geringe  $\Lambda$ -Werte trivial.

Auch in der kartesischen Darstellung erweist sich die Cutoff-Regularisierung als problematisch. Wie in der Arbeit von J.T. Lenaghan und D.H. Rischke [15], S.10 gezeigt, ist eine physikalisch sinnvolle Regularisierung nur im LN Limes für endliche  $\Lambda$ -Werte möglich. Im chiralen Limes muss der Cutoff sogar komplett verschwinden, um die freien Parameter des Modells derart anpassen zu können, dass das regularisierte Gleichungssystem die richtigen Vakuumwerte für die Massen und das Kondensat bei  $T = 0$  liefert. Ausserdem ist es eine bekannte Tatsache, dass das  $O(N)$  Modell im Limes  $\Lambda \rightarrow \infty$  trivial wird.

Als Fazit lässt sich festhalten, dass die Einbeziehung der Jacobi-Determinante mittels eines vier-dimensionalen Cutoffs die Mängel der 1.Polardarstellung nicht zu beheben vermag.

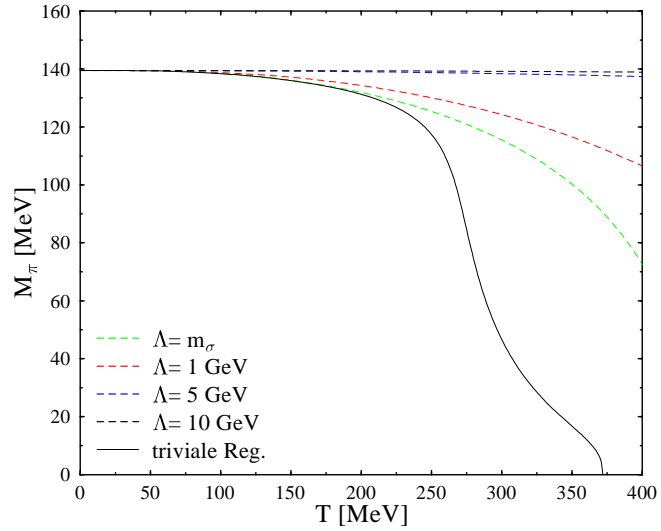


Abbildung 2.11: Die Pionmasse als Funktion der Temperatur in der 1. Polardarstellung unter Berücksichtigung der Jacobi-Determinante für  $m_\pi = 139.5 \text{ MeV}$  bei trivialer und bei Cutoff-Regularisierung.

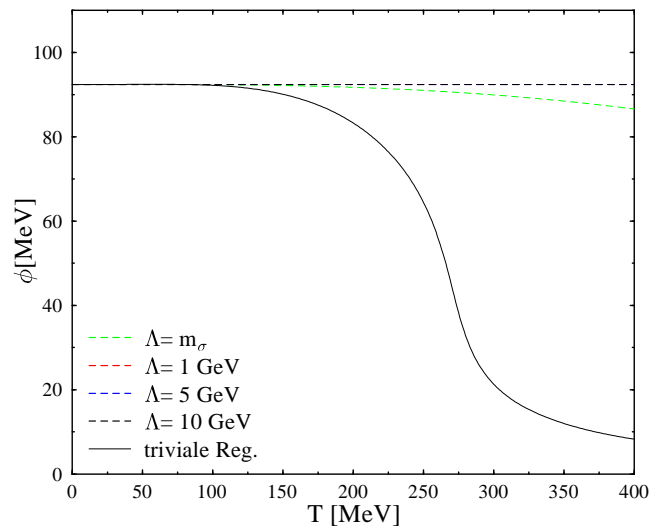


Abbildung 2.12: Das Kondensat als Funktion der Temperatur in der 1. Polardarstellung unter Berücksichtigung der Jacobi-Determinante für  $m_\pi = 139.5 \text{ MeV}$  bei trivialer und bei Cutoff-Regularisierung.



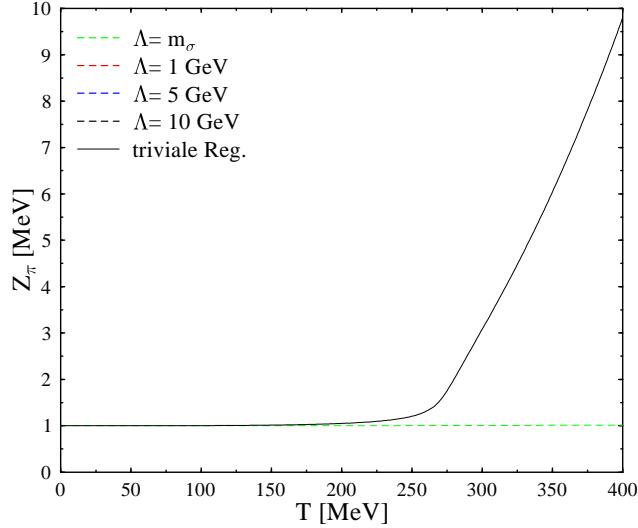


Abbildung 2.13: Der Wellenrenormierungsparameter des Pions als Funktion der Temperatur in der 1.Polardarstellung unter Berücksichtigung der Jacobi-Determinante für  $m_\pi = 139.5$  MeV bei trivialer und bei Cutoff-Regularisierung.

### 2.1.7 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde die Abhängigkeit des  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modells von der Darstellung der beiden internen Freiheitsgrade,  $\sigma$  und  $\pi$ , untersucht. Zu diesem Zweck erfolgte als erstes die Konstruktion einer  $U(1)$ -symmetrischen polaren Darstellung  $\Phi = \sigma e^{i\pi/\phi}/\sqrt{2}$ , bei der das massive  $\sigma$ -Feld der Radialvariable entspricht, während das Pion mit der Winkelvariable identifiziert wird. Mit Hilfe des CJT-Formalismus wurde das Modell in Doppelblasen-Approximation bei endlichen Temperaturen ausgewertet, ohne vorerst die Jacobi-Determinante, die bei der Transformation von der kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , zur polaren Darstellung generiert wird, einzubeziehen. Die stationären Bedingungen für das effektive Potential ermöglichten die Herleitung eines geschlossenen Systems aus vier gekoppelten Gleichungen, deren numerische Lösung das Kondensat, die mesonischen Polmassen sowie den Wellenrenormierungsparameter für das Pion als Funktion der Temperatur ergab. Die Auswertung des Modells umfasste eine separate Betrachtung von zwei Fällen, dem chiralen Limes und der explizit gebrochenen Symmetrie. Um die Bedingung, dass der Wellenrenormierungsparameter des Pions im Vakuum eins betragen soll, zu erfüllen, wurden die divergenten Vakuumbeiträge der Selbstenergien anhand des Counterterververfahrens reguliert. Anschließend erfolgte ein Vergleich der numerischen Resultate zwischen der polaren und kartesischen Darstellung beider Freiheitsgrade im  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modell.

Bei explizit gebrochener Symmetrie ergibt die numerische Auswertung für beide Repräsentationen einen Crossover-Phasentübergang und einen ähnlichen Verlauf für die  $\sigma$ -Masse, die oberhalb der kritischen Temperatur nahezu linear

steigt. Bei der Beschreibung der temperaturabhängigen Pionmasse unterscheiden sich dagegen beide Darstellungen deutlich voneinander. Während die Pionmasse in der kartesischen Repräsentation kontinuierlich wächst und oberhalb der kritischen Temperatur mit der  $\sigma$ -Masse entartet, schmilzt sie in der 1. Polardarstellung bei etwa 370 MeV auf Null, was eine Massenentartung zwischen den chiralen Partnern verhindert. Die Ursache für diese Differenzen beim Übergang von der kartesischen zur polaren Repräsentation liegt vermutlich darin, dass die im Rahmen der Doppelblasen-Näherung durchgeführte Entwicklung des expliziten Symmetriebrechungsterms  $h(\sigma + \phi) \cos(\pi/\phi)$  bis zur vierten Ordnung in den Feldern mit steigender Temperatur immer ungenauer wird. Ausserdem erweisen sich generell alle Terme der Form  $\sigma/\phi$  und  $\pi/\phi$ , die bei der Konstruktion der 1. Polardarstellung entstehen, als problematisch, sobald die Felder anfangen stark zu fluktuieren und das Kondensat auf infinitesimal kleine Werte schmilzt, wie es erwartungsgemäß in der Nähe der kritischen Temperatur ist. Folglich sind vor allem am Phasenübergang keine physikalisch zuverlässigen Aussagen über das Verhalten der hadronischen Materie mehr möglich.

Im chiralen Limes findet in beiden Darstellungen ein Phasenübergang erster Ordnung statt. In der kartesischen Repräsentation wird in der asymmetrischen Phase eine endliche Pionmasse generiert, was mit einer Verletzung des Goldstone-Theorems verbunden ist. Beim Übergang zur Polardarstellung kann dieses Defizit behoben werden, da das Pion in der Phase spontan gebrochener Symmetrie,  $\phi > 0$ , masselos ist. Allerdings bleibt das Pion in der Polardarstellung auch in der symmetrischen Phase masselos, während die  $\sigma$ -Masse kontinuierlich wächst. Dies schließt eine Massenentartung der chiralen Partner oberhalb der kritischen Temperatur, wie sie in der kartesischen Repräsentation statt findet, aus.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Auswertung des  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modells für die kartesische und polare Darstellung der beiden Freiheitsgrade,  $\sigma$  und  $\pi$ , weitgehend übereinstimmende Ergebnisse für die Temperaturabhängigkeit des Kondensats und der  $\sigma$ -Masse liefert. Bei der Beschreibung der Pionmasse als Funktion der Temperatur weist die polare Darstellung, in der das Pion mit einer Winkelvariable identifiziert wird, allerdings deutliche Mängel auf. Aus diesem Grund kann weder im chiralen Limes noch bei explizit gebrochener Symmetrie eine Massenentartung der chiralen Partner beim Übergang zur polaren Darstellung beobachtet werden.

Als nächstes wurde eine Möglichkeit vorgestellt, die Jacobi-Determinante mittels eines vier-dimensionalen Cutoffs,  $\Lambda$ , in die Konstruktion der Lagrange-dichte und die anschließende Auswertung einzubeziehen. In diesem Fall erfolgte eine konsistente Regularisierung der divergenten Vakuumbeiträge mit Hilfe des Cutoff-Verfahrens. Um weiterhin die Bedingung erfüllen zu können, dass der Wellenrenormierungsparameter für das Pion im Vakuum eins betragen soll, wurde eine Redefinition der Winkelkomponente in der Polardarstellung des Feldes durchgeführt. Mit dieser Methode gelingt es allerdings nicht, die Mängel der Polardarstellung zu beheben, da das Modell bereits für geringe  $\Lambda$ -Werte trivial wird.

## 2.2 2. Polardarstellung

In diesem Abschnitt wird eine alternative Polardarstellung der beiden Freiheitsgrade im  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modell vorgestellt, bei der die Jacobi-Determinante, die bei der Transformation von kartesischer zu polarer Repräsentation generiert wird, eins bleibt. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird in diesem Fall der massive skalarmesonische Freiheitsgrad durch das  $\psi$ -Feld repräsentiert, während das Pion weiterhin mit der Winkelvariable identifiziert wird. Die Auswertung dieses Modells im Rahmen des CJT-Formalismus in Doppelblasen-Näherung erlaubt die Herleitung eines geschlossenen Gleichungssystems für das Kondensat, die Polmassen der Mesonen sowie den Wellenrenormierungparameter für das skalare  $\psi$ -Feld als Funktion der Temperatur. Dabei erfolgt eine separate Betrachtung vom chiralen Limes und explizit gebrochener Symmetrie. Die divergenten Vakuumbeiträge werden mit Hilfe des Counterterm- und des Cutoff-Verfahrens reguliert, wobei die Cutoff-Regularisierung eine Redefinition der polaren Darstellung des Feldes  $\Phi$  verlangt.

### 2.2.1 Motivation

Bei der Konstruktion der 1. Polardarstellung im Abschnitt 2.1 entsteht eine Jacobi-Determinante, die einen divergenten Beitrag zur effektiven Wirkung leistet und daher einer Regularisierung bedarf. Im Abschnitt 2.2 wurde eine Möglichkeit vorgestellt, den Jacobian anhand eines vier-dimensionalen Cutoffs in die Konstruktion der Lagrangedichte und die anschließende Auswertung des Modells einzubeziehen, wobei eine Regularisierung divergenter Terme mit Hilfe des Cutoff-Verfahrens durchgeführt wurde. Diese Methode erweist sich allerdings als problematisch, da das Modell bereits für relativ geringe  $\Lambda$ -Werte, keine physikalisch sinnvollen Resultate mehr liefert, siehe 2.1.6, Abb. 2.11, 2.10, 2.12 und 2.13. Daher bietet es sich an, eine alternative Polardarstellung für die beiden internen Freiheitsgrade im  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modell zu konstruieren, bei der diese Probleme nicht auftreten.

### 2.2.2 Die Lagrangedichte

Die Jacobi-Determinante bleibt beim Übergang zur Polardarstellung eins, wenn die beiden internen Freiheitsgrade wie folgt angeordnet werden:

$$\begin{aligned}\Phi &= \sqrt{a\psi} e^{i\pi/b} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \sqrt{a\psi} (\cos \pi/b + i \sin \pi/b),\end{aligned}\tag{2.71}$$

wobei  $a$  und  $b$  zwei dimensionsbehaftete Konstanten sind, die mittels kanonischer Normierung bestimmt werden. Hier entspricht  $\psi$  dem massiven skalaren Feld, welches durch die Radialvariable repräsentiert wird und im Falle spontan gebrochener Symmetrie einen endlichen Vakuumerwartungswert  $\phi$  besitzt. Das pseudoskalare Pion, welches im chiralen Limes masselos ist, wird weiterhin mit der Winkelvariable identifiziert. Um die beiden Konstanten des Modells  $a$  und  $b$  zu bestimmen, setzt man das um den  $\psi$ -Vakuumerwartungswert verschobene

Feld  $\Phi = \sqrt{a(\psi + \phi)}e^{i\pi/b}$  in die allgemeine Lagrangedichte für komplexe Felder (2.6) ein,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{a}{4(\psi + \phi)}(\partial_\mu \psi)^2 + \frac{a(\psi + \phi)}{b^2}(\partial_\mu \pi)^2 - m^2 a(\psi + \phi) \\ & - 2\lambda a^2(\psi + \phi)^2 + h\sqrt{2a(\psi + \phi)} \cos \pi/b \end{aligned} \quad (2.72)$$

und entwickelt alle Terme bis zur vierten Ordnung in den Feldern

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{a}{4\phi} \left( 1 - \frac{\psi}{\phi} + \frac{\psi^2}{\phi^2} \right) (\partial_\mu \psi)^2 + \frac{a(\psi + \phi)}{b^2} (\partial_\mu \pi)^2 \\ & - m^2 a(\psi + \phi) - 2\lambda a^2(\psi^2 + 2\psi\phi + \phi^2) \\ & + h\sqrt{2a\phi} \left( 1 + \frac{\psi}{2\phi} - \frac{\psi^2}{8\phi^2} + \frac{\psi^3}{16\phi^3} - \frac{5\psi^4}{128\phi^4} \right) \left( 1 - \frac{\pi^2}{2b^2} + \frac{\pi^4}{4!b^4} \right) \\ & + \text{Terme höherer Ordnung in den Feldern.} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Die Lagrangedichte muss für beide Felder  $\psi$  und  $\pi$  kinetische Terme der Form  $\frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)^2$  und  $\frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)^2$  enthalten, um die Propagatoren in gewohnter Form

$$D_i^{-1}(k) = -k^2 + m_i^2$$

darstellen zu können. Diese Bedingung ist für  $a = b = 2\phi$  erfüllt. Damit lautet das Feld

$$\Phi = \sqrt{2\phi(\phi + \psi)}e^{i\pi/2\phi}. \quad (2.74)$$

Anschließendes Ausmultiplizieren und Zusammenfassen führt zu folgendem Ausdruck für  $\mathcal{L}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)^2 - 2m^2\phi^2 - 8\lambda\phi^4 + 2h\phi \\ & - \frac{\psi^2}{2}(16\lambda\phi^2 + \frac{h}{2\phi}) - \frac{\pi^2}{2}(\frac{h}{2\phi}) \\ & - (\partial_\mu \psi)^2 \frac{\psi}{2\phi} + (\partial_\mu \pi)^2 \frac{\psi}{2\phi} - \frac{h}{8\phi^2}\psi\pi^2 + \frac{h}{8\phi^2}\psi^3 \\ & + (\partial_\mu \psi)^2 \frac{\psi^2}{2\phi^2} - \frac{5h}{64\phi^3}\psi^4 + \frac{h}{4!8\phi^3}\pi^4 + \frac{h}{32\phi^3}\psi^2\pi^2 \\ & + \text{Terme höherer Ordnung in den Feldern.} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Daraus können unmittelbar die inversen Propagatoren

$$\begin{aligned} D_\psi^{-1}(k; \phi) &= -k^2 + m_\psi^2, \\ D_\pi^{-1}(k; \phi) &= -k^2 + m_\pi^2 \end{aligned} \quad (2.76)$$

und die Massen auf Baumgraphenniveau abgelesen werden:

$$\begin{aligned} m_\psi^2 &= 16\lambda\phi^2 + \frac{h}{2\phi}, \\ m_\pi^2 &= \frac{h}{2\phi}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

### 2.2.3 Das effektive Potential

Als nächstes werden aus den vier Vierervertizes in Gl. (2.75) Doppelblasendiagramme konstruiert

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu \psi)^2 \frac{\psi^2}{2\phi^2} &\rightarrow \frac{1}{2\phi^2} \int_k k^2 G_\psi(k) \int_l G_\psi(l), \\
-\frac{5h}{64\phi^3} \psi^4 &\rightarrow -\frac{15h}{64\phi^3} \left[ \int_k G_\psi(k) \right]^2, \\
\frac{h}{4!8\phi^3} \pi^4 &\rightarrow \frac{h}{64\phi^3} \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2, \\
\frac{h}{32\phi^3} \psi^2 \pi^2 &\rightarrow \frac{h}{32\phi^3} \int_k G_\psi(k) \int_k G_\pi(k),
\end{aligned} \tag{2.78}$$

deren Summe nach Vertauschung der Vorzeichen  $V_2(\phi; G_\pi, G_\psi)$  ergibt

$$\begin{aligned}
V_2(\phi; G_\pi, G_\psi) &= -\frac{1}{2\phi^2} \int_k k^2 G_\psi(k) \int_l G_\psi(l) + \frac{15h}{64\phi^3} \left[ \int_k G_\psi(k) \right]^2 \\
&\quad - \frac{h}{64\phi^3} \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2 - \frac{h}{32\phi^3} \int_k G_\psi(k) \int_k G_\pi(k).
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Damit lautet das CJT-effektive Potential in Doppelblasen-Näherung:

$$\begin{aligned}
V_{eff}(\phi; G_\pi, G_\psi) &= 2m^2 \phi^2 + 8\lambda \phi^4 - 2h\phi \\
&\quad + \frac{1}{2} \int [\ln G_\psi^{-1}(k) + D_\psi^{-1}(k; \phi) G_\psi(k) - 1] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int [\ln G_\pi^{-1}(k) + D_\pi^{-1}(k; \phi) G_\pi(k) - 1] \\
&\quad + V_2(\phi; G_\pi, G_\psi).
\end{aligned} \tag{2.80}$$

### 2.2.4 Die Gap-Gleichungen

Die stationären Bedingungen für das effektive Potential

$$\frac{\delta V_{eff}}{\delta \phi} = 0, \quad \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_i(k)} = 0; \quad i = \pi, \psi \tag{2.81}$$

föhren schließlich zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 2h &= 4m^2\phi + 32\lambda\phi^3 + (16\lambda\phi - \frac{h}{4\phi^2}) \int_k \mathcal{G}_\psi(k) - \frac{h}{4\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \\
 &\quad + \frac{1}{\phi^3} \int_k k^2 \mathcal{G}_\psi(k) \int_l \mathcal{G}_\psi(l) - \frac{45h}{64\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\psi(k) \right]^2 \\
 &\quad + \frac{3h}{64\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right]^2 + \frac{6h}{64\phi^4} \int_k \mathcal{G}_\psi(k) \int_k \mathcal{G}_\pi(k), \\
 M_\psi^2 &= 16\lambda\phi^2 + \frac{h}{2\phi} + \frac{h}{16\phi^3} \left[ 15 \int_k \mathcal{G}_\psi(k) - \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\psi(k), \\
 M_\pi^2 &= \frac{h}{2\phi} - \frac{h}{16\phi^3} \left[ \int_k \mathcal{G}_\psi(k) + \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right], \\
 Z_\psi^2 &= 1 + \frac{1}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\psi(k). \tag{2.82}
 \end{aligned}$$

Die numerische Auswertung dieses Gleichungssystems erlaubt die Berechnung des Kondensats, der Mesonenmassen und des Wellenrenormierungsparameters für das  $\psi$ -Feld bei endlichen Temperaturen.

### Bestimmung der Parameter

Ausgehend von der Beziehung  $h = m_\pi^2 f_\pi$  lassen sich die freien Parameter des Modells bei trivialer Regularisierung aus dem Gleichungssystem Gl. (2.82) bei  $T = 0$  unter Vernachlässigung divergenter Vakuumbeiträge

$$\begin{aligned}
 m_\pi^2 &= \frac{h}{2\phi_0}, \\
 2h &= 4m^2\phi_0 + 32\lambda\phi_0^3, \\
 m_\psi^2 &= 16\lambda\phi_0^2 + \frac{h}{2\phi_0}
 \end{aligned}$$

berechnen:

$$\phi_0 = \frac{f_\pi}{2}, \quad h = m_\pi^2 f_\pi, \quad m^2 = -\frac{m_\psi^2 - 3m_\pi^2}{2}, \quad \lambda = \frac{m_\psi^2 - m_\pi^2}{4f_\pi^2}. \tag{2.83}$$

Für diese Polardarstellung liegt der Vakuumerwartungswert des Kondensats per Konstruktion bei  $f_\pi/2$ .

### Chiraler Limes: $m_\pi = 0$

Im chiralen Limes,  $h = 0$ , ist das Pion masselos

$$M_\pi^2 = \frac{h}{2\phi} \left[ 1 - \frac{1}{8\phi^2} \left( \int_k \mathcal{G}_\psi(k) + \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right) \right] \tag{2.84}$$

$$= 0, \tag{2.85}$$

und das zu lösende Gleichungssystem für das Kondensat sowie die Masse und den Wellenrenormierungsparameter des  $\psi$ -Feldes ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
0 &= 4m^2\phi + 32\lambda\phi^3 + 16\lambda\phi \int_k \mathcal{G}_\psi(k) \\
&\quad + \frac{1}{\phi^3} \int_k k^2 \mathcal{G}_\psi(k) \int_l \mathcal{G}_\psi(l), \\
M_\psi^2 &= 16\lambda\phi^2 - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\psi(k), \\
Z_\psi^2 &= 1 + \frac{1}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\psi(k).
\end{aligned} \tag{2.86}$$

### 2.2.5 Regularisierung

In diesem Abschnitt erfolgt die Regularisierung divergenter Vakuumterme mit Hilfe des Counterterm- und des Cutoff-Verfahrens. Eine ausführliche Herleitung dieser Regularisierungsmethoden befindet sich in [15].

