

**Pion-Pion-Streuung in einem geeichten
linearen Sigma-Modell mit chiraler
 $U(2)_R \times U(2)_L$ -Symmetrie**

Denis Parganlija

Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Theoretische Physik

21.12.2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Naturkräfte	1
1.2	Quantenchromodynamik	4
1.3	Effektive Modelle der QCD	6
1.3.1	Spontane Symmetriebrechung	9
1.4	Wichtige Eigenschaften der leichten Mesonen	11
1.4.1	Mesonen-Quantenzahlen	12
1.4.2	Skalare Mesonen	16
1.4.3	Pseudoskalare Mesonen	17
1.4.4	Vektormesonen	19
1.4.5	Axialvektorielle Mesonen	21
1.5	Motivation und Gliederung der Arbeit	23
2	Lagrange-Dichte des geeichten linearen Sigma-Modells	25
2.1	Skalare Mesonen in der Lagrange-Dichte	25
2.1.1	Symmetriebrechungsterme in der Lagrange-Dichte \mathcal{L}	28
2.2	Vektorielle Mesonen in der Lagrange-Dichte	30
2.3	Berechnung der Terme in der Lagrange-Dichte \mathcal{L}	31
2.3.1	Der kinetische Term $\text{Tr}[(D^\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)]$	31
2.3.2	Der Massenterm $-\mu^2\text{Tr}(\Phi^\dagger\Phi)$	31
2.3.3	Der Skalarmesonen-Selbstwechselwirkungsterm $-\lambda\text{Tr}(\Phi^\dagger\Phi)^2$	32
2.3.4	Der Skalarmesonen-Selbstwechselwirkungsterm $-\lambda_1[\text{Tr}(\Phi^\dagger\Phi)]^2$	33
2.3.5	Der Feldstärketensoren-Term $-\frac{1}{4}\text{Tr}[(F_l^{\mu\nu})^2 + (F_r^{\mu\nu})^2]$	33
2.3.6	Der Vektormesonen-Massenterm $\frac{m^2}{2}\text{Tr}[(A_l^\mu)^2 + (A_r^\mu)^2]$	34
2.3.7	Der explizit symmetriebrechende Term $\text{Tr}[H(\Phi + \Phi^\dagger)]$	34
2.3.8	Der $U(1)_A$ -Anomalie-Term $c(\det\Phi + \det\Phi^\dagger)$	34
2.4	Lagrangedichte \mathcal{L} und spontane Symmetriebrechung	35

3	Feynman-Diagramme und Korrelationsfunktionen	47
3.1	Terme im Lagrangian und die Wechselwirkung	47
3.2	Direkte Pionenwechselwirkung	48
3.2.1	Funktionaldifferenzierung des Anteils ohne Pionen-Impulse . . .	49
3.2.2	Funktionaldifferenzierung des Anteils mit zwei Pionen-Impulsen	51
3.2.3	Funktionaldifferenzierung des Anteils mit vier Pionen-Impulsen	52
3.3	Pion-Sigma-Vertex	55
3.3.1	Funktionaldifferenzierung des Anteils mit dem D'Alembert-Operator	56
3.3.2	Funktionaldifferenzierung des Anteils mit den partiellen Ablei- tungen	56
3.3.3	Funktionaldifferenzierung des Anteils ohne die partiellen Ablei- tungen	57
3.4	Pion-Rho-Vertex	58
3.4.1	Funktionaldifferenzierung des Anteils mit der partiellen Ablei- tung bei dem ρ -Meson	58
3.4.2	Funktionaldifferenzierung des Anteils ohne die partielle Ablei- tung bei dem ρ -Meson	60
3.5	Streuamplitude der Pion-Pion-Wechselwirkung	62
3.5.1	Mandelstam-Variablen	62
3.5.2	Direkte Pion-Pion-Streuung	64
3.5.3	Pion-Pion-Wechselwirkung mit virtuellem Sigma-Meson	66
3.5.4	Pion-Pion-Wechselwirkung mit virtuellem Rho-Meson	69
4	Streuamplitude und Streulängen	77
4.1	Mandelstam-Variablen im Schwerpunktsystem	77
4.2	Bearbeitung der Konstanten in der Streuamplitude	78
4.3	Die Streuamplitude an der Schwelle im chiralen Limes	81
4.4	Berechnung von Streulängen	82
4.4.1	Berechnung der Streulänge a_0^0	83
4.4.2	Berechnung der Streulänge a_0^1	89
4.4.3	Berechnung der Streulänge a_0^2	89
5	Zusammenfassung und Ausblick	93
	Literaturverzeichnis	97

Abbildungsverzeichnis

3.1	<i>Prädiagramm und Feynman-Diagramm in der ϕ^4-Theorie</i>	50
3.2	<i>Pion-Rho-Vertex</i>	60
3.3	<i>Feynman-Diagramme im Impulsraum</i>	64
3.4	<i>Pion-Pion-Streuung</i>	64
3.5	<i>Pion-Pion-Streuung, mit Sigma-Meson als virtuellem Meson - s-Kanal</i>	66
3.6	<i>Pion-Pion-Streuung, mit Sigma-Meson als virtuellem Meson - t-Kanal .</i>	67
3.7	<i>Pion-Pion-Streuung, mit Sigma-Meson als virtuellem Meson - u-Kanal</i>	68
3.8	<i>Pion-Pion-Streuung, mit Rho-Meson als virtuellem Meson - s-Kanal . .</i>	70
3.9	<i>Pion-Pion-Streuung, mit Rho-Meson als virtuellem Meson - t-Kanal . .</i>	72
3.10	<i>Pion-Pion-Streuung, mit Rho-Meson als virtuellem Meson - u-Kanal .</i>	73
4.1	<i>Abhängigkeit der Streulänge a_0^0 von der Sigma-Masse m_σ</i>	88
4.2	<i>Abhängigkeit der Streulänge a_0^2 von der Sigma-Masse m_σ</i>	90
4.3	<i>Vergleich der in dieser Arbeit ermittelten Streulänge mit der von Weinberg [18] berechneten Streulänge</i>	91

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Naturkräfte

Die moderne Physik kennt vier Arten von Naturkräften:

- 1.) Gravitation,
- 2.) Elektromagnetische Kraft;
- 3.) Starke Wechselwirkung;
- 4.) Schwache Wechselwirkung.

Die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung werden im *Weinberg-Salam-Modell* zur *elektroschwachen Wechselwirkung* zusammengefügt. In diesem Sinne können auch die

- 1.) Gravitation,
- 2.) *Elektroschwache* Wechselwirkung,
- 3.) Starke Wechselwirkung

als die *drei* grundlegenden Naturkräfte betrachtet werden. Allerdings sind gewisse experimentelle Überprüfungen der elektroschwachen Theorie noch nicht abgeschlossen - insbesondere in Anbetracht der Suche nach dem Higgs-Teilchen - so dass wir in dieser Einleitung von der Trennung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung ausgehen werden.

Die Unterschiede zwischen diesen Kräften sind teilweise sehr groß; wir listen hier

einige von ihnen auf.¹

Reichweite. Während die Reichweite der gravitativen und der elektromagnetischen Wechselwirkung unendlich ist, besitzen die starke und die schwache Wechselwirkung die Reichweite von etwa 1fm (Nukleonenradius), beziehungsweise 10^{-3} fm.

Eichbosonen. Die Gravitationskraft ist die einzige Wechselwirkung, die ein **Spin-2**-Eichboson (*Graviton*) besitzt (die anderen erwähnten Kräfte besitzen Spin-1-Teilchen/Vektorfelder als ihre Eichbosonen/Eichfelder - *Photonen* für die elektromagnetische Wechselwirkung, W^\pm - und Z^0 -*Bosonen* für die schwache und die *Gluonen* für die starke Wechselwirkung).

Für die Gravitonen und die Photonen postuliert man wegen ihrer Reichweite die **Masselosigkeit** (sie ist beispielsweise für die Photonen bis zur unteren Schranke von $m_\gamma < 6 \cdot 10^{-17}$ eV experimentell bestätigt)². Die Gluonen sind ebenfalls masselose Eichbosonen, obwohl die experimentellen Daten *die Masse von einigen eV nicht eindeutig ausschließen* ([1], S. 32).

Die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung besitzen experimentell festgelegte nichtverschwindende Massen: $m_{W^\pm} = (80.403 \pm 0.029)$ GeV; $m_{Z^0} = (91.1876 \pm 0.0021)$ GeV. Sie sind deshalb instabil und zerfallen hauptsächlich in Hadronen und Leptonen - die mittlere Lebensdauer beträgt $\tau = 3.1 \cdot 10^{-25}$ s für W^\pm und $\tau = 2.6 \cdot 10^{-25}$ s für Z^0 .

Kopplungskonstanten. Durch die Betrachtung der Werte der Kopplungskonstanten wird noch ein stark ausgeprägter Unterschied zwischen den einzelnen Naturkräften deutlich: während die sehr bekannte Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137.03599911}$ und demzufolge die elektromagnetische Kopplungskonstante $e \approx 0.30282212$ beträgt, ist die Strukturkonstante der starken Wechselwirkung $\alpha_S(m_Z) = \frac{g^2}{4\pi} \approx 0.1176$, beziehungsweise, die Kopplungskonstante der *starken* Wechselwirkung g ist $g \approx 1.22$ oder

$$g \sim 1.$$

Dies bedeutet, dass die Lösung von Problemen in der Theorie der starken Wechselwirkung, der

Quantenchromodynamik

¹Zahlenangaben in diesem ganzen Kapitel laut [1].

²Die Gravitonen sind bislang nicht experimentell beobachtet worden; ihre Ruhemasse ist den theoretischen Vorhersagen nach null, siehe [2].

durch eine Entwicklung in eine perturbative Reihe im Allgemeinen erhebliche Komplikationen hervorruft, denn die perturbative Reihe muss bei $g \sim 1$ keineswegs konvergent sein. Wegen $e \approx 0.30282212$ gilt dies nicht für die **Quantenelektrodynamik**, die Theorie der elektromagnetischen Streuprozesse auf dem Quantenniveau.

Ganz im Gegenteil ist die gravitative Kopplungskonstante sehr klein - sie beträgt $G_N = 6.6742 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ (SI-Einheiten) oder $G_N = 6.7087 \cdot 10^{-39} \text{GeV}^{-2}$ (natürliche Einheiten) - und stellt die schwächste Kopplungskonstante bei den vier angegebenen Naturkräften dar. Die schwache Kopplungskonstante (Fermi-Kopplungskonstante) beträgt $G_F = \frac{e^2}{m_{W^\pm}^2} = 1.1664 \cdot 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ und ist demzufolge viel größer als G_N , aber auch viel kleiner als e .

Trotz dieser Unterschiede ist die Bestrebung vorhanden, die Naturkräfte zu *vereinheitlichen*: die Verknüpfung des elektrischen Feldes \vec{E} und des magnetischen Feldes \vec{B} mittels des Feldstärketensors $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ (A^μ : das Vierer-Potential) führt zu dem Konzept, in dem die zwei separaten Felder \vec{E} und \vec{B} im kartesischen Raum durch *einen* Tensor zweiter Stufe - ein elektromagnetisches Feld - im Minkowski-Raum beschrieben werden. Dies ist eine Konsequenz der Speziellen Relativitätstheorie (siehe z. B. [3]).

Oder: das schon erwähnte Weinberg-Salam-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung (siehe z.B. [4]) - hergeleitet von beiden Wissenschaftlern unabhängig voneinander - basiert auf der spontanen Brechung der Eichsymmetrien. Es wird zunächst angenommen, dass die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung (W^\pm und Z^0) sowie die Leptonen - Elektronen, μ - und τ -Leptonen und ihre Neutrinos - masselos sind; für die Neutrinos werden ausschließlich linkshändige Spinoren benutzt. Die Einführung des **Higgs-Feldes** (skalares Feld) mit einem nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert führt zu der spontanen Brechung der **lokalen** $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Symmetrie, wodurch nicht nur die Leptonen (mit Ausnahme von Neutrinos) sondern auch die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung massiv werden; das Photon bleibt masselos. Diese theoretischen Ergebnisse stimmen mit den experimentellen Ergebnissen überein; allerdings sagt diese Theorie ebenfalls voraus, dass das Higgs-Feld einen Vakuumerwartungswert von etwa 177GeV besitzen müsste. Die Experimente zur Bestimmung des Erwartungswertes sind noch nicht durchgeführt worden, aber es ist bereits eine untere Schranke von 114.4GeV festgestellt worden.

Oder: vor ungefähr dreißig Jahren ist das Konzept der GUT (*Grand Unification Theory*) entstanden, einer Theorie, in der die elektroschwache mit der starken Wechsel-

wirkung vereint werden sollte (siehe z.B. [4] für einleitende Anmerkungen). Sie sagt beispielsweise voraus, dass sich die laufende elektromagnetische, starke und schwache Kopplungskonstante bei der Energie von etwa 10^{16}GeV in einem Punkt treffen sollten. Allerdings stehen die experimentellen Beweise dafür noch aus.

Im Fokus dieser Arbeit sollen die Mesonen stehen, Teilchen, die durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben werden.

1.2 Quantenchromodynamik

Wir beginnen mit den bekannten Werten³ für die Masse der Quarks (*Quarkflavours*):

$$m_u = (1.5 - 3.0)\text{MeV}; m_d = (3 - 7)\text{MeV}; m_s = (95 \pm 25)\text{MeV};$$

$$m_c = (1.25 \pm 0.09)\text{GeV}; m_b = (4.20 \pm 0.07)\text{GeV};$$

$$m_t = (174.2 \pm 3.3)\text{GeV}.$$

Nun ist aus diesen Werten ersichtlich, dass von der Massengleichheit der Up- und Down-Quarks ausgegangen werden kann; dann kann aber ein Quark-Antiquark-Gebilde durch die $SU(2)_f$ -**Symmetrie**⁴ beschrieben werden.⁵ Dies hat sich nach der Entdeckung diverser mesonischer und baryonischer Zustände in den 1950er und 1960er Jahren und der darauf folgenden Frage nach der Klassifizierung dieser Teilchen sehr nützlich erwiesen.

Die Quantenchromodynamik (QCD) hat ihre Ursprünge in den 1960er Jahren: zu diesem Zeitpunkt war die Quarkflavour-Struktur der Hadronen schon bekannt, zum

³Die Massen für die Up-, Down- und Strange-Quarks sind Schätzwerte der so genannten *current quark masses* auf der Skala von $\mu \approx 2\text{GeV}$. Die Massen der Charm- und Bottom-Quarks sind die "laufenden" Massen auf dieser Skala. Die für das Top-Quark angegebene Masse stammt von den direkt beobachteten Top-Events, nach den Daten der Tevatron Electroweak Working Group.

⁴Sie wird sich wegen der Quark-Massengleichheit weiter unten als die $SU(2)_V$ -Symmetrie erkennen lassen, siehe Kapitel 1.3.

⁵Es gibt auch die Möglichkeit, von anderen Quark-Massengleichheiten auszugehen, was zu Symmetrien höherer Ordnung führt [$SU(N_f)$]; da die nichtseltsamen Mesonen das Thema dieser Arbeit sind, werden wir uns auf die $SU(2)_f$ -Symmetrie beschränken. Außerdem sind die Symmetrien der jeweils höheren Ordnung immer stärker explizit gebrochen, da die Quark-Massenunterschiede immer größer werden.

Beispiel war die Struktur der Protonen $|p\rangle \sim |uud\rangle$ bekannt. Die Struktur eines Quasipartikels, der

Delta-Resonanz Δ^{++}

(baryonisches Teilchen mit Gesamtspin $\frac{3}{2}$ und Energie 1232MeV) war ebenfalls bekannt, und das von Gell-Mann vorgeschlagene Modell der $SU(2)_f$ -Symmetrie zur Strukturklärung der Baryonen sagte die Struktur

$$|\Delta^{++}\rangle |_{J_3=+\frac{3}{2}} = u_\uparrow u_\uparrow u_\uparrow$$

voraus, was gegen das Verbotsprinzip von Pauli, bzw. das Paulische Spin-Statistik-Theorem [5] verstieß.

Um diesem Prinzip doch Folge zu leisten, wurde eine neue Quantenzahl im Hilbert-Raum der Quarks eingeführt: *die Farbladung - colour charge* (QCD = "*Dynamik der Quantenfarbladungen*"). Jedem Quark-Flavour (q_f) kann eine der drei Farben zugeordnet werden: *rot, grün* oder *blau* und die Quarks stellen somit ein Triplet im Farbraum dar [lokale $SU(3)_C$ -Eichsymmetrie]:

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}.$$

Dann sind die Strukturen anderer Δ -Resonanzen:

$$\begin{aligned} |\Delta^+\rangle |_{J_3=+\frac{3}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(d_\uparrow u_\uparrow u_\uparrow + u_\uparrow d_\uparrow u_\uparrow + u_\uparrow u_\uparrow d_\uparrow), \\ |\Delta^0\rangle |_{J_3=+\frac{3}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(d_\uparrow d_\uparrow u_\uparrow + d_\uparrow u_\uparrow d_\uparrow + u_\uparrow d_\uparrow d_\uparrow), \\ |\Delta^-\rangle |_{J_3=+\frac{3}{2}} &= d_\uparrow d_\uparrow d_\uparrow \end{aligned}$$

ebenfalls unbedenklich.

Selbstverständlich kann sofort die Frage gestellt werden, ob die Anzahl der Farbladungen richtig gewählt wurde. Dass dem so ist, zeigen (zum Beispiel) die nachfolgenden zwei Experimente.

Experiment 1. Ein Pion zerfällt in zwei Photonen: $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Daraus resultiert die Zerfallsbreite des π^0 -Mesons $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = 7.87 \cdot (\frac{N_c}{3})^2$ (theoretisch), und $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = (7.95 \pm 0.05)\text{eV}$ (experimentell) - also muss $N_c = 3$ gewählt werden.

Experiment 2. Das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte für die Prozesse $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen und $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ist

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \begin{cases} \frac{5}{9} & (N_f = 2) \\ \frac{2}{3} & (N_f = 3) \\ \frac{10}{9} & (N_f = 4). \end{cases}$$

Diese theoretischen Vorhersagen entsprechen den experimentellen Werten nur bei $N_c = 3$.

Also können wir von $N_c = 3$ ausgehen und insgesamt werden die Zwei-Flavour-Quark-Zustände demzufolge durch eine $SU(2)_f \otimes SU(3)_c$ -Symmetrie beschrieben.

Es sei noch angemerkt, dass es sich bei den Mesonen - wenn wir von ihnen als Zweiquarkzuständen ausgehen - um Zustände aus Quarks und *Antiquarks* handeln muss, denn nur die Kombination eines Farbtripletts und eines Farbantitripletts wird ein Farbsingulett⁶ ergeben können:

$$[3]_c \otimes [\bar{3}]_c = [1]_c \oplus [8]_c.$$

1.3 Effektive Modelle der QCD

Bekanntlich lässt sich ein Dirac-Spinor ψ mittels rechts- und linkshändiger **Chiralitätsprojektionsoperatoren**

$$\mathcal{P}_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$$

- das "+"-Vorzeichen gilt für den rechtshändigen Projektor \mathcal{P}_R ; γ_5 ist die Diracsche Matrix $\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$ - in einen jeweils rechts- und linkshändigen Anteil aufspalten:

$$\psi = \mathcal{P}_R\psi + \mathcal{P}_L\psi =: \psi_R + \psi_L.$$

⁶Bisher beobachtete Teilchen sind farbneutral - *weiß*, was durch das Quark-Confinement erklärt wird: wir leiten in der Theorie die innere Zusammensetzung von Hadronen unter anderem mit der Forderung her, dass die Hadronen Farbsingulett sind, aber der Grund dafür ist - wie gesagt - experimenteller Natur, und theoretisch noch nicht erklärt worden.

Die freie Lagrange-Dichte für massive Dirac-Teilchen lässt sich analog aufspalten:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi = i\bar{\psi}\cancel{\partial}\psi - \bar{\psi}m\psi \\ &= i\bar{\psi}_R\cancel{\partial}\psi_R + i\bar{\psi}_L\cancel{\partial}\psi_L - \bar{\psi}_Rm\psi_L - \bar{\psi}_Lm\psi_R.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Wie aus (1.1) ersichtlich ist, werden die beiden Anteile des Spinors ψ im Massenterm miteinander gemischt. Dies ist ein Indiz für die explizite Brechung der chiralen Symmetrie, was für den Fall der Quark-Spinoren besonders besprochen werden soll (siehe unten).

Ersetzt man nun die partielle Ableitung ∂_μ durch eine lokal eichkovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\mathcal{A}_\mu,$$

in der die $N_c^2 - 1 = 8$ Eichfelder (Gluonen) auftreten⁷:

$$\mathcal{A}_\mu = \sum_{a=1}^8 A_\mu^a t_a \quad (\mathcal{A}_\mu: \text{matrix-wertiges Vierer-Potential der Gluonen}),$$

so gilt für den Quark-Lagrangian analog zu (1.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QCD} &= \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f(i\cancel{\mathcal{D}} - m_f)q_f = \sum_{f=1}^{N_f} (i\bar{q}_{R,f}\cancel{\mathcal{D}}q_{R,f} + i\bar{q}_{L,f}\cancel{\mathcal{D}}q_{L,f} \\ &\quad - \bar{q}_{R,f}m_fq_{L,f} - \bar{q}_{L,f}m_fq_{R,f}).\end{aligned}$$

Zu diesem effektiven QCD-Lagrangian wird ein gluonischer Anteil addiert; dazu wird der *Gluonen-Feldstärketensor* $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ definiert⁸ [f^{abc} : Strukturkonstanten der $SU(3)_c$ -Gruppe], und es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QCD} &= \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f(i\cancel{\mathcal{D}} - m_f)q_f - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} = \sum_{f=1}^{N_f} (i\bar{q}_{R,f}\cancel{\mathcal{D}}q_{R,f} + i\bar{q}_{L,f}\cancel{\mathcal{D}}q_{L,f} \\ &\quad - \bar{q}_{R,f}m_fq_{L,f} - \bar{q}_{L,f}m_fq_{R,f}) - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Der Quark-Anteil in (1.2) ist für *masselose* Quarks ($m_f = 0$) invariant unter den

⁷Hierbei sind t_a die Generatoren der $SU(3)_c$ -Gruppe: $t_a = \frac{1}{2}\lambda_a$, wobei λ_a die Gell-Mann-Matrizen sind.

⁸Der Feldstärketensor muss bekanntlich diese Form besitzen, um $SU(3)_c$ invariant zu sein.

globalen, unitären $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ -Transformationen

$$q_{R,f} \rightarrow q'_{R,f} = U_R q_{R,f} := e^{-i \sum_{a=1}^{N_f^2} \alpha_R^a t_a} q_{R,f} \quad (1.3)$$

$$q_{L,f} \rightarrow q'_{L,f} = U_L q_{L,f} := e^{-i \sum_{a=1}^{N_f^2} \alpha_L^a t_a} q_{L,f}. \quad (1.4)$$

Die $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ -Symmetrie (die chirale Symmetrie) wird durch die Masse *explizit* gebrochen. Dies ist aus der Gleichung (1.2) ersichtlich und wird in dem noch zu konstruierenden Lagrangian für das Modell aus dieser Diplomarbeit zu berücksichtigen sein.

Nach dem Noether-Theorem [6] führen erhaltene Symmetrien zu erhaltenen Strömen⁹ (und gebrochene Symmetrien zu nicht-erhaltenen Strömen). Dabei empfiehlt sich hier der Übergang von rechts- und linkshändigen Strömen R^μ, L^μ zu den vektoriellen

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu \text{ (paritätsgerade)} \quad (1.5)$$

und den axialen Strömen:

$$A^\mu = R^\mu - L^\mu \text{ (paritätsungerade)}. \quad (1.6)$$

Dann folgt aus dem QCD-Lagrangian mittels Variationsrechnung [7] (der Flavour-Index f wird unterdrückt; m ist die Quarkmassenmatrix)¹⁰:

$$\begin{aligned} \partial_\mu V_0^\mu &= 0 \\ \partial_\mu A_0^\mu &= i\bar{q}m\gamma_5 q \\ \partial_\mu V_i^\mu &= i\bar{q}[m, t_i]q \quad (i = 1, \dots, N_f^2 - 1) \\ \partial_\mu A_i^\mu &= i\bar{q}\{m, t_i\}\gamma_5 q. \end{aligned}$$

Der vektorielle Singulett-Strom ist also erhalten (Baryonenzahlerhaltung) [Symmetrie: $U(1)_V$]; die Vektorströme V_i^μ sind bei entarteten Quarkmassen erhalten [$SU(N_f)_V$]; die axialvektoriellen Ströme A_i^μ sind bei $m = 0$ (alle Quarkmassen verschwinden) erhalten [$SU(N_f)_A$]; der axialvektorielle Singulett-Strom A_0^μ sollte ebenfalls erhalten sein [$U(1)_A$ -Symmetrie nicht gebrochen], was er in dieser *klassischen* Betrachtung der unitären Transformationseigenschaften auch ist; allerdings lässt sich in Anlehnung an die

⁹Von erhaltenen Strömen lässt sich umgekehrt auf erhaltene Symmetrien schließen.

¹⁰ A^μ in den nachfolgenden Gleichungen ist nicht mit dem Vierer-Potential der Gluonen zu verwechseln.

quantenelektrodynamischen Berechnungen in [8] zeigen¹¹, dass nach der Quantisierung der QCD

$$\partial_\mu A_0^\mu = i\bar{q}m\gamma_5 q - i \frac{g^2 N_f}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\eta\theta} G_{\mu\nu}^a G_{\eta\theta}^a \quad (1.7)$$

folgt (*chirale Anomalie*)¹². Dies bedeutet dann, dass die $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ -Symmetrie bei verschwindenden Quark-Massen zu einer $U(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ -Symmetrie gebrochen wird.

Neben der expliziten Symmetriebrechung können die Symmetrien auch spontan gebrochen werden. Dies soll im nächsten Unterkapitel an einem Beispiel diskutiert werden.

1.3.1 Spontane Symmetriebrechung

Der Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{m^2}{2} (\phi_i)^2 - \lambda (\phi_i)^4$$

(ϕ_i : skalare Felder; $i = 1, 2, 3$) ist $SO(3)$ -symmetrisch - also symmetrisch unter der Isospin-Transformation

$$G : \phi_i \longrightarrow \phi'_i = (e^{-i\alpha_k t_k})_{ij} \phi_j = U_{ij} \phi_j$$

(α_k : Rotationswinkel im Isospinraum; t_k : Matrizen in der Lie-Algebra der Transformationsgruppe).

Das Minimum des Potentials $\mathcal{V} = \frac{m^2}{2} (\phi_i)^2 + \lambda (\phi_i)^4$ liegt reelle Massenparameter $m^2 > 0$ bei $\phi_i = 0$ (*Wigner-Weyl-Modus*).

Für

$$m^2 < 0 \quad (\mathbf{Goldstone-Modus})$$

¹¹Fujikawa zeigt nämlich in [8], dass die chirale Transformation des Pfadintegralmaßes der eichinvarianten Fermionentheorien funktional nicht unitär ist, was zu einem der ABJ-Anomalie (Adler-Bell-Jackiw) entsprechenden Phasenfaktor bei der γ_5 -Transformation des Pfadintegralmaßes führt: $\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi \rightarrow \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi \exp(-i\alpha(x) \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\eta\theta} F_{\mu\nu}^a F_{\eta\theta}^a)$. Dieser Faktor ergibt sich dann analog in der QCD und ist in der Gleichung (1.7) enthalten.