#### Counterterm-Verfahren

Beim Counterterm-Verfahren werden alle Integrale über die vollen Propagatoren durch

$$\int_k G(k) \equiv Q(M, T) = Q_T(M) + Q_\mu(M),$$

ersetzt. Dabei ist  $Q_T(M)$  der temperaturabhängige Bose-Einstein Term,  $Q_T(M) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{n_B(\omega_k)}{\omega_k}$ , und  $Q_\mu(M)$  der regularisierte Vakuumbeitrag:

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k(M)} \equiv Q_\mu(M) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ M^2 \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - M^2 + \mu^2 \right].$$

Damit lautet das regularisierte Gleichungssystem in Doppelblasen-Approximation

$$\begin{aligned}
2h &= 4m^2\phi + 32\lambda\phi^3 + \left(16\lambda\phi - \frac{h}{4\phi^2}\right) \frac{1}{Z_\psi^2} Q(M_\psi/Z_\psi, T) - \frac{h}{4\phi^2} Q(M_\pi, T) \\
&\quad + \frac{M_\psi^2}{\phi^3 Z_\psi^6} Q^2(M_\psi/Z_\psi, T) - \frac{45h}{64\phi^4 Z_\psi^4} Q^2(M_\psi/Z_\psi, T) \\
&\quad + \frac{3h}{64\phi^4} Q^2(M_\pi, T) + \frac{6h}{64\phi^4 Z_\psi^2} Q(M_\psi/Z_\psi, T) Q(M_\pi, T), \\
M_\psi^2 &= 16\lambda\phi^2 + \frac{h}{2\phi} + \frac{h}{16\phi^3} \left[ \frac{15}{Z_\psi^2} Q(M_\psi/Z_\psi, T) - Q(M_\pi, T) \right] \\
&\quad - \frac{M_\psi^2}{\phi^2 Z_\psi^4} Q(M_\psi/Z_\psi, T), \\
M_\pi^2 &= \frac{h}{2\phi} - \frac{h}{16\phi^3} \left[ \frac{1}{Z_\psi^2} Q(M_\psi/Z_\psi, T) + Q(M_\pi, T) \right], \\
Z_\psi^2 &= 1 + \frac{1}{\phi^2 Z_\psi^2} Q(M_\psi/Z_\psi, T).
\end{aligned} \tag{2.87}$$

**Bestimmung der Parameter**

Aus der Bedingung an den Wellenrenormierungsparameter des  $\psi$ -Feldes im Vakuum,  $Z_\psi(T=0) = 1$ , lässt sich der Regularisierungsparameter bestimmen:  $\mu = m_\psi$ . Anschließend können alle anderen Parameter des Modells aus dem Gleichungssystem (2.87) bei  $T=0$  berechnet werden

$$\begin{aligned} h &= \frac{m_\pi^2 f_\pi}{1 - \frac{Q_\mu(m_\pi)}{2f_\pi^2}}, \\ \lambda &= \frac{m_\psi^2}{4f_\pi^2} - \frac{h}{4f_\pi^3} + \frac{h}{8f_\pi^5} Q_\mu(m_\pi), \\ m^2 &= \frac{h}{f_\pi} - 2\lambda f_\pi^2 + \frac{h}{2f_\pi^3} Q_\mu(m_\pi) - \frac{3h}{8f_\pi^5} Q_\mu^2(m_\pi). \end{aligned} \quad (2.88)$$

**Cutoff-Methode**

Als nächstes sollen die divergenten Vakuumbeiträge der Selbstenergien anhand des Cutoff-Verfahrens regularisiert werden:

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k(M)} \equiv Q_\Lambda(M) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln\left(\frac{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M}\right) \right].$$

In diesem Fall muss die polare Darstellung des Feldes redefiniert werden

$$\Phi = \sqrt{2\phi(\psi + \phi)} e^{i\pi/2\phi} \rightarrow \Phi = z \sqrt{2\phi(\psi + \phi)} e^{i\pi/2z\phi}, \quad (2.89)$$

um die Bedingung, dass der Wellenrenormierungsparameter für das  $\psi$ -Feld im Vakuum eins betragen soll, weiterhin erfüllen zu können. Der zusätzliche Parameter  $z$  wird im Verlauf der Auswertung genau bestimmt. Nach Redefinition lauten die Ergebnisse für die Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{z^2}{2} (\partial_\mu \psi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - 2m^2 z^2 \phi^2 - 8\lambda z^4 \phi^4 + 2hz\phi \\ &\quad - \frac{z^2 \psi^2}{2} (16\lambda z^2 \phi^2 + \frac{h}{2z\phi}) - \frac{\pi^2}{2} (\frac{h}{2z\phi}) \\ &\quad - z^2 (\partial_\mu \psi)^2 \frac{z\psi}{2z\phi} + (\partial_\mu \pi)^2 \frac{z\psi}{2z\phi} - \frac{h}{8z^2 \phi^2} z\psi \pi^2 + \frac{h}{8z^2 \phi^2} z^3 \psi^3 \\ &\quad + z^2 (\partial_\mu \psi)^2 \frac{z^2 \psi^2}{2z^2 \phi^2} - \frac{5h}{64z^3 \phi^3} z^4 \psi^4 + \frac{h}{4! 8z^3 \phi^3} \pi^4 + \frac{h}{32z^3 \phi^3} z^2 \psi^2 \pi^2 \\ &\quad + \text{Terme höherer Ordnung in den Feldern,} \end{aligned} \quad (2.90)$$

die inversen Propagatoren

$$D_\psi^{-1}(k; \phi) = -z^2 k^2 + z^2 \left( 16\lambda z^2 \phi^2 + \frac{h}{2z\phi} \right), \quad (2.91)$$

$$D_\pi^{-1}(k; \phi) = -k^2 + \frac{h}{2z\phi} \quad (2.92)$$



und die Massen auf Baumgraphenniveau

$$m_\psi^2 = z^2 \left( 16\lambda z^2 \phi^2 + \frac{h}{2z\phi} \right), \quad (2.93)$$

$$m_\pi^2 = \frac{h}{2z\phi}. \quad (2.94)$$

In diesem Fall ist das effektive Potential gegeben durch

$$\begin{aligned} V_{eff}(\phi; G_\pi, G_\psi) &= 2m^2 z^2 \phi^2 + 8\lambda z^4 \phi^4 - 2hz\phi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int [\ln G_\psi^{-1}(k) + D_\psi^{-1}(k; \phi) G_\psi(k) - 1] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int [\ln G_\pi^{-1}(k) + D_\pi^{-1}(k; \phi) G_\pi(k) - 1] \\ &\quad + V_2(\phi; G_\pi, G_\psi) \end{aligned} \quad (2.95)$$

mit

$$\begin{aligned} V_2(\phi; G_\pi, G_\psi) &= -\frac{z^2}{2\phi^2} \int_k k^2 G_\psi(k) \int_l G_\psi(l) - \frac{h}{32z\phi^3} \int_k G_\psi(k) \int_k G_\pi(k) \\ &\quad + \frac{15zh}{64\phi^3} \left[ \int_k G_\psi(k) \right]^2 - \frac{h}{64z^3\phi^3} \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Die stationären Bedingungen für das effektive Potential

$$\frac{\delta V_{eff}}{\delta \phi} = 0, \quad \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_i(k)} = 0; \quad i = \pi, \psi \quad (2.97)$$

erlauben schließlich die Herleitung des regularisierten Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2hz &= 4m^2 z^2 \phi + 32\lambda z^4 \phi^3 + (16\lambda z^2 \phi - \frac{h}{4z\phi^2}) \frac{z^2}{Z_\psi^2} Q(M_\psi/Z_\psi, T) - \frac{h}{4z\phi^2} Q(M_\pi, T) \\ &\quad + \frac{z^2 M_\psi^2}{\phi^3 Z_\psi^6} Q^2(M_\psi/Z_\psi, T) - \frac{45zh}{64\phi^4 Z_\psi^4} Q^2(M_\psi/Z_\psi, T) \\ &\quad + \frac{3h}{64z^3\phi^4} Q^2(M_\pi, T) + \frac{6h}{64z\phi^4 Z_\psi^2} Q(M_\psi/Z_\psi, T) Q(M_\pi, T), \\ M_\psi^2 &= 16\lambda z^4 \phi^2 + \frac{zh}{2\phi} + \frac{h}{16z\phi^3} \left[ \frac{15z^2}{Z_\psi^2} Q(M_\psi/Z_\psi, T) - Q(M_\pi, T) \right] \\ &\quad - \frac{z^2 M_\psi^2}{\phi^2 Z_\psi^4} Q(M_\psi/Z_\psi, T), \\ M_\pi^2 &= \frac{h}{2z\phi} - \frac{h}{16z^3\phi^3} \left[ \frac{z^2}{Z_\psi^2} Q(M_\psi/Z_\psi, T) + Q(M_\pi, T) \right], \\ Z_\psi^2 &= z^2 \left[ 1 + \frac{1}{\phi^2 Z_\psi^2} Q(M_\psi/Z_\psi, T) \right] \end{aligned} \quad (2.98)$$

mit  $Q(M, T) = Q_T(M) + Q_\Lambda(M)$ , wo  $Q_T(M)$  den temperaturabhängigen Anteil, Gl. (4.14), und  $Q_\Lambda(M)$  den regularisierten Vakuumbeitrag repräsentiert.

**Bestimmung der Parameter**

Aus der Bedingung an den Wellenrenormierungsparameter des  $\psi$ -Feldes im Vakuum

$$Z_\psi^2(T=0) = z^2 \left( 1 + \frac{4}{f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\sigma) \right) \stackrel{!}{=} 1,$$

ist es nun möglich, den Redefinitionsparameter  $z$  und damit alle anderen Parameter des Modells zu bestimmen:

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{1}{1 + \frac{4}{f_\pi^2} Q_\Lambda(m_\sigma)}, \\ h &= \frac{zm_\pi^2 f_\pi}{1 - \frac{z^2 Q_\Lambda(m_\psi) + Q_\Lambda(m_\pi)}{2f_\pi^2 z^2}}, \\ m^2 &= \frac{h}{zf_\pi} - 2\lambda z^2 f_\pi^2 - 4\lambda z^2 Q_\Lambda(m_\sigma) + \frac{h}{2z^3 f_\pi^3} Q_\Lambda(m_\pi) - \frac{3h}{8z^5 f_\pi^5} Q_\Lambda^2(m_\pi) \\ &\quad + \frac{h}{2z f_\pi^3} Q_\Lambda(m_\sigma) - \frac{3h}{4z^3 f_\pi^5} Q_\Lambda(m_\pi) Q_\Lambda(m_\sigma) \\ &\quad - \frac{4m_\psi^2}{f_\pi^4} Q_\Lambda^2(m_\sigma) + \frac{45h}{8z f_\pi^5} Q_\Lambda^2(m_\sigma), \\ \lambda &= \frac{m_\psi^2}{4z^4 f_\pi^2} - \frac{h}{4z^3 f_\pi^3} + \frac{h}{8z^5 f_\pi^5} Q_\Lambda(m_\pi) - \frac{15h}{8z^3 f_\pi^5} Q_\Lambda(m_\sigma) \\ &\quad + \frac{m_\psi^2}{z^2 f_\pi^4} Q_\Lambda(m_\sigma). \end{aligned} \tag{2.99}$$

### 2.2.6 Resultate

In diesem Abschnitt werden die Resultate der numerischen Auswertung für die 2. Polardarstellung präsentiert, wobei auch die Graphen bei Counterterm- und Cutoff-Regularisierung gezeigt und besprochen werden.

Bei der Auswertung des Modells in Hartree-Näherung müssen drei Terme der Form  $f(1+x)$  mit  $x = \psi/\phi$  und  $x = \pi/\phi$  bis zur vierten Ordnung in den Feldern entwickelt werden, um daraus die relevanten Doppelblasendiagramme zu konstruieren. Die physikalischen Felder stellen Fluktuationen um den Grundzustand dar, der bei  $\psi = \phi = f_\pi/2$  und  $\pi = 0$  liegt. Bereits für infinitesimale Auslenkungen um das Minimum gilt  $\psi/\phi \approx 1$ . Beim Übergang zu endlichen Temperaturen fluktuieren die Felder mit steigender Energie zunehmend stärker, und das Kondensat fängt an zu schmelzen. Aus diesem Grund wird die durchgeführte Entwicklung immer ungenauer. Wie bereits im Abschnitt 2.1 diskutiert, erweisen sich ausserden generell alle Terme, bei denen das Kondensat im Nenner steht,  $\psi/\phi$  und  $\pi/\phi$ , in der Nähe der kritischen Temperatur als problematisch.

#### Explizit gebrochene Symmetrie: $m_\pi \neq 0$

Abbildungen 2.14, 2.15 und 2.16 zeigen die Resultate für das Kondensat, die Polmassen und den Wellenrenormierungsparameter des  $\psi$ -Feldes bei explizit gebrochener Symmetrie im trivial regularisierten System sowie bei Counterterm-Regularisierung. Daneben sind die entsprechenden Graphen bei Cutoff-Regularisierung präsentiert.

Es liegt ein Crossover-Phasenübergang vor mit einer kritischen Temperatur von etwa 270 MeV, wobei das Kondensat nur langsam mit steigender Temperatur schmilzt. Für den Verlauf der Pionmasse kann ein Unterschied zwischen den Regularisierungsverfahren beobachtet werden. Während die Pionmasse bei Cutoff-Regularisierung kontinuierlich wächst, schmilzt sie bei trivialer und Counterterm-Regularisierung ebenso wie die Masse des  $\psi$ -Feldes mit steigender Temperatur. Allerdings erweist sich das Cutoff-Verfahren als problematisch, da das regularisierte Modell bereits für relativ geringe  $\Lambda$ -Werte trivial wird. Oberhalb einer Temperatur von etwa 300 MeV wird die verwendete Näherung zu ungenau, wobei keine Massenentartung der chiralen Partner,  $\pi$  und  $\psi$ , beobachtet werden kann.

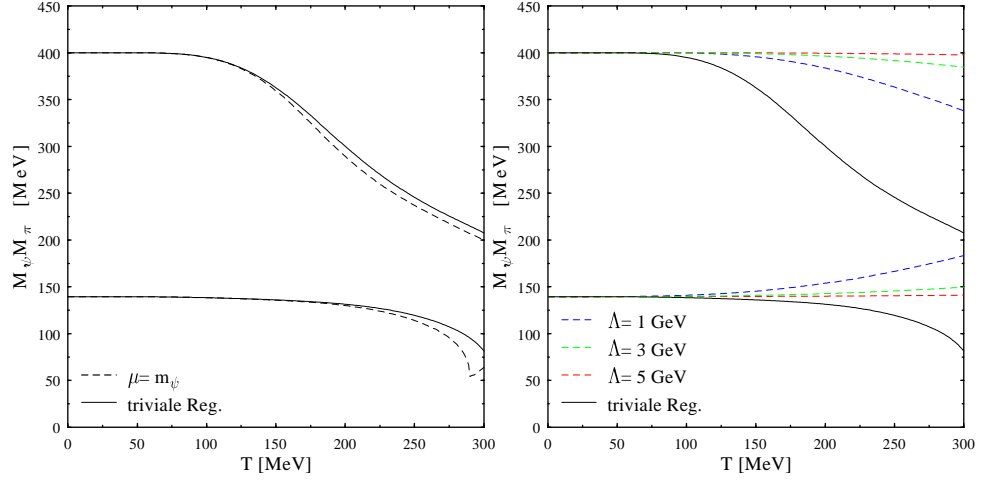


Abbildung 2.14: Die Mesonenmassen,  $M_\psi$  und  $M_\pi$ , als Funktion der Temperatur für die 2. Polardarstellung bei explizit gebrochener Symmetrie,  $m_\pi = 139.5$  MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts).

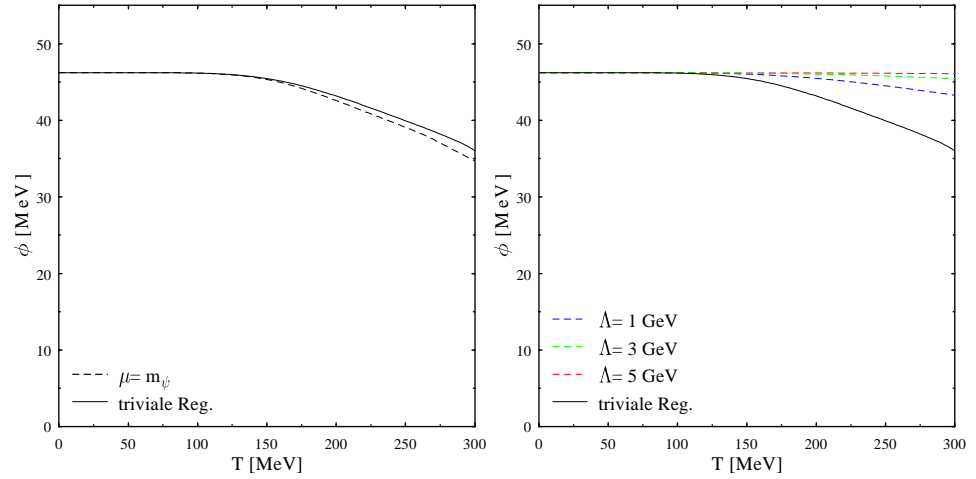


Abbildung 2.15: Das Kondensat  $\phi$  als Funktion der Temperatur für die 2. Polardarstellung bei explizit gebrochener Symmetrie,  $m_\pi = 139.5$  MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts).

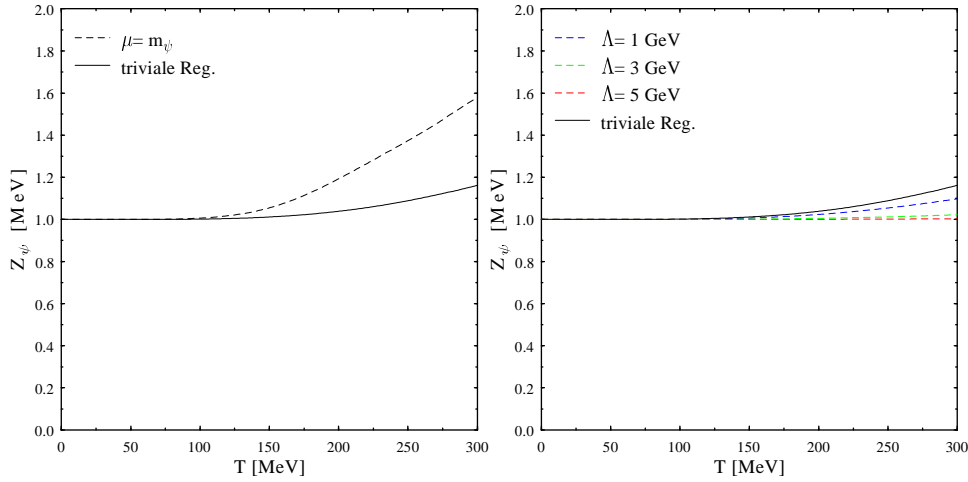


Abbildung 2.16: Der Wellenrenormierungsparameter  $Z_\psi$  als Funktion der Temperatur für die 2. Polardarstellung bei explizit gebrochener Symmetrie,  $m_\pi = 139.5$  MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts).

### Chiraler Limes: $m_\pi = 0$

In Abb. 2.17, 2.18 und 2.19 ist das Kondensat, sowie die Polmasse und der Wellenrenormierungsparameter des  $\psi$ -Feldes als Funktion der Temperatur im chiralen Limes bei Counterterm- und Cutoff-Regularisierung sowie im trivial regularisierten System präsentiert.

Im chiralen Limes schmilzt das Kondensat ebenso wie die Masse  $\psi$ -Feldes, während das Pion bei spontan gebrochener Symmetrie,  $\phi > 0$ , in Übereinstimmung mit dem Goldstone-Theorem masselos bleibt. In diesem Fall kann weder eine Aussage über die Ordnung noch über die kritische Temperatur des Phasenübergangs gemacht werden, da die im Rahmen der Doppelblasen-Approximation durchgeführte Entwicklung bereits für  $T > 240$  MeV zu ungenau wird.

Wie bei explizit gebrochener Symmetrie erweist sich das Cutoff-Verfahren für die Regularisierung der 2. Polardarstellung als ungeeignet, da das regularisierte System bereits für  $\Lambda \geq 3$  GeV trivial wird.

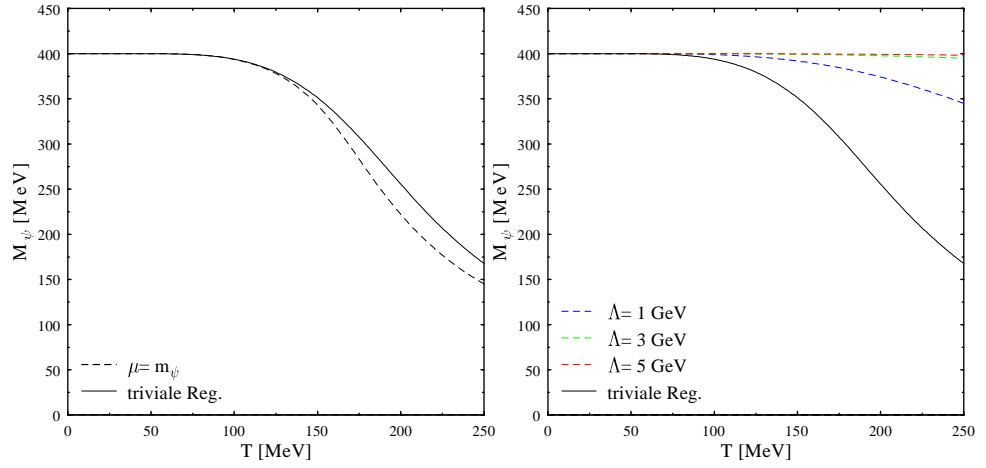


Abbildung 2.17: Die Mesonenmassen,  $M_\psi$  und  $M_\pi$ , als Funktion der Temperatur für die 2. Polardarstellung im chiralen Limes,  $m_\pi = 0$  MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts).

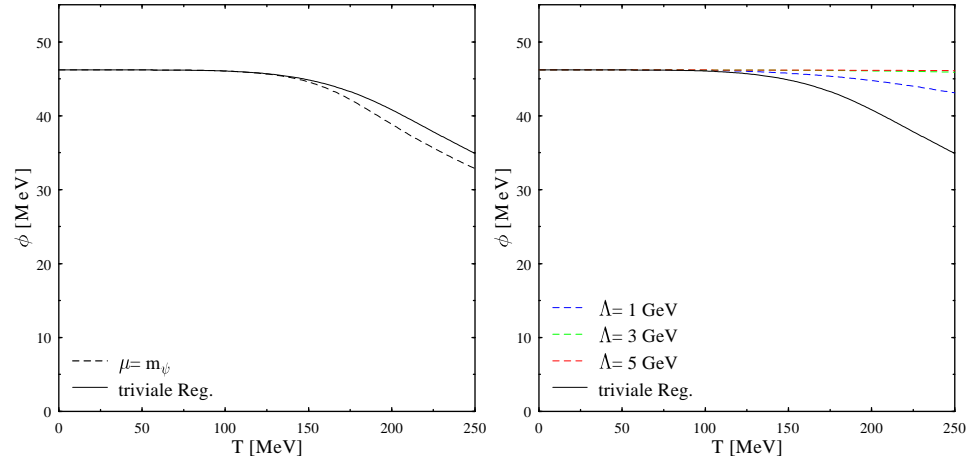


Abbildung 2.18: Das Kondensat  $\phi$  als Funktion der Temperatur für die 2. Polardarstellung im chiralen Limes,  $m_\pi = 0$  MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts).

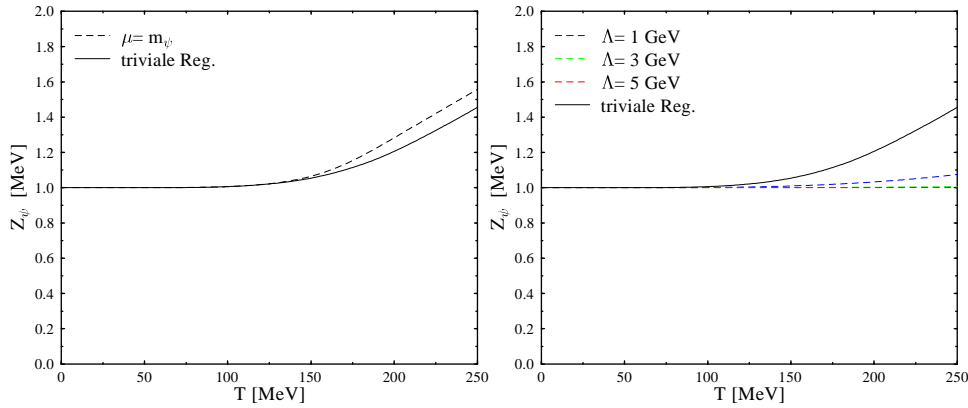


Abbildung 2.19: Der Wellenrenormierungsparameter  $Z_\psi$  als Funktion der Temperatur für die 2. Polardarstellung im chiralen Limes,  $m_\pi = 0$  MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts).

### Vergleich zwischen der kartesischen Repräsentation und den beiden Polardarstellungen

In der kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , findet sowohl bei explizit gebrochener Symmetrie als auch im chiralen Limes eine Massenentartung der chiralen Partner oberhalb der kritischen Temperatur statt, was als ein klares Indiz für einen Phasentübergang der hadronischen Materie in das QGP interpretiert werden kann. Im Gegensatz dazu kann in keiner der beiden Polardarstellungen eine Massenentartung des Pions mit seinem chiralen Partner, dem  $\sigma$ - bzw. dem  $\psi$ -Feld, beobachtet werden. Vor allem bei der Beschreibung der temperaturabhängigen Masse des Pions, welches mit der Winkelvariable identifiziert wird, weisen beide Polardarstellungen deutliche Mängel auf. Während in der kartesischen Darstellung die Pionmasse bei explizit gebrochener Symmetrie kontinuierlich wächst, schmilzt sie in beiden Polardarstellungen mit steigender Temperatur. Im chiralen Limes wird in der kartesischen Darstellung das Goldstone-Theorem verletzt, da das Pion in der Phase spontan gebrochener Symmetrie eine endliche Masse besitzt. In den Polardarstellungen taucht dieses Problem nicht mehr auf, da das Pion wie gefordert in der asymmetrischen Phase masselos ist und mit dem Goldstone-Boson identifiziert werden kann. Allerdings bleibt das Pion im chiralen Limes auch oberhalb der kritischen Temperatur masselos, da sämtliche Beiträge zur Pionmasse in beiden Polardarstellungen durch die Entwicklung des expliziten Symmetriebrechungsterms  $h\phi_1$  generiert werden, der im chiralen Limes verschwindet.

Insgesamt vermag keine der beiden Polardarstellungen den Phasentübergang der hadronischen Materie in das QGP erwartungsgemäß zu beschreiben. Dies liegt vermutlich darin, dass alle Terme der Form  $x/\phi$ ;  $x = \pi, \sigma, \psi$ , die bei der Konstruktion der polaren Darstellungen generiert werden, keine physikalisch zuverlässigen Aussagen mehr ermöglichen, sobald die Felder anfangen stark zu fluktuieren und das Kondensat auf kleine Werte schmilzt, wie es am Phasen-

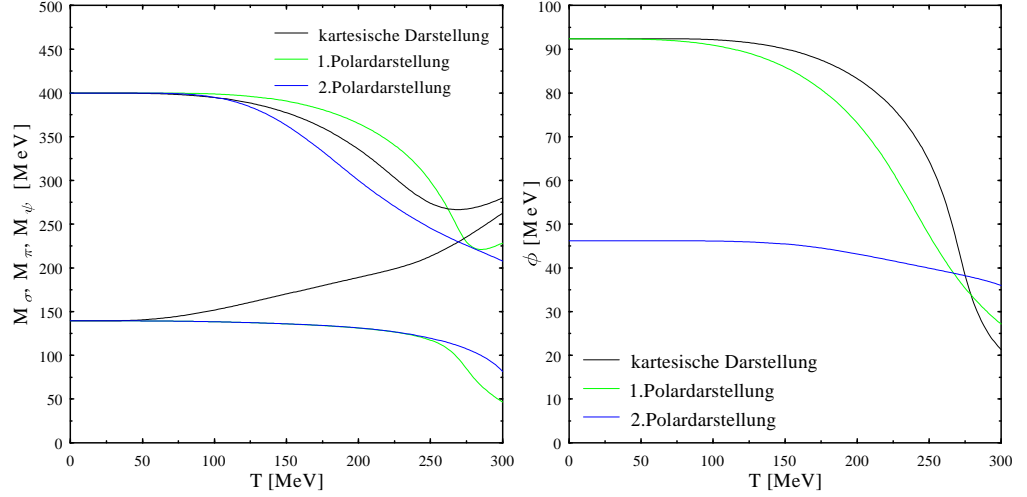


Abbildung 2.20: Die Mesonenmassen  $M_\sigma$ ,  $M_\psi$ ,  $M_\pi$  und das Kondensat  $\phi$  als Funktion der Temperatur in der kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , und den beiden Polardarstellungen bei explizit gebrochener Symmetrie,  $m_\pi = 139.5$  MeV, und trivialer Regularisierung.

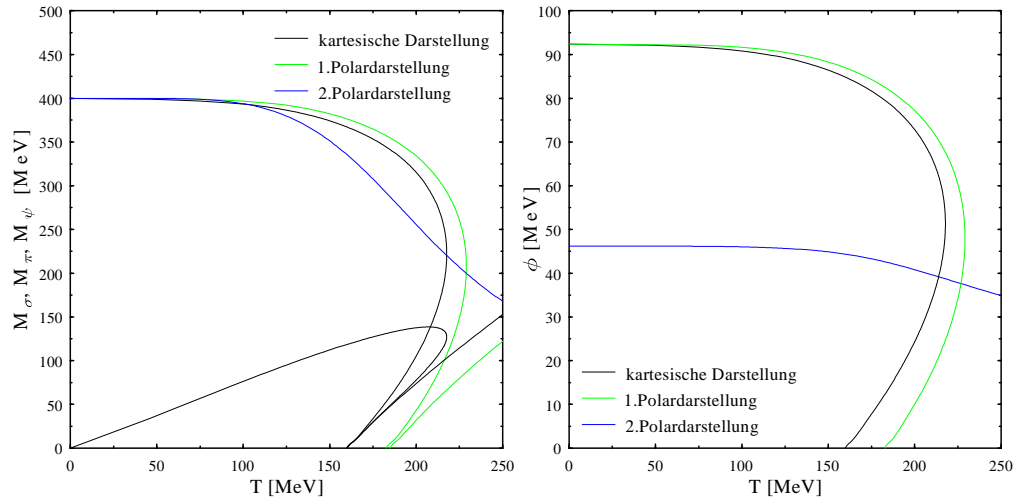


Abbildung 2.21: Die Mesonenmassen  $M_\sigma$ ,  $M_\psi$ ,  $M_\pi$  und das Kondensat  $\phi$  als Funktion der Temperatur in der kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , und den beiden Polardarstellungen im chiralen Limes,  $m_\pi = 0$  MeV, bei trivialer Regularisierung.



übergang der Fall ist.

### 2.2.7 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde eine alternative polare Darstellung der beiden internen Freiheitsgrade im  $O(2)$  linearen  $\sigma$ -Modell vorgestellt, bei der die Jacobi-Determinante eins bleibt. Der massive skalare Freiheitsgrad mit einem endlichen Vakuumerwartungswert wird in diesem Fall durch das  $\psi$ -Feld repräsentiert, während das Pion weiterhin der Winkelvariable entspricht. Die Auswertung des Modells im Rahmen des CJT-Formalismus in Doppelblasen-Approximation lieferte ein geschlossenes Gleichungssystem für das Kondensat, die Polmassen der Mesonen sowie den Wellenrenormierungsparameter für das  $\psi$ -Feld als Funktion der Temperatur. Divergente Vakuumbeiträge wurden anhand des Counterterm- und des Cutoff-Verfahrens reguliert, wobei die Regularisierung mit Hilfe der Cutoff-Methode eine Redefinition der polaren Darstellung des Feldes  $\Phi$  verlangte.

Im Falle explizit gebrochener Symmetrie ergibt die numerische Auswertung einen Crossover-Phasenübergang mit einer kritischen Temperatur von etwa 270 MeV. Im trivial regularisierten System und bei Counterterm-Regularisierung schmilzt die Pionmasse mit steigender Temperatur, während sie bei Cutoff-Regularisierung kontinuierlich wächst. Allerdings kann bei keiner Regularisierungsmethode eine Massenentartung des Pions und des  $\psi$ -Feldes beobachtet werden.

Im chiralen Limes schmilzt das Kondensat ebenso wie die Masse des  $\psi$ -Feldes mit steigender Temperatur, während das Pion in der asymmetrischen Phase entsprechend dem Goldstone-Theorem masselos bleibt. Die obere Temperaturgrenze für die Zuverlässigkeit der Doppelblasen-Näherung reicht in diesem Fall jedoch nicht aus, um die Ordnung und die kritische Temperatur des Phasenübergangs zu bestimmen.

Sowohl bei explizit gebrochener Symmetrie als auch im chiralen Limes erweist sich die Cutoff-Methode als problematisch, da das regularisierte Modell bereits für  $\Lambda \geq 3$  GeV trivial wird.

Insgesamt vermag keine der beiden Polardarstellungen, den Phasenübergang der hadronischen Materie in das QGP erwartungsgemäß zu beschreiben. So kann beim Übergang zu polaren Darstellungen weder im chiralen Limes noch bei explizit gebrochener Symmetrie eine Massenentartung des Pions mit seinem chiralen Partner, dem skalaren  $\sigma$ - bzw.  $\psi$ -Feld, beobachtet werden. Besonders für die Vorhersage der temperaturabhängigen Masse des Pions, welches mit der Winkelvariable identifiziert wird, sind polare Darstellungen nicht geeignet.

Die Ursache für die Mängel der Polardarstellungen liegt vermutlich darin, dass alle Terme, bei denen das Kondensat im Nenner steht,  $\pi/\phi$ ,  $\sigma/\phi$ ,  $\psi/\phi$ , sich als problematisch erweisen, sobald die Felder mit steigender Temperatur immer stärker fluktuieren und das Kondensat auf infinitesimal kleine Werte schmilzt. Folglich sind vor allem in der Nähe der kritischen Temperatur keine physikalisch zuverlässigen Vorhersagen beim Übergang zu polaren Darstellungen mehr möglich.

## Kapitel 3

# Das $O(N)$ nichtlineare $\sigma$ -Modell

In diesem Kapitel soll die Abhängigkeit des nichtlinearen  $\sigma$ -Modells von der Darstellung der internen Freiheitsgrade untersucht werden.

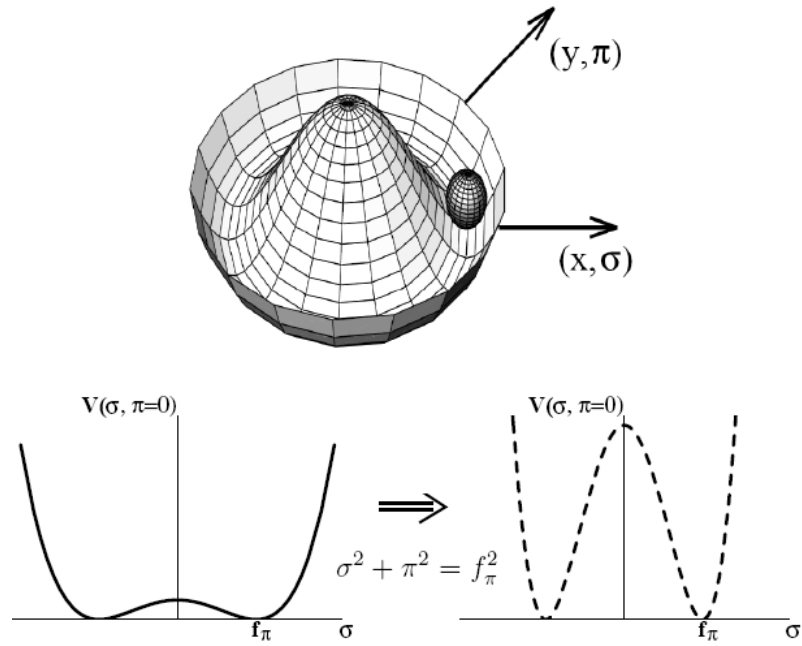
Zunächst wird das  $O(N)$  nichtlineare  $\sigma$ -Modell im Rahmen des CJT-Formalismus in Doppelblasen-Approximation bei endlichen Temperaturen ausgewertet, wobei die Freiheitsgrade in der üblichen kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \vec{\pi})$ , angeordnet werden. Dies beinhaltet die Berechnung der Mesonenmassen, des Kondensats und des Drucks als Funktion der Temperatur bei explizit gebrochener Symmetrie und im chiralen Limes. Die Regularisierung divergenter Vakuumterme wird anhand des Counterterm-Verfahrens durchgeführt.

Anschließend erfolgt für  $N = 2$  ein Vergleich zwischen den numerischen Resultaten der kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , und den beiden im zweiten Kapitel konstruierten polaren Darstellungen,  $\Phi = \sigma e^{i\pi/\phi}/\sqrt{2}$  und  $\Phi = \sqrt{2\phi\psi} e^{i\pi/2\phi}$ , für das Pion und seinen massiven skalarmesonischen chiralen Partner.

### Einleitung

Bei niedrigen Temperaturen wird die Thermodynamik der stark wechselwirkenden Materie durch die Fluktuationen der Pionen dominiert, welche die leichtesten Teilchen im hadronischen Massenspektrum darstellen, da die Energie nicht ausreicht, um die massiven  $\sigma$ -Felder anzuregen. Aus diesem Grund wird im nichtlinearen  $\sigma$ -Modell per Konstruktion eine unendlich große Masse für das  $\sigma$ -Feld generiert und es dadurch als dynamischer Freiheitsgrad eliminiert. Dies kann mit einer unendlich großen Kopplungskonstante,  $\lambda \rightarrow \infty$ , innerhalb des linearen  $\sigma$ -Modells realisiert werden. Das führt dazu, dass die “mexican-hat” Form des Potentials unendlich steil in  $\sigma$ -Richtung wird, was die Dynamik auf den sogenannten chiralen Kreis beschränkt, der durch das Minimum des Potentials,  $\sigma^2 + \pi^2 = f_\pi^2$ , definiert ist, siehe Ab. 3.1.

Eine Untersuchung des nichtlinearen  $\sigma$ -Modells bei endlichen Temperaturen in  $1/N$  Entwicklung bis zur führenden Ordnung (LO) wurde im chiralen Limes von Bochkarev und Kapusta (1996) und bei explizit gebrochener Symmetrie in der Arbeit von Meyer-Ortmann (1993) durchgeführt. Eine weiterführende Studie der Thermodynamik des nichtlinearen  $\sigma$ -Modells befindet sich zum Beispiel

Abbildung 3.1: Das Potential im nichtlinearen  $\sigma$ -Modell

im Paper von Jens O. Andersen Nordita, Daniel Boer and Harmen J. Warringa (2008). Dabei wird die  $1/N$  Entwicklung bis zur nächst führenden Ordnung (NLO) erweitert und die Regularisierung divergenter Vakuumterme berücksichtigt.

### 3.1 Kartesische Darstellung

In diesem Abschnitt erfolgt die Auswertung des  $O(N)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modells bei endlichen Temperaturen, wobei die internen Freiheitsgrade in der üblichen kartesischen Darstellung,  $\Phi^t = (\sigma, \vec{\pi})$ , angeordnet werden. Unter Einführung eines Hilfsfeldes wird zunächst die Zwangsbedingung  $\Phi^2 = f_\pi^2$ , welche die Länge des Feldes  $\Phi$  auf  $f_\pi$  fixiert, in die Konstruktion der Lagrangedichte einbezogen. Mit Hilfe des CJT-Formalismus wird das effektive Potential in Doppelblasen-Approximation aufgestellt. Nach Eliminierung des Hilfsfeldes, welches die Rolle eines Lagrange-Multipliers spielt, wird aus den stationären Bedingungen für das effektive Potential ein Gleichungssystem hergeleitet, dessen Lösung die temperaturabhängigen Mesonenmassen und das Kondensat ergibt. Die Regularisierung divergenter Vakuumbeiträge erfolgt vorzugsweise anhand des Counterterm-Verfahrens. Anschließend werden für  $N = 4$  die numerischen Resultate für das Kondensat, die Mesonenmassen und den Druck als Funktion der Temperatur im chiralen Limes und bei explizit gebrochener Symmetrie präsentiert und diskutiert.

### 3.1.1 Konstruktion der Lagrangedichte

Das nichtlineare  $\sigma$ -Modell wird beschrieben durch die freie Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^t \partial^\mu \Phi, \quad (3.1)$$

die ausschließlich einen kinetischen Term enthält.  $\Phi$  ist ein skalares  $N$ -komponentiges Feld,  $\Phi^t = (\sigma, \pi_1, \dots, \pi_{N-1})$ , welches  $N - 1$  Pionen und ein  $\sigma$ -Feld beschreibt.

Weiterhin existiert eine zusätzliche Zwangsbedingung, welche die Länge des Feldes  $\Phi$  auf  $f_\pi$  fixiert

$$\Phi^2 = f_\pi^2. \quad (3.2)$$

Die Zwangsbedingung drängt die Felder auf eine  $N - 1$ -dimensionale Hyper-sphäre und verursacht die Wechselwirkung zwischen ihnen. Dadurch wird das Modell nicht trivial.

Um die Beschreibung expliziter Symmetriebrechungsmuster zu ermöglichen, wird ein zusätzlicher Term  $h\sigma$  eingeführt

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^t \partial^\mu \Phi + h\sigma. \quad (3.3)$$

Dabei muss bei der Formulierung der Zwangsbedingung  $f_\pi$  durch einen allgemeinen Parameter,  $v_0$ , ersetzt werden, der im Limes  $h \rightarrow 0$  gegen  $f_\pi$  läuft.

Der entsprechende Ausdruck für das erzeugende Funktional lautet in diesem Fall:

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi \delta(\Phi^2 - v_0^2) \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L}_0 \right]. \quad (3.4)$$

Mit der vollständigen Repräsentation der  $\delta$ -Funktion

$$\delta(\Phi^2 - v_0^2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}\alpha \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \left[ \frac{i}{2} \alpha (\Phi^2 - v_0^2) + \frac{\varepsilon}{2} \alpha^2 \right] \right\}$$

kann das erzeugende Funktional (3.4) unter Einführung eines Hilfsfeldes  $\alpha$  folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\Phi \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L} \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

wo  $N$  eine für die Thermodynamik irrelevante Normierungskonstante ist. Der zusätzliche Parameter  $\varepsilon$  muss gegen Null geschickt werden, um die Gültigkeit dieser Konstruktion zu garantieren. Für spätere Zwecke wird an dieser Stelle eine zusätzliche Notation eingeführt,  $Z[\varepsilon, h]$ , die eine explizite Abhängigkeit des erzeugenden Funktionals von den beiden Parametern des Modells  $\varepsilon$  und  $h$  betont.

Die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^t \partial^\mu \Phi - U(\Phi, \alpha) \quad (3.6)$$

hängt nun sowohl vom physikalischen Feld  $\Phi$  auch vom Hilfsfeld  $\alpha$  ab, welches die Rolle eines Lagrange-Multipliers spielt, wobei das Potential auf Baumgraphenniveau durch

$$U(\Phi, \alpha) = \frac{i}{2}\alpha(\Phi^2 - v_0^2) + \frac{\varepsilon}{2}\alpha^2 - h\sigma \quad (3.7)$$

gegeben ist.

Durch Variation der Lagrangedichte (3.6) nach  $\alpha$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha} = \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \alpha} = 0, \quad (3.8)$$

lässt sich die Bewegungsgleichung für das Hilfsfeld formulieren

$$i\alpha = \frac{1}{2\varepsilon}(\Phi^2 - v_0^2). \quad (3.9)$$

Substituiert man anhand dieses Ergebnisses das Hilfsfeld in Gl. (3.6), so erhält man für endliche  $\varepsilon$ -Werte die bekannte Lagrangedichte für das lineare  $\sigma$ -Modell

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi^t \partial^\mu \Phi - \frac{1}{8\varepsilon}(\Phi^2 - v_0^2)^2 + h\sigma, \quad (3.10)$$

wo  $\frac{1}{\varepsilon}$  der Kopplungskonstante  $\lambda$  entspricht, und der Limes  $\lambda \rightarrow \infty$  mit dem Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$  korrespondiert. Aus dieser Betrachtung wird deutlich, dass eine unendlich große Kopplungskonstante innerhalb des linearen  $\sigma$ -Modells,  $\lambda \rightarrow \infty$ , mit dem Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  im nichtlinearen Fall korrespondiert.

Wie das skalare  $\sigma$ -Feld besitzt auch das Hilfsfeld  $\alpha$  einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert. Nachdem die beiden Felder um ihre Erwartungswerte verschoben werden

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \alpha_0 + \alpha(x, \tau), \\ \sigma &\rightarrow \phi + \sigma(x, \tau), \end{aligned} \quad (3.11)$$

lautet die Lagrangedichte im Goldstone-Modus

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu \pi_i \partial^\mu \pi_i \\ &\quad - \frac{i}{2}(\alpha_0 + \alpha)(\sigma^2 + \pi_i^2 + 2\sigma\phi + \phi^2 - v_0^2) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_0 + \alpha)^2 + h(\phi + \sigma), \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei ein Mischterm zwischen  $\sigma$  und  $\alpha$  entsteht

$$-i\alpha\sigma\phi. \quad (3.13)$$

Es gibt unterschiedliche technische Methoden, mit dieser Mischung umzugehen, welche zu relativ komplizierten Ausdrücken für den  $\alpha$ -Propagator führen können.

In dieser Arbeit werden die beiden Felder  $\sigma$  und  $\alpha$  durch geeignetes Verschieben des Hilfsfeldes

$$\alpha(x, \tau) \rightarrow \alpha(x, \tau) - \frac{i\phi\sigma(x, \tau)}{\varepsilon} \quad (3.14)$$

entmischt. Aus der resultierenden Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_i \partial^\mu \pi_i - \frac{\sigma^2}{2} \left( i\alpha_0 + \frac{\phi^2}{\varepsilon} \right) - \frac{\pi_i^2}{2} (i\alpha_0) \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{2} \varepsilon - \frac{i}{2} \alpha (\sigma^2 + \pi_i^2) - \frac{\phi \sigma}{2\varepsilon} (\sigma^2 + \pi_i^2) \\ &\quad - \frac{i}{2} \alpha_0 (\phi^2 - v_0^2) - \frac{\varepsilon}{2} \alpha_0^2 + h\phi \end{aligned} \quad (3.15)$$

lassen sich unmittelbar die inversen Propagatoren

$$D_i^{-1}(k; \phi, \alpha_0) = -k^2 + m_i^2; \quad i = \sigma, \vec{\pi} \quad (3.16)$$

und die Massen auf Baumgraphenniveau

$$m_\sigma^2 = i\alpha_0 + \frac{\phi^2}{\varepsilon}, \quad m_\pi^2 = i\alpha_0, \quad m_\alpha^2 = \varepsilon \quad (3.17)$$

ablesen.

Die hier verwendete Methode, mittels Verschiebung des Hilfsfeldes den Mischterm zwischen  $\sigma$  und  $\alpha$  zu eliminieren, hat zwei Vorteile: Erstens bleibt die pfadintegrale Form des erzeugenden Funktionals unverändert, da die mit dem Shift assoziierte Jacobi-Determinante eins beträgt. Zweitens wird durch das Verschieben eine  $\sigma$ -Masse generiert, die wie gefordert, im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  unendlich große Werte annimmt, siehe Gl. (3.17).

In einigen bisherigen Studien des nichtlinearen  $\sigma$ -Modells wurde eine vereinfachte Repräsentation der  $\delta$ -Funktion verwendet [28, 26]

$$\begin{aligned} \delta(\Phi^2 - f_\pi^2) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}\alpha \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \left[ \frac{i}{2} \alpha (\Phi^2 - f_\pi^2) + \frac{\varepsilon}{2} \alpha^2 \right] \right\} \\ &= N \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}\alpha \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \left[ \frac{i}{2} \alpha (\Phi^2 - f_\pi^2) \right] \right\}, \end{aligned}$$

wo der Limes für  $\varepsilon$  bereits ausgeführt ist. Dabei wird die  $\varepsilon$ -Abhängigkeit bei der Formulierung des erzeugenden Funktionals und der anschließenden Auswertung des Modells komplett vernachlässigt. Dies ist nicht korrekt, da der  $\varepsilon$ -abhängige Term  $\frac{\varepsilon}{2} \alpha^2$  notwendig ist, um durch geeignetes Verschieben des Hilfsfeldes die Mischung zwischen  $\sigma$  und  $\alpha$  zu eliminieren und wie gefordert, im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  die  $\sigma$ -Masse per Konstruktion gegen unendlich zu schicken.