¹²Zu der Existenz der chiralen Anomalie sind experimentelle Übereinstimmungen mit den theoretischen Vorhersagen vorhanden, zum Beispiel mit der Vorhersage in [9].

ist das Minimum bei

$$|\vec{\phi}_0| = \left[\sum_{i=1}^3 (\phi_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{-m^2}{4\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Im Wigner-Weyl-Modus ist der Grundzustand unter der ganzen Transformationsgruppe symmetrisch; im Goldstone-Modus ist diese Symmetrie *spontan gebrochen*, denn das Minimum ist nicht unter der ganzen Gruppe G symmetrisch, sondern nur unter ihrer Untergruppe H , die unter der Annahme, dass $\vec{\phi}_0$ in die 3-Richtung im Isospin-Raum zeigt, folgendermaßen bestimmt ist:

$$H : \vec{\phi}_0 \longrightarrow \vec{\phi}'_0 = e^{i\alpha_3 t_3} \vec{\phi}_0 = \vec{\phi}_0.$$

Also sind in diesem Modus zwei Generatoren gebrochen, was zu der Entstehung von zwei masselosen *Goldstone-Bosonen* führt; ein Generator ist nicht gebrochen, was zu einem massiven skalaren Feld χ mit der Masse $m_\chi^2 = -2m^2 > 0$ führt.

Dass in diesem Fall zwei Goldstone-Bosonen entstehen, kann aus einer Diskussion des Potentials \mathcal{V} hergeleitet werden. Die Entwicklung des Potentials bis zur zweiten Ordnung um das Minimum führt nämlich zu der Massenmatrix

$$m_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi_0}.$$

Die Massenmatrix ist positiv semidefinit, da ϕ_0 das Minimum des Feldes ist. Nun führt die Gruppentransformation des Potentials zu

$$m_{ij} \delta \phi_i \delta \phi_j = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi_0} \delta \phi_i \delta \phi_j \stackrel{!}{=} 0,$$

da sich das Potential bei der Transformation nicht ändert ($\delta \phi_{i,j}$ ist die Variation von $\phi_{i,j}$ unter der Gruppentransformation). Dann können aber die Massen der Moden genau dann ungleich null sein, wenn ihnen verschwindende Feldvariationen entsprechen - mit den Bezeichnungen aus diesem Unterkapitel ist die Anzahl dieser massiven Moden gleich $\dim H$ ¹³ und sie besitzt in unserem Beispiel den Wert 1. Mit dem analogen Denkverfahren ergibt sich dann die Anzahl von Moden mit verschwindender Masse (*Goldstone-Moden*) zu $\dim G/H$ (was der Anzahl von gebrochenen Generatoren entspricht - in unserem Beispiel besitzt sie den Wert 2). Dies ist die Aussage des

¹³Dies bedeutet, dass die Masse dieser Moden nicht verschwinden muss - aber sie kann *zufällig* doch null sein.

Goldstone-Theorems¹⁴.

Der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung war an dieser Stelle zu besprechen, da er in dieser Arbeit bei der noch herzuleitenden Lagrange-Dichte benutzt werden soll (siehe nächstes Kapitel).

Hierbei sei angemerkt, dass die vektoriellen Symmetrien in der Quantenchromodynamik - sowie in anderen vektoriellen Theorien - nicht spontan gebrochen werden können [12]; dies gilt aber nicht für die axialen Symmetrien. Angewandt auf den Fall der Mesonen bedeutet dies, dass die chirale $U(2)_R \times U(2)_L$ -Symmetrie zu einer $U(2)_V \times U(1)_A$ -Symmetrie spontan gebrochen wird; diese spontane Symmetriebrechung wird in der Natur allerdings nur *näherungsweise* beobachtet (es sind keine masselosen Mesonen oder überhaupt Hadronen gefunden worden). Als (Pseudo-)Goldstone-Bosonen dienen dann die Pionen, da sie die Mesonen mit der kleinsten Masse darstellen (etwa 135MeV). Die Tatsache, dass ein massives Teilchen als Goldstone-Boson interpretiert werden kann, könnte als eine Bestätigung der PCAC-Hypothese (*partially conserved axial current*) betrachtet werden¹⁵.

Der folgende Abschnitt soll dazu dienen, uns mit den Eigenschaften von Mesonen vertraut zu machen.

1.4 Wichtige Eigenschaften der leichten Mesonen

Mesonen sind hadronische Zustände mit ganzzahligem Spin - eine der zwei Arten von hadronischen Teilchen, neben den **Baryonen**, die durch den halbzahligen Spin gekennzeichnet sind. Im Allgemeinen ist die Mesonen-Energie kleiner als die Baryonen-Energie, was sich auch durch die griechische Herkunft ihrer Namen herleiten

¹⁴Dies ist eine klassische Überlegung. In der Quantenfeldtheorie lautet das Goldstone-Theorem: Wenn ein Feldoperator $\phi(x)$ mit nicht-verschwindendem Vakuumerwartungswert gegeben ist, der kein Singulett unter einer kontinuierlichen Symmetriegruppe eines Lagrangians ist, dann existieren masselose Anregungen im Spektrum von Zuständen, die durch diesen Lagrangian beschrieben werden. Siehe dazu zum Beispiel [4], [10] oder [11].

¹⁵Als PCAC-Formel wird oftmals die Formel $\partial_\mu \langle 0 | A^\mu | \pi(k) \rangle = -f_\pi m_\pi^2 e^{-ikx}$ bezeichnet, wobei f_π die Pionzerfallskonstante ist. Da sowohl $f_\pi = 91.9\text{MeV}$ als auch m_π im Vergleich zu anderen Pionenmassen als relativ klein betrachtet werden können, ergibt sich der im Formelnamen vorhandene, teilweise erhaltene Axialstrom.

lässt: $\mu\acute{\epsilon}\sigma\sigma$ (*mesos*) = *mittel(schwer)*; $\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$ (*barys*) = *schwer*.

Sie wechselwirken stark und/oder elektromagnetisch. Das Hauptblickfeld dieser Arbeit wird sich der **starken** Wechselwirkung der Mesonen widmen - bekanntlich ist sie im Vergleich zu der elektromagnetischen Wechselwirkung mehr ausgeprägt, da die starke Kopplungskonstante den Wert $g \sim 1$ besitzt und daher viel größer als die für die elektromagnetische Wechselwirkung verantwortliche Kopplungskonstante - die Elementarladung $e = \sqrt{4\pi \cdot \alpha} = \sqrt{\frac{4\pi}{137}} \approx 0.30282212$ - ist; somit ist die relative Häufigkeit der starken Wechselwirkungsprozesse ebenfalls (viel) höher als die Häufigkeit der elektromagnetischen Wechselwirkungsprozesse.

In dieser Arbeit werden die leichten Mesonen betrachtet, die durch Up- und Down-Quarkzustände beschrieben werden; auf den Miteinbezug der Mesonen mit anderen Quark-Freiheitsgraden (seltsame, Charm-, Bottom- und Top-Quarks) wird in dieser Arbeit verzichtet.

Die für diese Arbeit interessanten Mesonen gliedern sich aufgrund ihrer unten angegebenen Eigenschaften in:

- 1.) *skalare* (zum Beispiel: σ , \vec{a}_0),
- 2.) *pseudoskalare* (η , $\vec{\pi}$),
- 3.) *vektorielle* (ω , $\vec{\rho}$),
- 4.) *axialvektorielle* (f_1 , \vec{a}_1)

Mesonen auf.

1.4.1 Mesonen-Quantenzahlen

Wir werden uns in diesem Unterkapitel mit den Eigenschaften der leichten Mesonen in Bezug auf die Quantenzahlen *Bahndrehimpuls* L , *Spin* S , *Gesamtdrehimpuls* J ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$), *Isospin* I , *Parität* P und *Ladungskonjugation* C sowie *G-Parität* beschäftigen. Die Werte des Spins und des Isospins bewegen sich für die Teilchen aus dem Modell in dieser Arbeit zwischen 0 und 1 (es sind aber auch Mesonen experimentell gefunden worden, die einen höheren Gesamtdrehimpuls J besitzen).

In diesem Abschnitt widmen wir uns noch den Eigenschaften der *Parität*, *Ladungskonjugation* und *G-Parität*. Andere Eigenschaften der skalaren und vektoriellen Mesonen sind den Unterkapiteln 1.4.2 - 1.4.5 zu entnehmen.

Parität. Wir erinnern uns in Bezug auf die pseudoskalaren und axialvektoriellen Mesonen zunächst kurz daran, dass die *pseudoskalaren Vektoren* schon in der klassischen Mechanik als jene Vektoren definiert wurden, die bei Spiegelung um den Koordinatenursprung ihr Vorzeichen **ändern**; die *Axialvektoren* wurden ebenfalls durch ihr Verhalten bei Spiegelung um den Koordinatenursprung definiert: sie ändern ihr Vorzeichen dabei **nicht** (Beispiel: der Resultantenvektor im Produkt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus \mathbb{R}^3).

Diese klassische Betrachtung führt uns zu der *Mesonenparität* - in der Elementarteilchenphysik definieren wir die Parität über die Transformation im Minkowski-Raum (*Rauminversion*):

$$P : (t, \vec{x}) \longrightarrow (t, -\vec{x}). \quad (1.8)$$

Ein Meson besteht aus Fermionen:

$$\begin{aligned} \Psi(X \equiv (t, \vec{x})) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_0} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [b^{(s)}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) e^{-iP \cdot X} + d^{(s)\dagger}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) e^{iP \cdot X}] \\ \bar{\Psi}(X) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_0} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} [b^{(s)\dagger}(\vec{p})\bar{u}^{(s)}(\vec{p}) e^{iP \cdot X} + d^{(s)}(\vec{p})\bar{v}^{(s)}(\vec{p}) e^{-iP \cdot X}] \end{aligned}$$

(b^\dagger, d^\dagger : Erzeugungsoperatoren für Dirac-Teilchen/-Antiteilchen; b, d : Vernichtungsoperatoren für Dirac-Teilchen/-Antiteilchen) und die obige Definition (1.8) führt zu (für die explizite Herleitung, siehe [13]):

$$P : \begin{cases} b_{\vec{p}}^{(s)\dagger} |0\rangle \longmapsto b_{-\vec{p}}^{(s)\dagger} |0\rangle \\ d_{\vec{p}}^{(s)\dagger} |0\rangle \longmapsto -d_{-\vec{p}}^{(s)\dagger} |0\rangle \end{cases}$$

(für die Vernichtungsoperatoren analog), so dass sich für die Parität P bei bekanntem Bahndrehimpuls L zu [14]

$$P = (-1)^{L+1},$$

ergibt, wobei die Erhöhung des Drehimpulses um den Wert (+1) für die Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen und für den Miteinbezug der inneren Symmetrieeigenschaften der Quarks im Meson notwendig ist.

Somit ergibt sich für die skalaren Mesonen (siehe Kapitel 1.4.2) positive Parität; für

die pseudoskalaren (Kapitel 1.4.3) ist sie negativ; für die vektoriellen Mesonen (Kapitel 1.4.4) ebenfalls negativ und für die axialvektoriellen Mesonen (Kapitel 1.4.5) positiv.

Ladungskonjugation. Diese Transformation lässt die Erzeugungsoperatoren der Fermionen und Antifermionen ihre Plätze tauschen [13]:

$$C : \begin{cases} b_{\bar{p}}^{(s)\dagger} |0\rangle \mapsto d_{\bar{p}}^{(s)\dagger} |0\rangle \\ d_{\bar{p}}^{(s)\dagger} |0\rangle \mapsto b_{\bar{p}}^{(s)\dagger} |0\rangle \end{cases}$$

(für die Vernichtungsoperatoren analog) und die Quantenzahl berechnet sich zu [14]:

$$C = (-1)^{L+S} \equiv (-1)^J. \quad (1.9)$$

Da sich diese Arbeit mit den Pionen beschäftigen wird, geben wir hier als Beispiel die Transformationen für die Pionen an; die Transformationen für die anderen Mesonen werden in den nachfolgenden Unterkapiteln angeführt.

Für die Pionen ist $J = 0 \Rightarrow C = 1$ und daher:

$$\begin{aligned} C |\pi^0\rangle &= |\pi^0\rangle \\ C |\pi^+\rangle &= |\pi^-\rangle \\ C |\pi^-\rangle &= |\pi^+\rangle. \end{aligned}$$

Schon aus diesen Beispielen ist ersichtlich, dass der Ladungskonjugations-Operator C keine Eigenzustände in seinen Gleichungen erhält (denn er wandelt beispielsweise $|\pi^+\rangle$ in $|\pi^-\rangle$ um); dies wird durch das Konzept der *G-Parität* korrigiert.

G-Parität. Definiert man die Flavourtransformation

$$q_f = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow U_\alpha \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

mit $U_\alpha = e^{i\alpha_a \frac{\tau_a}{2}}$ und betrachtet den Spezialfall $\alpha_{1,3} = 0, \alpha_2 = \pi$, dann wird mit dem dazu korrespondierenden Operator U_2 ein neuer Paritätsoperator $G = C \cdot U_2$ definiert (*G-Parität*); der Wert der entsprechenden Quantenzahl wird mittels $G = (-1)^{L+S+I}$ [14] oder

$$G = C (-1)^I \quad (1.10)$$

berechnet [der Anteil $(-1)^I$ stammt von dem unitären Operator U_2]. Da wir die Werte der Ladungskonjugation C kennen, ist $G = C$ für alle Isospin-Singulets; für alle Isospin-Triplets ist $G = -C$.

Die G-Parität ändert das Ladungsvorzeichen der Wellenfunktion, auf die sie wirkt, *nicht* ab (der Eigenzustand bleibt auf beiden Gleichungsseiten erhalten) - dies war auch der Einführungszweck der G-Parität.

Dann folgt - wieder zum Beispiel für die Pionen, bei denen $I = 1$, also laut (1.10) $G = -1$ ist:

$$\begin{aligned} G |\pi^0\rangle &= -|\pi^0\rangle \\ G |\pi^+\rangle &= -|\pi^+\rangle \\ G |\pi^-\rangle &= -|\pi^-\rangle. \end{aligned}$$

Die G-Parität sollte - so wie die *gewöhnliche* Parität - bei den starken Wechselwirkungsprozessen erhalten sein; also sollten Prozesse wie beispielsweise

$$\omega \longrightarrow \pi^+ \pi^-$$

nicht stattfinden, da im Eingangskanal die G-Parität negativ (Vektormeson) und im Ausgangskanal $(-1)^2$, also positiv, ist. Experimentell ist dieser Zerfall aber doch beobachtet worden ([1], S. 38), und zwar in etwa 1.70% der Fälle - also ist die G-Parität nur *näherungsweise* erhalten.

Anmerkung zu der mittleren Lebenszeit (*mean life*) der mesonischen Teilchen: sie kann durch ein Zeitintervall τ [s] oder durch sein Inverses - die so genannte **volle Zerfallsbreite** (*full width*) Γ - ausgedrückt werden:

$$\Gamma = \frac{1}{\tau}.$$

Da bekanntlich $197.3 \text{ MeVfm} = \hbar c = 1$, so ist (wenn $[\Gamma] = \text{MeV}$) $\tau = \frac{197.3}{\Gamma} \left[\frac{\text{MeV fm}}{\text{MeV}} \right] = \frac{197.3}{\Gamma} \text{ [fm]} \equiv \frac{197.3}{\Gamma} \cdot \frac{1}{2.99792458} \cdot 10^{-23} \text{ [s]} \approx 65.8 \cdot 10^{-23} \frac{1}{\Gamma} \text{ [s]}$, also

$$\tau = 6.58 \cdot 10^{-22} \frac{1}{\Gamma} \text{ [s]}.$$

Mit dieser Formel reicht in den nachfolgenden Unterkapiteln die Angabe von entweder τ oder Γ aus¹⁶.

¹⁶Alle Angaben in den folgenden Abschnitten gemäß [1].

1.4.2 Skalare Mesonen

Skalare Mesonen sind das σ - und das a_0 -Teilchen; sie besitzen Spin $S = 1$; Drehimpuls $L = 1$ und Gesamtdrehimpuls $J = 0$; die Parität ist positiv. Das a_0 -Teilchen ist ein *Triplett im Isospinraum*: in der Natur sind das a_0^+ -, a_0^- - und das a_0^0 -Teilchen vorhanden.

Das a_0 -Teilchen hat die Masse $m_{a_0} = (984.7 \pm 1.2)\text{MeV}$ [$a_0(980)$] und die volle Breite $\Gamma = (50 - 100)\text{MeV}$. Der dominante Zerfallskanal für dieses Teilchen ist

$$a_0(980) \longrightarrow \eta\pi \quad (1.11)$$

(das Pion jeweils mit der entsprechenden Ladung).

Experimentell wurde auch die Existenz des $a_0(1450)$ -Teilchens mit der Masse $m_{a_0(1450)} = (1474 \pm 19)\text{MeV}$ und der vollen Breite $\Gamma = (265 \pm 13)\text{MeV}$ festgestellt, das ebenfalls ein Triplet im Isospinraum darstellt. Bei diesem Teilchen wurden die Zerfälle $a_0(1450) \rightarrow \pi\eta$ und $a_0(1450) \rightarrow K\bar{K}$ beobachtet.

Für das σ -Teilchen (das manchmal auch als f_0 bezeichnet wird) liegt die Masse in einem breiten Intervall: $m_\sigma = (400 - 1200)\text{MeV}$ [$\sigma(600)$]; seine Lebenszeit ist ebenfalls groß: $\Gamma = (600 - 1000)\text{MeV}$. Wegen der dermaßen großen Zerfallsbreite wird manchmal sogar die Existenz dieses Teilchens bezweifelt, aber in dieser Arbeit wird durchaus davon ausgegangen, *dass* es existiert. Außerdem sind Modelle der Pion-Nukleon-Wechselwirkung entwickelt worden, in denen das (existierende) σ -Teilchen als die 0-te Komponente eines "Vierer-Pions" aufgefasst wird und die ganz erfolgreich sind. [7] Dieses Teilchen besitzt den folgenden dominanten Zerfallskanal:

$$\sigma(600) \longrightarrow \pi\pi, \quad (1.12)$$

obwohl der Zerfall

$$\sigma(600) \longrightarrow \gamma\gamma \quad (1.13)$$

ebenfalls beobachtet wurde. Auch andere σ -Mesonen wurden experimentell beobachtet:

- 1.) das $\sigma(980)$ -Teilchen, mit der Masse $m = (980 \pm 10)\text{MeV}$ und der vollen Breite $\Gamma = (40 - 100)\text{MeV}$; dieses Teilchen zerfällt in Pionen und Photonen genau wie das $\sigma(600)$ -Meson - allerdings ist bei $\sigma(980)$ im Gegensatz zu $\sigma(600)$ auch der Zerfall $\sigma(980) \rightarrow K\bar{K}$ registriert worden;
- 2.) das $\sigma(1370)$ -Teilchen [$m_{\sigma(1370)} = (1200 - 1500)\text{MeV}$; $\Gamma = 200 - 500\text{MeV}$]; dieses Teilchen zerfällt hauptsächlich in Pionen;

- 3.) das $\sigma(1500)$ -Teilchen mit der Masse $m_{\sigma(1500)} = (1507 \pm 5)\text{MeV}$ und der vollen Breite $\Gamma = (109 \pm 7)\text{MeV}$; auch dieses Teilchen zerfällt hauptsächlich in Pionen;
 4.) das $\sigma(1710)$ -Meson, mit der Masse $m_{\sigma(1710)} = (1718 \pm 6)\text{MeV}$ und der vollen Breite $\Gamma = (137 \pm 8)\text{MeV}$; dieses Teilchen zerfällt in Kaonen, η -Mesonen und Pionen.

Ladungskonjugation. Hier und in den Abschnitten über die anderen Mesonenarten berufen wir uns auf die Überlegungen aus dem Einführungsabschnitt, in dem die Ladungskonjugation und die G-Parität besprochen wurden. Für die skalaren Mesonen ist dann nach (1.9) $C = 1$ (denn $L = S = 1$), also ist

$$\begin{aligned} C|\sigma\rangle &= |\sigma\rangle \\ C|a_0^0\rangle &= |a_0^0\rangle \\ C|a_0^+\rangle &= |a_0^-\rangle \\ C|a_0^-\rangle &= |a_0^+\rangle. \end{aligned}$$

G-Parität. Nach (1.10) ist

$$\begin{aligned} G|\sigma\rangle &= |\sigma\rangle \\ G|a_0^0\rangle &= -|a_0^0\rangle \\ G|a_0^+\rangle &= -|a_0^+\rangle \\ G|a_0^-\rangle &= -|a_0^-\rangle. \end{aligned}$$

Diese Arbeit wird sich auf das $\sigma(600)$ - und $a_0(980)$ -Teilchen beziehen. Wie aus (1.11) - (1.13) ersichtlich, zerfallen die skalaren Mesonen hauptsächlich in die pseudoskalaren Mesonen und Photonen.

1.4.3 Pseudoskalare Mesonen

Pseudoskalare Mesonen sind das η - und das π -Teilchen; sie sind ebenfalls Spin-0-Teilchen; ihr Drehimpuls ist $L = 0$ und Gesamtdrehimpuls $J = 0$; ihre Parität ist negativ (*pseudoskalare* Teilchen).

Das Pion existiert - wie sein skalares Analogon, das a_0 -Meson - in drei Isospinvarianten: als positiv und negativ geladenes und neutrales Teilchen.

Laut den experimentellen Daten erscheint das geladene Pion als ein Teilchen mit der Masse $m_{\pi^\pm} = (139.57018 \pm 0.00035)\text{ MeV}$ mit der mittleren Lebensdauer $\tau_{\pi^\pm} = (2.6033 \pm 0.0005) \cdot 10^{-8}\text{s}$; für das π^0 -Teilchen wurde die Masse $m_{\pi^0} = (134.9766 \pm 0.0006)\text{ MeV}$ gemessen. Nach den experimentellen Angaben der *Particle Data Group* leben die

geladenen Isospinvarianten dieses Teilchens um den Faktor 10^8 länger als das neutrale Pion: die mittlere Lebensdauer für das π^0 ist $\tau_{\pi^0} = (8.4 \pm 0.6) \cdot 10^{-17}\text{s}$.

Gefunden wurden auch andere Formen des Pions (mit der gleichen Parität und dem gleichen Gesamtdrehimpuls und Isospin wie bei den bisher beschriebenen Pionen): $\pi(1300)$ mit der Masse $m_{\pi(1300)} = (1300 \pm 100)$ MeV (volle Breite Γ von 200 bis 600 MeV) und $\pi(1800) = (1812 \pm 14)\text{MeV}$ [volle Breite $\Gamma = (207 \pm 13)$ MeV].

Die Masse des η -Teilchens beträgt $m_{\eta_{548}} = (547.51 \pm 0.18)$ MeV; die volle Breite Γ ist $\Gamma = (1.30 \pm 0.07)$ keV. Experimentell gefunden ist auch:

- 1.) das η' (958)-Teilchen mit der Masse $m_{\eta'} = (957.78 \pm 0.14)$ MeV und der vollen Breite $\Gamma_{\eta'} = (0.203 \pm 0.016)$ MeV;
- 2.) das $\eta(1295)$ -Teilchen mit der Masse $m_{\eta(1295)} = (1294 \pm 4)$ MeV und der vollen Breite $\Gamma_{\eta(1295)} = (55 \pm 5)$ MeV
- 3.) das $\eta(1405)$ -Teilchen mit der Masse $m_{\eta(1405)} = (1409.8 \pm 2.5)$ MeV und der vollen Breite $\Gamma_{\eta(1405)} = (51.1 \pm 3.4)$ MeV;
- 4.) das $\eta(1475)$ -Teilchen mit der Masse $m_{\eta(1475)} = (1476 \pm 4)$ MeV und der vollen Breite $\Gamma_{\eta(1475)} = (87 \pm 9)$ MeV.

Das π^+ - und π^- -Teilchen zerfallen zu etwa 99.98% in das entsprechend geladene μ -Lepton und das müonische Neutrino:

$$\pi^\pm \longrightarrow \mu^\pm \nu_\mu, \quad (1.14)$$

während das π^0 -Teilchen zu etwa 99.8% in zwei Photonen zerfällt:

$$\pi^0 \longrightarrow 2\gamma. \quad (1.15)$$

Bei dem $\pi(1300)$ -Teilchen wurde der Zerfall auf ein leichteres Pion und ein ρ -Meson beobachtet; bei dem $\pi(1800)$ -Teilchen wurden die Zerfälle $\pi(1800) \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^-$ und $\pi(1800) \rightarrow \eta\eta\pi^-$ beobachtet.

Für das η -Teilchen [$\eta(548)$] ist die Zerfallswahrscheinlichkeit in neutrale Moden mit etwa 72% am höchsten; damit sind die Zerfälle

$$\eta \longrightarrow 2\gamma \quad (1.16)$$

und

$$\eta \longrightarrow 3\pi^0 \quad (1.17)$$

gemeint.

Die relative Häufigkeit für die Zerfälle in geladene Teilchen

$$\eta \longrightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$$

beträgt ungefähr 28%.

Die wahrscheinlichsten Zerfallskanäle für $\eta'(958)$ sind $\eta'(958) \rightarrow \pi^+ \pi^- \eta$ (45%) und $\eta'(958) \rightarrow \rho^0 \gamma$ (30%).

Beim $\eta(1295)$ wurden die Zerfälle $\eta(1295) \rightarrow \eta \pi^+ \pi^-$ und $\eta(1295) \rightarrow a_0(980) \pi$ beobachtet.

Beim $\eta(1405)$ wurden die Zerfälle $\eta(1405) \rightarrow K \bar{K} \pi$ und $\eta(1405) \rightarrow \eta \pi \pi$ beobachtet.

Beim $\eta(1475)$ ist der Zerfall $\eta(1475) \rightarrow K \bar{K} \pi$ dominant.

Ladungskonjugation. Die pseudoskalaren Mesonen haben $L = S = 0$, also ist $C = 1$. Daher ist nach (1.9)

$$\begin{aligned} C |\eta\rangle &= |\eta\rangle \\ C |\pi^0\rangle &= |\pi^0\rangle \\ C |\pi^+\rangle &= |\pi^-\rangle \\ C |\pi^-\rangle &= |\pi^+\rangle. \end{aligned}$$

G-Parität. Nach (1.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} G |\eta\rangle &= |\eta\rangle \\ G |\pi^0\rangle &= -|\pi^0\rangle \\ G |\pi^+\rangle &= -|\pi^+\rangle \\ G |\pi^-\rangle &= -|\pi^-\rangle. \end{aligned}$$

Diese Arbeit wird sich auf das $\eta(548)$ - und das $\pi(140)$ -Teilchen beziehen. Aus (1.14), (1.15), (1.16) und (1.17) ist ersichtlich, dass die pseudoskalaren Mesonen hauptsächlich in Müonen, Photonen und andere pseudoskalare Mesonen [wie beispielsweise $\eta(548)$] zerfallen.

1.4.4 Vektormesonen

Die *Vektor*-Mesonen sind das ω^μ - und das ρ^μ -Teilchen; da sie *Vektormesonen* sind, ist ihr Gesamtdrehimpuls $J = 1$; sie sind Spin-1-Teilchen; ihr Drehimpuls ist $L = 0$ und ihre Parität ist negativ.

Das ρ -Meson ist ein Isospin-Triplett. Laut den experimentellen Befunden beträgt die Masse des ρ -Mesons $m_\rho = (775.5 \pm 0.4)\text{MeV}$ [$\rho(770)$] mit der vollen Breite $\Gamma = (149.4 \pm 1.0)\text{MeV}$ (wir können den Lorentz-Index μ bei dne Vektormesonen in diesem Unterkapitel auslassen - er kommt erst später bei den Betrachtungen zu der Lagrange-Dichte zur Erscheinung). Dieses Vektormeson zerfällt zu fast 100% in zwei Pionen:

$$\rho(770) \longrightarrow \pi \pi. \quad (1.18)$$

Experimentell gefunden wurde auch:

- 1.) das $\rho(1450)$ -Teilchen: $m_{\rho(1450)} = (1459 \pm 11)\text{MeV}$; $\Gamma = (147 \pm 40)\text{MeV}$; dieses Teilchen zerfällt ebenfalls in Pionen;
- 2.) das $\rho(1700)$ -Teilchen mit der Masse $m_{\rho(1700)} = (1720 \pm 20)\text{MeV}$ und der vollen Breite $\Gamma = (250 \pm 100)\text{MeV}$; der dominante Zerfallskanal für dieses Teilchen ist $\rho(1700) \rightarrow \rho\pi\pi$;
- 3.) das $\pi_1(1400)$ -Teilchen mit der Masse $m_{\pi_1(1400)} = (1376 \pm 17)\text{MeV}$ und der vollen Breite $\Gamma = (300 \pm 40)\text{MeV}$; für dieses Teilchen wurde der Zerfallskanal $\pi_1(1400) \rightarrow \eta\pi_0$ beobachtet;
- 4.) das $\pi_1(1600)$ -Teilchen mit der Masse $m_{\pi_1(1600)} = (1653_{-15}^{+18})\text{MeV}$ und der vollen Breite $\Gamma = (225_{-28}^{+45})\text{MeV}$; für dieses Teilchen wurde der Zerfall auf drei (natürlich leichtere) Pionen beobachtet. Die Anzahl der neu entstandenen Pionen muss aus Gründen der Paritätserhaltung ungerade sein (denn nur so ist zu erreichen, dass die Parität im Zerfallskanal so wie im Eingangskanal negativ ist).