### 3.1.2 Das effektive Potential und die Gap-Gleichungen

In diesem Abschnitt wird das effektive Potential mit Hilfe des CJT-Formalismus in Doppelblasen-Approximation aufgestellt, um daraus die Gleichungen für die temperaturabhängigen Mesonenmassen und das Kondensat herzuleiten. Da die Lagrangedichte (3.15) keine Vierervertizes enthält, die zur Konstruktion von Doppelblasendiagrammen notwendig sind, gibt es in diesem Fall keinen  $V_2$ -Anteil, und das CJT-effektive Potential besitzt einfach folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} V_{eff}(\phi, \alpha_0; G_\sigma, G_\pi, G_\alpha) &= \frac{i}{2} \alpha_0 (\phi^2 - v_0^2) + \frac{\varepsilon}{2} \alpha_0^2 - h\phi \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma, \vec{\pi}, \alpha} \int_k [\ln G_i^{-1}(k) + D_i^{-1}(k; \phi, \alpha_0) G_i(k) - 1]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aus den stationären Bedingungen für das effektive Potential

$$\frac{\delta V_{eff}}{\delta \phi} = 0, \quad \frac{\delta V_{eff}}{\delta \alpha_0} = 0, \quad \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_i(k)} = 0; \quad i = \sigma, \vec{\pi}, \alpha \quad (3.19)$$

werden durch Variation nach  $\phi$  und  $\alpha_0$  zwei Kondensatgleichungen hergeleitet

$$h = i\alpha_0\phi + \frac{\phi}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k), \quad (3.20)$$

$$0 = \frac{i}{2}(\phi^2 - v_0^2) + \varepsilon\alpha_0 + \frac{i}{2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) + \frac{i}{2}(N-1) \int_k \mathcal{G}_\pi(k). \quad (3.21)$$

Funktionalableitungen von  $V_{eff}(\phi, \alpha_0; G_\sigma, G_\pi, G_\alpha)$  nach  $G_\sigma(k), G_\pi(k)$  und  $G_\alpha(k)$  ergeben die Schwinger-Dyson Gleichungen für die vollen Propagatoren. Aufgrund des fehlenden  $V_2$ -Anteils ist die Selbstenergie in der verwendeten Näherung für alle Felder Null

$$\Sigma_i = 2 \frac{\delta V_2}{\delta G_i(k)} = 0. \quad (3.22)$$

Mit dieser Beziehung lauten die Inversen der vollen Propagatoren

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_i^{-1}(k) &= D_i^{-1}(k; \phi, \alpha_0) + \Sigma_i \\ &= D_i^{-1}(k; \phi, \alpha_0) \end{aligned} \quad (3.23)$$

und die temperaturabhängigen Massen

$$\begin{aligned} M_i^2 &= m_i^2 + \Sigma_i \\ &= m_i^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Auf diese Weise erhält man folgende fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned} h &= \phi \left( i\alpha_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right), \\ i\alpha_0 &= \frac{1}{2\varepsilon} \left( \phi^2 - v_0^2 + \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) + (N-1) \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right), \\ M_\pi^2 &= i\alpha_0, \quad M_\sigma^2 = M_\pi^2 + \frac{\phi^2}{\varepsilon}, \quad M_\alpha^2 = \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Das effektive Potential  $V_{eff}(\phi, \alpha_0; G_\sigma, G_\pi, G_\alpha)$  hängt nicht nur vom physikalischen Feld  $\Phi$ , sondern auch vom Hilfsfeld  $\alpha$  ab. Ausserdem besitzt es eine Sattelform. Aus diesem Grund entsprechen die Lösungen des Gleichungssystems (3.25) dem Sattelpunkt und nicht dem globalen Minimum dieses effektiven Potentials.

Da das Hilfsfeld kein unabhängiger dynamischer Freiheitsgrad, sondern ein Lagrange-Multiplier ist, entspricht die Kondensatgleichung für  $\alpha$

$$i\alpha_0 = \frac{1}{2\varepsilon} \left( \phi^2 - v_0^2 + \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) + (N-1) \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right) \quad (3.26)$$

einer zusätzlichen Bedingung für die Thermodynamik des Systems. Die Substitution von  $i\alpha_0$  mittels (3.26) führt zu folgendem Gleichungssystem für das



Kondensat  $\phi$  und die Mesonenmassen:

$$\begin{aligned} h &= \phi \left( M_\pi^2[\varepsilon, h] + \frac{1}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right), \\ M_\sigma^2[\varepsilon, h] &= M_\pi^2[\varepsilon, h] + \frac{\phi^2}{\varepsilon}, \\ 2\varepsilon M_\pi^2[\varepsilon, h] &= \phi^2 - v_0^2 + \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) + (N-1) \int_k \mathcal{G}_\pi(k). \end{aligned} \quad (3.27)$$

An dieser Stelle wird erneut die Notation verwendet, in der eine explizite Abhängigkeit von beiden Parametern des Modells  $\varepsilon$  und  $h$  betont wird. Um die temperaturabhängigen Mesonenmassen und das Kondensat im nichtlinearen Fall zu erhalten, wird dieses Gleichungssystem im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  ausgewertet. Im chiralen Limes muss zusätzlich der Grenzwert für den expliziten Symmetriebrechungsparameter,  $h \rightarrow 0$ , analysiert werden.

Ebenso ist es möglich, mit der Gleichung (3.26) zunächst das Hilfsfeld aus dem effektiven Potential zu eliminieren und anschließend daraus die Gleichungen für die physikalischen Größen,  $M_\sigma^2[\varepsilon, h]$ ,  $M_\pi^2[\varepsilon, h]$  und  $\phi$ , herzuleiten.

Mit

$$\begin{aligned} \int_k [D^{-1}(k; \phi, \alpha_0)G(k) - 1] &= \int_k \left[ (-k^2 + m^2(\phi, \alpha_0)) \frac{1}{-k^2 + M^2} - 1 \right] \\ &= \int_k (m^2(\phi, \alpha_0) - M^2) \frac{1}{-k^2 + M^2} \\ &= (m^2(\phi, \alpha_0) - M^2) \int_k G(k) \end{aligned} \quad (3.28)$$

kann das effektive Potential (3.18) wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} V_{eff}(\phi, \alpha_0; G_\sigma, G_\pi, G_\alpha) &= \frac{i}{2} \alpha_0 (\phi^2 - v_0^2) + \frac{\varepsilon}{2} \alpha_0^2 - h\phi \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma, \vec{\pi}, \alpha} \left[ \int_k \ln G_i^{-1}(k) + (m_i^2(\phi, \alpha_0) - M_i^2) \int_k G_i(k) \right]. \end{aligned}$$

Für das Hilfsfeld  $\alpha$  gilt die Beziehung  $G_\alpha^{-1}(k) = D_\alpha^{-1}(k; \phi, \alpha_0) = \varepsilon$ . Somit entspricht der Beitrag

$$\begin{aligned} \int_k [\ln G_\alpha^{-1}(k) + D_\alpha^{-1}(k; \phi, \alpha_0)G_\alpha(k) - 1] &= \int_k \ln G_\alpha^{-1}(k) \\ &= \int_k \ln \varepsilon \end{aligned} \quad (3.29)$$

einer für die Thermodynamik des Systems irrelevanten Konstante, die subtrahiert werden darf.

Setzt man für die Felder  $\sigma$  und  $\vec{\pi}$  ihre Massen auf Baumgraphenniveau in Abhängigkeit von den beiden Kondensaten  $\phi$  und  $\alpha_0$  ein, so lautet das effektive

Potential:

$$\begin{aligned}
V_{eff}(\phi, \alpha_0; G_\sigma, G_\pi) &= \frac{i}{2} \alpha_0 (\phi^2 - v_0^2) + \frac{\varepsilon}{2} \alpha_0^2 - h\phi + \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma, \vec{\pi}} \int_k \ln G_i^{-1}(k) \\
&+ \frac{1}{2} \left( i\alpha_0 + \frac{\phi^2}{\varepsilon} - M_\sigma^2 \right) \int_k G_\sigma(k) \\
&+ \frac{N-1}{2} (i\alpha_0 - M_\pi^2) \int_k G_\pi(k). \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Die Substitution des Kondensats  $\alpha_0$  mit der Gleichung (3.26) ergibt schließlich ein effektives Potential, welches die notwendigen physikalischen Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned}
V_{eff}(\phi; G_\sigma, G_\pi) &= \frac{1}{8\varepsilon} (\phi^2 - v_0^2)^2 - h\phi + \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma, \vec{\pi}} \int_k \ln G_i^{-1}(k) \\
&+ \frac{(N-1)}{2} \left[ \frac{\phi^2 - v_0^2}{2\varepsilon} - M_\pi^2 \right] \int_k G_\pi(k) \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \frac{3\phi^2 - v_0^2}{2\varepsilon} - M_\sigma^2 \right] \int_k G_\sigma(k) \\
&+ \frac{1}{8\varepsilon} \left( \int_k G_\sigma(k) + (N-1) \int_k G_\pi(k) \right)^2.
\end{aligned}$$

Es bietet sich an,  $V_{eff}(\phi; G_\sigma, G_\pi)$  in einer kompakteren Form zu schreiben:

$$\begin{aligned}
V_{eff}(\phi; G_\sigma, G_\pi) &= \frac{1}{8\varepsilon} (\phi^2 - v_0^2)^2 - h\phi \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma, \vec{\pi}} \int_k [\ln G_i^{-1}(k) + D_i^{-1}(k; \phi) G_i(k) - 1] \\
&+ \frac{1}{8\varepsilon} \left( \int_k G_\sigma(k) + (N-1) \int_k G_\pi(k) \right)^2, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

wobei die inversen Propagatoren und die Massen für  $\sigma$  und  $\vec{\pi}$  auf Baumgraphenniveau durch

$$D_i^{-1}(k; \phi) = -k^2 + m_i^2; \quad i = \sigma, \vec{\pi} \tag{3.32}$$

$$m_\sigma^2 = \frac{3\phi^2 - f_\pi^2}{2\varepsilon}, \quad m_\pi^2 = \frac{\phi^2 - f_\pi^2}{2\varepsilon}. \tag{3.33}$$

gegeben sind.

Die stationären Bedingungen für das effektive Potential  $V_{eff}(\phi; G_\sigma, G_\pi)$

$$\frac{\delta V_{eff}(\phi; G_\sigma, G_\pi)}{\delta \phi} = 0, \quad \frac{\delta V_{eff}(\phi; G_\sigma, G_\pi)}{\delta G_i(k)} = 0; \quad i = \sigma, \vec{\pi} \tag{3.34}$$

ermöglichen schließlich die Herleitung eines mit Gl.(3.27) identischen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{2\varepsilon} \phi (\phi^2 - v_0^2) + 3 \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) + (N-1) \int_k \mathcal{G}_\pi(k), \\
M_\sigma^2[\varepsilon, h] &= \frac{1}{2\varepsilon} (3\phi^2 - v_0^2) + \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) + (N-1) \int_k \mathcal{G}_\pi(k), \\
M_\pi^2[\varepsilon, h] &= \frac{1}{2\varepsilon} (\phi^2 - v_0^2) + \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) + (N-1) \int_k \mathcal{G}_\pi(k), \tag{3.35}
\end{aligned}$$

dessen numerische Auswertung im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Mesonenmassen und das Kondensat als Funktion der Temperatur im nichtlinearen Fall ergibt.

### Bestimmung der Parameter

Bei trivialer Regularisierung lauten die freien Parameter des Modells:

$$h = m_\pi^2 f_\pi, \quad \frac{1}{\varepsilon} = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{f_\pi^2}, \quad v_0^2 = f_\pi^2 - 2\varepsilon \frac{h}{f_\pi}. \quad (3.36)$$

### 3.1.3 Regularisierung

Die Regularisierungsmethode wird derart gewählt, dass das  $\sigma$ -Feld auch im Vakuum eingefroren bleibt:

$$\int_k \mathcal{G}_\sigma(k) |_{T=0} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.37)$$

Diese Bedingung kann erfüllt werden, wenn die Regularisierung der divergenten Vakuumbeiträge im Rahmen des Counterterm-Verfahrens mit  $\mu = m_\sigma$  durchgeführt wird

$$\int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k(M)} \equiv Q_\mu(M) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ M^2 \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - M^2 + \mu^2 \right]. \quad (3.38)$$

Das regulierte System lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} h &= \phi \left( M_\pi^2[\varepsilon, h] + \frac{1}{\varepsilon} [Q_T(M_\sigma) + Q_\mu(M_\sigma)] \right), \\ M_\sigma^2[\varepsilon, h] &= M_\pi^2[\varepsilon, h] + \frac{\phi^2}{\varepsilon}, \\ 2\varepsilon M_\pi^2[\varepsilon, h] &= \phi^2 - v_0^2 + (N-1) [Q_T(M_\pi) + Q_\mu(M_\pi)] \\ &\quad + [Q_T(M_\sigma) + Q_\mu(M_\sigma)], \end{aligned} \quad (3.39)$$

dabei ist  $Q_T(M_i)$  der temperaturabhängige Bose-Einstein Term

$$Q_T(M_i) = \frac{1}{2\pi^2} \int dk \frac{k^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + M_i^2}} \frac{1}{\exp\left\{ \sqrt{\vec{k}^2 + M_i^2}/T \right\} - 1} \quad (3.40)$$

und  $Q_\mu(M_i)$  der regulierte Vakuumbeitrag, Gl. (3.38).

Im regulierten System behalten  $h$  und  $\varepsilon$  ihre Werte auf Baumgraphenniveau

$$h = m_\pi^2 f_\pi, \quad \frac{1}{\varepsilon} = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{f_\pi^2}, \quad (3.41)$$

während der Parameter  $v_0^2$  durch die Regularisierung zusätzliche Beiträge erhält

$$v_0^2 = f_\pi^2 - 2\varepsilon m_\pi^2 + \frac{N-1}{16\pi^2} \left( m_\pi^2 \ln \frac{m_\pi^2}{\mu^2} - m_\pi^2 + \mu^2 \right). \quad (3.42)$$

### 3.1.4 Resultate

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der numerischen Auswertung für das  $O(4)$  nichtlineare  $\sigma$ -Modell im chiralen Limes und bei explizit gebrochener Symmetrie präsentiert und besprochen. Im chiralen Limes erfolgt eine separate Betrachtung von zwei unterschiedlichen Limitierungsprozessen, indem die Reihenfolge, in der die beiden Parameter des Modells  $h$  und  $\varepsilon$  gegen Null geschickt werden, variiert wird.

#### Explizite Symmetriebrechung

Im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  lässt sich das trivial regularisierte Gleichungssystem (3.27) für  $h \neq 0$  wie folgt vereinfachen:

Der dominante Term innerhalb der Gleichung für die  $\sigma$ -Masse ist  $\phi^2/\varepsilon$ . Somit ist das  $\sigma$ -Feld unendlich schwer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\sigma^2[\varepsilon, h] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\pi^2[\varepsilon, h] + \frac{\phi^2}{\varepsilon} = \infty \quad (3.43)$$

und fluktuiert nicht

$$\int_k \mathcal{G}_\sigma(k) = 0. \quad (3.44)$$

Die Pionmasse ist durch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\pi^2[\varepsilon, h] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\phi} - \frac{1}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) = \frac{h}{\phi} \quad (3.45)$$

gegeben, da der Beitrag  $\frac{1}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k)$  exponentiell unterdrückt wird

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k(M_\sigma)} \frac{1}{\exp\{\omega_k(M_\sigma)/T\} - 1} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + M_\sigma^2}} \frac{1}{\exp\left\{\sqrt{\vec{k}^2 + M_\sigma^2}/T\right\} - 1} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + M_\pi^2 + \phi^2/\varepsilon}} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\sqrt{\vec{k}^2 + M_\pi^2 + \phi^2/\varepsilon}}{T}\right\} - 1} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Mit diesen Ergebnissen lautet die Kondensatgleichung

$$\phi^2 = f_\pi^2 - (N-1) \int_k \mathcal{G}_\pi(k). \quad (3.47)$$

Abbildung 3.2 zeigt den Verlauf der temperaturabhängigen Pionmasse und des Kondensats für  $h \neq 0$  im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  bei trivialer Regularisierung. In Ab. 3.3 ist zusätzlich der Druck präsentiert, der dem Minimum des effektiven Potentials als Funktion der Temperatur entspricht.

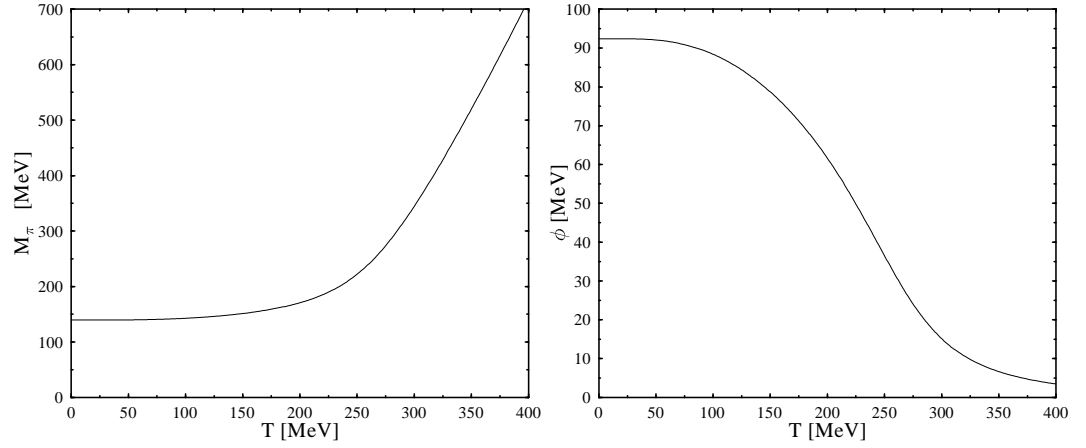


Abbildung 3.2: Die Pionmasse und das Kondensat als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell für  $m_\pi = 139.5$  MeV, bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .

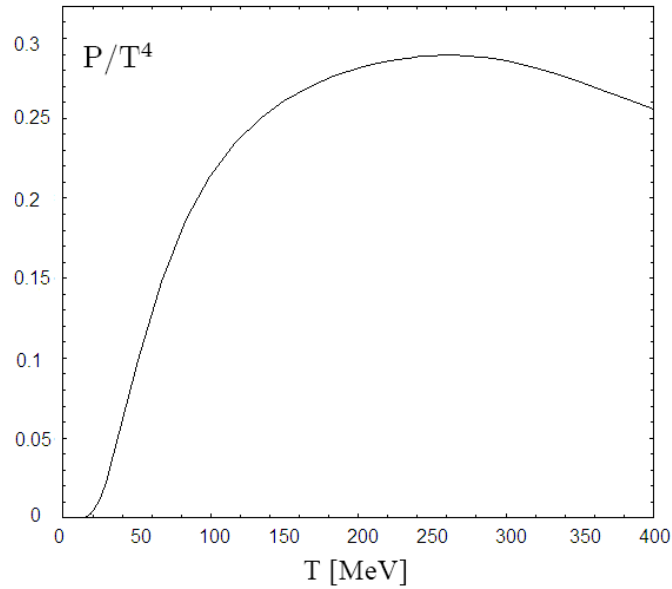


Abbildung 3.3: Der Druck als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell für  $m_\pi = 139.5$  MeV, bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .

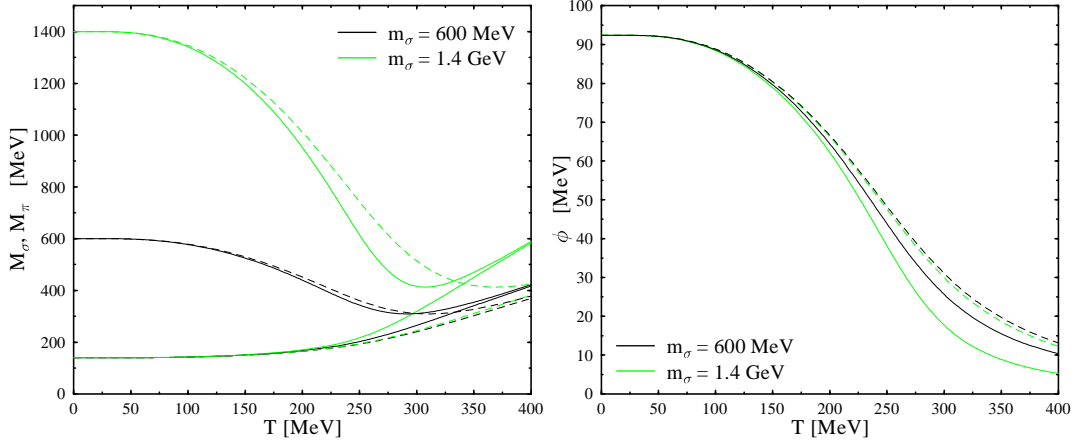


Abbildung 3.4: Die Mesonenmassen und das Kondensat als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie für  $m_\sigma = 600$  MeV und  $m_\sigma = 1400$  MeV im trivial regularisierten System (durchgezogene Linien), sowie bei Counterterm-Regularisierung, mit  $\mu = m_\sigma$ , (gestrichelte Linien).

In den Abbildungen 3.4 und 3.5 sind die Mesonenmassen und das Kondensat als Funktion der Temperatur bei explizit gebrochener Symmetrie für unterschiedliche  $m_\sigma$ -Werte im trivial regularisierten System und bei Counterterm-Regularisierung dargestellt. Wegen der Beziehung

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{f_\pi^2} \quad (3.48)$$

entspricht dabei  $\lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$  dem Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .

Für endliche  $m_\sigma$ -Werte findet erwartungsgemäß oberhalb der kritischen Temperatur eine Massentartung der chiralen Partner,  $\sigma$  und  $\pi$ , statt. Mit steigenden  $m_\sigma$ -Werten fluktuiert das  $\sigma$ -Feld immer geringer, bis es schließlich eingefroren bleibt. Dabei liefert die numerische Auswertung bei trivialer Regularisierung für  $m_\sigma \geq 8$  GeV dieselben Resultate für das Kondensat und die Pionmasse wie im Limes  $\lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$ , Abb. 3.7 und 3.6. In diesem Fall beobachtet man einen Crossover-Phasenübergang mit einer kritischen Temperatur von etwa  $T_c = 185$  MeV, wobei die Pionmasse für  $T > T_c$  nahezu linear wächst.

Bei Counterterm-Regularisierung wird das Modell im Limes  $\lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$  trivial. Für ausreichend große, aber endliche  $m_\sigma$ -Werte ist es dennoch möglich, eine physikalisch sinnvolle Regularisierung des nichtlinearen  $\sigma$ -Modells durchzuführen, bei der das  $\sigma$  wie gefordert, als unendlich schweres Feld eingefroren bleibt, und einzig pionische Freiheitsgrade angeregt sind.

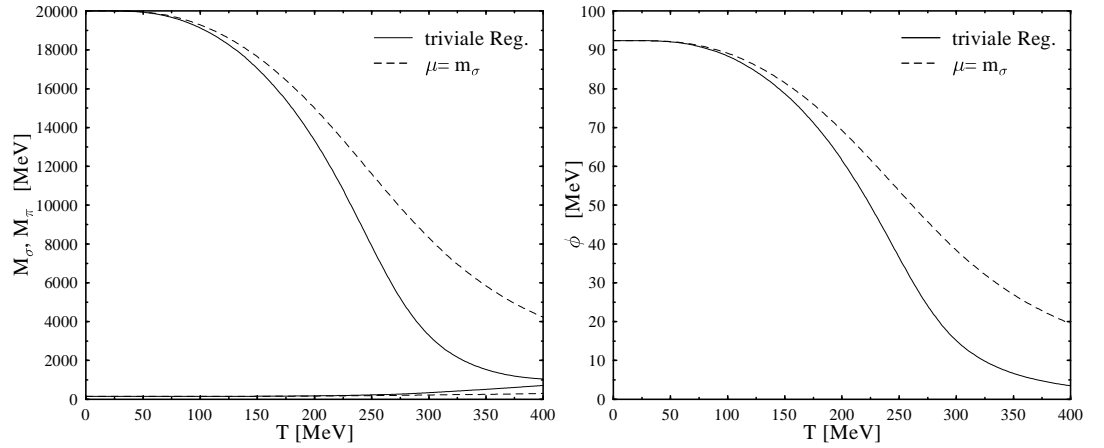


Abbildung 3.5: Die Mesonenmassen und das Kondensat als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie für  $m_\sigma = 20$  GeV im trivial regularisierten System und bei Counterterm-Regularisierung mit  $\mu = m_\sigma$ .

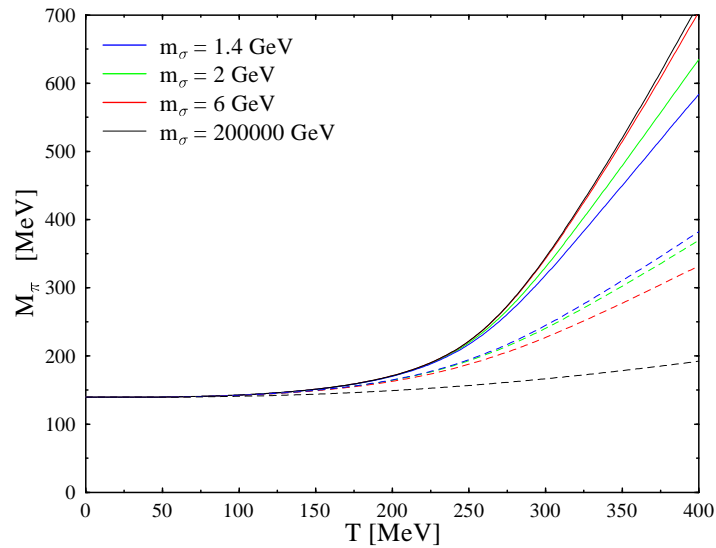


Abbildung 3.6: Die Pionmasse als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie für unterschiedliche  $m_\sigma$ -Werte im trivial regularisierten System (durchgezogene Linien), sowie bei Counterterm-Regularisierung, mit  $\mu = m_\sigma$ , (gestrichelte Linien).



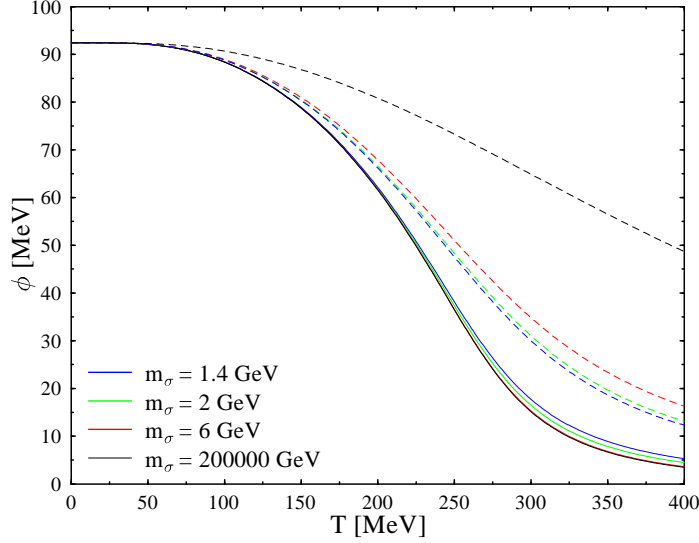


Abbildung 3.7: Das Kondensat als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie für unterschiedliche  $m_\sigma$ -Werte im trivial regularisierten System (durchgezogene Linien), sowie bei Counterterm-Regularisierung, mit  $\mu = m_\sigma$ , (gestrichelte Linien).

### Chiraler Limes

Im chiralen Limes liefert die Auswertung unterschiedliche Ergebnisse abhängig von der Reihenfolge, in der die beiden Parameter des Modells  $\varepsilon$  und  $h$  gegen Null geschickt werden. Aus diesem Grund werden zwei verschiedene Limitierungsprozesse,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{h \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  und  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ , separat betrachtet und die numerischen Ergebnisse für beide Fälle präsentiert.

#### 1. Limitierungsprozess: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$

Ausgehend von der Auswertung des Gleichungssystems (3.27) bei explizit gebrochener Symmetrie wird als erstes der Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  ausgeführt und anschließend der Grenzfall  $h \rightarrow 0$  analysiert.

Abbildungen 3.8 und 3.9 zeigen die Pionmasse, das Kondensat und den Druck als Funktion der Temperatur im Limes  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  bei trivialer Regularisierung. In diesem Fall beobachtet man einen Phasentübergang zweiter Ordnung mit einer kritischen Temperatur  $T_c = 2f_\pi$  MeV.

1.  $T < T_c$  : In der asymmetrischen Phase ist die  $\sigma$ -Masse unendlich groß

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\sigma^2[\varepsilon, h] &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\pi^2[\varepsilon, h] + \frac{\phi^2}{\varepsilon} \\ &= \infty, \end{aligned} \quad (3.49)$$

während die Pionen in Übereinstimmung mit dem Goldstone-Theorem masselos sind

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\pi^2[\varepsilon, h] &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\phi} - \frac{1}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{\phi} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Das Kondensat verläuft gemäß der Gleichung

$$\phi^2 = f_\pi^2 - (N-1) \frac{T^2}{12} \quad (3.51)$$

und schmilzt bei der kritischen Temperatur  $T_c = \sqrt{12/(N-1)} f_\pi$  auf infinitesimal kleine Werte, bleibt jedoch endlich.

**1.  $T > T_c$  :** Oberhalb der kritischen Temperatur werden die Pionen massiv, wobei die Temperaturabhängigkeit der Pionmasse aus

$$f_\pi^2 = (N-1) \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \quad (3.52)$$

bestimmt werden kann. Das  $\sigma$ -Feld bleibt dagegen für nicht verschwindende Kondensatwerte weiterhin unendlich schwer und somit als Freiheitsgrad eingefroren

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\sigma^2[\varepsilon, h] = \infty \text{ für } \phi > 0. \quad (3.53)$$

In Abbildung 3.10 ist ein drei-dimensionaler Plot des effektiven Potentials als Funktion des Kondensats und der Temperatur im Limes  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  illustriert. Im Vakuum,  $T = 0$ , ähnelt die Form des effektiven Potentials einem mexikanischen Hut, wobei die Minima bei  $\phi = \pm f_\pi$  liegen, Abb. 3.11. Erhöht man die Energie, so schmilzt der Radius, auf dem die Minima liegen, mit steigender Temperatur und sinkt bei der kritischen Temperatur  $T_c = 2f_\pi$  auf Null. Dies ist ein charakteristischer Verlauf für einen Phasenübergang zweiter Ordnung.

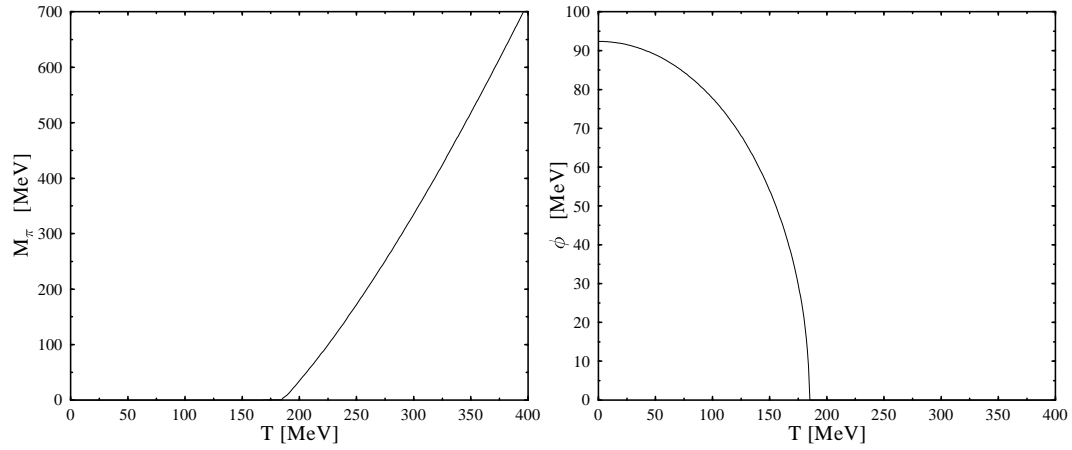


Abbildung 3.8: Die Pionmasse und das Kondensat als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .

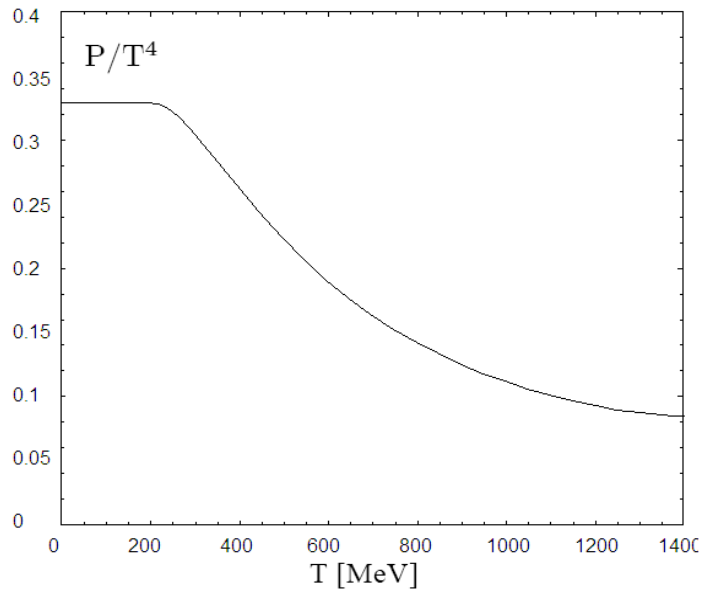


Abbildung 3.9: Der Druck als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .

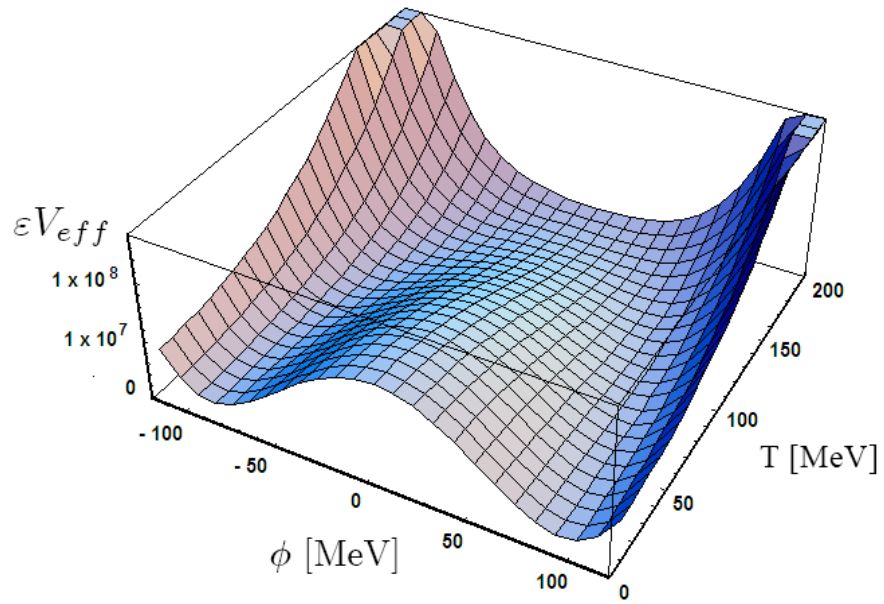


Abbildung 3.10: Das effektive Potential  $\varepsilon V_{eff}$  als Funktion des Kondensats und der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .

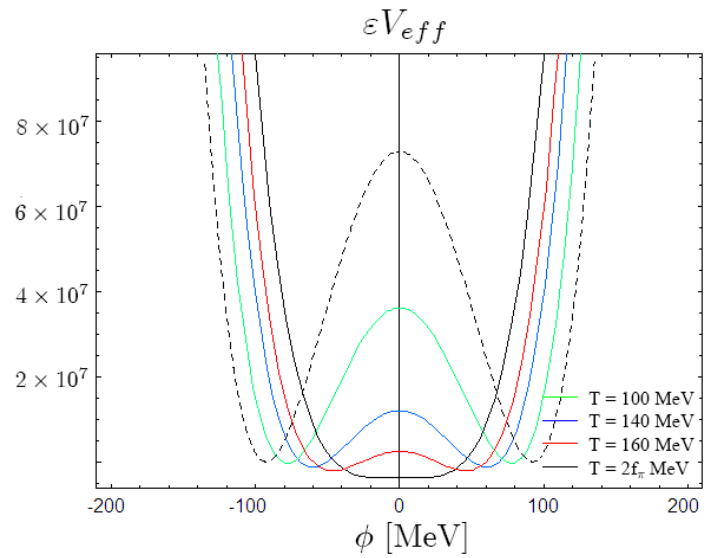


Abbildung 3.11: Das effektive Potential als Funktion des Kondensats für unterschiedliche Temperaturen im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .

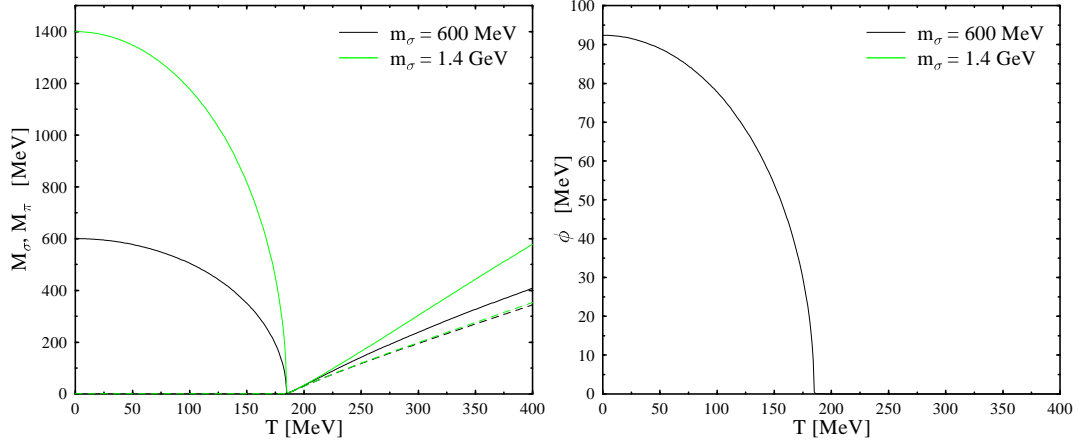


Abbildung 3.12: Die Mesonenmassen und das Kondensat als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell im chiralen Limes für  $m_\sigma = 600$  MeV und  $m_\sigma = 1400$  MeV im trivial regularisierten System (durchgezogene Linien), sowie bei Counterterm-Regularisierung, mit  $\mu = m_\sigma$ , (gestrichelte Linien).

Abbildungen 3.12 und 3.13 zeigen die temperaturabhängigen Mesonenmassen und das Kondensat im chiralen Limes für unterschiedliche  $m_\sigma$ -Werte bei Counterterm-Regularisierung und im trivial regularisierten System, wobei  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$  mit dem Limes  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  korrespondiert.

In der asymmetrischen Phase liefert die numerische Auswertung die selben Resultate für das Kondensat und die  $\sigma$ -Masse im trivial regularisierten System und bei Counterterm-Regularisierung, während die Pionen entsprechend dem Goldstone-Theorem in beiden Fällen masselos sind. Ausserdem bleibt der Verlauf des Kondensats für unterschiedliche  $m_\sigma$ -Werte unverändert. Es liegt stets ein Phasenübergang zweiter Ordnung mit einer kritischen Temperatur von  $T_c = 2f_\pi$  vor.

Oberhalb der kritischen Temperatur findet für endliche  $m_\sigma$ -Werte sowohl bei trivialer als auch bei Counterterm-Regularisierung eine Massenentartung der chiralen Partner,  $\sigma$  und  $\pi$ , statt.

Für große  $m_\sigma$ -Werte bleibt das  $\sigma$ -Feld für  $T > T_c$  unendlich schwer, und man beobachtet im trivial regularisierten System denselben Verlauf für die Pionmasse wie im Limes  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$ , Abb. 3.13.

Bei Counterterm-Regularisierung wird das Modell oberhalb der kritischen Temperatur im Limes  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$  trivial. Allerdings kann für ausreichend große, jedoch endliche  $m_\sigma$ -Werte eine physikalisch sinnvolle Regularisierung des nichtlinearen  $\sigma$ -Modell im chiralen Limes durchgeführt werden, bei der das  $\sigma$ -Feld eingefroren bleibt, und einzig pionische Freiheitsgrade fluktuieren.

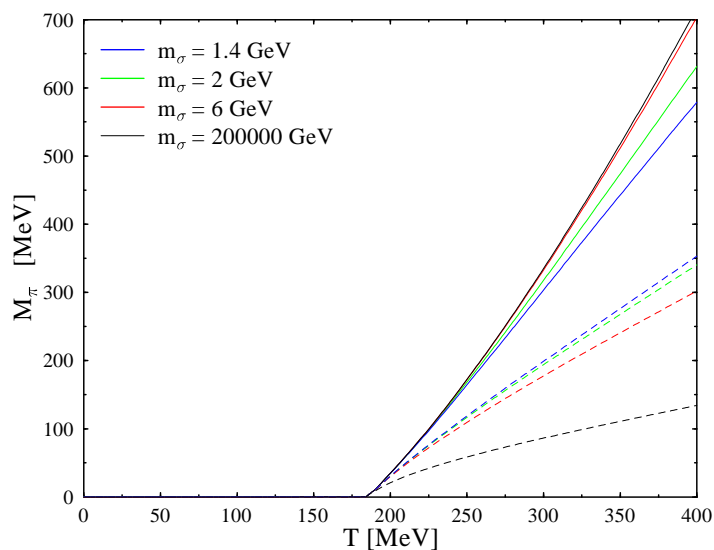


Abbildung 3.13: Die Pionmasse als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nicht-linearen  $\sigma$ -Modell im chiralen Limes für unterschiedliche  $m_\sigma$ -Werte im trivial regularisierten System (durchgezogene Linien), sowie bei Counterterm-Regularisierung, mit  $\mu = m_\sigma$ , (gestrichelte Linien).

In Abb. 3.14 und 3.15 ist der Druck als Funktion der Temperatur für unterschiedliche  $m_\sigma$ -Werte veranschaulicht. Sowohl bei trivialer als auch bei Counterterm-Regularisierung wird oberhalb der kritischen Temperatur eine Annäherung der Druckkurven bei explizit gebrochener Symmetrie und im chiralen Limes beobachtet. Dies ist ein Indiz dafür, dass die expliziten Symmetriebrechungseffekte beim Übergang zu höheren Energien erwartungsgemäß kleiner werden, da  $h$  eine temperaturunabhängige Konstante ist. Wie bereits erwähnt, liefert die numerische Auswertung bei trivialer Regularisierung im chiralen Limes für ausreichend große  $m_\sigma$ -Werte die gleichen Resultate wie für  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$ . Während bei Counterterm-Regularisierung das Modell im Limes  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$  trivial wird. Dieselbe Argumentation gilt für explizit gebrochene Symmetrie. Aus diesem Grund werden die Graphen nur für endlich große  $m_\sigma$ -Werte präsentiert, für die eine sinnvolle Regularisierung des nichtlinearen  $\sigma$ -Modells anhand von Countertermen möglich ist.

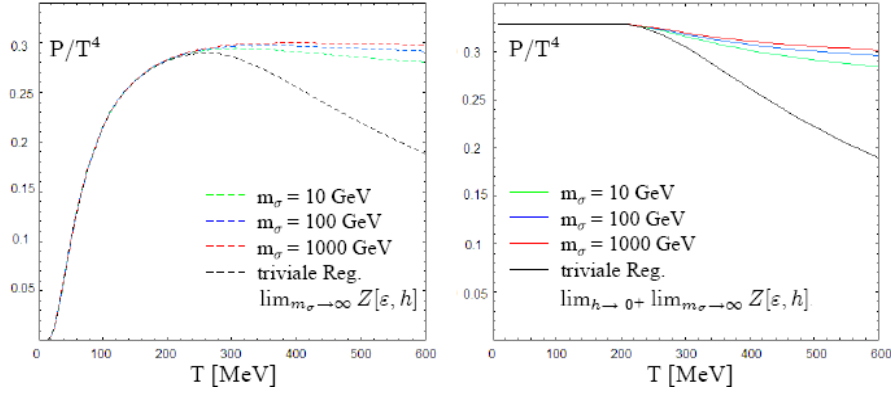


Abbildung 3.14: Der Druck als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie (links) und im chiralen Limes (rechts) für unterschiedliche  $m_\sigma$ -Werte bei Counterterm-Regularisierung, sowie im Limes  $\lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$  und  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$  bei trivialer Regularisierung.

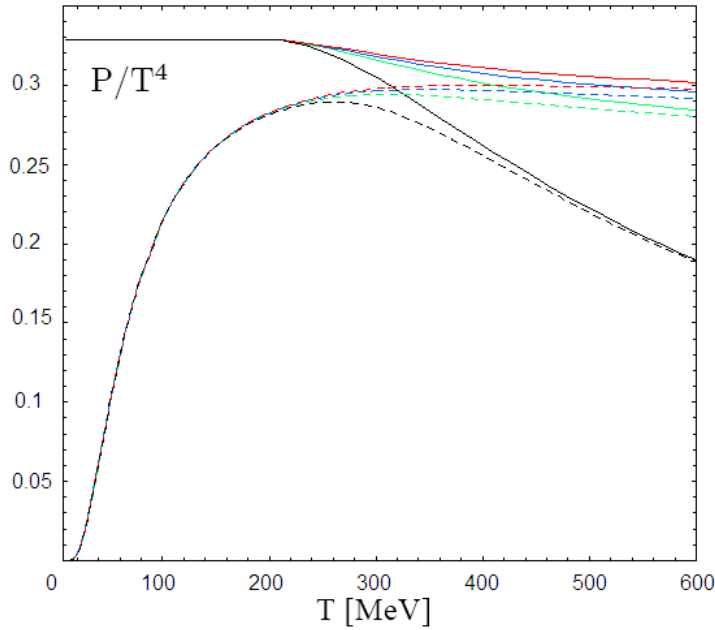


Abbildung 3.15: Der Druck als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie (gestrichelte Linien) und im chiralen Limes (durchgezogene Linien) für unterschiedliche  $m_\sigma$ -Werte bei Counterterm-Regularisierung, sowie im Limes  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$  und  $\lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$  bei trivialer Regularisierung.

**2. Limitierungsprozess:**  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{h \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ 

Als nächstes soll die Reihenfolge der Limites vertauscht werden. Zu diesem Zweck betrachtet man zunächst das Gleichungssystem (3.27) im Limes  $h \rightarrow 0$

$$M_\sigma^2[\varepsilon] = M_\pi^2[\varepsilon] + \frac{\phi^2}{\varepsilon}, \quad (3.54)$$

$$0 = \phi \left( M_\pi^2[\varepsilon] + \frac{1}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right), \quad (3.55)$$

$$2\varepsilon M_\pi^2[\varepsilon] = \phi^2 - f_\pi^2 + \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) + (N-1) \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \quad (3.56)$$

und wertet danach die Gleichungen für  $\varepsilon \rightarrow 0$  aus.

2.1  $\phi > 0$  : Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  lassen sich in der asymmetrischen Phase Vereinfachungen für beide Mesonenmassen vornehmen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\sigma^2[\varepsilon] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\pi^2[\varepsilon] + \frac{\phi^2}{\varepsilon} = \infty, \quad (3.57)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\pi^2[\varepsilon] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) = 0. \quad (3.58)$$

In der Phase spontan gebrochener Symmetrie ist das  $\sigma$ -Feld unendlich schwer, während die Pionen in Übereinstimmung mit dem Goldstone-Theorem masselos sind. Mit diesen Ergebnissen kann die Kondensatgleichung (3.56) folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\phi^2 = f_\pi^2 - (N-1) \frac{T^2}{12}. \quad (3.59)$$

Dies lässt vermuten, dass ein Phasenübergang zweiter Ordnung mit einer kritischen Temperatur von  $T_{N-1} = \sqrt{12/(N-1)} f_\pi$  vorliegt.

2.2  $\phi = 0$  : Sobald die Symmetrie restauriert wird, entarten die Massen der chiralen Partner,  $\sigma$  und  $\pi$ ,

$$M_\sigma^2 = M_\pi^2, \quad \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) = \int_k \mathcal{G}_\pi(k). \quad (3.60)$$

Die Gleichung (3.55) ist in der symmetrischen Phase trivial erfüllt, und die Temperaturabhängigkeit der degenerierten Massen kann aus Gl.(3.56) bestimmt werden

$$f_\pi^2 = N \int_k \mathcal{G}_\pi(k). \quad (3.61)$$

Diese Gleichung besitzt Lösungen für  $T \geq T_N = \sqrt{12/N} f_\pi$  und beschreibt einen kontinuierlichen Anstieg der entarteten Massen mit der Temperatur. Dies impliziert die Möglichkeit einer Restauration der spontan gebrochenen Symmetrie bereits oberhalb einer geringeren Temperatur als  $T_{N-1}$ , nämlich bei  $T_N$ . Es liegt folglich ein Phasenübergang erster Ordnung vor, da innerhalb des Intervalls  $[T_N \leq T \leq T_{N-1}]$  zwei Lösungen existieren.