Das ω -Meson ist ein Isospin-Singulett. Für dieses Teilchen wurde experimentell die Masse $m_{\omega(782)} = (782.65 \pm 0.12)\text{MeV}$ mit der vollen Breite $\Gamma = (8.49 \pm 0.08)\text{MeV}$ gemessen [$\omega(782)$].

Dieses Teilchen zerfällt zu etwa 89% gemäß

$$\omega(782) \longrightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad (1.19)$$

und zu etwa 9% gemäß

$$\omega(782) \longrightarrow \pi^0 \gamma. \quad (1.20)$$

Der restliche (statistisch vernachlässigbare) Anteil der Zerfallswahrscheinlichkeit beinhaltet andere pseudoskalaren Mesonen und ihre Kombinationen und Leptonen.

Experimentell gefunden wurde auch:

- 1.) das $\phi(1020)$ -Teilchen, das die Masse $m_{\phi(1020)} = (1019.460 \pm 0.019)\text{MeV}$ und die volle Breite $\Gamma = (4.26 \pm 0.05)\text{MeV}$ besitzt sowie hauptsächlich in Kaonen zerfällt;
- 2.) das $\omega(1420)$ -Teilchen, das die Masse $m_{\omega(1420)} = (1400 - 1450)\text{MeV}$ und die volle

Breite $\Gamma = (180 - 250)\text{MeV}$ besitzt; es zerfällt hauptsächlich gemäß $\omega(1420) \rightarrow \rho\pi$;
 3.) das $\omega(1650)$ -Teilchen, das die Masse $m_{\omega(1650)} = (1670 \pm 30)\text{MeV}$ und die volle Breite $\Gamma = (315 \pm 35)\text{MeV}$ besitzt; für dieses Teilchen wurde der Zerfall $\omega(1650) \rightarrow \rho\pi$ beobachtet;
 4.) das $\phi(1680)$ -Teilchen, das die Masse $m_{\phi(1680)} = (1680 \pm 20)\text{MeV}$ und die volle Breite $\Gamma = (150 \pm 50)\text{MeV}$ besitzt; für dieses Teilchen ist der Zerfallskanal $\phi(1680) \rightarrow K\bar{K}$ dominant.

Ladungskonjugation. Nach (1.9) ist wegen $L = 0, S = 1$:

$$\begin{aligned} C|\omega\rangle &= -|\omega\rangle \\ C|\rho^0\rangle &= -|\rho^0\rangle \\ C|\rho^+\rangle &= -|\rho^-\rangle \\ C|\rho^-\rangle &= -|\rho^+\rangle. \end{aligned}$$

G-Parität. Nach (1.10) ist

$$\begin{aligned} G|\omega\rangle &= -|\omega\rangle \\ G|\rho^0\rangle &= |\rho^0\rangle \\ G|\rho^+\rangle &= |\rho^+\rangle \\ G|\rho^-\rangle &= |\rho^-\rangle. \end{aligned}$$

Diese Arbeit wird sich auf das $\omega(782)$ - und $\rho(770)$ -Teilchen beziehen. Wie aus (1.18) - (1.20) ersichtlich, zerfallen die Vektormesonen hauptsächlich in die pseudoskalaren Mesonen (Pionen) und Photonen.

1.4.5 Axialvektorielle Mesonen

Axialvektorielle Mesonen sind das f_1^μ - und das a_1^μ -Teilchen; sie sind - genau wie Vektormesonen - Spin-1-Teilchen; ihr Drehimpuls ist $L = 1$ und Gesamtdrehimpuls $J = 1$; ihre Parität ist aber positiv.

Das a_1^μ -Teilchen [$a_1(1260)$] ist (genau wie das vektorielle ρ^μ -Teilchen) ein Triplet im Isospinraum. Seine Masse beträgt $m_{a_1} = (1230 \pm 40)\text{MeV}$ mit der vollen Breite $\Gamma = (250 - 600)\text{MeV}$ [den Lorentz-Index μ können wir bei den Mesonen in diesem Unterkapitel - wie bei den Vektormesonen - auslassen, da er uns erst später bei der Ankopplung des Feldes an die Matrizen des SU(2)-Raums von Nutzen sein wird]. Für

dieses Teilchen wurde kein dominanter Zerfall festgestellt; beobachtet wurden aber die Reaktionen:

$$a_1 \longrightarrow (\rho\pi)_{S\text{-Welle}}, \quad a_1 \longrightarrow (\rho\pi)_{D\text{-Welle}}; \quad a_1 \longrightarrow \pi\gamma. \quad (1.21)$$

Es wurde auch ein anderes Isospin-Triplett bei den Vektormesonen gefunden: das $b_1(1235)$ -Teilchen mit der Masse $m_{b_1(1235)} = (1229.5 \pm 3.2)\text{MeV}$ und der vollen Breite $\Gamma = (142 \pm 9)\text{MeV}$; der dominante Zerfallskanal für dieses Teilchen ist $b_1(1235) \rightarrow \omega\pi$ mit dem überwiegenden Anteil der s -Amplitude.

Das für dieses Kapitel ebenfalls interessante Isospin-Singulett f_1 besitzt die Energie $m_{f_1} = (1281.8 \pm 0.6)\text{MeV}$ [$f_1(1285)$] und die volle Breite $\Gamma = (24.2 \pm 1.1)\text{MeV}$. Für dieses Teilchen ist mit der relativen Häufigkeit von 52% (mit der nicht unbedeutenden Standardabweichung von $\pm 16\%$):

$$f_1 \longrightarrow \eta\pi\pi \quad (1.22)$$

und - mit der relativen Häufigkeit von etwa 33.1% - ist ebenfalls der Zerfallskanal

$$f_1 \longrightarrow 4\pi \quad (1.23)$$

sowie (mit 9%) der Zerfallskanal

$$f_1 \longrightarrow K\bar{K}\pi$$

vorhanden.

Experimentell gefunden wurden auch folgende axialvektorielle Isospin-Singuletts:

1.) das $h_1(1170)$ -Teilchen mit der Energie $m_{h_1(1170)} = (1170 \pm 20)\text{MeV}$ und der vollen Breite $\Gamma = (360 \pm 40)\text{MeV}$; bei diesem Teilchen wurde der Zerfallskanal $h_1(1170) \rightarrow \rho\pi$ beobachtet

2.) das $f_1(1420)$ -Teilchen mit der Masse $m_{f_1(1420)} = (1426.3 \pm 0.9)\text{MeV}$ und der vollen Breite $\Gamma = (54.9 \pm 2.6)\text{MeV}$; bei diesem Teilchen ist der Zerfallskanal $f_1(1420) \rightarrow K\bar{K}\pi$ dominant.

Ladungskonjugation. Nach (1.9) ist $C = 1$ wegen $L = S = 1$ und also

$$\begin{aligned} C |f_1\rangle &= |f_1\rangle \\ C |a_1^0\rangle &= |a_1^0\rangle \\ C |a_1^+\rangle &= |a_1^-\rangle \\ C |a_1^-\rangle &= |a_1^+\rangle. \end{aligned}$$

G-Parität. Laut (1.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} G|f_1\rangle &= |f_1\rangle \\ G|a_1^0\rangle &= -|a_1^0\rangle \\ G|a_1^+\rangle &= -|a_1^+\rangle \\ G|a_1^-\rangle &= -|a_1^-\rangle. \end{aligned}$$

Diese Arbeit wird sich auf das $f_1(1285)$ - und $a_1(1260)$ -Teilchen beziehen. Wie aus (1.21) - (1.23) ersichtlich, zerfallen die Axialvektormesonen hauptsächlich in die pseudoskalaren und vektoriellen Mesonen.

Anmerkung. Gefunden sind auch Mesonen mit einem höheren Gesamtdrehimpuls als $J = 1$. Diese sind:

- 1.) mit $J = 2$: $f_2(1270)$; $a_2(1320)$; $f_2'(1525)$; $f_2(1950)$; $f_2(2010)$; $f_2(2300)$; $f_2(2340)$ (*Tensormesonen*); $\eta_2(1645)$; $\pi_2(1670)$ (*Pseudotensormesonen*);
- 2.) mit $J = 3$: $\omega_3(1670)$; $\rho_3(1690)$; $\phi_3(1850)$;
- 3.) mit $J = 4$: $a_4(2040)$; $f_4(2050)$.

1.5 Motivation und Gliederung der Arbeit

In dieser Arbeit wird ein effektives Modell zur Beschreibung leichter, skalarer und vektorieller Mesonen (bestehend aus Up- und Down-Quarks) betrachtet. Aus der Lagrange-Dichte für diese mesonischen Teilchen (sie wird in Kapitel 2 konstruiert) werden die Terme extrahiert, die die Wechselwirkung von Pionen (also Goldstone-Bosonen) beschreiben; für diese Wechselwirkung wird die Streuamplitude berechnet (Kapitel 3). Sie wird als Summe von Feynman-Diagrammen auf dem Baumgraphenniveau bis zur zweiten Ordnung im Vakuum bestimmt. In Kapitel 4 wird die berechnete Streuamplitude benutzt, um die s -Wellen-Streulängen der Pion-Pion-Streuung zu berechnen, und es wird ebenfalls überprüft, ob die Streuamplitude an der Schwelle im chiralen Limes verschwindet.

Kapitel 2

Lagrange-Dichte des geeichten linearen Sigma-Modells

Die zentrale Aufgabe in diesem Kapitel ist die Konstruktion der Lagrange-Dichte, in der sowohl die Erhaltung als auch die Brechung (spontane, explizite) der $SU(2)$ -Symmetrie zum Ausdruck kommt. Die Konstruktion des Lagrangians ist ebenfalls eine der zentralen Fragestellungen in dieser Arbeit, da man aus dieser Funktion nach ihrer Konstruktion alle Wechselwirkungen *ablesen* kann, die von Interesse sind (hier: Pion-Pion-Streuung).

Es empfiehlt sich, die Terme bezüglich der skalaren und vektoriellen Mesonen separat zu betrachten (zu konstruieren)¹; der Konstruktion der allgemeinen Form der Lagrange-Dichte folgen dann die expliziten Berechnungen dieser Terme.

2.1 Skalare Mesonen in der Lagrange-Dichte

Eine Möglichkeit, die skalaren Mesonen in eine Struktur einzubinden, ist, die Singulets und Triplets (siehe voriges Kapitel) in die folgende Struktur einzubinden:

$$\Phi = (\sigma + i\eta) t^0 + (\vec{a}_0 + i\vec{\pi}) \cdot \vec{t}. \quad (2.1)$$

Hier ist $t_0 = \frac{1}{2}\mathbf{1}_2$ und $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$ (Generatoren der $SU(2)$ -Gruppe). Für diese Gruppe gilt $t_i = \frac{1}{2}\sigma_i$; σ_i sind die Pauli-Matrizen:

¹Es handelt sich hierbei um leichte Mesonen, die in den Unterkapiteln 1.4.2 - 1.4.5 als für diese Arbeit besonders interessant eingestuft wurden; auf die Einbeziehung von baryonischen Freiheitsgraden in die Lagrange-Dichte wird verzichtet.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}^2$$

Dann wird beispielsweise der Ausdruck

$$-\mu^2 \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi) \tag{2.2}$$

(*der Massenterm*) unter der Transformation

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = U_R^\dagger \Phi U_L \tag{2.3}$$

$[U_{R,L}]$ definiert gemäß (1.3) und (1.4)] invariant bleiben, denn die Symmetrie dieses Terms ist mit Benutzung der zyklischen Vertauschbarkeit innerhalb der Spur schnell bewiesen:

$$\begin{aligned}-\mu^2 \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi) &\equiv -\mu^2 \text{Tr}[(U_R^\dagger \Phi U_L)^\dagger U_R^\dagger \Phi U_L] = -\mu^2 \text{Tr}(U_L^\dagger \Phi^\dagger U_R U_R^\dagger \Phi U_L) \\ &= -\mu^2 \text{Tr}(U_L U_L^\dagger \Phi^\dagger \Phi) = -\mu^2 \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi).\end{aligned}$$

Dann sind aber die Terme

$$-\lambda \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi)^2 \tag{2.4}$$

und

$$-\lambda_1 [\text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi)]^2 \tag{2.5}$$

[(2.4) und (2.5) beschreiben die skalarmesonische Selbstwechselwirkung] ebenfalls chiral symmetrisch.

²Es gilt $[t_a, t_b] = i\epsilon_{abc}t_c$ für $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$. Die Antikommutator-Gleichung gilt sogar für $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3\}$, wenn wir vereinbaren, dass der ϵ -Tensor den Wert Null hat, falls einer oder mehrere seiner Indizes diesen Wert haben. Für die Indizes $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3\}$ gilt dazu auch $\text{Tr}(t_a t_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ und $\{t_a, t_b\} = \frac{1}{2}\delta_{ab}\mathbf{1}_2$.

Darüber hinaus kann ein kinetischer Term von der Form

$$\text{Tr}[(D^\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)] \quad (2.6)$$

definiert werden. Damit der kinetische Term transformationsinvariant wird, muss die Ableitung D^μ in diesem Term so definiert werden, dass sie sich lokal kovariant transformiert, was durch

$$\begin{aligned} D^\mu\Phi &= \partial^\mu\Phi + ig(\Phi A_l^\mu - A_r^\mu\Phi) \\ (D^\mu\Phi)^\dagger &= \partial_\mu\Phi^\dagger - ig(A_{\mu l}\Phi^\dagger - \Phi^\dagger A_{\mu r}) \end{aligned}$$

erreicht wird. Dann werden aber in der kovarianten Ableitung die skalaren und die vektoriellen Mesonen miteinander gemischt, denn A_l^μ und A_r^μ sind als

$$A_{l,r}^\mu = (\omega^\mu \pm f_1^\mu) t^0 + (\vec{\rho}^\mu \pm \vec{a}_1^\mu) \cdot \vec{t}, \quad (2.7)$$

definiert³, wobei A_r^μ mit dem positiven Vorzeichen bei den axialvektoriellen Mesonen definiert ist.

$D^\mu\Phi$ transformiert sich dann in der Tat kovariant, denn (im nachfolgenden Beweis wird (2.3) sowie

$$A_{l,r}^\mu \longrightarrow A_{l,r}'^\mu = U_{L,R}^\dagger (A_{l,r}^\mu + ig^{-1}\partial_\mu) U_{L,R} \quad (2.8)$$

benutzt⁴):

$$\begin{aligned} (D^\mu\Phi)' &= \partial^\mu(U_R^\dagger\Phi U_L) + ig[U_R^\dagger\Phi U_L U_L^\dagger (A_l^\mu + ig^{-1}\partial^\mu) U_L - U_R^\dagger (A_r^\mu + ig^{-1}\partial^\mu) U_R \cdot \\ &\quad \cdot U_R^\dagger\Phi U_L] \\ &= U_R^\dagger\partial^\mu\Phi U_L + \partial^\mu U_R^\dagger\Phi U_L + U_R^\dagger\Phi\partial^\mu U_L + ig(U_R^\dagger\Phi A_l^\mu U_L - U_R^\dagger A_r^\mu\Phi U_L) \\ &\quad + ig \cdot ig^{-1}(U_R^\dagger\Phi\partial^\mu U_L + \partial^\mu U_R^\dagger\Phi U_L) \\ &= U_R^\dagger D^\mu\Phi U_L + \partial^\mu U_R^\dagger\Phi U_L + U_R^\dagger\Phi\partial^\mu U_L - (U_R^\dagger\Phi\partial^\mu U_L + \partial^\mu U_R^\dagger\Phi U_L) \\ &= U_R^\dagger D^\mu\Phi U_L. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Gemäß (2.9) ist klarerweise

$$[(D^\mu\Phi)^\dagger]' = U_L^\dagger(D^\mu\Phi)^\dagger U_R,$$

³In (2.7) sind die vektoriellen Mesonen in eine Struktur zusammengefasst, die der Struktur von (2.1) formal entspricht.

⁴Es wird ebenfalls die Relation $\partial^\mu U^\dagger U = -U^\dagger \partial^\mu U$ benutzt, die bekanntlich aus $0 = \partial^\mu(U^\dagger U) = \partial^\mu U^\dagger U + U^\dagger \partial^\mu U$ folgt.

so dass wir für den Term unter der Spur

$$\text{Tr}\{[(D^\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)]'\} = \text{Tr}[U_L^\dagger(D^\mu\Phi)^\dagger U_R U_R^\dagger D^\mu\Phi U_L]$$

erhalten, was unter der Benutzung der Unitarität des Operators U und der zyklischen Vertauschbarkeit innerhalb der Spur zu

$$\text{Tr}\{[(D^\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)]'\} = \text{Tr}[(D^\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi]$$

führt. *Damit ist die lokale Eichinvarianz des kinetischen Terms bewiesen.*

2.1.1 Symmetriebrechungsterme in der Lagrange-Dichte \mathcal{L}

Wir haben in Kapitel 1.3 gesehen, dass die **chirale Anomalie** (1.7) dazu führt, dass die $U(N_f)_V \times U(N_f)_A$ -Symmetrie⁵ der QCD selbst bei verschwindenden Quarkmassen zu $U(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ gebrochen wird [oder zu $SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A$, wenn die baryonenzahlerhaltende $U(1)_V$ -Phase unterdrückt wird]. Nun kann die chirale Anomalie durch den Term

$$c(\det\Phi + \det\Phi^\dagger) \tag{2.10}$$

beschrieben werden. Um dies zu beweisen, definieren wir zunächst in Anbetracht von (1.5) und (1.6) die Parameter für $U(N_f)_V$ - und $U(N_f)_A$ -Symmetrietransformationen so, dass

$$\alpha_V^a = \frac{\alpha_R^a + \alpha_L^a}{2}, \quad \alpha_A^a = \frac{\alpha_R^a - \alpha_L^a}{2}$$

oder

$$\alpha_R^a = \frac{\alpha_V^a + \alpha_A^a}{2}, \quad \alpha_L^a = \frac{\alpha_V^a - \alpha_A^a}{2} \tag{2.11}$$

ist [$\alpha_{R,L}^a$ sind die Gruppenparameter in den schon definierten Operatoren aus (1.3) und (1.4)].

Dann ergibt sich mit der bekannten Transformationseigenschaft (2.3) von Φ und mit (2.11):

$$\begin{aligned} c(\det\Phi' + \det\Phi'^\dagger) &= c[\det(U_R^\dagger\Phi U_L) + \det(U_L^\dagger\Phi^\dagger U_R)] \\ &\equiv c\{\det[\exp(i\frac{\alpha_V^a + \alpha_A^a}{2}t_a)\Phi \exp(-i\frac{\alpha_V^a - \alpha_A^a}{2}t_a)] \\ &\quad + \det[\exp(i\frac{\alpha_V^a - \alpha_A^a}{2}t_a)\Phi^\dagger \exp(-i\frac{\alpha_V^a + \alpha_A^a}{2}t_a)]\} \\ &= c\{\det[\exp(i\alpha_A^a t_a)\Phi] + \det[\exp(-i\alpha_A^a t_a)\Phi^\dagger]\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

⁵In dem Modell in dieser Arbeit ist $N_f = 2$.

Da alle die Determinanten aller Elemente einer speziellen unitären Gruppe den Wert 1 haben, bleibt in (2.12):

$$c(\det\Phi' + \det\Phi'^{\dagger}) = c\{\det[\exp(i\alpha_A^0 t_0)\Phi] + \det[\exp(-i\alpha_A^0 t_0)\Phi^{\dagger}]\}.$$

Somit ist (2.10) (zumindest) nicht $U(1)_A$ -invariant. Dass (2.10) tatsächlich die chirale Anomalie beschreibt, hat 't Hooft [15] gezeigt.

Die Goldstone-Bosonen der QCD sind die Pionen - Teilchen, die *nicht* masselos sind. Diese **explizite Brechung** der $U(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ -Symmetrie wird durch den Term

$$\text{Tr}[H(\Phi + \Phi^{\dagger})] \quad (2.13)$$

beschrieben.

Im Allgemeinen besitzt der Vorfaktor H die Form $H = h_a t^a$ - dadurch wird der Lagrangian gewissermaßen in die Richtung einer oder mehrerer Komponenten des vierdimensionalen Φ^a -Feldes gekippt⁶ (als dieses Feld wird in dieser Arbeit das σ^{μ} -Feld gewählt, dessen Komponenten das σ -Singulett und das \vec{a}_0 -Triplet sind). Die Auswahl der Komponente wird durch die Festsetzung des Faktors h_a durchgeführt.

Nun ist im Modell in dieser Arbeit $a = 0, 1, 2, 3$ oder $H = h_0 t^0 + h_1 t^1 + h_2 t^2 + h_3 t^3$.

Ist dann $h_0 \neq 0$, so ist die Symmetrie durch den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert (VEV) des σ -Teilchens gebrochen ($\langle\sigma\rangle \neq 0$); und da wir im Kapitel 2.4 sehen werden, dass dieses Teilchen einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert *besitzen kann*, so setzen wir (wie schon gesagt) $h_0 \neq 0$.

Die restlichen drei Faktoren $h_{1,2,3}$ beziehen sich auf das \vec{a}_0 -Triplet; da das Triplet auch geladene a_0^+ - und a_0^- -Teilchen besitzt und für diese somit $\langle a_0^{\pm} \rangle = 0$ gelten muss, wählen wir für zu ihnen korrespondierenden Faktoren: $h_{1,2} = 0$. Es würde sich also für den zu a_0^0 entsprechenden Parameter $h_3 \neq 0$ anbieten; in unserem Modell kann man aber doch $h_3 = 0$ wählen, da auch dieses Teilchen - wie wir weiter unten sehen werden - keinen Vakuumerwartungswert besitzt⁷.

Anmerkung. Die gleiche Möglichkeit einer Symmetriebrechung besteht auch im Fall einer höheren Anzahl von Quark-Flavours: man könnte auch weiterhin den Term $\text{Tr}[H(\Phi + \Phi^{\dagger})]$ mit $H = h_a t^a$ benutzen und beispielsweise bei dem $SU(4)$ -Modell den Parameter $H = h_0 t^0 + h_8 t^8 + h_{15} t^{15}$ nehmen.

⁶ H ist analog zu dem Maasenterm in dem QCD-Lagrangian, da per Definition $\Phi \sim \bar{q}q$ ist.

⁷Bei $\langle a_0^0 \rangle \neq 0$ wäre die Isospin-Symmetrie des Vakuums verletzt.

2.2 Vektorielle Mesonen in der Lagrange-Dichte

Nun kommen wir zu den Termen, die die vektoriellen und axialvektoriellen Mesonen beinhalten. Neben dem Term (2.7) werden die Feldstärketensoren

$$F_{l,r}^{\mu\nu} = \partial^\mu A_{l,r}^\nu - \partial^\nu A_{l,r}^\mu - ig[A_{l,r}^\mu, A_{l,r}^\nu] \quad (2.14)$$

definiert.

Aus (2.8) folgt dann, dass sich die Feldstärketensoren (2.14) auf diese Weise transformieren:

$$F_{l,r}^{\mu\nu} \longrightarrow F_{l,r}'^{\mu\nu} = U_{L,R}^\dagger F_{l,r}^{\mu\nu} U_{L,R}. \quad (2.15)$$

Dann ist aber der Term

$$-\frac{1}{4} \text{Tr}[(F_l^{\mu\nu})^2 + (F_r^{\mu\nu})^2] \quad (2.16)$$

offensichtlich symmetrisch (der Beweis folgt analog zu dem Symmetriebeweis für den kinetischen Term $\text{Tr}[(D^\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi]$).

Für die Lagrange-Dichte in dieser Arbeit ist noch der Massenterm der Vektorbosonen

$$\frac{m^2}{2} \text{Tr}[(A_l^\mu)^2 + (A_r^\mu)^2]. \quad (2.17)$$

von Bedeutung [gemäß (2.8) bricht er die bislang lokale QCD-Symmetrie zu einer globalen].

Mit (2.2), (2.4), (2.5), (2.6), (2.10), (2.13), (2.16) und (2.17) ergibt sich schließlich die folgende **Lagrange-Dichte** für das in dieser Arbeit zu betrachtende Modell:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \text{Tr}[(D^\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)] - \mu^2\text{Tr}(\Phi^\dagger\Phi) - \lambda\text{Tr}(\Phi^\dagger\Phi)^2 - \lambda_1[\text{Tr}(\Phi^\dagger\Phi)]^2 \\ & - \frac{1}{4} \text{Tr}[(F_l^{\mu\nu})^2 + (F_r^{\mu\nu})^2] + \frac{m^2}{2} \text{Tr}[(A_l^\mu)^2 + (A_r^\mu)^2] + \text{Tr}[H(\Phi + \Phi^\dagger)] \\ & + c(\det \Phi + \det \Phi^\dagger). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nun können wir mit der Berechnung der einzelnen Terme anfangen.