Aus der Betrachtung des effektiven Potentials in Abhängigkeit vom Kondensat  $\phi$  bei gegebener Temperatur wird die kritische Temperatur zu  $T_c = T_N$



bestimmt, da für  $T \geq T_N$  an der Stelle  $\phi = 0$  ein globales Minimum generiert wird.

Folglich verläuft im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{h \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  das Kondensat für  $T < T_N$  gemäß der Gleichung

$$\phi^2 = f_\pi^2 - (N - 1) \frac{T^2}{12} \quad (3.62)$$

und springt bei  $T = T_N$  auf Null, Abb. 3.16. An dieser Stelle findet eine Massenentartung der chiralen Partner statt,  $M_\sigma^2 = M_\pi^2$ , weil das bis dahin unendlich schwere  $\sigma$ -Feld masselos wird. Anschließend wachsen die entarteten Massen für  $T > T_N$  entsprechend Gl.(3.62) kontinuierlich mit steigender Temperatur. Dabei vergrößert sich die Anzahl der Freiheitsgrade von  $N - 1$  auf  $N$ , da das  $\sigma$ -Feld dynamisch wird.

Dieser zusätzliche Freiheitsgrad, der plötzlich an der Stelle  $T = T_N$  generiert wird, erweist sich als problematisch, denn er verursacht einen Sprung in thermodynamischen Größen wie dem Druck, siehe Ab. 3.17. Dies ist offensichtlich unphysikalisch, da der Druck eine kontinuierliche Größe ist. Ausserdem kann in diesem Fall keine asymptotische Annäherung zwischen dem Druck im chiralen Limes,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{h \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ , und bei explizit gebrochener Symmetrie,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ , oberhalb der kritischen Temperatur beobachtet werden, Abb. 3.18.

Folglich ist der Limitierungsprozess  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  im chiralen Limes der physikalisch richtige, da in diesem Fall alle thermodynamischen Größen erwartungsgemäß verlaufen. Weiterhin gelingt es wie verlangt, das  $\sigma$  als dynamischen Freiheitsgrad zu eliminieren und ein System zu beschreiben, in dem nur Pionen zur Thermodynamik beitragen.

Wie bereits erwähnt, wurde bei einigen bisherigen Studien des nichtlinearen  $\sigma$ -Modells die  $\varepsilon$ -Abhängigkeit des erzeugenden Funktionals komplett vernachlässigt. Aus diesem Grund tauchen in den Resultaten von [28] Defizite auf. So gibt es im chiralen Limes vier statt wie erwartet drei Goldstone-Bosonen, da das  $\sigma$  ebenso wie die Pionen in der asymmetrischen Phase masselos ist.

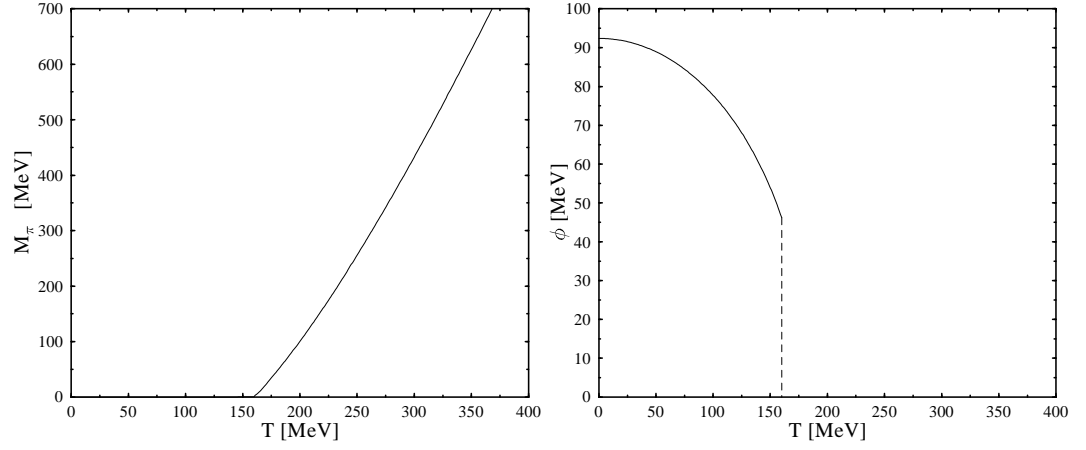


Abbildung 3.16: Die Pionmasse und das Kondensat als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{h \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .

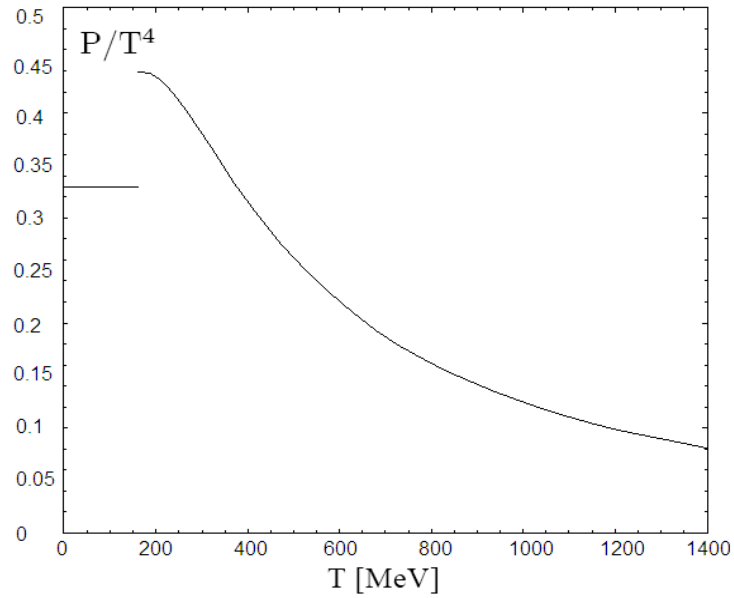


Abbildung 3.17: Der Druck als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{h \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .

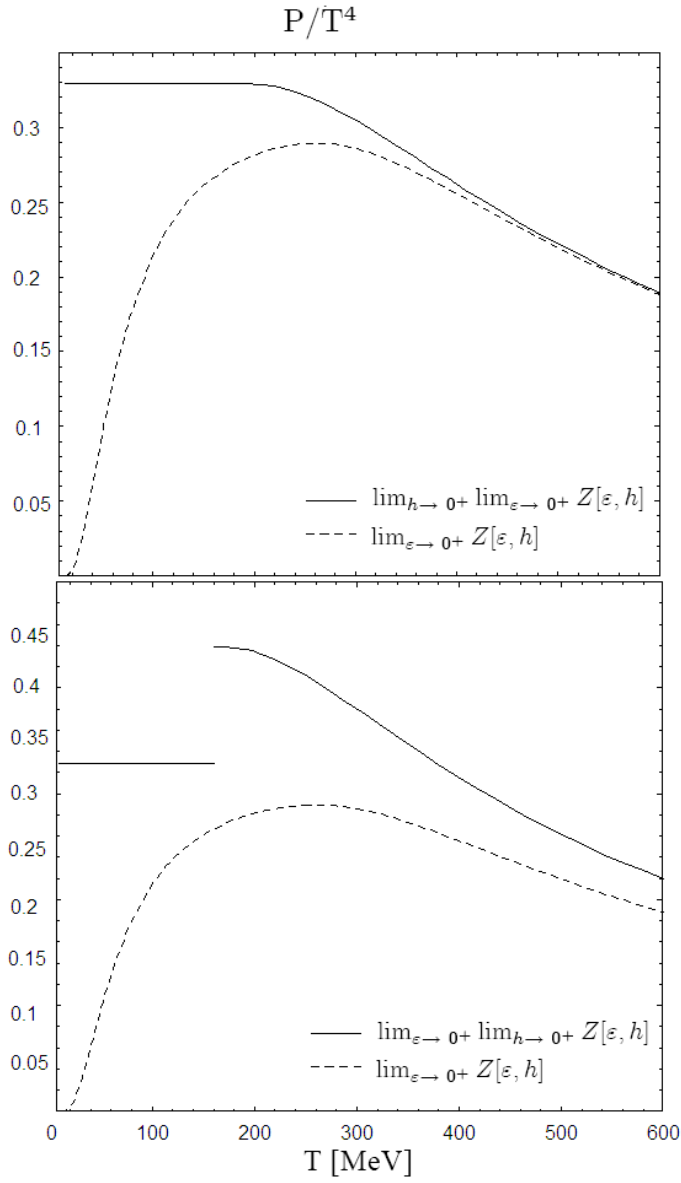


Abbildung 3.18: Der Druck als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z[\epsilon, h]$ , und für die beiden Limitierungsprozesse im chiralen Limes,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z[\epsilon, h]$  (oben) und  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0^+} Z[\epsilon, h]$  (unten).

### 3.1.5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Abschnitt erfolgte die Auswertung des  $O(N)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modells im Rahmen des CJT-Formalismus in Doppelblasen-Approximation bei endlichen Temperaturen.

Als erstes wurde ein Hilfsfeldes  $\alpha$  eingeführt, um die Zwangsbedingung  $\delta(\Phi^2 - f_\pi^2)$  in die Konstruktion der Lagrangedichte einzubeziehen. Unter Beachtung der vollständigen Repräsentation der  $\delta$ -Funktion wurde ein zusätzlicher Parameter  $\varepsilon$  eingeführt, wobei  $\frac{1}{\varepsilon}$  der Kopplungskonstante im linearen  $\sigma$ -Modell entspricht, und eine unendlich große Kopplung unmittelbar mit dem Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  im nichtlinearen Fall korrespondiert. Mit Hilfe des  $\varepsilon$ -abhängigen Terms  $\varepsilon\alpha^2$  war es möglich, durch geeignetes Verschieben des Hilfsfeldes die Mischung zwischen  $\sigma$  und  $\alpha$  im Goldstone-Modus zu eliminieren und wie gefordert, eine  $\sigma$ -Masse zu konstruieren, die im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen unendlich strebt.

Um die Mesonenmassen und das Kondensat bei endlichen Temperaturen zu berechnen, wurde anhand des CJT-Formalismus das effektive Potential in Doppelblasen-Approximation aufgestellt. Die Eliminierung des Hilfsfeldes, welches die Rolle eines Lagrange-Multipliers spielt, ermöglichte die Herleitung eines effektiven Potentials, welches die üblichen physikalischen Eigenschaften besitzt und dem Minimum der Energie in Abhängigkeit vom Kondensat entspricht. Die stationären Bedingungen für das effektive Potential ergaben schließlich ein geschlossenes Gleichungssystem, dessen Lösung das Kondensat und die Mesonenmassen als Funktion der Temperatur lieferte. Ausgehend von der Bedingung, dass das  $\sigma$ -Feld auch im Vakuum eingefroren bleiben soll, erfolgte die Regularisierung divergenter Vakuumbeiträge anhand von Countertermen.

Als nächstes wurden die numerischen Resultate für das  $O(4)$  nichtlineare  $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie und im chiralen Limes präsentiert.

Für  $h \neq 0$  liefert die numerische Auswertung bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  einen Crossover-Verlauf für das Kondensat, wobei die kritische Temperatur bei  $T_c = 185$  MeV liegt. Das  $\sigma$ -Feld ist unendlich schwer und daher als dynamischer Freiheitsgrad eingefroren. Somit tragen nur Pionen zur Thermodynamik bei, deren Masse für  $T > T_c$  nahezu linear wächst.

Im chiralen Limes muss im nichtlinearen Fall zusätzlich der Grenzwert für den expliziten Symmetriebrechungsparameter ausgeführt werden, wobei die Auswertung unterschiedliche Resultate ergibt abhängig von der Reihenfolge, in der die beiden Parameter des Modells  $\varepsilon$  und  $h$  gegen Null geschickt werden. Im physikalisch sinnvollen Limitierungsprozess,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ , wird ausgehend von der Auswertung bei explizit gebrochener Symmetrie zunächst der Limes für  $\varepsilon$  und anschließend für den expliziten Symmetriebrechungsparameter  $h$  ausgeführt. In diesem Fall liegt bei trivialer Regularisierung ein Phasentübergang zweiter Ordnung vor mit einer kritischen Temperatur von  $T_c = \sqrt{12/(N-1)}f_\pi$ . In der asymmetrischen Phase sind die Pionen entsprechend dem Goldstone-Theorem masselos, während die  $\sigma$ -Masse unendlich große Werte annimmt. An der Stelle  $T = T_c$  schmilzt das Kondensat auf infinitesimal kleine Werte und nähert sich für  $T > T_c$  asymptotisch der Null. Folglich werden die Pionen oberhalb der kritischen Temperatur massiv, wogegen das  $\sigma$  für endliche Kondensatwerte weiterhin unendlich schwer bleibt.

Bei Counterterm-Regularisierung wird das Modell im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  bei explizit gebrochener Symmetrie, sowie für  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  im chiralen Limes, trivial. Allerdings kann für ausreichend kleine  $\varepsilon$ -Werte eine physika-

lich sinnvolle Regularisierung des nichtlinearen  $\sigma$ -Modells durchgeführt werden, bei der das  $\sigma$ -Feld als dynamischer Freiheitsgrad eliminiert wird.

Neben den Resultaten für die Mesonenmassen und das Kondensat wurden auch die Ergebnisse für den Druck als Funktion der Temperatur bei trivialer und Counterterm-Regularisierung präsentiert. In beiden Fällen wird oberhalb der kritischen Temperatur eine Annäherung der Druckkurven im chiralen Limes und für  $h \neq 0$  beobachtet, da die expliziten Symmetriebrechungseffekte für höhere Temperaturen erwartungsgemäß kleiner werden.

Insgesamt gelingt es, sowohl im chiralen Limes als auch bei explizit gebrochener Symmetrie im trivial regularisierten System und bei Counterterm-Regularisierung eine unendlich große Masse für das  $\sigma$ -Feld zu generieren und es dadurch per Konstruktion als Freiheitsgrad einzufrieren. Folglich ist es möglich, den an das nichtlineare  $\sigma$ -Modell gestellten Anspruch zu erfüllen und ein System zu beschreiben, in dem nur pionische Anregungszustände existieren.

In der vorliegenden Doppelblasen-Näherung können nur die Massen berechnet werden, da die Selbstenergien keinen imaginären Anteil erhalten. Es wäre also interessant, auch Sonnenuntergangsdiagramme in die Auswertung des Modells einzubeziehen, welche aus folgenden vier Dreiervertizes  $\frac{1}{2}i\alpha\sigma^2$ ,  $\frac{1}{2}i\alpha\pi_i^2$ ,  $-\frac{1}{2\varepsilon}\phi\sigma\pi_i^2$ ,  $-\frac{1}{2\varepsilon}\phi\sigma^3$  konstruiert werden können. Da diese Diagramme eine explizite Impulsabhängigkeit besitzen, erhalten die Selbstenergien einen imaginären Anteil. Dies hat zur Folge, dass die Teilchen eine endliche Breite bekommen, welche mit der Zerfallswahrscheinlichkeit identifiziert werden kann. Für ein ruhendes Teilchen,  $\vec{k} = 0$ , der Energie  $\omega$  ist die Zerfallsbreite durch  $\gamma(\omega) = -\text{Im}\Sigma(\omega, \vec{0})/\omega$  gegeben, wobei  $\Sigma$  der Selbstenergie entspricht.

## 3.2 Polardarstellungen des $O(2)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modells

In diesem Abschnitt erfolgt die Auswertung des  $O(2)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modells, wobei die im zweiten Kapitel konstruierten polaren Darstellungen verwendet werden, bei denen das Pion durch die Winkelvariable repräsentiert wird, während sein massiver chiraler Partner der Radialvariable entspricht.

Beide Polardarstellungen werden im Rahmen des CJT-Formalismus in Doppelblasen-Näherung bei endlichen Temperaturen im chiralen Limes und bei explizit gebrochener Symmetrie ausgewertet. Anschließend werden die numerischen und analytischen Resultate für die temperaturabhängigen Mesonenmassen und das Kondensats präsentiert, diskutiert und mit den Ergebnissen der kartesischen Repräsentation der internen Freiheitsgrade  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$  verglichen.

### 3.2.1 1. Polardarstellung

Zunächst wird das  $O(2)$  nichtlineare  $\sigma$ -Modell mit der im Abschnitt 2.1 vorgestellten Repräsentation der beiden Freiheitsgrade ausgewertet

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{i\pi/\phi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma \cos \pi/\phi + i\sigma \sin \pi/\phi),\end{aligned}\tag{3.63}$$

bei der das massive  $\sigma$ -Feld der Radialvariable entspricht, während das Pion mit der Winkelvariable identifiziert wird. Die Jacobi-Determinante  $\mathfrak{S} = \frac{\sigma}{\phi}$ , die bei der Transformation von kartesischer zu polarer Darstellung generiert wird, soll dabei nicht berücksichtigt werden.

#### Die Lagrangedichte

Für die polare Darstellung  $\Phi = \sigma e^{i\pi/\phi}/\sqrt{2}$  lautet das erzeugende Funktional

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \mathfrak{S} \delta(2\Phi^* \Phi - v_0^2) \exp \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L}_0.\tag{3.64}$$

In diesem Fall muss bei der Formulierung der Zwangsbedingung  $f_\pi^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2$  der Faktor 2 beachtet werden, da  $\phi_1^2 + \phi_2^2 = 2\Phi^* \Phi$ .

$\mathcal{L}_0$  entspricht der freien Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi + h\phi_1\tag{3.65}$$

mit dem expliziten Symmetriebrechungsterm  $h\phi_1$ .

Mit der vollständigen Repräsentation der  $\delta$ -Funktion

$$\delta(2\Phi^* \Phi - v_0^2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}\alpha \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \left[ \frac{i}{2} \alpha (2\Phi^* \Phi - v_0^2) + \frac{\varepsilon}{2} \alpha^2 \right] \right\}$$

### 3.2. POLARDARSTELLUNGEN DES $O(2)$ NICHTLINEAREN $\sigma$ -MODELLS 95

kann das erzeugende Funktional folgendermassen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \mathfrak{S} \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L} \right], \end{aligned} \quad (3.66)$$

wobei die Lagrangedichte und das Potential auf Baumgraphenniveau durch

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - U(\Phi, \alpha), \quad U(\Phi, \alpha) = \frac{i}{2} \alpha (2\Phi^* \Phi - v_0^2) + \frac{\varepsilon}{2} \alpha^2 - h\phi_1 \quad (3.67)$$

gegeben sind.

Im Goldstone-Modus besitzen die Felder  $\sigma$  und  $\alpha$  endliche Vakuumerwartungswerte

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \alpha_0 + \alpha(x, \tau), \\ \sigma &\rightarrow \phi + \sigma(x, \tau), \end{aligned} \quad (3.68)$$

wodurch ein Mischterm  $-i\alpha\sigma\phi$  zwischen diesen beiden Feldern generiert wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 \left( \frac{\sigma^2 + 2\sigma\phi + \phi^2}{\phi^2} \right) \\ &\quad - \frac{i}{2} (\alpha + \alpha_0) (\sigma^2 + 2\sigma\phi + \phi^2 - v_0^2) - \frac{\varepsilon}{2} \alpha^2 \\ &\quad + h(\sigma + \phi) \cos \frac{\pi}{\phi}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Mit einem weiteren Shift

$$\alpha(x, \tau) \rightarrow \alpha(x, \tau) - \frac{i\phi\sigma(x, \tau)}{\varepsilon} \quad (3.70)$$

gelingt es, die unerwünschte Mischung zu eliminieren. Anschließend können aus der Lagrangedichte<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - \frac{\sigma^2}{2} \left( i\alpha_0 + \frac{\phi^2}{\varepsilon} \right) - \pi^2 \frac{h}{2\phi} \\ &\quad + \frac{1}{2\phi^2} (\partial_\mu \pi)^2 \sigma^2 + \frac{h}{4!\phi^3} \pi^4 \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{2} \varepsilon - \frac{i}{2} \alpha \sigma^2 - \frac{\phi}{2\varepsilon} \sigma^3 \\ &\quad - \frac{i}{2} \alpha_0 (\phi^2 - v_0^2) - \frac{\varepsilon}{2} \alpha_0^2 + h\phi \\ &\quad + \text{Terme höherer Ordnung in den Feldern} \end{aligned} \quad (3.71)$$

die inversen Propagatoren auf Baumgraphenniveau

$$D_i^{-1}(k; \phi, \alpha_0) = -k^2 + m_i^2; \quad i = \sigma, \pi \quad (3.72)$$

und die Massen auf Baumgraphenniveau

$$m_\sigma^2 = i\alpha_0 + \frac{\phi^2}{\varepsilon}, \quad m_\pi^2 = \frac{h}{\phi}, \quad m_\alpha^2 = \varepsilon \quad (3.73)$$

abgelesen werden.

<sup>1</sup> An dieser Stelle wurde der Cosinusterm bis zur vierten Ordnung in den Feldern entwickelt:  $\cos(\pi/\phi) = 1 - 1/2 (\pi/\phi)^2 + 1/4! (\pi/\phi)^4$

### Das effektive Potential und die Gap-Gleichungen

Im Rahmen der Doppelblasen-Näherung lautet das CJT-effektive Potential

$$\begin{aligned}
V_{eff}(\phi, \alpha_0; G_\sigma, G_\pi, G_\alpha) &= \frac{i}{2}\alpha_0(\phi^2 - v_0^2) + \frac{\varepsilon}{2}\alpha_0^2 - h\phi \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma, \pi, \alpha} \int_k [\ln G_i^{-1}(k) + D_i^{-1}(k; \phi, \alpha_0)G_i(k) - 1] \\
&+ V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma),
\end{aligned} \tag{3.74}$$

wobei

$$V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma) = -\frac{1}{2\phi^2} \int_k k^2 G_\pi(k) \int_l G_\sigma(l) - \frac{h}{8\phi^3} \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2$$

die Summe der Doppelblasendiagramme ist.

Die stationären Bedingungen für das effektive Potential

$$\frac{\delta V_{eff}}{\delta \phi} = 0, \quad \frac{\delta V_{eff}}{\delta \alpha_0} = 0, \quad \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_i(k)} = 0; \quad i = \sigma, \pi, \alpha \tag{3.75}$$

führen zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
h &= i\alpha_0\phi + \frac{\phi}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) - \frac{h}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \\
&+ \frac{3}{8} \frac{h}{\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right]^2 + \frac{1}{\phi^3} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k) \int_l \mathcal{G}_\sigma(l), \\
0 &= \frac{i}{2}(\phi^2 - v_0^2) + \varepsilon\alpha_0 + \frac{i}{2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k), \\
M_\sigma^2 &= i\alpha_0 + \frac{\phi^2}{\varepsilon} - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k), \\
M_\pi^2 &= \frac{h}{\phi} \left[ 1 - \frac{1}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right], \\
Z_\pi^2 &= 1 + \frac{1}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k), \\
M_\alpha^2 &= \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Bei der Auswertung des  $O(N)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modells in Abschnitt 3.1 wurde bereits erklärt, dass die Kondensatgleichung für  $\alpha$

$$i\alpha_0 = \frac{1}{2\varepsilon} \left( \phi^2 - v_0^2 + \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right) \tag{3.77}$$

als eine zusätzliche Bedingung für die Thermodynamik des Systems interpretiert werden kann, da das Hilfsfeld einem Lagrange-Multiplier entspricht. Die Substitution von  $i\alpha_0$  mittels Gl. (3.77) ergibt vier gekoppelte Gleichungen für die beiden Mesonenmassen, das Kondensat  $\phi$  und den Wellenrenormierungspara-



parameter des Pions:

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{\phi}{2\varepsilon} \left( \phi^2 - v_0^2 + 3 \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right) - \frac{h}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \\
 &\quad + \frac{3}{8} \frac{h}{\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right]^2 + \frac{1}{\phi^3} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k) \int_l \mathcal{G}_\sigma(l), \\
 M_\pi^2[\varepsilon, h] &= \frac{h}{\phi} \left[ 1 - \frac{1}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right], \\
 M_\sigma^2[\varepsilon, h] &= \frac{1}{2\varepsilon} \left( 3\phi^2 - v_0^2 + \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right) - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k), \\
 Z_\pi^2 &= 1 + \frac{1}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k). \tag{3.78}
 \end{aligned}$$

Analog dazu ist es möglich, zunächst das Hilfsfeld aus dem effektiven Potential zu eliminieren, und anschließend die Gap-Gleichungen für die physikalischen Größen herzuleiten. Substituiert man  $i\alpha_0$  in  $V_{eff}(\phi, \alpha_0; G_\sigma, G_\pi, G_\alpha)$  mit Hilfe Gl. (3.77), so lässt sich ein effektives Potential aufstellen, welches nur von  $G_\pi, G_\sigma$  und  $\phi$  abhängt und die erwünschten physikalischen Eigenschaften besitzt<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
 V_{eff}(\phi; G_\sigma, G_\pi) &= \frac{1}{8\varepsilon} (\phi^2 - v_0^2)^2 - h\phi \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma, \pi} \int_k [\ln G_i^{-1}(k) + D_i^{-1}(k; \phi) G_i(k) - 1] \\
 &\quad + V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma), \tag{3.79}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 V_2(\phi; G_\pi, G_\sigma) &= -\frac{1}{2\phi^2} \int_k k^2 G_\pi(k) \int_l G_\sigma(l) - \frac{h}{8\phi^3} \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2 \\
 &\quad + \frac{1}{8\varepsilon} \left[ \int_k G_\sigma(k) \right]^2.
 \end{aligned}$$

Wobei die inversen Propagatoren und die Massen auf Baumgraphenniveau für  $\sigma$  und  $\pi$  durch

$$D_i^{-1}(k; \phi) = -k^2 + m_i^2; \quad i = \sigma, \pi \tag{3.80}$$

$$m_\sigma^2 = \frac{3\phi^2 - v_0^2}{2\varepsilon}, \quad m_\pi^2 = \frac{h}{\phi} \tag{3.81}$$

gegeben sind.