2.3 Berechnung der Terme in der Lagrange-Dichte \mathcal{L}

2.3.1 Der kinetische Term $\text{Tr}[(D^\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)]$

Ausgeschrieben lautet dieser Term

$$\text{Tr}[(D^\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)] = \text{Tr}\{[\partial^\mu\Phi + ig(\Phi A_l^\mu - A_r^\mu\Phi)]^\dagger[\partial^\mu\Phi + ig(\Phi A_l^\mu - A_r^\mu\Phi)]\}.$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} D^\mu\Phi &= (\partial^\mu\sigma + i\partial^\mu\eta)t^0 + (\partial^\mu a_0^j + i\partial^\mu\pi^j)t^j - ig[f_1^\mu(\sigma + i\eta)t^0 + f_1^\mu(a_0^j + i\pi^j)t^j \\ &\quad + a_1^{\mu j}(\sigma + i\eta)t^j - (a_0^j + i\pi^j)(i\epsilon^{jip}\rho^{\mu i}t^p - a_1^{\mu i}\delta^{ij}t^0)] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (D^\mu\Phi)^\dagger &= (\partial_\mu\sigma - i\partial_\mu\eta)t^0 + (\partial_\mu a_0^j - i\partial_\mu\pi^j)t^j + ig[f_1^\mu(\sigma - i\eta)t^0 \\ &\quad + f_1^\mu(a_0^j - i\pi^j)t^j + a_1^{\mu j}(\sigma - i\eta)t^j - (a_0^j - i\pi^j)(-i\epsilon^{jip}\rho^{\mu i}t^p - a_1^{\mu i}\delta^{ij}t^0)]. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(D^\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)] &= \frac{1}{2}[(\partial^\mu\sigma)^2 + (\partial^\mu\eta)^2 + (\partial^\mu\vec{a}_0)^2 + (\partial^\mu\vec{\pi}_0)^2] \\ &\quad - g[f_1^\mu(\sigma\partial_\mu\eta - \eta\partial_\mu\sigma + \partial_\mu\vec{\pi} \cdot \vec{a}_0 - \partial_\mu\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}) \\ &\quad + \vec{a}_1^\mu \cdot (\vec{a}_0\partial_\mu\eta - \vec{\pi}\partial_\mu\sigma + \sigma\partial_\mu\vec{\pi} - \eta\partial_\mu\vec{a}_0) + \vec{\rho}^\mu \cdot (\partial_\mu\vec{a}_0 \times \vec{a}_0 + \partial_\mu\vec{\pi} \times \vec{\pi})] \\ &\quad + \frac{g^2}{2}\{(\sigma^2 + \eta^2)[(f_1^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu)^2] + (\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu)^2 + (\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu)^2 + (\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0)^2 \\ &\quad + (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi})^2 + (f_1^\mu)^2(\vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) + 4f_1^\mu\vec{a}_{1\mu} \cdot (\sigma\vec{a}_0 + \eta\vec{\pi}) + 4f_1^\mu\vec{\rho}_\mu \cdot (\vec{a}_0 \times \vec{\pi}) \\ &\quad + 2\vec{a}_1^\mu \cdot (\sigma\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu - \eta\vec{a}_0 \times \vec{\rho}_\mu)\} \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(D^\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)] &= \frac{1}{2}[\partial^\mu\sigma + g(\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta f_1^\mu)]^2 + \frac{1}{2}[\partial^\mu\eta - g(\sigma f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}[\partial^\mu\vec{a}_0 + g(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta\vec{a}_1^\mu + f_1^\mu\vec{\pi})]^2 + \frac{1}{2}[\partial^\mu\vec{\pi} - g(\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + \sigma\vec{a}_1^\mu + f_1^\mu\vec{a}_0)]^2. \end{aligned}$$

2.3.2 Der Massenterm $-\mu^2\text{Tr}(\Phi^\dagger\Phi)$

Da die Ankopplung Φ der skalaren Mesonen in (2.1) definiert wurde, berechnet sich $-\mu^2\text{Tr}(\Phi^\dagger\Phi)$ leicht zu

$$-\mu^2\text{Tr}(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{-\mu^2}{2}(\sigma^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2). \quad (2.19)$$

2.3.3 Der Skalarmesonon-Selbstwechselwirkungsterm $-\lambda \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi)^2$

Der Term $\text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi)^2$ ist proportional zu $\text{Tr}(\Phi^4)$ und enthält daher das Produkt von vier Matrizen aus der Menge, die die $SU(2)$ -Generatoren $t^i, i = 1, 2, 3$ und das Einheitsselement t^0 enthält. Bei der Berechnung dieses Terms benutzen wir die folgenden Gleichungen für die Spur ($a, b, c = 0, 1, 2, 3; i, j, k, l = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}\text{Tr}(t^a t^b) &= \frac{1}{2} \delta^{ab} \\ \text{Tr}(t^i t^j t^k) &= \frac{i}{4} \epsilon^{ijk} \\ \text{Tr}(t^i t^j t^k t^l) &= \frac{1}{8} \delta^{ij} \delta^{kl} + \frac{1}{8} \delta^{il} \delta^{jk} - \frac{1}{8} \delta^{ik} \delta^{jl}.\end{aligned}$$

Ausgeschrieben lautet $\text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi)^2$:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi)^2 &= (\sigma^2 + \eta^2)^2 (t^0)^4 + \frac{1}{4} (\sigma^2 + \eta^2) (a_0^l + i\pi^l) (a_0^m - i\pi^m) \text{Tr}(t^l t^m) \\ &+ \frac{1}{4} (\sigma + i\eta)^2 (a_0^j - i\pi^j) (a_0^l - i\pi^l) \text{Tr}(t^j t^l) + \frac{1}{4} (\sigma + i\eta) (a_0^j - i\pi^j) \\ &\times (a_0^l + i\pi^l) (\sigma - i\eta) \text{Tr}(t^j t^l) + \frac{1}{2} (\sigma + i\eta) (a_0^j - i\pi^j) (a_0^l + i\pi^l) (a_0^m - i\pi^m) \text{Tr}(t^j t^l t^m) \\ &+ \frac{1}{4} (\sigma^2 + \eta^2) (a_0^j + i\pi^j) (a_0^l - i\pi^l) \text{Tr}(t^j t^l) + \frac{1}{4} (a_0^j + i\pi^j) (a_0^l + i\pi^l) (\sigma - i\eta)^2 \text{Tr}(t^j t^l) \\ &+ \frac{1}{2} (a_0^j + i\pi^j) (\sigma - i\eta) (a_0^l + i\pi^l) (a_0^m - i\pi^m) \text{Tr}(t^j t^l t^m) \\ &+ \frac{1}{4} (a_0^j + i\pi^j) (a_0^k - i\pi^k) (\sigma^2 + \eta^2) \text{Tr}(t^j t^k) + \frac{1}{2} (a_0^j + i\pi^j) (a_0^k - i\pi^k) (\sigma + i\eta) \\ &\times (a_0^l - i\pi^l) \text{Tr}(t^j t^k t^l) + \frac{1}{2} (a_0^j + i\pi^j) (a_0^k - i\pi^k) (a_0^l + i\pi^l) (\sigma - i\eta) \text{Tr}(t^j t^k t^l) \\ &+ (a_0^j + i\pi^j) (a_0^k - i\pi^k) (a_0^l + i\pi^l) (a_0^m - i\pi^m) \text{Tr}(t^j t^k t^l t^m).\end{aligned}$$

Mithilfe der obigen Formeln für die Spur ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}-\lambda \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi)^2 &= \frac{-\lambda}{8} [\sigma^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + \eta^4 + (\vec{\pi}^2)^2 + 2\sigma^2 \eta^2 + 2\eta^2 \vec{a}_0^2 + 2\sigma^2 \vec{\pi}^2 \\ &- 4(\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 + 6\sigma^2 \vec{a}_0^2 + 6\eta^2 \vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2 \vec{\pi}^2 + 8\sigma\eta \vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}].\end{aligned}$$

2.3.4 Der Skalarmesonon-Selbstwechselwirkungsterm $-\lambda_1[\mathrm{Tr}(\Phi^\dagger\Phi)]^2$

Da wir $\mathrm{Tr}(\Phi^\dagger\Phi)$ in (2.19) schon bestimmt haben, berechnet sich $-\lambda_1[\mathrm{Tr}(\Phi^\dagger\Phi)]^2$ klarerweise zu

$$-\lambda_1[\mathrm{Tr}(\Phi^\dagger\Phi)]^2 = \frac{-\lambda_1}{4}(\sigma^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)^2.$$

2.3.5 Der Feldstärketensoren-Term $-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[(F_l^{\mu\nu})^2 + (F_r^{\mu\nu})^2]$

$F_{l,r}^{\mu\nu}$ ergibt sich mit (2.7) und (2.14) zu

$$F_l^{\mu\nu} = \{(\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu + \partial^\nu f_1^\mu - \partial^\mu f_1^\nu)t^0 + (\partial^\mu\rho^{\nu j} - \partial^\nu\rho^{\mu j} + \partial^\nu a_1^{\mu j} - \partial^\mu a_1^{\nu j})t^j - ig(\rho^{\mu j} - a_1^{\mu j})(\rho^{\nu k} - a_1^{\nu k})[t^j, t^k]\}$$

und

$$F_r^{\mu\nu} = \{(\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu + \partial^\mu f_1^\nu - \partial^\nu f_1^\mu)t^0 + (\partial^\mu\rho^{\nu j} - \partial^\nu\rho^{\mu j} + \partial^\mu a_1^{\nu j} - \partial^\nu a_1^{\mu j})t^j - ig(\rho^{\mu j} + a_1^{\mu j})(\rho^{\nu k} + a_1^{\nu k})[t^j, t^k]\}$$

(es gilt bekanntlich $[t^j, t^k] = i\epsilon^{jkl}t^l$).

Da man für die Berechnung der angegebenen Spur im Lagrangian die Feldstärketensoren $F_{l,r}^{\mu\nu}$ quadrieren muss und da jeder von diesen Tensoren einen ϵ -Tensor ϵ^{jkl} beinhaltet, stoßen wir auf das Tensor-Produkt

$$\epsilon^{jkl}\epsilon^{lmn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}.$$

Daher lautet das Ergebnis

$$-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[(F_l^{\mu\nu})^2 + (F_r^{\mu\nu})^2] = -\frac{1}{4}\{(\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu)^2 + (\partial^\mu f_1^\nu - \partial^\nu f_1^\mu)^2 + [\partial^\mu\vec{\rho}^\nu - \partial^\nu\vec{\rho}^\mu + g(\vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu + \vec{a}_1^\mu \times \vec{a}_1^\nu)]^2 + [\partial^\mu\vec{a}_1^\nu - \partial^\nu\vec{a}_1^\mu + g(\vec{a}_1^\mu \times \vec{\rho}^\nu + \vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_1^\nu)]^2\}.$$

2.3.6 Der Vektormesonon-Massenterm $\frac{m^2}{2} \text{Tr}[(A_l^\mu)^2 + (A_r^\mu)^2]$

Mit (2.7) ergibt sich $(A_l^\mu)^2$ zu

$$(A_l^\mu)^2 = (\omega^\mu - f_1^\mu)^2 (t^0)^2 + (\rho_\mu^j - a_{\mu 1}^j)(\rho^{\mu k} - a_1^{\mu k}) t^j t^k$$

und $(A_r^\mu)^2$ zu

$$(A_r^\mu)^2 = (\omega^\mu + f_1^\mu)^2 (t^0)^2 + (\rho_\mu^j + a_{\mu 1}^j)(\rho^{\mu k} + a_1^{\mu k}) t^j t^k.$$

Mit den bekannten Formeln für die Spur der SU(2)-Generatoren und des Einheits-elementes t^0 ergibt sich dann

$$\frac{m^2}{2} \text{Tr}[(A_l^\mu)^2 + (A_r^\mu)^2] = \frac{m^2}{2} [(\omega^\mu)^2 + (f_1^\mu)^2 + (\vec{\rho}^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu)^2].$$

2.3.7 Der explizit symmetriebrechende Term $\text{Tr}[H(\Phi + \Phi^\dagger)]$

Mit (2.1) und $H = h_0 t_0$ ergibt sich

$$\Phi + \Phi^\dagger = 2\sigma t^0 + 2\vec{a}_0 \cdot \vec{t} \implies \text{Tr}[H(\Phi + \Phi^\dagger)] = h_0 \sigma, \quad (2.20)$$

da die SU(2)-Generatoren keine Spur besitzen.

2.3.8 Der $U(1)_A$ -Anomalie-Term $c(\det\Phi + \det\Phi^\dagger)$

Mit der Definition (2.1) ergibt sich

$$\det\Phi = \frac{1}{4} [(\sigma + i\eta)^2 - (a_0^j + i\pi^j)^2]$$

und

$$\det\Phi^\dagger = \frac{1}{4} [(\sigma - i\eta)^2 - (a_0^j - i\pi^j)^2]$$

Daher ist

$$c(\det\Phi + \det\Phi^\dagger) = \frac{1}{2} c(\sigma^2 - \eta^2 - \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2).$$

Damit sind alle Terme aus der Lagrange-Dichte \mathcal{L} (2.18) berechnet worden.

2.4 Lagrangedichte \mathcal{L} und spontane Symmetriebrechung

Um die Symmetrie spontan zu brechen, müssen wir das Vorzeichen des Massenparameters für die skalaren Mesonen ändern; danach wird das Potential (Potentialdichte) \mathcal{V} identifiziert.

Dazu schreiben wir zunächst die Lagrange-Dichte \mathcal{L} (2.18) unter Benutzung aller im vorherigen Abschnitt 2.3 hergeleiteten Terme folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma)^2 + g\partial_\mu \sigma(\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta f_1^\mu) + \frac{g^2}{2}(\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta f_1^\mu)^2 \\
& + \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta)^2 - g\partial_\mu \eta(\sigma f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu) + \frac{g^2}{2}(\sigma f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu)^2 \\
& + \frac{1}{2}(\partial^\mu \vec{a}_0)^2 + g\partial_\mu \vec{a}_0 \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi}) + \frac{g^2}{2}(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi})^2 \\
& + \frac{1}{2}(\partial^\mu \vec{\pi})^2 - g\partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + \sigma \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0) + \frac{g^2}{2}(\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + \sigma \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0)^2 \\
& - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) \\
& - \frac{\lambda}{8}[\sigma^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + \eta^4 + (\vec{\pi}^2)^2 + 2\sigma^2\eta^2 + 2\eta^2\vec{a}_0^2 + 2\sigma^2\vec{\pi}^2 - 4(\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 + 6\sigma^2\vec{a}_0^2 + 6\eta^2\vec{\pi}^2 \\
& + 6\vec{a}_0^2\vec{\pi}^2 + 8\sigma\eta\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}] \\
& - \frac{\lambda_1}{4}(\sigma^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)^2 \\
& - \frac{1}{4}(\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial^\mu f_1^\nu - \partial^\nu f_1^\mu)^2 \\
& - \frac{1}{4}(\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu)^2 - \frac{g}{2}(\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu) \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu + \vec{a}_1^\mu \times \vec{a}_1^\nu) - \frac{g^2}{4}(\vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu + \vec{a}_1^\mu \times \vec{a}_1^\nu)^2 \\
& - \frac{1}{4}(\partial^\mu \vec{a}_1^\nu - \partial^\nu \vec{a}_1^\mu)^2 - \frac{g}{2}(\partial_\mu \vec{a}_{1\nu} - \partial_\nu \vec{a}_{1\mu}) \cdot (\vec{a}_1^\mu \times \vec{\rho}^\nu + \vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_1^\nu) - \frac{g^2}{4}(\vec{a}_1^\mu \times \vec{\rho}^\nu + \vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_1^\nu)^2 \\
& + \frac{m^2}{2}[(\omega^\mu)^2 + (f_1^\mu)^2 + (\vec{\rho}^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu)^2] + h_0\sigma + \frac{1}{2}c(\sigma^2 - \eta^2 - \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2).
\end{aligned}$$

Die unterstrichenen Terme bilden die *negative*⁸ Potentialdichte \mathcal{V} - sie beinhalten

⁸Die Lagrangedichte ist die *Differenz* der kinetischen Energiedichte \mathcal{T} und der Potentialdichte \mathcal{V} : $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$.

keinerlei Teilchen mit einem Impuls, also keine Terme mit der Ableitung $\partial_\mu \longleftrightarrow -iP_\mu$.

Nun müssen wir - um die spontane Symmetriebrechung zu erreichen - einen **positiven** Vorfaktor (Massenparameter) bei dem Massenterm besitzen, beziehungsweise wir ändern

$$-\frac{\mu^2}{2} \rightarrow \frac{\mu^2}{2}$$

ab.

Daher lautet die sich aus der Lagrangedichte ergebende *Potentialdichte*:

$$\begin{aligned} -\mathcal{V} = & \frac{g^2}{2}(\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta f_1^\mu)^2 + \frac{g^2}{2}(\sigma f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu)^2 + \frac{g^2}{2}(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi})^2 \\ & + \frac{g^2}{2}(\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + \sigma \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0)^2 + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) \\ & - \frac{\lambda}{8}[\sigma^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + \eta^4 + (\vec{\pi}^2)^2 + 2\sigma^2\eta^2 + 2\eta^2\vec{a}_0^2 + 2\sigma^2\vec{\pi}^2 - 4(\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 + 6\sigma^2\vec{a}_0^2 \\ & + 6\eta^2\vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2\vec{\pi}^2 + 8\sigma\eta\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}] \\ & - \frac{\lambda_1}{4}(\sigma^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)^2 - \frac{g^2}{4}(\vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu + \vec{a}_1^\mu \times \vec{a}_1^\nu)^2 \\ & - \frac{g^2}{4}(\vec{a}_1^\mu \times \vec{\rho}^\nu + \vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_1^\nu)^2 + \frac{m^2}{2}[(\omega^\mu)^2 + (f_1^\mu)^2 + (\vec{\rho}^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu)^2] \\ & + h_0\sigma + \frac{1}{2}c(\sigma^2 - \eta^2 - \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun *den Vakuumerwartungswert (VEV) der Potentialdichte \mathcal{V}* (den wir ebenfalls mit \mathcal{V} bezeichnen können) und berufen uns auf die in den vorherigen Abschnitten besprochenen Eigenschaften der Mesonen.

Dann ist das σ -Teilchen das einzige, das einen Vakuumerwartungswert besitzen kann; andere Teilchen besitzen keinen VEV, da die Eigenschaften des Vakuums (wie beispielsweise Gesamt-Spin, Isospin, Parität oder Ladung) ansonsten verletzt würden. Die Teilchen mit nichtverschwindendem Isospin ($\vec{a}_0, \vec{\pi}, \vec{\rho}, \vec{a}_1$) können bekanntlich keinen Vakuumerwartungswert besitzen, da dies die Vakuum-Isospinsymmetrie verletzen würde; es kommen also ausschließlich Isospin-Singulets in Betracht ($\sigma, \eta, \omega, f_1$). Das pseudoskalare η -Teilchen kann nicht berücksichtigt werden, da es negative Parität besitzt; die vektoriellen Mesonen ω und f_1 besitzen Spin 1, und ihr nichtverschwindender Vakuumerwartungswert würde daher den Vakuum-Spin verletzen. Es bleibt also nur das σ -Teilchen, dessen Parität (positiv), Gesamtspin (Null), Isospin (Null), Ladungskonjugation (Null), sogar die G-Parität (positiv) als relevante Quantenzahlen den Quantenzahlen des Vakuums entsprechen und das - genau wie das Vakuum - auch keine Ladung

besitzt.

Dies bedeutet dann, dass wir bei der Berechnung des Minimums von \mathcal{V} ausschließlich die Terme berücksichtigen müssen, die nur die σ -Wellenfunktion beinhalten; bezeichnen wir den Vakuumerwartungswert für das σ -Feld als ϕ , so ergibt sich:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\phi} = \frac{\partial(-\mathcal{V})}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\phi} = \mu^2 \phi - \frac{\lambda}{2} \phi^3 - \lambda_1 \phi^3 + c\phi + h_0,$$

also

$$0 \stackrel{!}{=} -\left(\frac{\lambda}{2} + \lambda_1\right)\phi^3 + (\mu^2 + c)\phi + h_0. \quad (2.21)$$

Diese Gleichung lässt sich über die Cardano-Formel lösen:

$$\begin{aligned} \phi = & \sqrt[3]{\frac{h_0}{\lambda + 2\lambda_1} + \sqrt{\frac{27h_0^2(\lambda + 8\lambda_1) - 8(\mu^2 + c)^3}{27(\lambda + 2\lambda_1)^3}}} \\ & + \sqrt[3]{\frac{h_0}{\lambda + 2\lambda_1} - \sqrt{\frac{27h_0^2(\lambda + 8\lambda_1) - 8(\mu^2 + c)^3}{27(\lambda + 2\lambda_1)^3}}}; \end{aligned}$$

allerdings wird uns die obige Bestimmungsgleichung für das Minimum (2.21) - wie wir noch sehen werden - in der folgenden Berechnung der Lagrangedichte von größerer Bedeutung sein.

Jetzt können wir uns die Anregungen um den (konstanten) Vakuumerwartungswert ϕ des Sigma-Teilchens (die wir mit σ bezeichnen können) anschauen - im Lagrangian \mathcal{L} wird das σ -Feld um seinen Vakuumerwartungswert verschoben:

$$\sigma \longrightarrow \sigma + \phi.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_{\sigma \rightarrow \sigma + \phi} = & \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma)^2 + g \partial_\mu \sigma (\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta f_1^\mu) + \frac{g^2}{2} (\vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + \eta f_1^\mu)^2 \\ & + \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta)^2 - g \partial_\mu \eta [(\sigma + \phi) f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu] + \frac{g^2}{2} [(\sigma + \phi) f_1^\mu + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1^\mu]^2 \\ & + \frac{1}{2} [\partial^\mu \vec{a}_0 + g(\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{\pi})]^2 \\ & + \frac{1}{2} (\partial^\mu \vec{\pi})^2 - g \partial_\mu \vec{\pi} \cdot [\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma + \phi) \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0] + \frac{g^2}{2} [\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma + \phi) \vec{a}_1^\mu + f_1^\mu \vec{a}_0]^2 \\ & + \frac{\mu^2}{2} [(\sigma + \phi)^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\lambda}{8} [(\sigma + \phi)^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + \eta^4 + (\vec{\pi}^2)^2 + 2(\sigma + \phi)^2 \eta^2 + 2\eta^2 \vec{a}_0^2 + 2(\sigma + \phi)^2 \vec{\pi}^2 - 4(\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 \\
 & + 6(\sigma + \phi)^2 \vec{a}_0^2 + 6\eta^2 \vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2 \vec{\pi}^2 + 8(\sigma + \phi)\eta \vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}] \\
 & -\frac{\lambda_1}{4} [(\sigma + \phi)^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2]^2 \\
 & -\frac{1}{4} (\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu)^2 - \frac{1}{4} (\partial^\mu f_1^\nu - \partial^\nu f_1^\mu)^2 \\
 & -\frac{1}{4} [\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu + g(\vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu + \vec{a}_1^\mu \times \vec{a}_1^\nu)]^2 \\
 & -\frac{1}{4} [\partial^\mu \vec{a}_1^\nu - \partial^\nu \vec{a}_1^\mu + g(\vec{a}_1^\mu \times \vec{\rho}^\nu + \vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_1^\nu)]^2 \\
 & + \frac{m^2}{2} [(\omega^\mu)^2 + (f_1^\mu)^2 + (\vec{\rho}^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu)^2] + \frac{1}{2} c [(\sigma + \phi)^2 - \eta^2 - \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2] + h_0(\sigma + \phi).
 \end{aligned}$$

Die unterstrichenen, *nichtdiagonalen* Terme

$$-g \partial_\mu \eta \phi f_1^\mu$$

und

$$-g \partial_\mu \vec{\pi} \phi \cdot \vec{a}_1^\mu$$

werden aus dem Lagrangian durch eine passende Verschiebung der axialvektoriellen Mesonenfelder von der Form:

$$\begin{aligned}
 f_1^\mu & \longrightarrow f_1^\mu + w \partial^\mu \eta \\
 \vec{a}_1^\mu & \longrightarrow \vec{a}_1^\mu + w \partial^\mu \vec{\pi}
 \end{aligned}$$

mit der passend definierten Größe

$$w = \frac{g\phi}{m^2 + (g\phi)^2} \quad (2.22)$$

entfernt.⁹

Der Lagrangian lautet dann

$$\mathcal{L}|_{\sigma \rightarrow \sigma + \phi, f_1^\mu \rightarrow f_1^\mu + w \partial^\mu \eta, \vec{a}_1^\mu \rightarrow \vec{a}_1^\mu + w \partial^\mu \vec{\pi}} \equiv \mathcal{L} = \frac{1}{2} \{ \partial^\mu \sigma + g[\vec{\pi} \cdot (\vec{a}_1^\mu + w \partial^\mu \vec{\pi})$$

⁹Dadurch wird der Lagrangian in zweiter Ordnung in den Feldern diagonalisiert. Dies ist aber nicht die einzige Möglichkeit, diese nichtdiagonalen Terme zu entfernen: sie könnten auch in die Rechnungen in der hergeleiteten Form - ohne Verschiebung - einbezogen werden (Beispiel: ein chirales O(4)-Modell in [16]).

$$\begin{aligned}
 & + \eta(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)]\}^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu\eta)^2 - \underline{g\partial_\mu\eta[(\sigma + \phi)(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta) + \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})]} \\
 & + \frac{g^2}{2}[(\sigma + \phi)(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta) + \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})]^2 \\
 & + \frac{1}{2}\{\partial^\mu\vec{a}_0 + g[\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) + (f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)\vec{\pi}]\}^2 \\
 & + \frac{1}{2}(\partial^\mu\vec{\pi})^2 - \underline{g\partial_\mu\vec{\pi} \cdot [\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma + \phi)(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) + \vec{a}_0(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)]} \\
 & + \frac{g^2}{2}[\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma + \phi)(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) + (f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)\vec{a}_0]^2 \\
 & + \frac{\mu^2}{2}[(\sigma + \phi)^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2] \\
 & - \frac{\lambda}{8}[(\sigma + \phi)^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + \eta^4 + (\vec{\pi}^2)^2 + 2(\sigma + \phi)^2\eta^2 + 2\eta^2\vec{a}_0^2 + 2(\sigma + \phi)^2\vec{\pi}^2 - 4(\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 \\
 & + 6(\sigma + \phi)^2\vec{a}_0^2 + 6\eta^2\vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2\vec{\pi}^2 + 8(\sigma + \phi)\eta\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}] \\
 & - \frac{\lambda_1}{4}[(\sigma + \phi)^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2]^2 \\
 & - \frac{1}{4}(\partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu)^2 - \frac{1}{4}[\partial^\mu(f_1^\nu + w\partial^\nu\eta) - \partial^\nu(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)]^2 \\
 & - \frac{1}{4}\{\partial^\mu\vec{\rho}^\nu - \partial^\nu\vec{\rho}^\mu + g[\vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu + (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) \times (\vec{a}_1^\nu + w\partial^\nu\vec{\pi})]\}^2 \\
 & - \frac{1}{4}\{\partial^\mu(\vec{a}_1^\nu + w\partial^\nu\vec{\pi}) - \partial^\nu(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) + g[(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) \times \vec{\rho}^\nu + \vec{\rho}^\mu \times \\
 & \times (\vec{a}_1^\nu + w\partial^\nu\vec{\pi})]\}^2 \\
 & + \frac{m^2}{2}[(\omega^\mu)^2 + (f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)^2 + (\vec{\rho}^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})^2] \\
 & + \frac{1}{2}c[(\sigma + \phi)^2 - \eta^2 - \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2] + h_0(\sigma + \phi). \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Die im obigen Lagrangian unterstrichenen Terme:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(\partial^\mu\eta)^2 - \underline{g\partial_\mu\eta[(\sigma + \phi)(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta) + \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})]} + \frac{g^2}{2}[(\sigma + \phi)(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta) \\
 & + \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})]^2, \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(\partial^\mu\vec{\pi})^2 - \underline{g\partial_\mu\vec{\pi} \cdot [\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma + \phi)(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) + \vec{a}_0(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)]} \\
 & + \frac{g^2}{2}[\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma + \phi)(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) + (f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)\vec{a}_0]^2 \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

und

$$\frac{m^2}{2} [(\omega^\mu)^2 + (f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)^2 + (\vec{\rho}^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})^2] \quad (2.26)$$

ermöglichen uns, die unerwünschten nichtdiagonalen Propagatorterme $-g\partial_\mu\eta\phi f_1^\mu$ und $-g\partial_\mu\vec{\pi}\phi\vec{a}_1^\mu$ zu entfernen. Dies sehen wir, wenn wir die drei Terme zusammenrechnen; die Summe der ersten zwei ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\partial^\mu\eta)^2 - g\partial_\mu\eta(\sigma + \phi)(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta) - g\partial_\mu\eta\vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) + \frac{g^2}{2} [(\sigma + \phi)(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta) \\ & \quad + \vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})]^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} (\partial^\mu\vec{\pi})^2 - g\partial_\mu\vec{\pi} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) - g\partial_\mu\vec{\pi} \cdot (\sigma + \phi)(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) - g\partial_\mu\vec{\pi} \cdot \vec{a}_0(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta) \\ & \quad + \frac{g^2}{2} [\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu + (\sigma + \phi)(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) + (f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)\vec{a}_0]^2 \\ = & \frac{1}{2} (\partial^\mu\eta)^2 - g\partial_\mu\eta(\sigma f_1^\mu + \phi f_1^\mu + \sigma w\partial^\mu\eta + \phi w\partial^\mu\eta) - g\partial_\mu\eta\vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) \\ & \quad + \frac{g^2}{2} [(\sigma + \phi)^2(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)^2 + 2\vec{a}_0 \cdot (\sigma + \phi)(f_{1\mu} + w\partial_\mu\eta)(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) \\ & \quad + \vec{a}_0^2(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})^2] \\ & \quad + \frac{1}{2} (\partial^\mu\vec{\pi})^2 - g\partial_\mu\vec{\pi} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) - g\partial_\mu\vec{\pi} \cdot (\sigma\vec{a}_1^\mu + \phi\vec{a}_1^\mu + \sigma w\partial^\mu\vec{\pi} + \phi w\partial^\mu\vec{\pi}) \\ & \quad - g\vec{a}_0\partial_\mu\vec{\pi} \cdot (f_1^\mu + w\partial^\mu\eta) \\ & \quad + \frac{g^2}{2} [(\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 + (\sigma + \phi)^2(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})^2 + \vec{a}_0^2(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)^2 + 2(\sigma + \phi)(\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu) \\ & \quad \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) + 2\vec{a}_0 \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu)(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta) + 2\vec{a}_0 \cdot (\sigma + \phi)(\vec{a}_{1\mu} + w\partial_\mu\vec{\pi})(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)]. \end{aligned}$$