Aus den stationären Bedingungen für das effektive Potential

$$\frac{\delta V_{eff}(\phi; G_\sigma, G_\pi)}{\delta \phi} = 0, \quad \frac{\delta V_{eff}(\phi; G_\sigma, G_\pi)}{\delta G_i(k)} = 0; \quad i = \sigma, \pi \tag{3.82}$$

erhält man anschließend ein mit Gl. (3.78) identisches Gleichungssystem für das Kondensat  $\phi$ , die beiden Mesonenmassen und den Wellenrenormierungsparameter des Pions. Wie im Abschnitt 3.1 erläutert, muss dieses Gleichungssystem

<sup>2</sup>Der für die Thermodynamik irrelevante konstante Beitrag  $\int_k [\ln G_\alpha^{-1}(k) + D_\alpha^{-1}(k; \phi) G_\alpha(k) - 1]$  wurde subtrahiert.

für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ausgewertet werden, um die temperaturabhängigen Massen und das Kondensat im nichtlinearen Limes bei explizit gebrochener Symmetrie zu erhalten. Im chiralen Limes wird anschließend auch der Grenzwert für den expliziten Symmetriebrechungsparameter analysiert,  $h \rightarrow 0$ .

### Bestimmung der Parameter

Bei trivialer Regularisierung werden die freien Parameter des Modells unter Vernachlässigung divergenter Vakuumbeiträge der Selbstenergien aus dem Gleichungssystem (3.78) bei  $T = 0$  bestimmt:

$$h = m_\pi^2 f_\pi, \quad \varepsilon = \frac{f_\pi^2}{m_\sigma^2 - m_\pi^2}, \quad v_0^2 = f_\pi^2 - 2\varepsilon m_\pi^2. \quad (3.83)$$

**Resultate**
**Explizite Symmetriebrechung:**  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ 

Bei explizit gebrochener Symmetrie ergibt die numerische Auswertung des Gleichungssystems (3.78) im nichtlinearen Limes,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ , eine unendlich große Masse für das  $\sigma$ -Feld. Die Pionmasse schmilzt mit steigender Temperatur, wobei das Pion bei etwa 453 MeV masselos wird, Abb. 3.19. Die Werte für das Kondensat und den Wellenrenormierungsparameter des Pions bleiben dagegen konstant:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\sigma^2[\varepsilon, h], \quad \phi = f_\pi, \quad Z_\pi = 1. \quad (3.84)$$

Diese Resultate lassen sich auch analytisch herleiten. Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ist es möglich, die Kondensatgleichung zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi \left( \phi^2 - v_0^2 + 3 \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right) + \frac{2\varepsilon}{\phi^3} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k) \int_l \mathcal{G}_\sigma(l) \\ &\quad - 2\varepsilon h \left( 1 + \frac{1}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) - \frac{3}{8\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right]^2 \right) \\ &= \phi \left( \phi^2 - f_\pi^2 + 3 \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right), \end{aligned} \quad (3.85)$$

An dieser Stelle wurde die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_0^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\pi^2 - 2\varepsilon m_\pi^2 \quad (3.86)$$

$$= f_\pi^2 \quad (3.87)$$

verwendet.

Setzt man das Zwischenergebnis  $\phi^2 = f_\pi^2 - 3 \int_k \mathcal{G}_\sigma(k)$  in die Gleichung für die  $\sigma$ -Masse ein,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\sigma^2[\varepsilon, h] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left( 3\phi^2 - v_0^2 + \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right) - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left( 2f_\pi^2 - 8 \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \right) - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\pi(k) \\ &= \infty, \end{aligned} \quad (3.88)$$

so strebt  $M_\sigma$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  nach unendlich. Dabei ist  $f_\pi^2/\varepsilon$  der dominante Term, während der Beitrag  $\frac{1}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k)$  exponentiell unterdrückt wird, siehe Gl. (3.46).

Da das  $\sigma$ -Feld nicht fluktuiert  $\int_k \mathcal{G}_\sigma(k) = 0$ , reduziert sich die Kondensatgleichung auf die Bedingung

$$\phi^2 = f_\pi^2. \quad (3.89)$$

Die temperaturabhängige Pionmasse verläuft im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  gemäß der Gleichung

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\pi^2[\varepsilon, h] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\phi} \left[ 1 - \frac{1}{2\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right] \\ &= \frac{h}{f_\pi} \left[ 1 - \frac{1}{2f_\pi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right] \end{aligned} \quad (3.90)$$

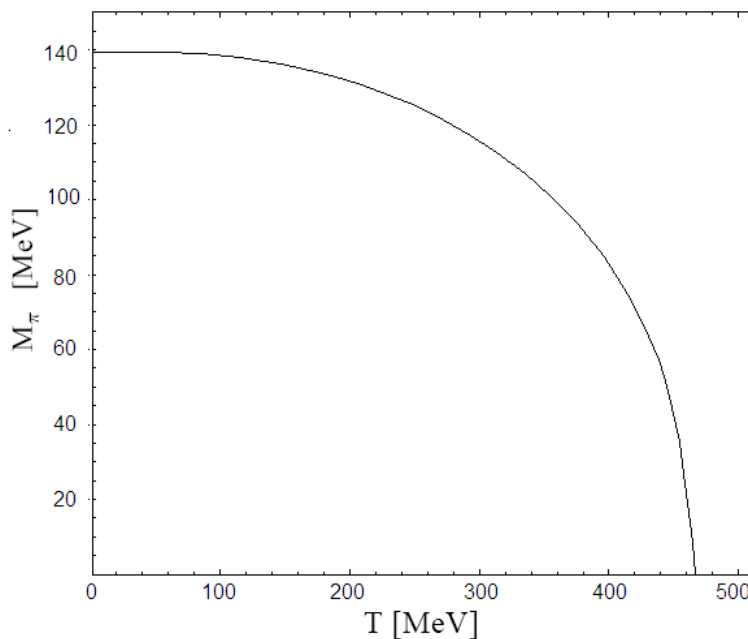


Abbildung 3.19: Die Pionmasse als Funktion der Temperatur für die 1. Polardarstellung,  $\Phi = \sigma e^{i\pi/\phi}/\sqrt{2}$ , im  $O(2)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell für  $m_\pi = 139.5$  MeV, bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .

und schmilzt bei einer Temperatur von  $T = 2\sqrt{6}f_\pi$  MeV auf Null, während der Wellenrenormierungsparameter für das Pion konstant bleibt

$$\begin{aligned} Z_\pi^2 &= 1 + \frac{1}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\sigma(k) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.91)$$

**Chiraler Limes:**  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$

Im chiralen Limes,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ , wird ausgehend von der Auswertung des Gleichungssystems (3.78) bei explizit gebrochener Symmetrie zunächst der Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$  ausgeführt und anschließend der Limes  $h \rightarrow 0$  analysiert. In diesem Fall ist das Pion masselos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_\pi^2[\varepsilon, h] &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{f_\pi} \left[ 1 - \frac{1}{2f_\pi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.92)$$

während die Resultate für die  $\sigma$ -Masse, das Kondensat und den Wellenrenormierungsparameter des Pions dieselben wie bei explizit gebrochener Symmetrie bleiben:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_\sigma^2[\varepsilon, h] = \infty, \quad \phi = f_\pi, \quad Z_\pi = 1. \quad (3.93)$$

### 3.2.2 2. Polardarstellung

Als nächstes erfolgt die Auswertung des  $O(2)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modells mit der im Abschnitt 2.2 konstruierten polaren Darstellung für die beiden Freiheitsgrade:

$$\begin{aligned}\Phi &= \sqrt{2\phi\psi}e^{i\pi/2\phi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \sqrt{2\phi\psi}(\cos \pi/2\phi + i \sin \pi/2\phi).\end{aligned}\quad (3.94)$$

In diesem Fall bleibt die Jacobi-Determinante beim Übergang von der kartesischen Repräsentation,  $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , zur Polardarstellung eins. Dabei wird das Pion mit der Winkelvariable identifiziert, während das  $\psi$ -Feld dem massiven skalaren Freiheitsgrad entspricht, welches einen endlichen Vakuumerwartungswert besitzt und durch die Radialvariable repräsentiert wird.

#### Die Lagrangedichte

Für die Polardarstellung  $\Phi = \sqrt{2\phi\psi}e^{i\pi/2\phi}$  lautet das erzeugende Funktional:

$$\begin{aligned}Z &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\pi \delta(2\Phi^* \Phi^2 - v_0^2) \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L}_0 \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h],\end{aligned}$$

wobei die Lagrangedichte nach Einführung des Hilfsfeldes durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 - \frac{i}{2}\alpha(2\Phi^* \Phi - v_0^2) - \frac{\varepsilon}{2}\alpha^2 \\ &= \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - \frac{i}{2}\alpha(2\Phi^* \Phi - v_0^2) - \frac{\varepsilon}{2}\alpha^2 + h\phi_1\end{aligned}$$

gegeben ist.

Der Mischterm  $-2i\alpha\psi\phi$ , der durch das Verschieben der beiden Felder  $\psi$  und  $\alpha$  um ihre Vakuumerwartungswerte

$$\begin{aligned}\alpha &\rightarrow \alpha_0 + \alpha(x, \tau), \\ \psi &\rightarrow \phi + \psi(x, \tau)\end{aligned}\quad (3.95)$$

im Goldstone-Modus entsteht

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{\phi}{2(\psi + \phi)}(\partial_\mu \psi)^2 + \frac{(\psi + \phi)}{2\phi}(\partial_\mu \pi)^2 \\ &\quad - \frac{i}{2}(\alpha + \alpha_0)(4\phi(\psi + \phi) - v_0^2) - \frac{\varepsilon}{2}(\alpha + \alpha_0)^2 \\ &\quad + 2h\sqrt{\phi(\psi + \phi)} \cos \pi/2\phi,\end{aligned}\quad (3.96)$$

wird durch einen weiteren Shift

$$\alpha(x, \tau) \rightarrow \alpha(x, \tau) - \frac{2i\phi\psi(x, \tau)}{\varepsilon}\quad (3.97)$$

eliminiert. Danach ist es möglich, aus der Lagrangedichte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi)^2 - \frac{i}{2}\alpha_0(4\phi^2 - v_0^2) - \frac{\varepsilon}{2}\alpha_0^2 + 2h\phi \\
& - \frac{\psi^2}{2}\left(4\frac{\phi^2}{\varepsilon} + \frac{h}{2\phi}\right) - \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{h}{2\phi}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\alpha^2 \\
& - (\partial_\mu\psi)^2\frac{\psi}{2\phi} + (\partial_\mu\pi)^2\frac{\psi}{2\phi} - \frac{h}{8\phi^2}\psi\pi^2 + \frac{h}{8\phi^2}\psi^3 \\
& + (\partial_\mu\psi)^2\frac{\psi^2}{2\phi^2} - \frac{5h}{64\phi^3}\psi^4 + \frac{h}{4!8\phi^3}\pi^4 + \frac{h}{32\phi^3}\psi^2\pi^2 \\
& + \text{Terme höherer Ordnung in den Feldern}
\end{aligned} \tag{3.98}$$

die inversen Propagatoren und die Massen auf Baumgraphenniveau zu bestimmen:

$$D_i^{-1}(k; \phi) = -k^2 + m_i^2; \quad i = \psi, \pi \tag{3.99}$$

$$m_\psi^2 = 4\frac{\phi^2}{\varepsilon} + \frac{h}{2\phi}, \quad m_\pi^2 = \frac{h}{2\phi}, \quad m_\alpha^2 = \varepsilon. \tag{3.100}$$

### Das effektive Potential und die Gap-Gleichungen

Das CJT-effektive Potential in Doppelblasen-Approximation lautet

$$\begin{aligned}
V_{eff}(\phi, \alpha_0; G_\pi, G_\psi, G_\alpha) = & -\frac{i}{2}\alpha_0(4\phi^2 - v_0^2) - \frac{\varepsilon}{2}\alpha_0^2 + 2h\phi \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma, \pi, \alpha} \int_k [\ln G_i^{-1}(k) + D_i^{-1}(k; \phi, \alpha_0)G_i(k) - 1] \\
& + V_2(\phi; G_\pi, G_\psi),
\end{aligned} \tag{3.101}$$

mit

$$\begin{aligned}
V_2(\phi; G_\pi, G_\psi) = & -\frac{1}{2\phi^2} \int_k k^2 G_\psi(k) \int_l G_\psi(l) + \frac{15h}{64\phi^3} \left[ \int_k G_\psi(k) \right]^2 \\
& - \frac{h}{64\phi^3} \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2 - \frac{h}{32\phi^3} \int_k G_\psi(k) \int_k G_\pi(k).
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Die stationären Bedingungen

$$\frac{\delta V_{eff}}{\delta \phi} = 0, \quad \frac{\delta V_{eff}}{\delta \alpha_0} = 0, \quad \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_i(k)} = 0; \quad i = \psi, \pi, \alpha \tag{3.103}$$

ergeben folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 2h &= 4i\alpha_0\phi + \left(4\frac{\phi}{\varepsilon} - \frac{h}{4\phi^2}\right) \int_k \mathcal{G}_\psi(k) - \frac{h}{4\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \\
 &\quad + \frac{1}{\phi^3} \int_k k^2 \mathcal{G}_\psi(k) \int_l \mathcal{G}_\psi(l) - \frac{45h}{64\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\psi(k) \right]^2 \\
 &\quad + \frac{3h}{64\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right]^2 + \frac{6h}{64\phi^4} \int_k \mathcal{G}_\psi(k) \int_k \mathcal{G}_\pi, \\
 0 &= \frac{i}{2}(4\phi^2 - v_0^2) + \varepsilon\alpha_0, \\
 M_\psi^2 &= 4\frac{\phi^2}{\varepsilon} + \frac{h}{2\phi} + \frac{h}{16\phi^3} \left[ 15 \int_k \mathcal{G}_\psi(k) - \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\psi(k), \\
 M_\pi^2 &= \frac{h}{2\phi} - \frac{h}{16\phi^3} \left[ \int_k \mathcal{G}_\psi(k) + \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right] \\
 Z_\psi^2 &= 1 + \frac{1}{\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\psi(k), \\
 M_\alpha^2 &= \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

Die Substitution von  $i\alpha_0$  mittels

$$i\alpha_0 = \frac{i}{2\varepsilon}(4\phi^2 - v_0^2) \tag{3.105}$$

ergibt vier gekoppelte Gleichungen für die Massen der beiden Mesonen,  $\psi$  und  $\pi$ , das Kondensat und den Wellenrenormierungsparameter des  $\psi$ -Feldes:

$$\begin{aligned}
 2h &= \frac{2\phi}{\varepsilon}(4\phi^2 - v_0^2) + \left(4\frac{\phi}{\varepsilon} - \frac{h}{4\phi^2}\right) \int_k G_\psi(k) - \frac{h}{4\phi^2} \int_k G_\pi(k) \\
 &\quad + \frac{1}{\phi^3} \int_k k^2 G_\psi(k) \int_l G_\psi(l) - \frac{45h}{64\phi^4} \left[ \int_k G_\psi(k) \right]^2 \\
 &\quad + \frac{3h}{64\phi^4} \left[ \int_k G_\pi(k) \right]^2 + \frac{6h}{64\phi^4} \int_k G_\psi(k) \int_k G_\pi, \\
 M_\psi^2[\varepsilon, h] &= 4\frac{\phi^2}{\varepsilon} + \frac{h}{2\phi} + \frac{h}{16\phi^3} \left[ 15 \int_k G_\psi(k) - \int_k G_\pi(k) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 G_\psi(k), \\
 M_\pi^2[\varepsilon, h] &= \frac{h}{2\phi} - \frac{h}{16\phi^3} \left[ \int_k G_\psi(k) + \int_k G_\pi(k) \right], \\
 Z_\psi^2 &= 1 + \frac{1}{\phi^2} \int_k G_\psi(k).
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

Um die beiden Mesonenmassen und das Kondensat als Funktion der Temperatur im nichtlinearen Limes bei explizit gebrochener Symmetrie zu erhalten, wird dieses Gleichungssystem für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ausgewertet. Im chiralen Limes wird anschließend auch der Grenzwert für den expliziten Symmetriebrechungsparameter ausgeführt,  $h \rightarrow 0$ .

**Bestimmung der Parameter**

Für diese Polardarstellung beträgt der Vakuumerwartungswert für das Kondensat per Konstruktion  $f_\pi/2$ . Damit lauten die freien Parameter des Modells bei trivialer Regularisierung:

$$h = m_\pi^2 f_\pi, \quad \varepsilon = \frac{f_\pi^2}{m_\sigma^2 - m_\pi^2}, \quad v_0^2 = f_\pi^2 - 2\varepsilon m_\pi^2. \quad (3.107)$$



**Resultate**

Die numerische Auswertung des Gleichungssystems (3.106) ergibt sowohl bei explizit gebrochener Symmetrie,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ , als auch im chiralen Limes,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ , dieselben Resultate für die 2. Polardarstellung wie für die 1. Polardarstellung.

**Explizite Symmetriebrechung:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$** 

Bei explizit gebrochener Symmetrie ist das  $\psi$ -Feld im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  unendlich schwer und als dynamischer Freiheitsgrad eingefroren, während die Pionmasse mit steigender Temperatur sinkt und bei einer Temperatur von 453 MeV auf Null schmilzt, Abb. 3.19. Das Kondensat und der Wellenrenormierungsparameter für das  $\psi$ -Feld bleiben dagegen konstant,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_\psi^2[\varepsilon, h] = \infty, \quad \phi = f_\pi/2 \quad Z_\psi = 1. \quad (3.108)$$

Auch in diesem Fall ist es möglich, das Gleichungssystem (3.106) analytisch zu lösen. Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  kann die Kondensatgleichung wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\phi \left( 4\phi^2 - v_0^2 + 2 \int_k \mathcal{G}_\psi(k) \right) + \frac{\varepsilon}{\phi^3} \int_k k^2 \mathcal{G}_\psi(k) \int_l \mathcal{G}_\psi(l) \\ &\quad - \frac{45\varepsilon h}{64\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\psi(k) \right]^2 + \frac{3\varepsilon h}{64\phi^4} \left[ \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right]^2 - 2\varepsilon h \\ &\quad + \frac{6\varepsilon h}{64\phi^4} \int_k \mathcal{G}_\psi(k) \int_k \mathcal{G}_\pi(k) - \frac{\varepsilon h}{4\phi^2} \left( \int_k \mathcal{G}_\pi(k) + \int_k \mathcal{G}_\psi(k) \right) \\ &= 2\phi \left( 4\phi^2 - f_\pi^2 + 2 \int_k \mathcal{G}_\psi(k) \right), \end{aligned} \quad (3.109)$$

wobei für den Parameter  $v_0^2$  die Beziehung  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_0^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\pi^2 - 2\varepsilon m_\pi^2 = f_\pi^2$  verwendet wurde.

Mit dem Zwischenergebnis  $4\phi^2 = f_\pi^2 - 2 \int_k \mathcal{G}_\psi(k)$  erhält man für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ein unendlich schweres  $\psi$ -Feld

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\psi^2[\varepsilon, h] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4 \frac{\phi^2}{\varepsilon} - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\psi(k) \\ &\quad + \frac{h}{2\phi} + \frac{h}{16\phi^3} \left[ 15 \int_k \mathcal{G}_\psi(k) - \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( f_\pi^2 - 2 \int_k \mathcal{G}_\psi(k) \right) - \frac{1}{\phi^2} \int_k k^2 \mathcal{G}_\psi(k) \\ &\quad + \frac{h}{2\phi} + \frac{h}{16\phi^3} \left[ 15 \int_k \mathcal{G}_\psi(k) - \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right] \\ &= \infty, \end{aligned} \quad (3.110)$$

welches nicht propagiert  $\int_k \mathcal{G}_\psi(k) = 0$ . In diesem Fall ist  $\frac{f_\pi^2}{\varepsilon}$  der dominante Term, während die Beiträge  $\frac{1}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\psi(k)$  und  $\int_k k^2 \mathcal{G}_\psi(k)$  im trivial regularisierten

System exponentiell unterdrückt werden:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_k k^2 \mathcal{G}_\psi(k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M_\psi^2}{Z_\psi^4} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k(M_\psi/Z_\psi)} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\omega_k(M_\psi/Z_\psi)}{T}\right\} - 1} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M_\psi^2}{Z_\psi^4} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + M_\psi^2/Z_\psi^2}} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\sqrt{\vec{k}^2 + M_\psi^2/Z_\psi^2}}{T}\right\} - 1} \\
&\approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_\pi^2}{\varepsilon} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + f_\pi^2/\varepsilon}} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\sqrt{\vec{k}^2 + f_\pi^2/\varepsilon}}{T}\right\} - 1} \\
&= 0, \tag{3.111}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_k \mathcal{G}_\psi(k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon Z_\psi^2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k(M_\psi/Z_\psi)} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\omega_k(M_\psi/Z_\psi)}{T}\right\} - 1} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon Z_\psi^2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + M_\psi^2/Z_\psi^2}} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\sqrt{\vec{k}^2 + M_\psi^2/Z_\psi^2}}{T}\right\} - 1} \\
&\approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + f_\pi^2/\varepsilon}} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\sqrt{\vec{k}^2 + f_\pi^2/\varepsilon}}{T}\right\} - 1} \\
&= 0. \tag{3.112}
\end{aligned}$$

Folglich bleibt das Kondensat ebenso wie der Wellenrenormierungsparameter für das  $\psi$ -Feld konstant

$$\phi = \frac{f_\pi}{2}, \quad Z_\psi^2 = 1. \tag{3.113}$$

Damit lautet die Gleichung für die temperaturabhängige Pionmasse:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\pi^2[\varepsilon, h] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{2\phi} \left[ 1 - \frac{1}{8\phi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right] \\
&= \frac{h}{f_\pi} \left[ 1 - \frac{1}{2f_\pi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right]. \tag{3.114}
\end{aligned}$$

**Chiraler Limes:**  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$

Im chiralen Limes,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ , bleiben die Resultate für das Kondensat sowie die Masse und den Wellenrenormierungsparameter des  $\psi$ -Feldes dieselben wie bei explizit gebrochener Symmetrie:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_\psi^2[\varepsilon, h] = \infty, \quad \phi = f_\pi/2, \quad Z_\psi = 1, \tag{3.115}$$

während das Pion masselos wird

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_\pi^2[\varepsilon, h] &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{f_\pi} \left[ 1 - \frac{1}{2f_\pi^2} \int_k \mathcal{G}_\pi(k) \right] \\
&= 0. \tag{3.116}
\end{aligned}$$

### 3.2.3 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt erfolgte die Auswertung des  $O(2)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modells bei endlichen Temperaturen im Rahmen des CJT-Formalismus in Doppelblasen-Approximation. Dabei wurden die im zweiten Kapitel konstruierten polaren Darstellungen für die beiden internen Freiheitsgrade verwendet, bei denen das Pion der Winkelvariable entspricht, während sein massiver skalärer chiraler Partner mit der Radialvariable identifiziert wird.