Zusammen mit dem dritten Term (2.26) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\partial^\mu\eta)^2 - \underline{g\partial_\mu\eta(\sigma f_1^\mu + \phi f_1^\mu + \sigma w\partial^\mu\eta + \phi w\partial^\mu\eta)} - g\partial_\mu\eta\vec{a}_0 \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) \\ & \quad + \frac{g^2}{2} [\sigma^2(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)^2 + 2\sigma\phi(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)^2 + \phi^2(f_1^\mu)^2 + \underline{2\phi^2 f_{1\mu}w\partial^\mu\eta}] \\ & \quad + \phi^2 w^2 (\partial^\mu\eta)^2 + 2\vec{a}_0 \cdot (\sigma + \phi)(f_{1\mu} + w\partial_\mu\eta)(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi}) + \vec{a}_0^2(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} (\partial^\mu\vec{\pi})^2 - \underline{g\partial_\mu\vec{\pi} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)} - \underline{g\partial_\mu\vec{\pi} \cdot (\sigma\vec{a}_1^\mu + \phi\vec{a}_1^\mu + \sigma w\partial^\mu\vec{\pi} + \phi w\partial^\mu\vec{\pi})} \\ & \quad - g\vec{a}_0 \cdot \partial_\mu\vec{\pi}(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta) \\ & \quad + \frac{g^2}{2} [(\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 + \sigma^2(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})^2 + 2\sigma\phi(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu\vec{\pi})^2 + \phi^2(\vec{a}_1^\mu)^2] \\ & \quad + \underline{2\phi^2 \vec{a}_{1\mu} \cdot w\partial^\mu\vec{\pi}} + \phi^2 w^2 (\partial^\mu\vec{\pi})^2 + \vec{a}_0^2(f_1^\mu + w\partial^\mu\eta)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2(\sigma + \phi)(\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu) \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu \vec{\pi}) + 2\vec{a}_0 \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu)(f_1^\mu + w\partial^\mu \eta) \\
 & + 2\vec{a}_0 \cdot (\sigma + \phi)(\vec{a}_{1\mu} + w\partial_\mu \vec{\pi})(f_1^\mu + w\partial^\mu \eta) \\
 & + \frac{m^2}{2} [(\omega^\mu)^2 + (f_1^\mu)^2 + w^2(\partial^\mu \eta)^2 + (\vec{\rho}^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu)^2 + w^2(\partial^\mu \vec{\pi})^2] \\
 & + \underline{m^2 f_{1\mu} w \partial^\mu \eta} + \underline{m^2 \vec{a}_{1\mu} \cdot w \partial^\mu \vec{\pi}}.
 \end{aligned}$$

Die einfach und doppelt unterstrichenen Terme beinhalten die nichtdiagonalen Propagatorterme, aber jeder dieser Terme verschwindet. Es ist nämlich (beachte die Definition $w = \frac{g\phi}{m^2 + (g\phi)^2}$):

$$\begin{aligned}
 \underline{-g\partial_\mu \eta \phi f_1^\mu + g^2 \phi^2 f_{1\mu} w \partial^\mu \eta + m^2 w f_{1\mu} \partial^\mu \eta} &= \partial_\mu \eta f_1^\mu (-g\phi + g^2 \phi^2 w + m^2 w) \\
 &= \partial_\mu \eta f_1^\mu \frac{-m^2 g\phi - g^3 \phi^3 + g^3 \phi^3 + m^2 g\phi}{m^2 + (g\phi)^2} = 0
 \end{aligned}$$

und (analog zu oben)

$$\underline{-g\phi \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + g^2 \phi^2 w \vec{a}_{1\mu} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} + m^2 w \vec{a}_{1\mu} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}} = \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu (-g\phi + g^2 \phi^2 w + m^2 w) = 0.$$

Die drei hervorgehobenen Lagrangian-Termen (2.24), (2.25) und (2.26) ergeben dann in der Summe

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2} - g\phi w + \frac{1}{2}g^2 \phi^2 w^2 + \frac{m^2}{2}w^2\right)(\partial^\mu \vec{\pi})^2 + \left(\frac{1}{2} - g\phi w + \frac{1}{2}g^2 \phi^2 w^2 + \frac{m^2}{2}w^2\right)(\partial^\mu \eta)^2 \\
 & - g\sigma \partial_\mu \eta (f_1^\mu + w\partial^\mu \eta) - g\partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) - g\sigma \partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu \vec{\pi}) \\
 & - g\vec{a}_0 \cdot (\partial_\mu \vec{\pi} f_1^\mu + \partial_\mu \eta \vec{a}_1^\mu) - 2g\vec{a}_0 \cdot \partial_\mu \vec{\pi} w \partial^\mu \eta \\
 & + \frac{g^2}{2} \{(\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 + (\sigma^2 + 2\sigma\phi + \vec{a}_0^2)(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu \vec{\pi})^2 + \phi^2[(\vec{a}_1^\mu)^2 + (f_1^\mu)^2] \\
 & + (f_1^\mu + w\partial^\mu \eta)^2(\vec{a}_0^2 + \sigma^2 + 2\sigma\phi) + 2(\sigma + \phi)(\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu) \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu \vec{\pi}) \\
 & + 2\vec{a}_0 \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu)(f_1^\mu + w\partial^\mu \eta) + 4\vec{a}_0 \cdot (\sigma + \phi)(\vec{a}_{1\mu} + w\partial_\mu \vec{\pi})(f_1^\mu + w\partial^\mu \eta)\} \\
 & + \frac{m^2}{2} [(\omega^\mu)^2 + (f_1^\mu)^2 + (\vec{\rho}^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu)^2].
 \end{aligned}$$

Der Vorfaktor bei $(\partial^\mu \vec{\pi})^2$ und $(\partial^\mu \eta)^2$

$$\frac{1}{2} - g\phi w + \frac{1}{2}g^2 \phi^2 w^2 + \frac{m^2}{2}w^2$$

lässt sich vereinfachen ($w = \frac{g\phi}{m^2+(g\phi)^2}$):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} - g\phi w + \frac{1}{2}g^2\phi^2 w^2 + \frac{m^2}{2}w^2 \\
 &= \frac{1}{2} - g\phi \frac{g\phi}{m^2 + g^2\phi^2} + \frac{1}{2}g^2\phi^2 \frac{g^2\phi^2}{(m^2 + g^2\phi^2)^2} \\
 & \quad + \frac{m^2}{2} \frac{g^2\phi^2}{(m^2 + g^2\phi^2)^2} \\
 &= \frac{(m^2 + g^2\phi^2)^2 - 2g^2\phi^2(m^2 + g^2\phi^2) + g^4\phi^4 + m^2g^2\phi^2}{2(m^2 + g^2\phi^2)^2} \\
 &= \frac{m^4 + 2m^2g^2\phi^2 + g^4\phi^4 - 2m^2g^2\phi^2 - 2g^4\phi^4 + g^4\phi^4 + m^2g^2\phi^2}{2(m^2 + g^2\phi^2)^2} \\
 &= \frac{m^4 + m^2g^2\phi^2}{2(m^2 + g^2\phi^2)^2} = \frac{m^2(m^2 + g^2\phi^2)}{2(m^2 + g^2\phi^2)^2} = \frac{m^2}{2} \frac{1}{m^2 + g^2\phi^2} \equiv \frac{m^2}{2} \frac{w}{g\phi} .
 \end{aligned}$$

Jetzt sind die drei unterstrichenen aus dem Lagrangian (2.23) bekannt und wir können den Lagrangian \mathcal{L} folgendermaßen ausdrücken [die Summe der drei Terme (2.24), (2.25) und (2.26) ist *einfach* unterstrichen]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \{ \partial^\mu \sigma + g[\vec{\pi} \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu \vec{\pi}) + \eta(f_1^\mu + w\partial^\mu \eta)] \}^2 \\
 &+ \frac{m^2}{2} \frac{w}{g\phi} (\partial^\mu \vec{\pi})^2 + \frac{m^2}{2} \frac{w}{g\phi} (\partial^\mu \eta)^2 - g\partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) - g\sigma \partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu \vec{\pi}) \\
 & \quad - \underline{g\sigma \partial_\mu \eta (f_1^\mu + w\partial^\mu \eta) - g\vec{a}_0 \cdot (\partial_\mu \vec{\pi} f_1^\mu + \partial_\mu \eta \vec{a}_1^\mu) - 2g\vec{a}_0 \cdot \partial_\mu \vec{\pi} w\partial^\mu \eta} \\
 &+ \frac{g^2}{2} \{ (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 + (\sigma^2 + 2\sigma\phi + \vec{a}_0^2)(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu \vec{\pi})^2 + \phi^2 [(\vec{a}_1^\mu)^2 + (f_1^\mu)^2] \\
 &+ \underline{(f_1^\mu + w\partial^\mu \eta)^2 (\vec{a}_0^2 + \sigma^2 + 2\sigma\phi) + 2(\sigma + \phi)(\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu) \cdot (\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu \vec{\pi})} \\
 &+ \underline{2\vec{a}_0 \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu)(f_1^\mu + w\partial^\mu \eta) + 4\vec{a}_0 \cdot (\sigma + \phi)(\vec{a}_{1\mu} + w\partial_\mu \vec{\pi})(f_1^\mu + w\partial^\mu \eta)} \} \\
 &+ \frac{m^2}{2} \underline{[(\omega^\mu)^2 + (f_1^\mu)^2 + (\vec{\rho}^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu)^2]} \\
 &+ \frac{1}{2} \{ \partial^\mu \vec{a}_0 + g[\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta(\vec{a}_1^\mu + w\partial^\mu \vec{\pi}) + (f_1^\mu + w\partial^\mu \eta)\vec{\pi}] \}^2 \\
 &+ \frac{\mu^2}{2} \underline{[(\sigma + \phi)^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2]} \\
 &- \frac{\lambda}{8} [\sigma^4 + \phi^4 + 4\sigma^3\phi + 6\sigma^2\phi^2 + \underline{4\sigma\phi^3} + (\vec{a}_0^2)^2 + \eta^4 + (\vec{\pi}^2)^2 + 2(\sigma + \phi)^2\eta^2 + 2\eta^2\vec{a}_0^2 \\
 &+ 2(\sigma + \phi)^2\vec{\pi}^2 - 4(\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 + 6(\sigma + \phi)^2\vec{a}_0^2 + 6\eta^2\vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2\vec{\pi}^2 + 8(\sigma + \phi)\eta\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}] \\
 &- \frac{\lambda_1}{4} \underline{[(\sigma + \phi)^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2]^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4}(\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu)^2 - \frac{1}{4}[\partial^\mu(f_1^\nu + w\partial^\nu \eta) - \partial^\nu(f_1^\mu + w\partial^\mu \eta)]^2 \\
 & -\frac{1}{4}\{\partial^\mu \bar{\rho}^\nu - \partial^\nu \bar{\rho}^\mu + g[\bar{\rho}^\mu \times \bar{\rho}^\nu + (\bar{a}_1^\mu + w\partial^\mu \bar{\pi}) \times (\bar{a}_1^\nu + w\partial^\nu \bar{\pi})]\}^2 \\
 & -\frac{1}{4}\{\partial^\mu(\bar{a}_1^\nu + w\partial^\nu \bar{\pi}) - \partial^\nu(\bar{a}_1^\mu + w\partial^\mu \bar{\pi}) + g[(\bar{a}_1^\mu + w\partial^\mu \bar{\pi}) \times \bar{\rho}^\nu + \bar{\rho}^\mu \times \\
 & \times (\bar{a}_1^\nu + w\partial^\nu \bar{\pi})]\}^2 \\
 & + \frac{1}{2}c[(\sigma + \phi)^2 - \eta^2 - \bar{a}_0^2 + \bar{\pi}^2] + h_0(\sigma + \phi). \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

Wir können an diesem Lagrangian noch einige Einzelheiten abändern, um seine endgültige Form zu erhalten: als Erstes bemerken wir, dass die *doppelt* unterstrichenen Terme in der Summe diesen Term beinhalten:

$$\sigma[-(\frac{\lambda}{2} + \lambda_1)\phi^3 + (\mu^2 + c)\phi + h_0],$$

der nach der Gleichung für den Vakuumerwartungswert ϕ (2.21) verschwindet. *Der lineare Term in σ leistet also keinen Beitrag zu der Lagrange-Dichte.*

Die restlichen von den erwähnten doppelt unterstrichenen Termen aus (2.27) addieren sich zu

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4}\lambda_1[\sigma^4 + \underline{\phi^4} + 4\sigma^3\phi + 6\sigma^2\phi^2 + 2(\sigma + \phi)^2(\eta^2 + \bar{a}_0^2 + \bar{\pi}^2) + (\eta^2 + \bar{a}_0^2 + \bar{\pi}^2)^2] \\
 & + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \underline{\phi^2} + \eta^2 + \bar{a}_0^2 + \bar{\pi}^2) + \frac{1}{2}c(\sigma^2 + \underline{\phi^2} - \eta^2 - \bar{a}_0^2 + \bar{\pi}^2) + \underline{h_0\phi}. \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

Nun bedenken wir, dass die konstanten Terme, also Terme, die ausschließlich aus Potenzen von ϕ und eventuell anderen Konstanten zusammengesetzt sind [zum Beispiel diejenigen, die im obigen Ausdruck unterstrichen sind; auch andere sind im Lagrangian (2.27) vorhanden], für die Lagrangedichte \mathcal{L} entbehrlich sind. Es bleibt also aus (2.28):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4}\lambda_1[\sigma^4 + 4\sigma^3\phi + 6\sigma^2\phi^2 + 2(\sigma + \phi)^2(\eta^2 + \bar{a}_0^2 + \bar{\pi}^2) + (\eta^2 + \bar{a}_0^2 + \bar{\pi}^2)^2] \\
 & + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \eta^2 + \bar{a}_0^2 + \bar{\pi}^2) + \frac{1}{2}c(\sigma^2 - \eta^2 - \bar{a}_0^2 + \bar{\pi}^2). \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

Daher korrigieren wir den Lagrangian im nächsten Schritt, indem wir alle **konstanten Terme**, die in der Lagrange-Dichte vorhanden sein könnten, **auslassen** und die korrigierten Terme (2.29), die im Lagrangian (2.27) doppelt unterstrichen waren, berücksichtigen.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\{\partial^\mu \sigma + g[\bar{\pi} \cdot (\bar{a}_1^\mu + w\partial^\mu \bar{\pi}) + \eta(f_1^\mu + w\partial^\mu \eta)]\}^2 + \frac{m^2}{2} \frac{w}{g\phi} (\partial^\mu \bar{\pi})^2$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m^2}{2} \frac{w}{g\phi} (\partial^\mu \eta)^2 - g \partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu) - g \sigma \partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{a}_1^\mu + w \partial^\mu \vec{\pi}) - g \sigma \partial_\mu \eta (f_1^\mu + w \partial^\mu \eta) \\
 & - g \vec{a}_0 \cdot (\partial_\mu \vec{\pi} f_1^\mu + \partial_\mu \eta \vec{a}_1^\mu) - 2g \vec{a}_0 \cdot \partial_\mu \vec{\pi} w \partial^\mu \eta \\
 & + \frac{g^2}{2} \{ (\vec{\pi} \times \vec{\rho}^\mu)^2 + (\sigma^2 + 2\sigma\phi + \vec{a}_0^2) (\vec{a}_1^\mu + w \partial^\mu \vec{\pi})^2 + \phi^2 [(\vec{a}_1^\mu)^2 + (f_1^\mu)^2] \\
 & + (f_1^\mu + w \partial^\mu \eta)^2 (\vec{a}_0^2 + \sigma^2 + 2\sigma\phi) + 2(\sigma + \phi) (\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu) \cdot (\vec{a}_1^\mu + w \partial^\mu \vec{\pi}) \\
 & + 2\vec{a}_0 \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\rho}_\mu) (f_1^\mu + w \partial^\mu \eta) + 4\vec{a}_0 \cdot (\sigma + \phi) (\vec{a}_{1\mu} + w \partial_\mu \vec{\pi}) (f_1^\mu + w \partial^\mu \eta) \} \\
 & + \frac{m^2}{2} [(\omega^\mu)^2 + (f_1^\mu)^2 + (\vec{\rho}^\mu)^2 + (\vec{a}_1^\mu)^2] \\
 & + \frac{1}{2} \{ \partial^\mu \vec{a}_0 + g [\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + \eta (\vec{a}_1^\mu + w \partial^\mu \vec{\pi}) + (f_1^\mu + w \partial^\mu \eta) \vec{\pi}] \}^2 \\
 & - \frac{\lambda}{8} [\sigma^4 + (\vec{a}_0^2)^2 + \eta^4 + (\vec{\pi}^2)^2 + 4\sigma^3 \phi + 6\sigma^2 \phi^2 + 2(\sigma + \phi)^2 \eta^2 + 2\eta^2 \vec{a}_0^2 + 2(\sigma + \phi)^2 \vec{\pi}^2 \\
 & - 4(\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2 + 6(\sigma + \phi)^2 \vec{a}_0^2 + 6\eta^2 \vec{\pi}^2 + 6\vec{a}_0^2 \vec{\pi}^2 + 8(\sigma + \phi) \eta \vec{a}_0 \cdot \vec{\pi}] \\
 & - \frac{1}{4} \lambda_1 [\sigma^4 + 4\sigma^3 \phi + 6\sigma^2 \phi^2 + 2(\sigma + \phi)^2 (\eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) + (\eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2)^2] \\
 & + \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \eta^2 + \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{1}{2} c (\sigma^2 - \eta^2 - \vec{a}_0^2 + \vec{\pi}^2) \\
 & - \frac{1}{4} (\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu)^2 - \frac{1}{4} [\partial^\mu (f_1^\nu + w \partial^\nu \eta) - \partial^\nu (f_1^\mu + w \partial^\mu \eta)]^2 \\
 & - \frac{1}{4} \{ \partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu + g [\vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu + (\vec{a}_1^\mu + w \partial^\mu \vec{\pi}) \times (\vec{a}_1^\nu + w \partial^\nu \vec{\pi})] \}^2 \\
 & - \frac{1}{4} \{ \partial^\mu (\vec{a}_1^\nu + w \partial^\nu \vec{\pi}) - \partial^\nu (\vec{a}_1^\mu + w \partial^\mu \vec{\pi}) + g [(\vec{a}_1^\mu + w \partial^\mu \vec{\pi}) \times \vec{\rho}^\nu + \vec{\rho}^\mu \times \\
 & \times (\vec{a}_1^\nu + w \partial^\nu \vec{\pi})] \}^2. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Anmerkung. Interessant ist - und das kann man im obigen Lagrangian leicht bemerken - dass der symmetriebrechende Term $\text{Tr}[H(\Phi + \Phi^\dagger)] = h_0 \sigma$ (2.20) aus dem Lagrangian (2.18), der nach der Verschiebung $\sigma \rightarrow \sigma + \phi$ zu $h_0(\sigma + \phi)$ wird, letztendlich keinen Beitrag zu der Lagrangedichte leistet: *er ist im obigen Lagrangian nicht mehr vorhanden*; der Term $h_0 \sigma$ verschwindet nach der Minimumbedingung (2.21) und der Term $h_0 \phi$ wird als konstant aus dem Lagrangian ausgelassen.

Da die kinetischen Terme der pseudoskalaren Mesonen $\frac{1}{2}(\partial^\mu \vec{\pi})^2$ und $\frac{1}{2}(\partial^\mu \eta)^2$ den unerwünschten Vorfaktor

$$m^2 \frac{w}{g\phi} \equiv m^2 \frac{\frac{g\phi}{m^2 + g^2 \phi^2}}{g\phi} = \frac{m^2}{m^2 + g^2 \phi^2} \tag{2.31}$$

besitzen, müssen wir die Wellenfunktion für die π - und η -Mesonen **renormieren**. Dazu

setzen wir

$$\frac{m^2 w}{g\phi} =: \frac{1}{Z^2} \quad (2.32)$$

und definieren

$$\begin{aligned} \eta_R &:= \frac{1}{Z} \eta; \\ \vec{\pi}_R &:= \frac{1}{Z} \vec{\pi}, \end{aligned}$$

so dass wir für die renormierten Wellenfunktionen

$$(\partial^\mu \eta_R)^2 = \frac{1}{Z^2} (\partial^\mu \eta)^2; \quad (2.33)$$

$$(\partial^\mu \vec{\pi}_R)^2 = \frac{1}{Z^2} (\partial^\mu \vec{\pi})^2 \quad (2.34)$$

erhalten.

Nun können wir im obigen Lagrangian die Ausdrücke $\frac{1}{Z^2} (\partial^\mu \eta)^2$ und $\frac{1}{Z^2} (\partial^\mu \vec{\pi})^2$ durch die jeweils normierten Wellenfunktionen ersetzen; wenn wir dabei den Index R auslassen und den Lagrangian umschreiben, ergibt sich die folgende **Lagrange-Dichte**:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma + gZ \vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu + gwZ^2 \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} + gZ \eta f_1^\mu + gwZ^2 \eta \partial^\mu \eta)^2 \\ & - \frac{1}{2} [\mu^2 - c + 3(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi^2] \sigma^2 \\ & + \frac{1}{2} (\underline{Z \partial^\mu \vec{\pi}} + gZ \vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi} - g f_1^\mu \vec{a}_0 - gwZ \partial^\mu \eta \vec{a}_0 - g\sigma \vec{a}_1^\mu - gwZ \sigma \partial^\mu \vec{\pi})^2 \\ & + \frac{1}{2} (\underline{Z \partial^\mu \eta} - g\sigma f_1^\mu - gwZ \sigma \partial^\mu \eta - g \vec{a}_1^\mu \cdot \vec{a}_0 - gwZ \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{a}_0)^2 \\ & - \frac{1}{2} [\mu^2 - c + (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi^2] Z^2 \vec{\pi}^2 - \frac{1}{2} [\mu^2 + c + (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi^2] Z^2 \eta^2 \\ & + \frac{1}{2} [\partial^\mu \vec{a}_0 + g\vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_0 + gZ f_1^\mu \vec{\pi} + gwZ^2 \vec{\pi} \partial^\mu \eta + gZ \eta \vec{a}_1^\mu + gwZ^2 \eta \partial^\mu \vec{\pi}]^2 \\ & - \frac{1}{2} [\mu^2 + c + (\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda) \phi^2] \vec{a}_0^2 - \frac{\lambda}{2} [(\sigma \vec{a}_0 + Z^2 \eta \vec{\pi})^2 + Z^2 \vec{a}_0^2 \vec{\pi}^2 - Z^2 (\vec{a}_0 \cdot \vec{\pi})^2] \\ & - \frac{1}{4} (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) (\sigma^2 + \vec{a}_0^2 + Z^2 \eta^2 + Z^2 \vec{\pi}^2)^2 - (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi \sigma (\sigma^2 + \vec{a}_0^2 + Z^2 \eta^2 + Z^2 \vec{\pi}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\lambda \phi \vec{a}_0 \cdot (\sigma \vec{a}_0 + Z^2 \eta \vec{\pi}) - \frac{1}{4} (\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu)^2 + \frac{m^2}{2} (\omega^\mu)^2 \\
 & - \frac{1}{4} [\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu + g \vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu + g \vec{a}_1^\mu \times \vec{a}_1^\nu + g w Z \partial^\mu \vec{\pi} \times \vec{a}_1^\nu + g w Z \vec{a}_1^\mu \times \partial^\nu \vec{\pi} \\
 & + g w^2 Z^2 (\partial^\mu \vec{\pi}) \times (\partial^\nu \vec{\pi})]^2 \\
 & + \frac{m^2}{2} (\vec{\rho}^\mu)^2 - \frac{1}{4} (\partial^\mu f_1^\nu - \partial^\nu f_1^\mu)^2 + \frac{m^2 + g^2 \phi^2}{2} (f_1^\mu)^2 + \frac{m^2 + g^2 \phi^2}{2} (\vec{a}_1^\mu)^2 \\
 & - \frac{1}{4} [\partial^\mu \vec{a}_1^\nu - \partial^\nu \vec{a}_1^\mu + g \vec{\rho}^\mu \times \vec{a}_1^\nu + g w Z \vec{\rho}^\mu \times \partial^\nu \vec{\pi} + g \vec{a}_1^\mu \times \vec{\rho}^\nu + g w Z (\partial^\mu \vec{\pi}) \times \vec{\rho}^\nu]^2 \\
 & - g^2 \phi \vec{a}_{1\mu} \cdot [\vec{\rho}^\mu \times Z \vec{\pi} - f_1^\mu \vec{a}_0 - w Z \vec{a}_0 \partial^\mu \eta] \\
 & - g^2 w Z \phi \partial_\mu \vec{\pi} \cdot [Z \vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi} - f_1^\mu \vec{a}_0 - w Z \partial^\mu \eta \vec{a}_0] + g^2 \phi f_{1\mu} (\vec{a}_1^\mu \cdot \vec{a}_0 + w Z \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{a}_0) \\
 & + g^2 w Z \phi \partial_\mu \eta (\vec{a}_1^\mu \cdot \vec{a}_0 + w Z \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{a}_0) \\
 & + g^2 \phi \sigma [(f_1^\mu)^2 + 2 w Z f_{1\mu} \partial^\mu \eta + w^2 Z^2 (\partial^\mu \eta)^2] \\
 & + g^2 \phi \sigma [(\vec{a}_1^\mu)^2 + 2 w Z \vec{a}_{1\mu} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} + w^2 Z^2 (\partial^\mu \vec{\pi})^2] \\
 & - \frac{1}{2} \frac{g^2 \phi^2}{m^2 + g^2 \phi^2} Z^2 (\underline{\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta} + \underline{\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}}). \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

Die kinetischen Terme $(\partial^\mu \eta)^2$ und $(\partial^\mu \vec{\pi})^2$ sind tatsächlich *kanonisch normiert*: beispielsweise sind die Stellen im obigen Lagrangian, an denen $(\partial^\mu \vec{\pi})^2$ (jeweils mit gewissen Vorfaktoren multipliziert) erscheint, einmal unterstrichen; wegen (2.31) und (2.32) ist

$$\frac{g^2 \phi^2}{m^2 + g^2 \phi^2} = 1 - \frac{1}{Z^2}$$

und daher

$$\frac{1}{2} Z^2 (\partial^\mu \vec{\pi})^2 - \frac{1}{2} \frac{g^2 \phi^2}{m^2 + g^2 \phi^2} Z^2 (\partial^\mu \vec{\pi})^2 = \frac{1}{2} Z^2 (\partial^\mu \vec{\pi})^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{Z^2}\right) Z^2 (\partial^\mu \vec{\pi})^2 = \frac{1}{2} (\partial^\mu \vec{\pi})^2;$$

genauso für die η -Wellenfunktion:

$$\frac{1}{2} Z^2 (\partial^\mu \eta)^2 - \frac{1}{2} \frac{g^2 \phi^2}{m^2 + g^2 \phi^2} Z^2 (\partial^\mu \eta)^2 = \frac{1}{2} Z^2 (\partial^\mu \eta)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{Z^2}\right) Z^2 (\partial^\mu \eta)^2 = \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta)^2.$$

Bemerken wir noch zum Schluss, dass die obige Rechnung zeigt, dass unserer Lagrange-Dichte bei dem Übergang von der Form (2.30) zu der Form (2.35) der Term $\frac{1}{2} Z^2 (\partial^\mu \vec{\pi})^2 + \frac{1}{2} Z^2 (\partial^\mu \eta)^2$ hinzugefügt und von ihr abgezogen wurde, um die vollständigen Quadrate $\frac{1}{2} (Z \partial^\mu \vec{\pi} + g Z \vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi} - g f_1^\mu \vec{a}_0 - g w Z \vec{a}_0 \partial^\mu \eta - g \sigma \vec{a}_1^\mu - g w Z \sigma \partial^\mu \vec{\pi})^2$ und $\frac{1}{2} (Z \partial^\mu \eta - g \sigma f_1^\mu - g w Z \sigma \partial^\mu \eta - g \vec{a}_1^\mu \cdot \vec{a}_0 - g w Z \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{a}_0)^2$ in der 3. und 4. Zeile von (2.35) bilden zu können [oder - mit anderen Worten - die Renormierungen (2.33) und (2.34) hätten für die kanonische Normierung der betroffenen Wellenfunktionen schon ausgereicht].

Kapitel 3

Berechnung von Feynman-Diagrammen und Korrelationsfunktionen

3.1 Terme im Lagrangian und die Wechselwirkung

Als Grundlage für die weiteren Berechnungen wird uns der Lagrangian dienen, den wir am Ende des letzten Kapitels hergeleitet haben. Dieser Lagrangian ist ein **Wechselwirkungslagrangian**: aus diesem Lagrangian können wir nämlich diejenigen Terme *extrahieren*, die die Wechselwirkungen beschreiben, die für uns von Interesse sind. Für diese Diplomarbeit sind die Pionen-Streuungen auf Baumgraphenniveau von Interesse, und diese sind durch die folgenden Ausdrücke beschrieben, die sich aus unserem Wechselwirkungslagrangian ergeben.

4-Pion-Vertizes ergeben sich aus den folgenden Termen in der Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_{\pi/\pi} = -\frac{1}{4}(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4\vec{\pi}^4 + \frac{1}{2}g^2w^2Z^4(\partial^\mu\vec{\pi} \cdot \vec{\pi})^2 - \frac{1}{4}g^2w^4Z^4[(\partial^\mu\vec{\pi}) \times (\partial^\nu\vec{\pi})]^2. \quad (3.1)$$

Pion-Sigma-Vertizes ergeben sich aus den folgenden Termen in der Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi/\sigma} &= gwZ^2\partial_\mu\sigma\partial^\mu\vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})\phi Z^2\sigma\vec{\pi}^2 + g^2w^2Z^2\phi\sigma(\partial^\mu\vec{\pi})^2 \\ &\quad - gwZ^2\sigma(\partial^\mu\vec{\pi})^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pion-Rho-Vertizes ergeben sich aus den folgenden Termen in der Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi/\rho} &= gZ^2\partial_\mu\vec{\pi} \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi}) - \frac{1}{2}g^2w^2Z^2(\partial_\mu\vec{\rho}_\nu - \partial_\nu\vec{\rho}_\mu) \cdot [(\partial^\mu\vec{\pi}) \times (\partial^\nu\vec{\pi})] \\ &\quad - g^2wZ^2\phi\partial_\mu\vec{\pi} \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dies sind die einzigen Vierer-Vertizes für die angegebenen Wechselwirkungen, die aus dem Lagrangian abgelesen werden können; dies bedeutet dann auch, dass es andere Wechselwirkungen (zumindest laut diesem Modell und wenn man über das Baumgraphenniveau nicht hinausgeht) nicht gibt - wären sie vorhanden, würde dies bedeuten, dass die Gültigkeit unseres Lagrangians \mathcal{L} nicht gegeben ist, beziehungsweise, dass die bei seiner Herleitung angenommenen Symmetrien so nicht richtig beschrieben werden.¹ Die Wechselwirkungsterme sind so zu deuten, dass folgende Fälle während der Streuung auftreten:

- 1.) *Reine* Pion-Pion-Streuung: (3.1);
- 2.) Zwei Pionen streuen über den Austausch eines Sigma-Mesons: (3.2);
- 3.) Zwei Pionen streuen über den Austausch eines Rho-Mesons: (3.3).

Es ist experimentell nicht zu bestimmen, welcher dieser Prozesse in der jeweiligen Messung stattgefunden hat. Daher müssen wir die Streuamplituden für die drei Teilprozesse berechnen und sie addieren, um die Streuamplitude für den gesamten Prozess zu bestimmen.

Nun können wir mit der Berechnung der Korrelationsfunktionen anfangen. Zunächst werden die Vertizes mithilfe der bekannten Funktionaldifferenzierungsmethoden bestimmt.

3.2 Direkte Pionenwechselwirkung

Wir haben den 4-Pionen-Anteil aus dem Wechselwirkungslagrangian in (3.1) gesehen. Um daraus die Feynman-Diagramme berechnen zu können, müssen wir die Funktionaldifferenzierung nach den Feldern durchführen.

Wir werden die Berechnungen stets im **Impulsraum** durchführen, und daher formen wir den Pionenwechselwirkungsterm unter Benutzung der Relation $\partial^\mu \longleftrightarrow -iP^\mu$ folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi/\pi} &= -\frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} \right) Z^4 (\vec{\pi}^2)^2 + \frac{1}{2} g^2 w^2 Z^4 (\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\pi})^2 - \frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 [(\partial^\mu \vec{\pi}) \times (\partial^\nu \vec{\pi})]^2 \\ &= -\frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} \right) Z^4 (\vec{\pi}^2)^2 + \frac{1}{2} g^2 w^2 Z^4 (-i)^2 (\vec{\pi} \cdot P_\mu \vec{\pi})(\vec{\pi} \cdot P^\mu \vec{\pi}) \\ &\quad - \frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 \{ (\partial^\mu \vec{\pi})^2 (\partial^\nu \vec{\pi})^2 - [(\partial^\mu \vec{\pi}) \cdot (\partial^\nu \vec{\pi})]^2 \} \end{aligned}$$

¹Inwieweit sie gelten, wurde in Kapitel 1 besprochen.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} \right) Z^4 (\vec{\pi}^2)^2 + \frac{1}{2} g^2 w^2 Z^4 (-i)^2 (\vec{\pi} \cdot P_\mu \vec{\pi}) (\vec{\pi} \cdot P^\mu \vec{\pi}) \\
&\quad - \frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 \{ (P^\mu \vec{\pi})^2 (P^\nu \vec{\pi})^2 - [(P^\mu \vec{\pi}) \cdot (P^\nu \vec{\pi})]^2 \}. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Jetzt führen wir die Funktionaldifferenzierung durch; es empfiehlt sich dazu, den Ausdruck (3.4) in drei Teile aufzuspalten ($\mathcal{L}_{\pi/\pi} = \mathcal{L}_{\pi/\pi,1} + \mathcal{L}_{\pi/\pi,2} + \mathcal{L}_{\pi/\pi,3}$), da die Funktionaldifferenzierung dadurch viel übersichtlicher wird.

3.2.1 Funktionaldifferenzierung des Anteils ohne Pionen-Impulse

Wir setzen $\mathcal{L}_{\pi/\pi,1}(P_1, P_2, P_3, P_4) = -\frac{1}{4} (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) Z^4 \pi_a(P_1) \pi_b(P_2) \pi_c(P_3) \pi_d(P_4)$; dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\delta_{ab} \delta_{cd} \frac{\delta^4}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2) \delta \pi_g(Q_3) \delta \pi_h(Q_4)} \int \prod_{i=1}^4 d^4 P_i \mathcal{L}_{\pi/\pi,1}(P_1, P_2, P_3, P_4) \\
&= -\frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} \right) Z^4 \frac{\delta^4}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2) \delta \pi_g(Q_3) \delta \pi_h(Q_4)} \int \prod_{i=1}^4 d^4 P_i \pi_a(P_1) \pi_b(P_2) \\
&\quad \times \pi_c(P_3) \pi_d(P_4) \delta_{ab} \delta_{cd} \\
&= -\frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} \right) Z^4 \frac{\delta^4}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2) \delta \pi_g(Q_3) \delta \pi_h(Q_4)} \int \prod_{i=1}^4 d^4 P_i \pi_a(P_1) \pi_a(P_2) \\
&\quad \times \pi_c(P_3) \pi_c(P_4) \\
&= -\frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} \right) Z^4 \frac{\delta^3}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2) \delta \pi_g(Q_3)} \left[\int d^4 P_1 d^4 P_2 d^4 P_3 \delta_{ah} \pi_a(P_1) \pi_c(P_2) \pi_c(P_3) \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_1 d^4 P_2 d^4 P_3 \delta_{ah} \pi_a(P_1) \pi_c(P_2) \pi_c(P_3) + \int d^4 P_1 d^4 P_2 d^4 P_3 \delta_{ch} \pi_a(P_1) \right. \\
&\quad \left. \times \pi_a(P_2) \pi_c(P_3) + \int d^4 P_1 d^4 P_2 d^4 P_3 \delta_{ch} \pi_a(P_1) \pi_a(P_2) \pi_c(P_3) \right] \\
&\equiv -4 \cdot \frac{1}{4} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} \right) Z^4 \frac{\delta^3}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2) \delta \pi_g(Q_3)} \int d^4 P_1 d^4 P_2 d^4 P_3 \delta_{ah} \pi_a(P_1) \\
&\quad \times \pi_c(P_2) \pi_c(P_3) \\
&= -\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} \right) Z^4 \frac{\delta^2}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2)} \left[\int d^4 P_1 d^4 P_2 \delta_{ag} \delta_{ah} \pi_c(P_1) \pi_c(P_2) + 2 \int d^4 P_1 d^4 P_2 \right. \\
&\quad \left. \times \delta_{ah} \delta_{cg} \pi_a(P_1) \pi_c(P_2) \right] \\
&= -2 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} \right) Z^4 \frac{\delta}{\delta \pi_e(Q_1)} \left[\int d^4 P_1 \delta_{ag} \delta_{ah} \delta_{cf} \pi_c(P_1) + \int d^4 P_1 \delta_{af} \delta_{ah} \delta_{cg} \pi_c(P_1) \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_1 \delta_{ah} \delta_{cf} \delta_{cg} \pi_a(P_1) \right]
\end{aligned}$$

$$= -2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 (\delta_{ag}\delta_{ah}\delta_{ce}\delta_{cf} + \delta_{af}\delta_{ah}\delta_{ce}\delta_{cg} + \delta_{ae}\delta_{ah}\delta_{cf}\delta_{cg}).$$

Also ist

$$\begin{aligned} & \delta_{ab}\delta_{cd} \frac{\delta^4}{\delta\pi_e(Q_1)\delta\pi_f(Q_2)\delta\pi_g(Q_3)\delta\pi_h(Q_4)} \int \prod_{i=1}^4 d^4P_i \mathcal{L}_{\pi/\pi,1}(P_1, P_2, P_3, P_4) \\ &= -2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 (\delta_{ef}\delta_{gh} + \delta_{eg}\delta_{fh} + \delta_{eh}\delta_{fg}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dieses Ergebnis ist für weitere Berechnungen von Bedeutung; interessant ist, dass wir für diese Streuung für den Fall eines **Isospinsingulett-Feldes** ($e = f = g = h$) nach der Funktionaldifferenzierung den Faktor $-2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4 \cdot 3 \equiv 4! \cdot [-\frac{1}{4}(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4]$ erhalten hätten. Der Faktor $4!$ ist typisch für die Streuung der Isospin-Singulett in der ϕ^4 -Theorie (diese ist zum Beispiel auf das Sigma-Teilchen anwendbar) - in der Vertex-Herleitung in diesem Kapitel haben wir stets nur die Komponenten des $\vec{\pi}$ -Triplett benutzt, weswegen der sich daraus ergebende Vorfaktor $4!$ nicht überrascht. Der Vorfaktor kann auch durch die in unterschiedlichen Lehrbüchern beschriebenen geometrischen Überlegungen hergeleitet werden: sind in einem Streuprozess vier Wechselwirkungskanäle vorhanden, so kann einer dieser Kanäle in einem *Prädiagramm* mit irgendeiner der vier Teilchenquellen verbunden werden; bei dem nächsten Kanal ist die Anzahl der Quellen schon auf drei verringert; dann auf zwei und schließlich nur eine - insgesamt also $4!$ Möglichkeiten.



Abbildung 3.1: *Prädiagramm und Feynman-Diagramm in der ϕ^4 -Theorie*

Wir kommen nun zu dem Anteil mit zwei Pionen-Impulsen aus (3.4).

3.2.2 Funktionaldifferenzierung des Anteils mit zwei Pionen-Impulsen

Wir setzen $\mathcal{L}_{\pi/\pi,2}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{g^2}{2} w^2 Z^4 (-i)^2 P_1 \cdot P_3 \pi_a(P_1) \pi_b(P_2) \pi_c(P_3) \pi_d(P_4)$.
Bei der Funktionaldifferenzierung ist

$$\frac{\delta \pi_e(P)}{\delta \pi_f(Q)} = \delta_{ef} \delta^{(4)}(P - Q).$$

zu beachten und dann ergibt sich²:

$$\begin{aligned} & \delta_{ab} \delta_{cd} \frac{\delta^4}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2) \delta \pi_g(Q_3) \delta \pi_h(Q_4)} \int \prod_{i=1}^4 d^4 P_i \mathcal{L}_{\pi/\pi,2}(P_1, P_2, P_3, P_4) \\ &= \delta_{ab} \delta_{cd} \frac{g^2}{2} w^2 Z^4 \frac{\delta^4}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2) \delta \pi_g(Q_3) \delta \pi_h(Q_4)} \int \prod_{i=1}^4 d^4 P_i (-i)^2 P_1 \cdot P_3 \pi_a(P_1) \\ & \quad \times \pi_b(P_2) \pi_c(P_3) \pi_d(P_4) \\ &= -\frac{g^2}{2} w^2 Z^4 \frac{\delta^4}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2) \delta \pi_g(Q_3) \delta \pi_h(Q_4)} \int \prod_{i=1}^4 d^4 P_i P_1 \cdot P_3 \pi_a(P_1) \pi_a(P_2) \\ & \quad \times \pi_c(P_3) \pi_c(P_4) \\ &= -2 \frac{g^2}{2} w^2 Z^4 \frac{\delta^3}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2) \delta \pi_g(Q_3)} \left[\int d^4 P_1 d^4 P_2 d^4 P_3 P_1 \cdot Q_4 \pi_a(P_1) \pi_a(P_2) \pi_h(P_3) \right. \\ & \quad \left. + \int d^4 P_1 d^4 P_2 d^4 P_3 P_1 \cdot P_3 \pi_a(P_1) \pi_a(P_2) \pi_h(P_3) \right] \\ &= -g^2 w^2 Z^4 \frac{\delta^2}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2)} \left[\int d^4 P_1 d^4 P_2 Q_3 \cdot Q_4 \pi_g(P_1) \pi_h(P_2) \right. \\ & \quad \left. + \int d^4 P_1 d^4 P_2 P_1 \cdot Q_4 \pi_g(P_1) \pi_h(P_2) + \int d^4 P_1 d^4 P_2 P_1 \cdot Q_4 \pi_a(P_1) \pi_a(P_2) \delta_{gh} \right. \\ & \quad \left. + \int d^4 P_1 d^4 P_2 P_2 \cdot Q_3 \pi_g(P_1) \pi_h(P_2) + \int d^4 P_1 d^4 P_2 P_1 \cdot P_2 \pi_g(P_1) \pi_h(P_2) \right. \\ & \quad \left. + \int d^4 P_1 d^4 P_2 P_1 \cdot Q_3 \pi_a(P_1) \pi_a(P_2) \delta_{gh} \right] \\ &= -g^2 w^2 Z^4 \frac{\delta}{\delta \pi_e(Q_1)} \left[\int d^4 P_1 Q_3 \cdot Q_4 \pi_h(P_1) \delta_{fg} + \int d^4 P_1 Q_3 \cdot Q_4 \pi_g(P_1) \delta_{fh} \right. \\ & \quad \left. + \int d^4 P_1 Q_2 \cdot Q_4 \pi_h(P_1) \delta_{fg} + \int d^4 P_1 P_1 \cdot Q_4 \pi_g(P_1) \delta_{fh} + \int d^4 P_1 Q_2 \cdot Q_4 \pi_f(P_1) \delta_{gh} \right. \\ & \quad \left. + \int d^4 P_1 P_1 \cdot Q_4 \pi_f(P_1) \delta_{gh} + \int d^4 P_1 P_1 \cdot Q_3 \pi_h(P_1) \delta_{fg} + \int d^4 P_1 Q_2 \cdot Q_3 \pi_g(P_1) \delta_{fh} \right] \end{aligned}$$

²An dieser Stelle kann die Frage zu der Impulserhaltung gestellt werden - der Viererimpuls ist selbstverständlich durch eine globale δ -Distribution erhalten [$\delta^4(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$]; dies kommt aber erst später bei der Streuamplitudenberechnung zur Geltung.

$$\begin{aligned}
 & + \int d^4 P_1 P_1 \cdot Q_2 \pi_h(P_1) \delta_{fg} + \int d^4 P_1 P_1 \cdot Q_2 \pi_g(P_1) \delta_{fh} + \int d^4 P_1 Q_2 \cdot Q_3 \pi_f(P_1) \delta_{gh} \\
 & + \int d^4 P_1 P_1 \cdot Q_3 \pi_f(P_1) \delta_{gh}] \\
 = & -g^2 w^2 Z^4 (Q_3 \cdot Q_4 \delta_{eh} \delta_{fg} + Q_3 \cdot Q_4 \delta_{eg} \delta_{fh} + Q_2 \cdot Q_4 \delta_{eh} \delta_{fg} + Q_1 \cdot Q_4 \delta_{eg} \delta_{fh} \\
 & + Q_2 \cdot Q_4 \delta_{ef} \delta_{gh} + Q_1 \cdot Q_4 \delta_{ef} \delta_{gh} + Q_1 \cdot Q_3 \delta_{eh} \delta_{fg} + Q_2 \cdot Q_3 \delta_{eg} \delta_{fh} \\
 & + Q_1 \cdot Q_2 \delta_{eh} \delta_{fg} + Q_1 \cdot Q_2 \delta_{eg} \delta_{fh} + Q_2 \cdot Q_3 \delta_{ef} \delta_{gh} + Q_1 \cdot Q_3 \delta_{ef} \delta_{gh}) \\
 = & -g^2 w^2 Z^4 [\delta_{ef} \delta_{gh} (Q_1 \cdot Q_3 + Q_1 \cdot Q_4 + Q_2 \cdot Q_3 + Q_2 \cdot Q_4) \\
 & + \delta_{eg} \delta_{fh} (Q_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_4 + Q_2 \cdot Q_3 + Q_3 \cdot Q_4) \\
 & + \delta_{eh} \delta_{fg} (Q_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_3 + Q_2 \cdot Q_4 + Q_3 \cdot Q_4)].
 \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 & \delta_{ab} \delta_{cd} \frac{\delta^4}{\delta \pi_e(Q_1) \delta \pi_f(Q_2) \delta \pi_g(Q_3) \delta \pi_h(Q_4)} \int \prod_{i=1}^4 d^4 P_i \mathcal{L}_{\pi/\pi, 2}(P_1, P_2, P_3, P_4) \\
 = & -2g^2 w^2 Z^4 [\delta_{ef} \delta_{gh} (Q_1 \cdot Q_3 + Q_1 \cdot Q_4) + \delta_{eg} \delta_{fh} (Q_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_4) \\
 & + \delta_{eh} \delta_{fg} (Q_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_3)]. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

3.2.3 Funktionaldifferenzierung des Anteils mit vier Pionen-Impulsen

Gemäß (3.4) und analog zu dem Verfahren in den letzten beiden Unterkapiteln setzen wir $\mathcal{L}_{\pi/\pi, 3}(P_1, P_2, P_3, P_4) = -\frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 P_{1\mu} \pi_a(P_{1\mu}) P_2^\mu \pi_a(P_2^\mu) P_{3\nu} \pi_b(P_{3\nu}) P_4^\nu \pi_b(P_4^\nu) + \frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 P_{1\mu} \pi_a(P_{1\mu}) P_{2\nu} \pi_a(P_{2\nu}) P_3^\mu \pi_b(P_3^\mu) P_4^\nu \pi_b(P_4^\nu)$ und führen die Funktionaldifferenzierung für jeden der zwei Teile von $\mathcal{L}_{\pi/\pi, 3}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ durch.

Teil 1. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 \frac{\delta^4}{\delta \pi_e(Q_{1\alpha}) \delta \pi_f(Q_2^\alpha) \delta \pi_g(Q_{3\beta}) \delta \pi_h(Q_4^\beta)} \\
 & \quad \times \int d^4 P_{1\mu} d^4 P_2^\mu d^4 P_{3\nu} d^4 P_4^\nu P_{1\mu} \pi_a(P_{1\mu}) P_2^\mu \pi_a(P_2^\mu) P_{3\nu} \pi_b(P_{3\nu}) P_4^\nu \pi_b(P_4^\nu) \\
 = & -\frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 \cdot 4 \frac{\delta^3}{\delta \pi_e(Q_{1\alpha}) \delta \pi_f(Q_2^\alpha) \delta \pi_g(Q_{3\beta})} \left[\int d^4 P_{1\mu} d^4 P_2^\mu d^4 P_{3\beta} P_{1\mu} \pi_a(P_{1\mu}) \right. \\
 & \quad \left. \times P_2^\mu \pi_a(P_2^\mu) P_{3\beta} \pi_h(P_{3\beta}) Q_4^\beta \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -g^2 w^4 Z^4 \frac{\delta^2}{\delta\pi_e(Q_{1\alpha}) \delta\pi_f(Q_2^\alpha)} \left[\int d^4 P_{1\mu} d^4 P_2^\mu P_{1\mu} \pi_a(P_{1\mu}) P_2^\mu \pi_a(P_2^\mu) Q_{3\beta} Q_4^\beta \delta_{gh} \right. \\
&\quad \left. + 2 \int d^4 P_{1\gamma} d^4 P_{2\beta} P_1^\gamma \pi_g(P_1^\gamma) Q_{3\gamma} P_{2\beta} \pi_h(P_{2\beta}) Q_4^\beta \right] \\
&= -2g^2 w^4 Z^4 \frac{\delta}{\delta\pi_e(Q_{1\alpha})} \left[\int d^4 P_{1\gamma} P_{1\gamma} \pi_f(P_{1\gamma}) Q_2^\gamma Q_{3\beta} Q_4^\beta \delta_{gh} \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_{1\gamma} P_1^\gamma \pi_g(P_1^\gamma) Q_{3\gamma} Q_{2\beta} Q_4^\beta \delta_{fh} \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_{1\gamma} P_{1\gamma} \pi_h(P_{1\gamma}) Q_4^\gamma Q_2^\beta Q_{3\beta} \delta_{fg} \right] \\
&= -2g^2 w^4 Z^4 (Q_{1\alpha} Q_2^\alpha \delta_{ef} Q_{3\beta} Q_4^\beta \delta_{gh} + Q_{1\alpha} Q_3^\alpha \delta_{eg} Q_{2\beta} Q_4^\beta \delta_{fh} \\
&\quad + Q_{1\alpha} Q_4^\alpha \delta_{eh} Q_2^\beta Q_{3\beta} \delta_{fg}) \\
&= -2g^2 w^4 Z^4 (\delta_{ef} \delta_{gh} Q_{1\alpha} Q_2^\alpha Q_{3\beta} Q_4^\beta + \delta_{eg} \delta_{fh} Q_{1\alpha} Q_3^\alpha Q_{2\beta} Q_4^\beta + \delta_{eh} \delta_{fg} Q_{1\alpha} Q_4^\alpha Q_{2\beta} Q_3^\beta).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Teil 2. Es ist:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 \frac{\delta^4}{\delta\pi_e(Q_{1\alpha}) \delta\pi_f(Q_{2\beta}) \delta\pi_g(Q_3^\alpha) \delta\pi_h(Q_4^\beta)} \\
&\quad \times \int d^4 P_{1\mu} d^4 P_{2\nu} d^4 P_3^\mu d^4 P_4^\nu P_{1\mu} \pi_a(P_{1\mu}) P_{2\nu} \pi_a(P_{2\nu}) P_3^\mu \pi_b(P_3^\mu) P_4^\nu \pi_b(P_4^\nu) \\
&= \frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 \cdot 4 \frac{\delta^3}{\delta\pi_e(Q_{1\alpha}) \delta\pi_f(Q_{2\beta}) \delta\pi_g(Q_3^\alpha)} \int d^4 P_{1\mu} d^4 P_{2\beta} d^4 P_3^\mu P_{1\mu} \pi_a(P_{1\mu}) \\
&\quad \times P_{2\beta} \pi_a(P_{2\beta}) P_3^\mu \pi_h(P_3^\mu) Q_4^\beta \\
&= g^2 w^4 Z^4 \frac{\delta^2}{\delta\pi_e(Q_{1\alpha}) \delta\pi_f(Q_{2\beta})} \left[\int d^4 P_{1\alpha} d^4 P_{2\gamma} Q_{3\gamma} P_{1\alpha} \pi_g(P_{1\alpha}) P_2^\gamma \pi_h(P_2^\gamma) Q_4^\alpha \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_{1\mu} d^4 P_2^\mu P_{1\mu} \pi_g(P_{1\mu}) Q_3^\alpha P_2^\mu \pi_h(P_2^\mu) Q_{4\alpha} \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_{1\alpha} d^4 P_{2\gamma} P_{1\alpha} \pi_a(P_{1\alpha}) P_{2\gamma} \pi_a(P_{2\gamma}) Q_3^\alpha Q_4^\gamma \delta_{gh} \right] \\
&= g^2 w^4 Z^4 \frac{\delta}{\delta\pi_e(Q_{1\alpha})} \left[\int d^4 P_{1\gamma} Q_{3\gamma} Q_{2\beta} P_1^\gamma \pi_h(P_1^\gamma) Q_4^\beta \delta_{fg} \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_{1\gamma} Q_{3\beta} P_{1\gamma} \pi_g(P_{1\gamma}) Q_2^\beta Q_4^\gamma \delta_{fh} \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_{1\gamma} Q_{2\gamma} Q_3^\beta P_1^\gamma \pi_h(P_1^\gamma) Q_{4\beta} \delta_{fg} \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_{1\gamma} P_{1\gamma} \pi_g(P_{1\gamma}) Q_3^\beta Q_2^\gamma Q_{4\beta} \delta_{fh} \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_{1\gamma} Q_{2\beta} P_{1\gamma} \pi_f(P_{1\gamma}) Q_3^\beta Q_4^\gamma \delta_{gh} \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_{1\gamma} P_{1\gamma} \pi_f(P_{1\gamma}) Q_{2\beta} Q_3^\gamma Q_4^\beta \delta_{gh} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= g^2 w^4 Z^4 (\delta_{eh} Q_{1\alpha} Q_3^\alpha \delta_{fg} Q_{2\beta} Q_4^\beta + \delta_{eg} Q_{1\alpha} Q_4^\alpha \delta_{fh} Q_{2\beta} Q_3^\beta \\
 &\quad + \delta_{eh} Q_{1\alpha} Q_2^\alpha \delta_{fg} Q_{3\beta} Q_4^\beta + \delta_{eg} Q_{1\alpha} Q_2^\alpha \delta_{fh} Q_{3\beta} Q_4^\beta \\
 &\quad + \delta_{ef} Q_{1\alpha} Q_4^\alpha \delta_{gh} Q_{2\beta} Q_3^\beta + \delta_{ef} Q_{1\alpha} Q_3^\alpha \delta_{gh} Q_{2\beta} Q_4^\beta) \\
 &= g^2 w^4 Z^4 [\delta_{ef} \delta_{gh} (Q_{1\alpha} Q_3^\alpha Q_{2\beta} Q_4^\beta + Q_{1\alpha} Q_4^\alpha Q_{2\beta} Q_3^\beta) \\
 &\quad + \delta_{eg} \delta_{fh} (Q_{1\alpha} Q_2^\alpha Q_{3\beta} Q_4^\beta + Q_{1\alpha} Q_4^\alpha Q_{2\beta} Q_3^\beta) \\
 &\quad + \delta_{eh} \delta_{fg} (Q_{1\alpha} Q_2^\alpha Q_{3\beta} Q_4^\beta + Q_{1\alpha} Q_3^\alpha Q_{2\beta} Q_4^\beta)]. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Für diesen Beitrag zu dem Vertex erhalten wir aus der Summe von (3.7) und (3.8):