Für beide Polardarstellungen gelingt es zwar im nichtlinearen Limes, das skalare Feld wie verlangt, als dynamischen Freiheitsgrad zu eliminieren. Allerdings gibt es deutliche Defizite bei der Beschreibung des Kondensats und der Pionmasse als Funktion der Temperatur:

Bei explizit gebrochener Symmetrie liegt in der kartesischen Darstellung,  $\Phi = (\sigma, \pi)$ , im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  ein Crossover-Phasenübergang vor mit einer kritischen Temperatur von etwa  $T_c = 320$  MeV, während die Pionmasse für  $T > T_c$  beinahe linear wächst. Beim Übergang zu Polardarstellungen bleibt das Kondensat auf seinem konstanten Vakuumerwartungswert, während die Pionmasse mit steigender Temperatur sinkt und bei  $T = 2\sqrt{6}f_\pi$  MeV auf Null schmilzt.

Im chiralen Limes,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ , beobachtet man in der kartesischen Darstellung einen Phasenübergang zweiter Ordnung mit einer kritischen Temperatur von  $T_c = \sqrt{12}f_\pi$  MeV. Für  $T < T_c$  ist die Pionmasse entsprechend dem Goldstone-Theorem Null und wächst oberhalb der kritischen Temperatur gemäß der Gleichung  $f_\pi^2 = \int_k \mathcal{G}_\pi(k)$  kontinuierlich mit steigender Temperatur. In beiden Polardarstellungen dagegen, bleibt das Pion masselos und das Kondensat konstant.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass der Übergang zur Polardarstellung der internen Freiheitsgrade im  $O(2)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei der Beschreibung des Phasenübergangs der hadronischen Materie in das QGP komplett versagt. So kann weder im chiralen Limes noch bei explizit gebrochener Symmetrie ein Schmelzen des Kondensats beobachtet werden. Weiterhin vermag keine der beiden polaren Darstellungen den Verlauf der temperaturabhängigen Pionmasse erwartungsgemäß zu beschreiben.



# Kapitel 4

## Anhang

### 4.1 Analytische Berechnung der Summenintegrale

Bei der analytischen Auswertung von Tadpolediagrammen, die in vorliegender Doppelblasennäherung die Selbstenergien aufbauen, müssen Summenintegrale über volle Propagatoren bei endlichen Temperaturen berechnet werden

$$\int_k G(k) = \int_k d^4k \frac{1}{-k^2 + M^2} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} G(i\omega_n, \vec{k}). \quad (4.1)$$

Zunächst wird eine Fouriertransformation für die Zeitvariable des Propagators im Imaginärzeitformalismus ausgeführt:

$$\tilde{G}(\tau, \vec{k}) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} G(i\omega_n, \vec{k}), \quad (4.2)$$

wobei

$$G(i\omega_n, \vec{k}) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \tilde{G}(\tau, \vec{k}) \quad (4.3)$$

mit  $\beta = 1/T$ .

Je nachdem, ob es sich um Bosonen oder Fermionen handelt, lauten die Matsubarafrequenzen:

$$\begin{aligned} \omega_n &= 2\pi nT \text{ für bosonische Felder} \\ \omega_n &= 2\pi(n+1)T \text{ für fermionische Felder.} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nach Anwendung des Residuensatzes kann  $\tilde{G}(\tau, \vec{k})$  anschließend auf folgende Form

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\tau, \vec{k}) &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} G(i\omega_n, \vec{k}) \\ &= \frac{1}{2\omega_k} [(1 + n_B(\omega_k)) e^{-\omega_k \tau} + n_B(\omega_k) e^{-\omega_k \tau}] \end{aligned} \quad (4.5)$$

gebracht werden<sup>1</sup>, wo  $n_B(\omega_k)$  für bosonische Felder die Bose-Einstein Verteilung ist

$$n_B(\omega_k) = \frac{1}{\exp\{\beta\omega_k\} - 1} \quad (4.6)$$

mit  $\omega_k^2 = k^2 + M^2$ . Setzt man nun die Fouriertransformierte in die Gleichung für Summenintegrale (4.1) ein,

$$\begin{aligned} \int_k G(k) &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} G(i\omega_n, \vec{k}) \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \tilde{G}(\tau, \vec{k}) \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n\beta) \tilde{G}(\tau, \vec{k}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

so erhält man unter Verwendung von (4.5) nach Integration über die Imaginärzeitvariable das Resultat:

$$\int_k G(k) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} (1 + 2n_B(\omega_k)) \equiv Q(M, T). \quad (4.8)$$

Analog dazu führt die Ausführung der Matsubarasummation für Tadpole diagrams mit Impulsen auf den Vertices zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \int_k k^2 G(k) &= \int_k d^4k \frac{k^\mu k_\mu}{-k^2 + M^2} \\ &= \sum_l \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - l\beta) T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n\tau} (i\omega_n, \vec{k})^\mu (i\omega_n, -\vec{k})_\mu \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + M^2} \\ &= \sum_l \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - l\beta) (-\partial_\tau, \vec{k})^\mu (-\partial_\tau, -\vec{k})_\mu T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n\tau} \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + M^2} \\ &= \sum_l \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau \delta(\tau - l\beta) \frac{1}{2\omega_k} [(1 + n_B(\omega_k)) (\omega_k, \vec{k})^\mu (\omega_k, -\vec{k})_\mu e^{-\omega_k\tau} \\ &\quad + n_B(\omega_k) (-\omega_k, \vec{k})^\mu (-\omega_k, -\vec{k})_\mu e^{-\omega_k\tau}] \\ &= M^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} (1 + 2n_B(\omega_k)) \\ &\equiv M^2 Q(M, T). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Bei Feldern mit einer Wellenrenormierungsfunktion erhält man dementsprechend für das Integral über die vollen Propagatoren mit und ohne Impulse auf

<sup>1</sup>91e Bellac, Thermal Field Theory, Cambridge University Press, 1996;

den Vertizes

$$\int_k G(k) = \int_k \frac{1}{-Z^2 k^2 + M^2} \quad (4.10)$$

$$= \frac{1}{Z^2} \int_k \frac{1}{-k^2 + (M/Z)^2}$$

$$\equiv \frac{1}{Z^2} Q(M/Z, T),$$

$$\int_k k^2 G(k) = \frac{M^2}{Z^4} \int_k \frac{1}{-k^2 + (M/Z)^2} \quad (4.11)$$

$$\equiv \frac{M^2}{Z^4} Q(M/Z, T),$$

wo  $M/Z$  die physikalische Polmasse beschreibt.

In beiden Fällen resultiert aus der Summation über die Matsubaramoden zusätzlich zum temperaturunabhängigen Vakuumanteil

$$\int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \quad (4.12)$$

ein temperaturabhängiger Bose-Einstein Term

$$\int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{n_B(\omega_k)}{\omega_k}. \quad (4.13)$$

Nach Ausintegration des Winkelanteils lauten die temperaturabhängigen Terme

$$\int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{n_B(\omega_k)}{\omega_k} = \frac{1}{2\pi^2} \int dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}} \frac{1}{\exp\{\sqrt{k^2 + M^2}/T\} - 1}$$

$$\equiv Q_T(M). \quad (4.14)$$

Die Berechnung des divergenten Vakuumterms, Gl. (4.12), erfolgt mit Hilfe von Regularisierungsmethoden. Bei der trivialen Renormierung wird wegen der Dominanz der temperaturabhängigen Terme der Vakuumanteil komplett weggelassen.





# Abbildungsverzeichnis

1.1	kenden Materie. . . . .	3
2.1	Die Mesonenmassen, $M_\sigma$ und $M_\pi$ , als Funktion der Temperatur in der 1.Polardarstellung für $m_\pi = 139.5$ MeV bei trivialer und bei Counterterm-Regularisierung mit $\mu = m_\sigma$ . . . . .	40
2.2	Das Kondensat als Funktion der Temperatur in der 1.Polardarstellung für $m_\pi = 139.5$ MeV bei trivialer und bei Counterterm-Regularisierung mit $\mu = m_\sigma$ . . . . .	40
2.3	Die Wellenrenormierungsfunktion für das Pion als Funktion der Temperatur in der 1.Polardarstellung für $m_\pi = 139.5$ MeV bei trivialer und bei Counterterm-Regularisierung mit $\mu = m_\sigma$ . . . . .	41
2.4	Die $\sigma$ -Masse als Funktion der Temperatur in der 1.Polardarstellung für $m_\pi = 0$ MeV bei trivialer und bei Counterterm-Regularisierung mit $\mu^2 = m_\sigma^2/e$ . . . . .	42
2.5	Das Kondensat als Funktion der Temperatur in der 1.Polardarstellung für $m_\pi = 0$ MeV bei trivialer und bei Counterterm-Regularisierung mit $\mu^2 = m_\sigma^2/e$ . . . . .	42
2.6	Die Mesonenmassen, $M_\sigma$ und $M_\pi$ , als Funktion der Temperatur für die 1. Polardarstellung, $\Phi^t = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}e^{i\pi/\phi}$ , und die kartesische Repräsentation, $\Phi = (\sigma, \pi)$ , der beiden Freiheitsgrade im $O(2)$ linearen $\sigma$ -Modell für $m_\pi = 139.5$ MeV bei trivialer Regularisierung. . . . .	44
2.7	Das Kondensat als Funktion der Temperatur für die 1. Polardarstellung, $\Phi = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}e^{i\pi/\phi}$ , und die kartesische Repräsentation, $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , der beiden Freiheitsgrade im $O(2)$ linearen $\sigma$ -Modell für $m_\pi = 139.5$ MeV bei trivialer Regularisierung. . . . .	44
2.8	Die Mesonenmassen $M_\sigma$ und $M_\pi$ als Funktion der Temperatur für die 1. Polardarstellung, $\Phi = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}e^{i\pi/\phi}$ , und die kartesische Repräsentation, $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , der beiden Freiheitsgrade im $O(2)$ linearen $\sigma$ -Modell für $m_\pi = 0$ MeV bei trivialer Regularisierung. . . . .	46
2.9	Das Kondensat als Funktion der Temperatur für die 1. Polardarstellung, $\Phi = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}e^{i\pi/\phi}$ , und die kartesische Repräsentation, $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , der beiden Freiheitsgrade im $O(2)$ linearen $\sigma$ -Modell für $m_\pi = 0$ MeV bei trivialer Regularisierung. . . . .	46
2.10	Die $\sigma$ -Masse als Funktion der Temperatur in der 1.Polardarstellung unter Berücksichtigung der Jacobi-Determinante für $m_\pi = 139.5$ MeV bei trivialer und bei Cutoff-Regularisierung. . . . .	47

2.11	Die Pionmasse als Funktion der Temperatur in der 1.Polardarstellung unter Berücksichtigung der Jacobi-Determinante für $m_\pi = 139.5$ MeV bei trivialer und bei Cutoff-Regularisierung. . . . .	48
2.12	Das Kondensat als Funktion der Temperatur in der 1.Polardarstellung unter Berücksichtigung der Jacobi-Determinante für $m_\pi = 139.5$ MeV bei trivialer und bei Cutoff-Regularisierung. . . . .	48
2.13	Der Wellenrenormierungsparameter des Pions als Funktion der Temperatur in der 1.Polardarstellung unter Berücksichtigung der Jacobi-Determinante für $m_\pi = 139.5$ MeV bei trivialer und bei Cutoff-Regularisierung. . . . .	49
2.14	Die Mesonenmassen, $M_\psi$ und $M_\pi$ , als Funktion der Temperatur für die 2.Polardarstellung bei explizit gebrochener Symmetrie, $m_\pi = 139.5$ MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts). . . . .	60
2.15	Das Kondensat $\phi$ als Funktion der Temperatur für die 2.Polardarstellung bei explizit gebrochener Symmetrie, $m_\pi = 139.5$ MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts). . . . .	60
2.16	Der Wellenrenormierungsparameter $Z_\psi$ als Funktion der Temperatur für die 2.Polardarstellung bei explizit gebrochener Symmetrie, $m_\pi = 139.5$ MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts). . . . .	61
2.17	Die Mesonenmassen, $M_\psi$ und $M_\pi$ , als Funktion der Temperatur für die 2.Polardarstellung im chiralen Limes, $m_\pi = 0$ MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts). . . . .	62
2.18	Das Kondensat $\phi$ als Funktion der Temperatur für die 2.Polardarstellung im chiralen Limes, $m_\pi = 0$ MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts). . . . .	62
2.19	Der Wellenrenormierungsparameter $Z_\psi$ als Funktion der Temperatur für die 2.Polardarstellung im chiralen Limes, $m_\pi = 0$ MeV, bei Counterterm-Regularisierung (links) und Cutoff-Regularisierung (rechts). . . . .	63
2.20	Die Mesonenmassen $M_\sigma$ , $M_\psi$ , $M_\pi$ und das Kondensat $\phi$ als Funktion der Temperatur in der kartesischen Repräsentation, $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , und den beiden Polardarstellungen bei explizit gebrochener Symmetrie, $m_\pi = 139.5$ MeV, und trivialer Regularisierung. . . . .	64
2.21	Die Mesonenmassen $M_\sigma$ , $M_\psi$ , $M_\pi$ und das Kondensat $\phi$ als Funktion der Temperatur in der kartesischen Repräsentation, $\Phi^t = (\sigma, \pi)$ , und den beiden Polardarstellungen im chiralen Limes, $m_\pi = 0$ MeV, bei trivialer Regularisierung. . . . .	64
3.1	Das Potential im nichtlinearen $\sigma$ -Modell . . . . .	68
3.2	Die Pionmasse und das Kondensat als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell für $m_\pi = 139.5$ MeV, bei trivialer Regularisierung im Limes $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ . . . . .	78
3.3	Der Druck als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell für $m_\pi = 139.5$ MeV, bei trivialer Regularisierung im Limes $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ . . . . .	78

3.4	Die Mesonenmassen und das Kondensat als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie für $m_\sigma = 600$ MeV und $m_\sigma = 1400$ MeV im trivial regularisierten System (durchgezogene Linien), sowie bei Counterterm-Regularisierung, mit $\mu = m_\sigma$ , (gestrichelte Linien).	79
3.5	Die Mesonenmassen und das Kondensat als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie für $m_\sigma = 20$ GeV im trivial regularisierten System und bei Counterterm-Regularisierung mit $\mu = m_\sigma$ .	80
3.6	Die Pionmasse als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie für unterschiedliche $m_\sigma$ -Werte im trivial regularisierten System (durchgezogene Linien), sowie bei Counterterm-Regularisierung, mit $\mu = m_\sigma$ , (gestrichelte Linien).	80
3.7	Das Kondensat als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie für unterschiedliche $m_\sigma$ -Werte im trivial regularisierten System (durchgezogene Linien), sowie bei Counterterm-Regularisierung, mit $\mu = m_\sigma$ , (gestrichelte Linien).	81
3.8	Die Pionmasse und das Kondensat als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .	83
3.9	Der Druck als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .	83
3.10	Das effektive Potential $\varepsilon V_{eff}$ als Funktion des Kondensats und der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .	84
3.11	Das effektive Potential als Funktion des Kondensats für unterschiedliche Temperaturen im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ .	84
3.12	Die Mesonenmassen und das Kondensat als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell im chiralen Limes für $m_\sigma = 600$ MeV und $m_\sigma = 1400$ MeV im trivial regularisierten System (durchgezogene Linien), sowie bei Counterterm-Regularisierung, mit $\mu = m_\sigma$ , (gestrichelte Linien).	85
3.13	Die Pionmasse als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell im chiralen Limes für unterschiedliche $m_\sigma$ -Werte im trivial regularisierten System (durchgezogene Linien), sowie bei Counterterm-Regularisierung, mit $\mu = m_\sigma$ , (gestrichelte Linien).	86
3.14	Der Druck als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie (links) und im chiralen Limes (rechts) für unterschiedliche $m_\sigma$ -Werte bei Counterterm-Regularisierung, sowie im Limes $\lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$ und $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$ bei trivialer Regularisierung.	87
3.15	Der Druck als Funktion der Temperatur im $O(4)$ nichtlinearen $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie (gestrichelte Linien) und im chiralen Limes (durchgezogene Linien) für unterschiedliche $m_\sigma$ -Werte bei Counterterm-Regularisierung, sowie im Limes $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$ und $\lim_{m_\sigma \rightarrow \infty} Z[\varepsilon, h]$ bei trivialer Regularisierung.	87

- 3.16 Die Pionmasse und das Kondensat als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{h \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ . . . . . 90
- 3.17 Der Druck als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{h \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ . 90
- 3.18 Der Druck als Funktion der Temperatur im  $O(4)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell bei explizit gebrochener Symmetrie,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z[\varepsilon, h]$ , und für die beiden Limitierungsprozesse im chiralen Limes,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z[\varepsilon, h]$  (oben) und  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$  (unten). . . . . 91
- 3.19 Die Pionmasse als Funktion der Temperatur für die 1.Polardarstellung,  $\Phi = \sigma e^{i\pi/\phi}/\sqrt{2}$ , im  $O(2)$  nichtlinearen  $\sigma$ -Modell für  $m_\pi = 139.5$  MeV, bei trivialer Regularisierung im Limes  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z[\varepsilon, h]$ . 100

# Literaturverzeichnis

- [1] Proc. of LATTICE '96, Nucl. Phys. B53 (Proc. Suppl.), 1 (1997).
- [2] Proc. of Quark Matter '97, Nucl. Phys. A638, 1 (1998).
- [3] R. Gell-Mann and M. Levy, Nuovo Cimento 16, 705 (1960).
- [4] S. Weinberg, Phys. Rev. 166, 1568 (1968).
- [5] S. Weinberg, Physica A 96A, 327 (1979).
- [6] R. D. Pisarski and F. Wilczek, Phys. Rev. D 29, 338 (1984).
- [7] F. Wilczek, Int. J. Mod. Phys. 7, 3911 (1992).
- [8] J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. (N.Y.) 158, 142 (1984)
- [9] J. F. Donoghue and B. R. Holstein, Phys. Rev. D 40, 2378 (1989).
- [10] G. Baym and G. Grinstein, Phys. Rev. D 15, 2897 (1977)
- [11] Amelino-Camelia and Pi, (1993).
- [12] G. Amelino-Camelia, Phys. Lett. B407, 268 (1997).
- [13] H. Roh and T. Matsui, Eur. Phys. J. A1, 205 (1998).
- [14] Petropoulos, (1999).
- [15] Lenaghan, J.T. and Rischke, D.H. 2000. The O(N) model at finite temperature: Renormalization of the gap equations in Hartree and large-N approximation. J. Phys. G26 431. nucl-th/9901049.
- [16] Nemoto et al., (2000).
- [17] Aarts and Martinez Resco, (2004).
- [18] Arrizabalaga et al., (2005).
- [19] Röder, D. 2005. Selfconsistent calculations of sigma-meson properties at finite temperature. hep-ph/0509232.
- [20] J. Cornwall, R. Jackiw, E. Tomboulis, Effective action for composite operators, Phys. Rev. D10 (1974).
- [21] N. Petropoulos, hep-ph/9807331. (2004)

- [22] Verschelde and De Pessemier, (2002)
- [23] Baacke and Michalski, (2003)
- [24] S. R. Coleman, R. Jackiw, and H. D. Politzer, Spontaneous symmetry breaking in the  $O(N)$  model for large  $N$ , Phys. Rev. D10 (1974) 2491–2499.
- [25] Root, (1974).
- [26] H. Meyer-Ortmanns, H. J. Pirner, and B.-J. Schaefer, Phys. Lett. B 311, 213 (1993).
- [27] Jain (1993).
- [28] Bochkarev, A. and Kapusta, J.I. 1996. Chiral symmetry at finite temperature: linear vs nonlinear  $\sigma$ -models. Phys. Rev. D54 4066. hep-ph/9602405.
- [29] Jens O. Andersen Nordita, Daniel Boer and Harmen J. Warringa, Thermodynamics of  $O(N)$  sigma models:  $1/N$  corrections, (2008).
- [30] Tomas Brauner, Thermodynamics of the pion gas using the  $O(N)$  model in  $1/N$  expansion, (2008)
- [31] S. Chiku and T. Hatsuda, Phys. Rev. D 58, 076001 (1998).
- [32] S.-K. Ma, Modern Theory of Critical Phenomena (Benjamin, New York, 1976).
- [33] D. J. Amit, Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena, 2nd ed. (World Scientific, Singapore, 1984).
- [34] Weinberg, Phys. Rev. D 9, 3357 (1974)
- [35] Zinn-Justin, J. 1996. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. 3rd edn. Oxford University Press.
- [36] W. Pauli, The Connection Between Spin and Statistics, Phys. Rev., Vol 58, (1940).
- [37] Gross, Wilczek, Asymptotically Free Gauge Theories. I, Phys. Rev. D8 (1973), S3688.
- [38] Gross, Wilczek, Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories, Phys. Rev. Lett.30 (1973), S1343.
- [39] Gross, Wilczek, Asymptotically Free Gauge Theories. II, Phys. Rev. D9 (1974), S980.
- [40] Politzer, Reliable Perturbative Results for Strong Interactions, Phys. Rev. Lett. 30, S1346 (1973).
- [41] Laermann, Philipsen, Status of Lattice QCD at Finite Temperature, hep-ph/0303042v1, 2003.
- [42] Rischke, D.H. 2004. The quark-gluon plasma in equilibrium. Prog. Part. Nucl. Phys.52 197. nucl-th/0305030.

- [43] Emmy Noether, Invariante Variationsprobleme, Nachr. v. d. Wiss. zu Göttingen (1918), S235.
- [44] Gell-Mann, Levi, The Axial Vector Current In Beta Decay; Nuovo Cim.16:705 (1960).
- [45] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. 42 (1979), 1195.
- [46] Volker Koch, Aspects of Chiral Symmetry, Nuclear Science Division, Lawrence Berkeley National Laboratory, University of California, Berkeley, CA, 94720, U.S.A. March 21, 2002.
- [47] Jeremy Bernstein, Spontaneous symmetry breaking, gauge theories, the Higgs mechanism and all that, Reviews of Modern Physics, Vol. 46, No. 1, January 1974.
- [48] J.Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Phys. Rev. 127 (1962)
- [49] 't Hooft, Veltman, Regularisation and Renormalisation of Gauge Fields, Nucl. Phys., B44, S189, (1972).
- [50] G. Guralnik et al., Phys. Rev. Lett. 13 (1964), 585.
- [51] J. Bernstein, Rev. Mod. Phys. 46 (1974), 7.
- [52] L. H. Ryder: Quantum Field Theory, Cambridge University Press, 1996.
- [53] Vafa and Witten, Restriction on symmetry breaking in vector-like gauge theories, Nucl.Phys. B234 (1984), S173.
- [54] Review Of Particle Physics. Particle Data Group. By Particle Data Group (K. Hagiwara et al.). 2002. Published in Phys.Rev.D66:010001,2002.
- [55] le Bellac, Thermal Field Theory, Cambridge University Press, 1996.
- [56] Finite Temperature Field Theory, World Scientific, Singapore, 1997.
- [57] J.I. Kapusta, Finite-temperature field theory (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [58] Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 7, Viel-Teilchen-Theorie, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [59] H.Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, Nuovo Cim. 1, 205 (1955).
- [60] T. Kugo, Eichtheorie, Springer, Berlin (1997).
- [61] W.Greiner, J.Reinhardt, Feldquantisierung, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (1993).
- [62] R. J. Rivers, Path Integral Methods in Quantum Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987).
- [63] Baym, Self-Consistent Approximations in Many-Body Systems, Phys. Rev. 127, 1391 (1962).
- [64] Luttinger, Ward, Ground-State Energy of a Many-Fermion System.II, Pys. Rev. 118, 1417 (1960).