$$\begin{aligned}
 &g^2 w^4 Z^4 [\delta_{ef} \delta_{gh} (Q_{1\alpha} Q_3^\alpha Q_{2\beta} Q_4^\beta + Q_{1\alpha} Q_4^\alpha Q_{2\beta} Q_3^\beta - 2 Q_{1\alpha} Q_2^\alpha Q_{3\beta} Q_4^\beta) \\
 &\quad + \delta_{eg} \delta_{fh} (Q_{1\alpha} Q_2^\alpha Q_{3\beta} Q_4^\beta + Q_{1\alpha} Q_4^\alpha Q_{2\beta} Q_3^\beta - 2 Q_{1\alpha} Q_3^\alpha Q_{2\beta} Q_4^\beta) \\
 &\quad + \delta_{eh} \delta_{fg} (Q_{1\alpha} Q_2^\alpha Q_{3\beta} Q_4^\beta + Q_{1\alpha} Q_3^\alpha Q_{2\beta} Q_4^\beta - 2 Q_{1\alpha} Q_4^\alpha Q_{2\beta} Q_3^\beta)]. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir mit (3.5), (3.6) und (3.9) für den **4-Pion-Vertex** $[\mathcal{L}_{\pi/\pi}]$ aus (3.4): $\mathcal{L}_{\pi/\pi} = -\frac{1}{4}(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4(\vec{\pi}^2)^2 + \frac{1}{2}g^2w^2Z^4(-i)^2(\vec{\pi} \cdot P_\mu \vec{\pi})(\vec{\pi} \cdot P^\mu \vec{\pi}) - \frac{1}{4}g^2w^4Z^4\{(P^\mu \vec{\pi})^2(P^\nu \vec{\pi})^2 - [(P^\mu \vec{\pi}) \cdot (P^\nu \vec{\pi})]^2\}$:

$$\begin{aligned}
 &-2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4(\delta_{ef}\delta_{gh} + \delta_{eg}\delta_{fh} + \delta_{eh}\delta_{fg}) \\
 &\quad -2g^2w^2Z^4[\delta_{ef}\delta_{gh}(Q_1 \cdot Q_3 + Q_1 \cdot Q_4) + \delta_{eg}\delta_{fh}(Q_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_4) \\
 &\quad + \delta_{eh}\delta_{fg}(Q_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_3)] \\
 &\quad + g^2w^4Z^4[\delta_{ef}\delta_{gh}(Q_{1\alpha}Q_3^\alpha Q_{2\beta}Q_4^\beta + Q_{1\alpha}Q_4^\alpha Q_{2\beta}Q_3^\beta - 2Q_{1\alpha}Q_2^\alpha Q_{3\beta}Q_4^\beta) \\
 &\quad + \delta_{eg}\delta_{fh}(Q_{1\alpha}Q_2^\alpha Q_{3\beta}Q_4^\beta + Q_{1\alpha}Q_4^\alpha Q_{2\beta}Q_3^\beta - 2Q_{1\alpha}Q_3^\alpha Q_{2\beta}Q_4^\beta) \\
 &\quad + \delta_{eh}\delta_{fg}(Q_{1\alpha}Q_2^\alpha Q_{3\beta}Q_4^\beta + Q_{1\alpha}Q_3^\alpha Q_{2\beta}Q_4^\beta - 2Q_{1\alpha}Q_4^\alpha Q_{2\beta}Q_3^\beta)] \\
 &= -\delta_{ef}\delta_{gh}[2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4 + 2g^2w^2Z^4(Q_1 \cdot Q_3 + Q_1 \cdot Q_4) \\
 &\quad - g^2w^4Z^4(Q_{1\alpha}Q_3^\alpha Q_{2\beta}Q_4^\beta + Q_{1\alpha}Q_4^\alpha Q_{2\beta}Q_3^\beta - 2Q_{1\alpha}Q_2^\alpha Q_{3\beta}Q_4^\beta)] \\
 &\quad - \delta_{eg}\delta_{fh}[2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4 + 2g^2w^2Z^4(Q_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_4) \\
 &\quad - g^2w^4Z^4(Q_{1\alpha}Q_2^\alpha Q_{3\beta}Q_4^\beta + Q_{1\alpha}Q_4^\alpha Q_{2\beta}Q_3^\beta - 2Q_{1\alpha}Q_3^\alpha Q_{2\beta}Q_4^\beta)] \\
 &\quad - \delta_{eh}\delta_{fg}[2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4 + 2g^2w^2Z^4(Q_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_3) \\
 &\quad - g^2w^4Z^4(Q_{1\alpha}Q_2^\alpha Q_{3\beta}Q_4^\beta + Q_{1\alpha}Q_3^\alpha Q_{2\beta}Q_4^\beta - 2Q_{1\alpha}Q_4^\alpha Q_{2\beta}Q_3^\beta)]. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

3.3 Pion-Sigma-Vertex

Hier behandeln wir den Anteil (3.2) aus dem Wechselwirkungslagrangian. In diesem Ausdruck bemerken wir den Term der Form $gwZ^2 \partial_\mu \sigma \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\pi}$; nach der Transformation in den Impulsraum entstünden Terme von der Form $P_\sigma \cdot P_\pi$, aber für die Funktionaldifferenzierung ist es empfehlenswerter, die partielle Ableitung von der σ -Wellenfunktion mithilfe der partiellen Integration zu entfernen; dadurch entsteht unter anderem ein Term der Form $\square \vec{\pi} \longleftrightarrow -m_\pi^2 \vec{\pi}^2$, was die Funktionaldifferenzierung beschleunigt³:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} &= \partial_\mu (\sigma \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\pi}) - \sigma \square \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - \sigma \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} \\ &\equiv -\sigma (\square \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} + \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi/\sigma} &= gwZ^2 \partial_\mu \sigma \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2 \sigma \vec{\pi}^2 + g^2 w^2 Z^2 \phi \sigma (\partial^\mu \vec{\pi})^2 - gwZ^2 \sigma (\partial^\mu \vec{\pi})^2 \\ &= -gwZ^2 \sigma (\square \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} + \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}) - (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi \sigma Z^2 \vec{\pi}^2 + gwZ^2 (g\phi w - 1) \sigma (\partial^\mu \vec{\pi})^2 \\ &= -gwZ^2 \sigma \square \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - (gZ^2 - g^2 \phi w Z^2 + gZ^2) w \sigma (\partial^\mu \vec{\pi})^2 - (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi \sigma Z^2 \vec{\pi}^2. \end{aligned}$$

Unter Benutzung von (2.22) und (2.32) ergibt sich für den Vorfaktor $(gZ^2 - g^2 \phi w Z^2)$ von $w \sigma (\partial^\mu \vec{\pi})^2$:

$$\begin{aligned} gZ^2 - g^2 w Z^2 \phi &= gZ^2 (1 - g\phi w) = \frac{g^2 \phi}{m^2 w} (1 - g\phi w) \\ &= \frac{g^2 \phi}{m^2} \frac{m^2 + g^2 \phi^2}{g\phi} (1 - g\phi \frac{g\phi}{m^2 + g^2 \phi^2}) \\ &= g \frac{m^2 + g^2 \phi^2}{m^2} \frac{m^2}{m^2 + g^2 \phi^2} \\ &= g \end{aligned} \tag{3.11}$$

und daher vereinfacht sich $\mathcal{L}_{\pi/\sigma}$ zu

$$\mathcal{L}_{\pi/\sigma} = -gwZ^2 \sigma \square \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - g(1 + Z^2) w \sigma (\partial^\mu \vec{\pi})^2 - (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi \sigma Z^2 \vec{\pi}^2. \tag{3.12}$$

Es empfiehlt sich wieder, den Lagrangiananteil $\mathcal{L}_{\pi/\sigma}$, der drei Terme beinhaltet, abzuspalten (in, sagen wir, $\mathcal{L}_{\pi/\sigma,1}$, $\mathcal{L}_{\pi/\sigma,2}$ und $\mathcal{L}_{\pi/\sigma,3}$) und die Anteile separat funktional zu differenzieren.

³Hier wird die Tatsache benutzt, dass in dieser Arbeit auf dem Baumgraphenniveau gerechnet wird - würde man Schleifendiagramme betrachten, wäre das Pion nicht auf der Massenschale.

3.3.1 Funktionaldifferenzierung des Anteils mit dem D'Alembert-Operator

Wir starten mit $\mathcal{L}_{\pi/\sigma,1} := -gwZ^2 \sigma \square \vec{\pi} \cdot \vec{\pi}$; wie bei der Pion-Pion-Streuung führen wir die Funktionaldifferenzierung im Impulsraum und ersetzen beim Übergang von dem Orts- in den Impulsraum den D'Alembert-Operator durch das negative Pionenmassenquadrat ($-m_\pi^2$):

$$\mathcal{L}_{\pi/\sigma,1}(P_1, P_2, P_3) = gwZ^2 m_\pi^2 \sigma(P_1) \pi_a(P_2) \pi_b(P_3).$$

Die Funktionaldifferenzierung bringt dann unter der Beachtung von $\frac{\delta \pi_e(P)}{\delta \pi_f(Q)} = \delta_{ef} \delta^{(4)}(P-Q)$; $\frac{\delta \sigma(P)}{\delta \sigma(Q)} = \delta^{(4)}(P-Q)$:

$$\begin{aligned} & \delta_{ab} \frac{\delta^3}{\delta \sigma(Q_1) \delta \pi_e(Q_2) \delta \pi_f(Q_3)} \int \prod_{i=1}^3 d^4 P_i \mathcal{L}_{\pi/\sigma,1}(P_1, P_2, P_3) \\ &= m_\pi^2 gwZ^2 \frac{\delta^3}{\delta \sigma(Q_1) \delta \pi_e(Q_2) \delta \pi_f(Q_3)} \int \prod_{i=1}^3 d^4 P_i \sigma(P_1) \pi_a(P_2) \pi_b(P_3) \delta_{ab} \\ &= m_\pi^2 gwZ^2 \frac{\delta^3}{\delta \sigma(Q_1) \delta \pi_e(Q_2) \delta \pi_f(Q_3)} \int d^4 P_1 d^4 P_2 d^4 P_3 \sigma(P_1) \pi_a(P_2) \pi_a(P_3) \\ &= 2m_\pi^2 gwZ^2 \frac{\delta}{\delta \sigma(Q_1)} \int d^4 P_1 \sigma(P_1) \delta_{ae} \delta_{af} \equiv 2m_\pi^2 gwZ^2 \delta_{ae} \delta_{af}. \end{aligned}$$

Also

$$\delta_{ab} \frac{\delta^3}{\delta \sigma(Q_1) \delta \pi_e(Q_2) \delta \pi_f(Q_3)} \int \prod_{i=1}^3 d^4 P_i \mathcal{L}_{\pi/\sigma,1}(P_1, P_2, P_3) = 2m_\pi^2 gwZ^2 \delta_{ef}. \quad (3.13)$$

3.3.2 Funktionaldifferenzierung des Anteils mit den partiellen Ableitungen

Wie im letzten Unterkapitel setzen wir $\mathcal{L}_{\pi/\sigma,2} := -g(1+Z^2)w\sigma \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}$, beziehungsweise

$$\mathcal{L}_{\pi/\sigma,2}(P_1, P_2, P_3) = g(1+Z^2)w\sigma(P_1) P_2 \cdot P_3 \pi_a(P_2) \pi_b(P_3).$$

Dann erhalten wir ebenfalls analog

$$\delta_{ab} \frac{\delta^3}{\delta \sigma(Q_1) \delta \pi_e(Q_2) \delta \pi_f(Q_3)} \int \prod_{i=1}^3 d^4 P_i \mathcal{L}_{\pi/\sigma,2}(P_1, P_2, P_3)$$

$$\begin{aligned}
&= g(1+Z^2)w \frac{\delta^3}{\delta\sigma(Q_1)\delta\pi_e(Q_2)\delta\pi_f(Q_3)} \int \prod_{i=1}^3 d^4P_i \sigma(P_1) P_2 \cdot P_3 \pi_a(P_2) \pi_b(P_3) \delta_{ab} \\
&= g(1+Z^2)w \frac{\delta^3}{\delta\sigma(Q_1)\delta\pi_e(Q_2)\delta\pi_f(Q_3)} \int \prod_{i=1}^3 d^4P_i \sigma(P_1) P_2 \cdot P_3 \pi_a(P_2) \pi_a(P_3) \\
&= 2g(1+Z^2)w \frac{\delta^2}{\delta\sigma(Q_1)\delta\pi_e(Q_2)} \int d^4P_1 d^4P_2 \sigma(P_1) P_2 \cdot Q_3 \pi_a(P_2) \delta_{af} \\
&= 2g(1+Z^2)w \frac{\delta}{\delta\sigma(Q_1)} \int d^4P_1 \sigma(P_1) Q_2 \cdot Q_3 \delta_{ae} \delta_{af}.
\end{aligned}$$

Also

$$\delta_{ab} \frac{\delta^3}{\delta\sigma(Q_1)\delta\pi_e(Q_2)\delta\pi_f(Q_3)} \int \prod_{i=1}^3 d^4P_i \mathcal{L}_{\pi/\sigma,2}(P_1, P_2, P_3) = 2gw(1+Z^2)Q_2Q_3\delta_{ef}. \quad (3.14)$$

3.3.3 Funktionaldifferenzierung des Anteils ohne die partiellen Ableitungen

Wir setzen nun $\mathcal{L}_{\pi/\sigma,3} = -(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})\phi\sigma Z^2\vec{\pi}^2$ - im Impulsraum:

$$\mathcal{L}_{\pi/\sigma,3}(P_1, P_2, P_3) = -(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^2\phi\sigma(P_1)\pi_a(P_2)\pi_b(P_3).$$

Dann berechnet man rasch

$$\begin{aligned}
&\delta_{ab} \frac{\delta^3}{\delta\sigma(Q_1)\delta\pi_e(Q_2)\delta\pi_f(Q_3)} \int \prod_{i=1}^3 d^4P_i \mathcal{L}_{\pi/\sigma,3}(P_1, P_2, P_3) \\
&= -(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^2\phi \frac{\delta^3}{\delta\sigma(Q_1)\delta\pi_e(Q_2)\delta\pi_f(Q_3)} \int \prod_{i=1}^3 d^4P_i \sigma(P_1)\pi_a(P_2)\pi_b(P_3)\delta_{ab} \\
&= -2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^2\phi\delta_{ae}\delta_{af}.
\end{aligned}$$

Also

$$\delta_{ab} \frac{\delta^3}{\delta\sigma(Q_1)\delta\pi_e(Q_2)\delta\pi_f(Q_3)} \int \prod_{i=1}^3 d^4P_i \mathcal{L}_{\pi/\sigma,3}(P_1, P_2, P_3) = -2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^2\phi\delta_{ef}. \quad (3.15)$$

Insgesamt haben wir also unter Benutzung von (3.13) - (3.15) für den **Pion-Sigma-Vertex** ($\mathcal{L}_{\pi/\sigma}$ aus (3.12): $\mathcal{L}_{\pi/\sigma} = -gwZ^2 \sigma \square \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - g(1+Z^2)w\sigma(\partial^\mu \vec{\pi})^2 - (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})\phi\sigma Z^2 \vec{\pi}^2$):

$$\begin{aligned} & \delta_{ab} \frac{\delta^3}{\delta\sigma(Q_1) \delta\pi_e(Q_2) \delta\pi_f(Q_3)} \int \prod_{i=1}^3 d^4 P_i \mathcal{L}_{\pi/\sigma}(P_1, P_2, P_3) \\ &= [2m_\pi^2 gwZ^2 + 2gw(1+Z^2)Q_2 \cdot Q_3 - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^2 \phi] \delta_{ef}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.4 Pion-Rho-Vertex

Nun beschäftigen wir uns mit dem Pion-Rho-Vertex; dazu betrachten wir den Anteil (3.3) aus dem Wechselwirkungslagrangian.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi/\rho} &= gZ^2 \partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi}) - \frac{1}{2} gw^2 Z^2 (\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu) \cdot [(\partial^\mu \vec{\pi}) \times (\partial^\nu \vec{\pi})] \\ &\quad - g^2 w Z^2 \phi \partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi}) \\ &= gZ^2 \partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi}) - gw^2 Z^2 \partial_\mu \vec{\rho}_\nu \cdot [(\partial^\mu \vec{\pi}) \times (\partial^\nu \vec{\pi})] - g^2 w Z^2 \phi \partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi}) \\ &= (gZ^2 - g^2 w Z^2 \phi) \partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi}) - gw^2 Z^2 \partial_\mu \vec{\rho}_\nu \cdot [(\partial^\mu \vec{\pi}) \times (\partial^\nu \vec{\pi})]. \end{aligned}$$

Den Vorfaktor von $\partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi})$ haben wir in (3.11) schon berechnet und daher ist

$$\mathcal{L}_{\pi/\rho} = -gw^2 Z^2 \partial_\mu \vec{\rho}_\nu \cdot [(\partial^\mu \vec{\pi}) \times (\partial^\nu \vec{\pi})] + g \partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi}) \equiv \mathcal{L}_{\pi/\rho,1} + \mathcal{L}_{\pi/\rho,2}.$$

3.4.1 Funktionaldifferenzierung des Anteils mit der partiellen Ableitung bei dem ρ -Meson

Wir setzen $\mathcal{L}_{\pi/\rho,1} = -gw^2 Z^2 \partial_\mu \vec{\rho}_\nu \cdot [(\partial^\mu \vec{\pi}) \times (\partial^\nu \vec{\pi})]$, d.h. im Impulsraum

$$\mathcal{L}_{\pi/\rho,1}(P_{1\mu}, P_2^\mu, P_3^\nu) = -igw^2 Z^2 P_{1\mu} \rho_\nu^a(P_{1\mu}) P_2^\mu \pi^b(P_2^\mu) P_3^\nu \pi^c(P_3^\nu) \epsilon^{abc}.$$

Bei der Funktionaldifferenzierung konstruieren wir wie bisher den Differentialoperator so, dass er formal die gleiche Struktur wie der Lagrangiananteil $\mathcal{L}_{\pi/\rho,1}$ besitzt. Dabei

wird beachtet, dass die 4-Vektoren-Kontraktion nur über die 4-Indizes der 4-Impulse und der Wellenfunktionen (und nicht ihrer Argumente) durchgeführt wird (die 4-Indizes der Argumente sollen nur zur Klärung dazu dienen, welcher Impuls dem jeweiligen Teilchen zugeordnet wird).

Es gilt :

$$\frac{\delta\pi^a(P_{1\alpha})}{\delta\pi^b(Q_{2\beta})} = \delta_b^a \delta^{(4)}(P_{1\alpha} - Q_{2\beta}).$$

(analog für das ρ -Meson).

Die Funktionaldifferenzierung ergibt dann

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^3}{\delta\rho_\alpha^d(Q_{1\beta}) \delta\pi^e(Q_2^\beta) \delta\pi^f(Q_3^\alpha)} \int d^4 P_{1\mu} d^4 P_2^\mu d^4 P_3^\nu \mathcal{L}_{\pi/\rho,1}(P_{1\mu}, P_2^\mu, P_3^\nu) \\ &= -igw^2 Z^2 \frac{\delta^3}{\delta\rho_\alpha^d(Q_{1\beta}) \delta\pi^e(Q_2^\beta) \delta\pi^f(Q_3^\alpha)} \int d^4 P_{1\mu} d^4 P_2^\mu d^4 P_3^\nu P_{1\mu} \rho_\nu^a(P_{1\mu}) \\ & \quad \times P_2^\mu \pi^b(P_2^\mu) P_3^\nu \pi^c(P_3^\nu) \epsilon^{abc} \\ &= -igw^2 Z^2 \frac{\delta^2}{\delta\rho_\alpha^d(Q_{1\beta}) \delta\pi^e(Q_2^\beta)} \left[\int d^4 P_{1\alpha} d^4 P_3^\nu P_{1\alpha} \rho_\nu^a(P_{1\alpha}) \delta^{bf} Q_3^\alpha P_3^\nu \pi^c(P_3^\nu) \epsilon^{abc} \right. \\ & \quad \left. + \int d^4 P_{1\mu} d^4 P_2^\mu P_{1\mu} \rho_\alpha^a(P_{1\mu}) P_2^\mu \pi^b(P_2^\mu) Q_3^\alpha \delta^{cf} \epsilon^{abc} \right] \\ &= -igw^2 Z^2 \frac{\delta^2}{\delta\rho_\alpha^d(Q_{1\beta}) \delta\pi^e(Q_2^\beta)} \left[\int d^4 P_{1\alpha} d^4 P_3^\nu P_{1\alpha} \rho_\nu^a(P_{1\alpha}) Q_3^\alpha P_3^\nu \pi^c(P_3^\nu) \epsilon^{afc} \right. \\ & \quad \left. + \int d^4 P_{1\mu} d^4 P_2^\mu P_{1\mu} \rho_\alpha^a(P_{1\mu}) P_2^\mu \pi^b(P_2^\mu) Q_3^\alpha \epsilon^{abf} \right] \\ &= -igw^2 Z^2 \frac{\delta}{\delta\rho_\alpha^d(Q_{1\beta})} \left[\int d^4 P_{1\alpha} P_{1\alpha} \rho_\beta^a(P_{1\alpha}) Q_3^\alpha Q_2^\beta \epsilon^{afe} \right. \\ & \quad \left. + \int d^4 P_{1\beta} P_{1\beta} \rho_\alpha^a(P_{1\beta}) Q_2^\beta Q_3^\alpha \epsilon^{aef} \right] \\ &= -igw^2 Z^2 (Q_{1\beta} Q_3^\beta Q_2^\alpha \epsilon^{dfe} + Q_{1\beta} Q_2^\beta Q_3^\alpha \epsilon^{def}) \\ &= -igw^2 Z^2 \epsilon^{dfe} (Q_{1\beta} Q_3^\beta Q_2^\alpha - Q_{1\beta} Q_2^\beta Q_3^\alpha). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Das Rho-Meson ist ein Interimsteilchen in dieser Form der Pion-Pion-Streuung; an dem Vertex, an dem es entsteht, gilt die Vierer-Impuls-Erhaltung in der Form $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ (siehe Kapitel 3.5.1 und Bild 3.2). Nun formt sich der obige Ausdruck wie folgt um:

$$\frac{\delta^3}{\delta\rho_\alpha^d(Q_{1\beta}) \delta\pi^e(Q_2^\beta) \delta\pi^f(Q_3^\alpha)} \int d^4 P_{1\mu} d^4 P_2^\mu d^4 P_3^\nu \mathcal{L}_{\pi/\rho,1}(P_{1\mu}, P_2^\mu, P_3^\nu)$$

$$\begin{aligned}
 &= igw^2 Z^2 \epsilon^{dfe} [(Q_2 + Q_3)_\beta Q_3^\beta Q_2^\alpha - (Q_2 + Q_3)_\beta Q_2^\beta Q_3^\alpha] \\
 &= igw^2 Z^2 \epsilon^{dfe} (Q_{2\beta} Q_3^\beta Q_2^\alpha + Q_{3\beta} Q_3^\beta Q_2^\alpha - Q_{2\beta} Q_2^\beta Q_3^\alpha - Q_{3\beta} Q_2^\beta Q_3^\alpha) \\
 &= igw^2 Z^2 \epsilon^{dfe} [m_\pi^2 (Q_2^\alpha - Q_3^\alpha) + Q_{2\beta} Q_3^\beta (Q_2^\alpha - Q_3^\alpha)]
 \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned}
 &\frac{\delta^3}{\delta\rho_\alpha^d(Q_{1\beta}) \delta\pi^e(Q_2^\beta) \delta\pi^f(Q_3^\alpha)} \int d^4 P_{1\mu} d^4 P_2^\mu d^4 P_3^\nu \mathcal{L}_{\pi/\rho,1}(P_{1\mu}, P_2^\mu, P_3^\nu) \\
 &= igw^2 Z^2 \epsilon^{dfe} (m_\pi^2 + Q_{2\beta} Q_3^\beta) (Q_2^\alpha - Q_3^\alpha).
 \end{aligned}$$

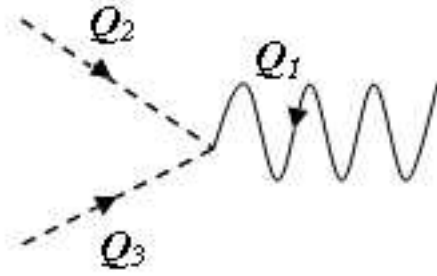


Abbildung 3.2: Pion-Rho-Vertex

3.4.2 Funktionaldifferenzierung des Anteils ohne die partielle Ableitung bei dem ρ -Meson

Wir starten mit $\mathcal{L}_{\pi/\rho,2} = g \partial_\mu \vec{\pi} \cdot (\vec{\rho}^\mu \times \vec{\pi})$; im Impulsraum ergibt sich dann

$$\mathcal{L}_{\pi/\rho,2}(P_1^\mu, P_2^\nu, P_3^\xi) = -ig P_1^\mu \pi^a(P_1^\mu) \rho_\mu^b(P_2^\nu) \pi^c(P_3^\xi) \epsilon^{abc}.$$

Wir können in diesem Unterkapitel auf die gleiche Weise wie im letzten Unterkapitel vorgehen; aus Konventionsgründen ordnen wir auch dieses Mal dem ρ -Meson den Impuls Q_1 und den Isospinindex d (und den Pionen jeweils die Impulse Q_2 und Q_3 sowie die Isospinindizes e und f). Dann ergibt sich:

$$\frac{\delta^3}{\delta\pi^e(Q_2^\alpha) \delta\rho_\alpha^d(Q_1^\beta) \delta\pi^f(Q_3^\gamma)} \int d^4 P_1^\mu d^4 P_2^\nu d^4 P_3^\xi \mathcal{L}_{\pi/\rho,2}(P_1^\mu, P_2^\nu, P_3^\xi)$$

$$\begin{aligned}
&= -ig \frac{\delta^3}{\delta\pi^e(Q_2^\alpha) \delta\rho_\alpha^d(Q_1^\beta) \delta\pi^f(Q_3^\gamma)} \int d^4 P_1^\mu d^4 P_2^\nu d^4 P_3^\xi P_1^\mu \pi^a(P_1^\mu) \rho_\mu^b(P_2^\nu) \pi^c(P_3^\xi) \epsilon^{abc} \\
&= -ig \frac{\delta^2}{\delta\pi^e(Q_2^\alpha) \delta\rho_\alpha^d(Q_1^\beta)} \left[\int d^4 P_2^\nu d^4 P_3^\xi \delta^{af} Q_3^\gamma \rho_\gamma^b(P_2^\nu) \pi^c(P_3^\xi) \epsilon^{abc} \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_1^\mu d^4 P_2^\nu P_1^\mu \pi^a(P_1^\mu) \rho_\mu^b(P_2^\nu) \delta^{cf} \epsilon^{abc} \right] \\
&= -ig \frac{\delta^2}{\delta\pi^e(Q_2^\alpha) \delta\rho_\alpha^d(Q_1^\beta)} \left[\int d^4 P_2^\nu d^4 P_3^\xi Q_3^\gamma \rho_\gamma^b(P_2^\nu) \pi^c(P_3^\xi) \epsilon^{fbc} \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 P_1^\mu d^4 P_2^\nu P_1^\mu \pi^a(P_1^\mu) \rho_\mu^b(P_2^\nu) \epsilon^{abf} \right] \\
&= -ig \frac{\delta}{\delta\pi^e(Q_2^\alpha)} \left[\int d^4 P_3^\xi Q_3^\alpha \pi^c(P_3^\xi) \epsilon^{fde} + \int d^4 P_1^\alpha P_1^\alpha \pi^a(P_1^\alpha) \epsilon^{adf} \right] \\
&= -ig(Q_3^\alpha \epsilon^{fde} + Q_2^\alpha \epsilon^{edf}).
\end{aligned}$$

Also:

$$\frac{\delta^3}{\delta\pi^e(Q_2^\alpha) \delta\rho_\alpha^d(Q_1^\beta) \delta\pi^f(Q_3^\gamma)} \int d^4 P_1^\mu d^4 P_2^\nu d^4 P_3^\xi \mathcal{L}_{\pi/\rho,2}(P_1^\mu, P_2^\nu, P_3^\xi) = -ig\epsilon^{dfe}(Q_2^\alpha - Q_3^\alpha).$$

Insgesamt für den **Pion-Rho-Vertex**:

$$\begin{aligned}
&igw^2 Z^2 \epsilon^{dfe} (m_\pi^2 + Q_2^\beta Q_{3\beta})(Q_2^\alpha - Q_3^\alpha) - ig\epsilon^{dfe}(Q_2^\alpha - Q_3^\alpha) \\
&= -ig\epsilon^{dfe} [Q_2^\alpha - Q_3^\alpha - w^2 Z^2 (m_\pi^2 + Q_2^\beta Q_{3\beta}) (Q_2^\alpha - Q_3^\alpha)] \\
&= -ig\epsilon^{dfe} [1 - w^2 Z^2 (m_\pi^2 + Q_2^\beta Q_{3\beta})](Q_2^\alpha - Q_3^\alpha). \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Nun können wir uns der Berechnung von Feynman-Diagrammen, beziehungsweise der Berechnung der Streuamplitude für diesen Prozess widmen; wir werden dabei wieder zwischen der direkten Pion-Pion-Streuung und der Pion-Pion-Streuung mit dem Sigma-, oder Rho-Meson als Austauscheteilchen unterscheiden.

3.5 Berechnung der Streuamplitude \mathcal{M} für die Pion-Pion-Wechselwirkung

In diesem Abschnitt wird die Streuamplitude \mathcal{M} für den Gesamtprozess der Pionenstreuung als Summe der Amplituden für die drei *Teilprozesse* ($\mathcal{M}_{\pi/\pi}, \mathcal{M}_{\pi/\sigma}, \mathcal{M}_{\pi/\rho}$) bestimmt.

Es werden die Ergebnisse der Abschnitte 3.2, 3.3 und 3.4 ausschlaggebend sein. Um sie weiter bearbeiten zu können, beschäftigen wir uns zunächst einführend mit den Mandelstam-Variablen.

3.5.1 Mandelstam-Variablen

Es seien zwei Eingangsteilchen mit den Impulsen P_1, P_2 und zwei Ausgangsteilchen mit den Impulsen P_3, P_4 gegeben. *Wir wählen die Konvention so, dass alle Impulse als einlaufend gezählt werden* [siehe Abbildung (3.3)]. Dann gilt die Erhaltung des Viererimpulses in der Form $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$ und in diesem Fall definiert man die folgenden **Mandelstam-Variablen**:

$$s = (P_1 + P_2)^2 = (P_3 + P_4)^2 \quad (3.19)$$

$$t = (P_1 + P_3)^2 = (P_2 + P_4)^2 \quad (3.20)$$

$$u = (P_2 + P_3)^2 = (P_1 + P_4)^2. \quad (3.21)$$

In dieser Konvention werden die Impulse also an jedem Vertex summiert (Impulsübertrag am Vertex) und anschließend quadriert; die Art der Mandelstam-Variable wird dadurch bestimmt, welche Impulse in den Vertex hineinlaufen.

Der Grund, die Mandelstam-Variablen zu definieren, ist, dass sie Lorentz-Skalare sind, also Größen, die in allen Bezugssystemen invariant bleiben. Außerdem kann mit ihrer Hilfe die Anzahl der Freiheitsgrade vermindert werden, die für die vollständige Beschreibung des gegebenen Streuprozesses notwendig sind. Die vier 4-Impulse P_1, P_2, P_3, P_4 werden nämlich insgesamt 16 Freiheitsgrade besitzen; durch die Benutzung des Energieerhaltungssatzes wird die Anzahl der Freiheitsgrade sofort auf 12 reduziert.

Für die weitere Reduzierung dieser Anzahl benutzen wir die Lorentz-Produkte der gegebenen Impulse. Da für jeden dieser Impulse die Relation $P_i \cdot P_i = p_{0i}^2 - \vec{p}_i^2 = m_i^2$ gilt

($i = 1, 2, 3, 4$), wird die Anzahl der Freiheitsgrade auf 8 reduziert. Allerdings müssen wir nicht zwangsläufig die Produkte der Form $P_i \cdot P_i$ betrachten - möglich sind natürlich auch diejenigen mit der Form $P_i \cdot P_j$; für den Fall $i < j$ gibt es sechs Möglichkeiten, diese Skalarprodukte zu bilden. Sie sind offenbar Lorentz-Skalare, also speziellrelativistisch invariant, und reduzieren die Anzahl der Freiheitsgrade auf 2.

Die Gleichungen (3.19), (3.20) und (3.21) beschreiben dann tatsächlich *zwei* Freiheitsgrade, da die Mandelstam-Variablen voneinander abhängen:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 = \text{const.} \quad (3.22)$$

Beweis. Dazu benutzen wir die Gleichungen (3.19) - (3.21), um $s + t + u$ zu berechnen:

$$s + t + u = 2P_1^2 + 2P_2^2 + 2P_3^2 + 2P_1 \cdot P_2 + 2P_1 \cdot P_3 + 2P_2 \cdot P_3; \quad (3.23)$$

$$s + t + u = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 3P_4^2 + 2P_1 \cdot P_4 + 2P_2 \cdot P_4 + 2P_3 \cdot P_4. \quad (3.24)$$

Nun ist laut Energieerhaltung

$$0 = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + 2P_1 \cdot P_2 + 2P_1 \cdot P_3 + 2P_1 \cdot P_4 + 2P_2 \cdot P_3 + 2P_2 \cdot P_4 + 2P_3 \cdot P_4.$$

Identifiziert man die letzte Gleichung in der Summe der Gleichungen (3.23) und (3.24), erhält man:

$$2(s + t + u) = 2m_1^2 + 2m_2^2 + 2m_3^2 + 2m_4^2 \iff s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2.$$

Also sind die Mandelstam-Variablen untereinander abhängig, und der besagte Streuprozess lässt sich durch zwei unabhängige Variablen beschreiben.

In Verbindung mit den Variablen s, t und u spricht man oft von den dazugehörigen **Kanälen** (s, t, u), da man diese Kanäle durch die Benutzung von Mandelstam-Variablen graphisch darstellen kann. Dies ist auch ein Grund, die Mandelstam-Variablen zu benutzen; wie man sie in eine konkrete Berechnung einbezieht, wird jetzt in der Bearbeitung der Pion-Pion-Streuung gezeigt.

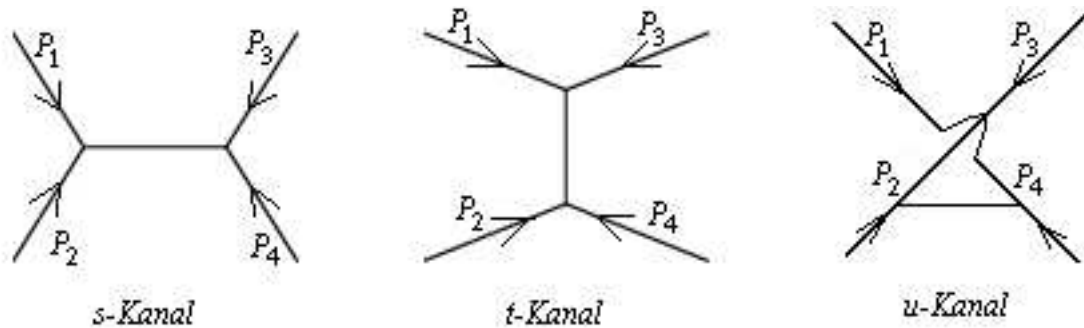


Abbildung 3.3: Feynman-Diagramme im Impulsraum

3.5.2 Direkte Pion-Pion-Streuung

Das zu diesem Wechselwirkungsprozess gehörende Feynman-Diagramm ist in der Abbildung 3.4 dargestellt.

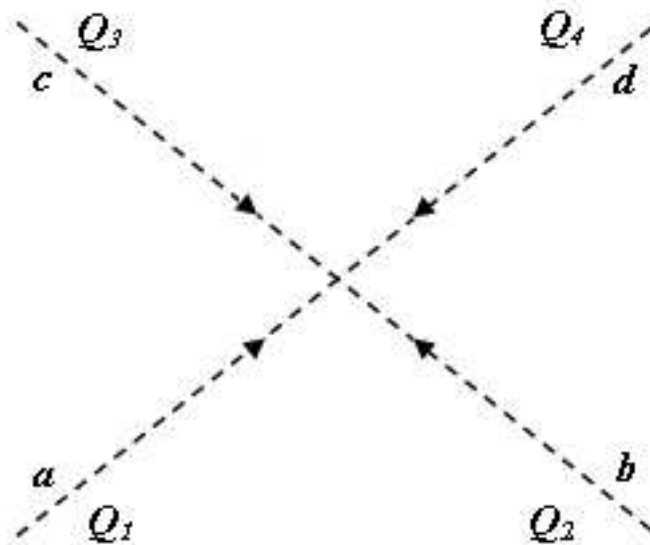


Abbildung 3.4: Pion-Pion-Streuung

Das Diagramm besitzt nur den Vertex, und den Vertex haben wir in (3.10) berechnet. Die Anordnung von Isospin-Indizes e, f, g, h in (3.10) lässt vermuten, dass die drei Terme in diesem Ausdruck mit den drei Wechselwirkungskanälen (s, t, u) in Verbindung

stehen, die wir im Unterkapitel zu den Mandelstam-Variablen definiert haben. Dies ist in der Tat so, denn mithilfe der Definitionen (3.19) - (3.21) ergibt sich

$$\begin{aligned} s &= Q_1^2 + 2Q_1 \cdot Q_2 + Q_2^2 = 2m_\pi^2 + 2Q_1 \cdot Q_2 \equiv 2m_\pi^2 + 2Q_3 \cdot Q_4 \\ &\quad \downarrow \\ Q_1 \cdot Q_2 &= Q_3 \cdot Q_4 = \frac{s}{2} - m_\pi^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Analog ist

$$t = Q_1^2 + 2Q_1 \cdot Q_3 + Q_3^2 = 2m_\pi^2 + 2Q_1 \cdot Q_3 \Rightarrow Q_1 \cdot Q_3 = Q_2 \cdot Q_4 = \frac{t}{2} - m_\pi^2 \quad (3.26)$$

und

$$u = Q_1^2 + 2Q_1 \cdot Q_4 + Q_4^2 = 2m_\pi^2 + 2Q_1 \cdot Q_4 \Rightarrow Q_1 \cdot Q_4 = Q_2 \cdot Q_3 = \frac{u}{2} - m_\pi^2. \quad (3.27)$$

Dann nimmt (3.10) die folgende Form an (Notation wie auf Abbildung 3.4):

$$\begin{aligned} &\delta^{ab}\delta^{cd} \{g^2 w^2 Z^4 [(2m_\pi^2 - t) + (2m_\pi^2 - u)] - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4 \\ &\quad + \frac{1}{4}g^2 w^4 Z^4 [(t - 2m_\pi^2)^2 + (u - 2m_\pi^2)^2 - 2(s - 2m_\pi^2)^2]\} \\ &\quad + \delta^{ac}\delta^{bd} \{g^2 w^2 Z^4 [(2m_\pi^2 - s) + (2m_\pi^2 - u)] - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4 \\ &\quad + \frac{1}{4}g^2 w^4 Z^4 [(s - 2m_\pi^2)^2 + (u - 2m_\pi^2)^2 - 2(t - 2m_\pi^2)^2]\} \\ &\quad + \delta^{ad}\delta^{bc} \{g^2 w^2 Z^4 [(2m_\pi^2 - s) + (2m_\pi^2 - t)] - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4 \\ &\quad + \frac{1}{4}g^2 w^4 Z^4 [(s - 2m_\pi^2)^2 + (t - 2m_\pi^2)^2 - 2(u - 2m_\pi^2)^2]\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Für die Berechnung des Streuamplitudenanteils aus (3.28) (bezeichnen wir sie mit $\mathcal{M}_{\pi/\pi}$) benutzen wir die Konvention, dass jeder Vertex mit dem Faktor i multipliziert wird. Dann ergibt sich mit $s + t + u = 4m_\pi^2$ **der Streuamplitudenanteil** $\mathcal{M}_{\pi/\pi}$ zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\pi/\pi} &= i \delta^{ab}\delta^{cd} \{g^2 w^2 Z^4 s - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4 \\ &\quad + \frac{1}{4}g^2 w^4 Z^4 [(t - 2m_\pi^2)^2 + (u - 2m_\pi^2)^2 - 2(s - 2m_\pi^2)^2]\} \\ &\quad + i \delta^{ac}\delta^{bd} \{g^2 w^2 Z^4 t - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4 \\ &\quad + \frac{1}{4}g^2 w^4 Z^4 [(s - 2m_\pi^2)^2 + (u - 2m_\pi^2)^2 - 2(t - 2m_\pi^2)^2]\} \\ &\quad + i \delta^{ad}\delta^{bc} \{g^2 w^2 Z^4 u - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^4 \\ &\quad + \frac{1}{4}g^2 w^4 Z^4 [(s - 2m_\pi^2)^2 + (t - 2m_\pi^2)^2 - 2(u - 2m_\pi^2)^2]\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.5.3 Pion-Pion-Wechselwirkung mit virtuellem Sigma-Meson

Wir basieren die Berechnungen in diesem Abschnitt auf den Ergebnissen aus Kapitel 3.3, insbesondere auf der Formel (3.16):

$$[2m_\pi^2 gwZ^2 + 2gw(1 + Z^2) Q_2 \cdot Q_3 - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^2 \phi] \delta_{ef}, \quad (3.30)$$

die den Vertex darstellt [e, f sind die Isospin-Indizes der Pionen; sie und die Bezeichnungen der Vierer-Impulse aus (3.30) stellen den allgemeinen Fall dar und sollen den Bezeichnungen aus dem jeweiligen Feynman-Diagramm in diesem Unterkapitel angepasst werden]. Der Anteil $\mathcal{M}_{\pi/\sigma}$ an der Gesamt-Streuamplitude \mathcal{M} wird als Summe der entsprechenden Anteile für die drei Kanäle bestimmt: $\mathcal{M}_{\pi/\sigma} = \mathcal{M}_{\pi/\sigma,s} + \mathcal{M}_{\pi/\sigma,t} + \mathcal{M}_{\pi/\sigma,u}$.

S-Kanal. Das Feynman-Diagramm ist der Abbildung 3.5 zu entnehmen.

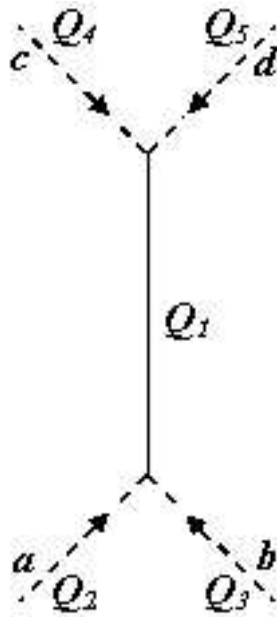


Abbildung 3.5: Pion-Pion-Streuung, mit Sigma-Meson als virtuellem Meson - s-Kanal

Den Vertex (3.30) müssen wir auf die Impulse, wie sie auf der Abbildung (3.5) gegeben sind, anpassen. Analog zu (3.25) lassen sich die $Q_2 \cdot Q_3$ - und $Q_4 \cdot Q_5$ -Terme zu

$$Q_2 \cdot Q_3 = Q_4 \cdot Q_5 = \frac{s}{2} - m_\pi^2 \quad (3.31)$$

umformen. Setzen wir dies für den (Q_2, Q_3) -, beziehungsweise für den (Q_4, Q_5) -Vertex ein, und beachten wir, dass zu jedem Vertex und zu jedem Propagator der Faktor i dazumultipliziert wird, so ergibt sich $\mathcal{M}_{\pi/\sigma, s}$ zu:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\pi/\sigma, s} &= -i \delta^{ab} \delta^{cd} [2m_\pi^2 gwZ^2 + 2gw(1+Z^2) \left(\frac{s}{2} - m_\pi^2\right) \\
&\quad - 2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right) Z^2 \phi]^2 \frac{1}{s - m_\sigma^2} \\
&= -i \delta^{ab} \delta^{cd} [2m_\pi^2 gwZ^2 + gw(1+Z^2)(s - 2m_\pi^2) \\
&\quad - 2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right) Z^2 \phi]^2 \frac{1}{s - m_\sigma^2} .
\end{aligned} \tag{3.32}$$

T-Kanal. Das entsprechende Feynman-Diagramm ist in Abbildung 3.6 dargestellt.

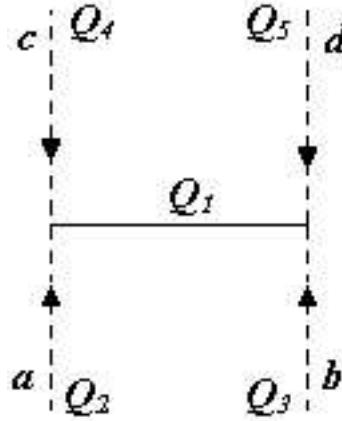


Abbildung 3.6: Pion-Pion-Streuung, mit Sigma-Meson als virtuellem Meson - t -Kanal

Der Vertex (3.30) muss wieder an die Notation aus der Abbildung 3.6 angepasst werden; da die Impulse Q_3 und Q_4 im Vergleich zu der Abbildung 3.5 ihre Plätze getauscht haben, so tauschen die Mandelstam-Variablen s und t bei der Umschreibung der Vertices ebenfalls ihre Plätze:

$$Q_3 \longleftrightarrow Q_4 \iff s \longleftrightarrow t.$$

Dies ist als *Crossing Symmetry* bekannt und führt in diesem Fall zu

$$\mathcal{M}_{\pi/\sigma, t} = -i \delta^{ac} \delta^{bd} [2m_\pi^2 gwZ^2 + gw(1+Z^2)(t - 2m_\pi^2)$$

$$-2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^2\phi]^2 \frac{1}{t - m_\sigma^2} \quad . \quad (3.33)$$

U-kanal. Analog zu den Berechnungen für den s - und t -Kanal erhalten wir mit der *Crossing Symmetry*

$$Q_2 \longleftrightarrow Q_5 \iff s \longleftrightarrow u,$$

aus (3.32):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\pi/\sigma,u} &= -i\delta^{ad}\delta^{bc} [2m_\pi^2 gwZ^2 + gw(1 + Z^2)(u - 2m_\pi^2) \\ &\quad - 2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^2\phi]^2 \frac{1}{u - m_\sigma^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.34)$$

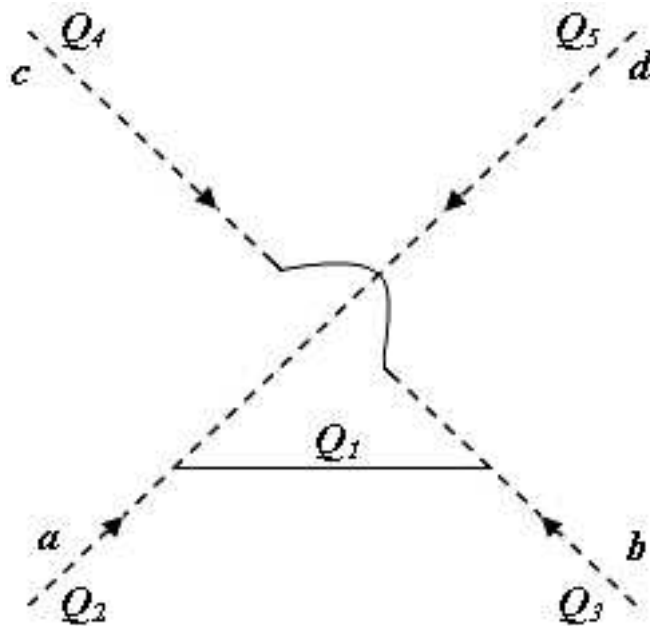


Abbildung 3.7: Pion-Pion-Streuung, mit Sigma-Meson als virtuellem Meson - u -Kanal

Mit (3.32), (3.33) und (3.34) ergibt sich für den **Anteil** $\mathcal{M}_{\pi/\sigma}$ **an der Gesamt-Streuamplitude** \mathcal{M} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\pi/\sigma} &= \mathcal{M}_{\pi/\sigma,s} + \mathcal{M}_{\pi/\sigma,t} + \mathcal{M}_{\pi/\sigma,u} \\
&= -i \delta^{ab} \delta^{cd} [2m_\pi^2 gwZ^2 + gw(1+Z^2)(s-2m_\pi^2) - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^2\phi]^2 \frac{1}{s-m_\sigma^2} \\
&\quad -i \delta^{ac} \delta^{bd} [2m_\pi^2 gwZ^2 + gw(1+Z^2)(t-2m_\pi^2) - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^2\phi]^2 \frac{1}{t-m_\sigma^2} \\
&\quad -i \delta^{ad} \delta^{bc} [2m_\pi^2 gwZ^2 + gw(1+Z^2)(u-2m_\pi^2) - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})Z^2\phi]^2 \frac{1}{u-m_\sigma^2} .
\end{aligned} \tag{3.35}$$

3.5.4 Pion-Pion-Wechselwirkung mit virtuellem Rho-Meson

Das Verfahren zur Bestimmung des Amplitudenanteils $\mathcal{M}_{\pi/\rho}$ an der Gesamtstreuamplitude \mathcal{M} ist analog dem Verfahren in den letzten beiden Kapiteln, mit dem Unterschied, dass der Rho-Propagator - da dieses Teilchen ein Vektormeson ist - die folgende Form annimmt:

$$\Delta_{\alpha\beta} = -i \left(g_{\alpha\beta} - \frac{P_\alpha P_\beta}{P^2} \right) \frac{1}{P^2 - m_\rho^2}.$$

Die Indizes α und β sind Indizes im **Minkowski-Raum** (nicht im Isospin-Raum); $g_{\alpha\beta}$ ist der metrische Tensor des Minkowski-Raums und P der Vierer-Impuls des ρ -Mesons (in unserer Konvention die negative Summe der ein- oder auslaufenden Vierer-Impulse). Diese Propagator-Form entspricht der Form des Photonpropagators in der Landau-Eichung (die beiden Teilchen besitzen den gleichen Gesamtspin).

Zur Berechnung von $\mathcal{M}_{\pi/\rho}$ benötigen wir den Vertex, der in (3.18) bestimmt wurde:

$$-ig\epsilon^{dfe} [1 - w^2 Z^2 (m_\pi^2 + Q_2 \cdot Q_3)] (Q_2^\alpha - Q_3^\alpha) \tag{3.36}$$

(d ist laut den Konventionen in Kapitel 3.4 der Isospin-Index für das Rho-Meson, und e und f für die Pionen; dies ist die Allgemeinbetrachtung und soll den Konventionen für die Isospinindizes, die auf den Abbildungen in diesem Unterkapitel angegeben sind, angepasst werden) und es gilt $\mathcal{M}_{\pi/\rho} = \mathcal{M}_{\pi/\rho,s} + \mathcal{M}_{\pi/\rho,t} + \mathcal{M}_{\pi/\rho,u}$.

S-Kanal. Wir passen die berechnete Vertex-Form (3.36) der Notation auf der Abbildung 3.8 an.

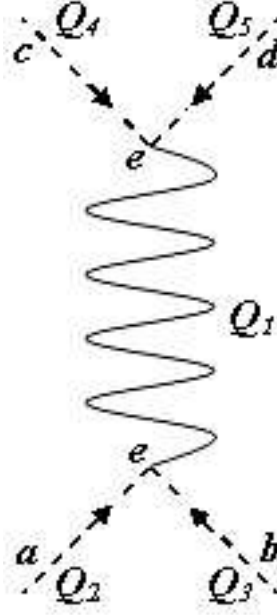


Abbildung 3.8: Pion-Pion-Streuung, mit Rho-Meson als virtuellem Meson - s-Kanal

Dann lautet der Anteil $\mathcal{M}_{\pi/\rho, s}$ [P^2 aus (3.36) $\rightarrow Q_1^2 \equiv s$; in (3.36) ist $Q_2 \cdot Q_3 = \frac{s}{2} - m_\pi^2$, genau wie in (3.31)]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\pi/\rho, s} &= i^2 (-i) (-i)^2 g^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 \epsilon^{eba} \epsilon^{edc} \frac{1}{s - m_\rho^2} \\
 &\quad \times (Q_2^\alpha - Q_3^\alpha) [g_{\alpha\beta} - \frac{(Q_2 + Q_3)_\alpha (Q_2 + Q_3)_\beta}{s}] (Q_4^\beta - Q_5^\beta) \\
 &= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 (\delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ad} \delta^{bc}) \frac{1}{s - m_\rho^2} [(Q_2^\alpha - Q_3^\alpha) g_{\alpha\beta} (Q_4^\beta - Q_5^\beta)] \\
 &\quad + ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 (\delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ad} \delta^{bc}) \frac{1}{s - m_\rho^2} [(Q_2^\alpha - Q_3^\alpha) \frac{(Q_2 + Q_3)_\alpha (Q_2 + Q_3)_\beta}{s} \\
 &\quad \times (Q_4^\beta - Q_5^\beta)]. \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Wir bemerken im zweiten Summanden von (3.37) den Term $(Q_2^\alpha - Q_3^\alpha)$, der unter dem Pionen-Austausch ($2 \leftrightarrow 3$) antisymmetrisch, und den Term $\frac{(Q_2 + Q_3)_\alpha (Q_2 + Q_3)_\beta}{s}$, der

unter dem genannten Teilchenaustausch symmetrisch ist. *Ihr Produkt wird deshalb verschwinden.*

Dann bleibt übrig:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\pi/\rho,s} &= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 (\delta^{ac}\delta^{bd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{s - m_\rho^2} [(Q_2^\alpha - Q_3^\alpha) g_{\alpha\beta} (Q_4^\beta - Q_5^\beta)] \\
&= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 (\delta^{ac}\delta^{bd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{s - m_\rho^2} (Q_{2\beta} - Q_{3\beta})(Q_4^\beta - Q_5^\beta) \\
&= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 (\delta^{ac}\delta^{bd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{s - m_\rho^2} (Q_2 \cdot Q_4 - Q_3 \cdot Q_4 - Q_2 \cdot Q_5 + Q_3 \cdot Q_5).
\end{aligned}$$

Mit den Definitionen (siehe Abbildungen 3.9 und 3.10)

$$\begin{aligned}
t &= (Q_2 + Q_4)^2 = (Q_3 + Q_5)^2 \\
u &= (Q_2 + Q_5)^2 = (Q_3 + Q_4)^2
\end{aligned}$$

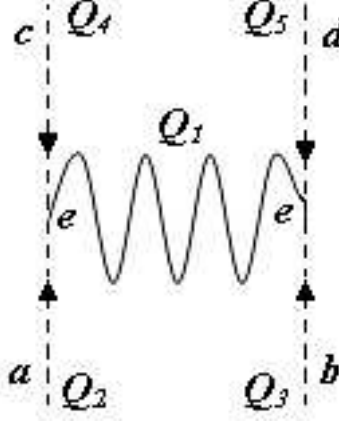
können die Viererimpuls-Produkte in $\mathcal{M}_{\pi/\rho,s}$ ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\pi/\rho,s} &= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 (\delta^{ac}\delta^{bd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{s - m_\rho^2} \\
&\quad \times (\frac{t}{2} - m_\pi^2 - \frac{u}{2} + m_\pi^2 - \frac{u}{2} + m_\pi^2 + \frac{t}{2} - m_\pi^2) \\
&= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 (\delta^{ac}\delta^{bd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{s - m_\rho^2} (t - u) \\
&= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 \frac{1}{s - m_\rho^2} [\delta^{ac}\delta^{bd}(t - u) - \delta^{ad}\delta^{bc}(t - u)]. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

T-Kanal.

Im Vertex (3.36) ersetzen wir $Q_3 \leftrightarrow Q_4$ und die dazugehörigen Isospin-Indizes b und c , um den (Q_2, Q_4) -Vertex aus dem Feynman-Diagramm (Abbildung 3.9) zu erhalten; für den (Q_3, Q_5) -Vertex aus der Abbildung 3.9 verfahren wir analog, was mit den gleichen Konventionen wie für die Berechnung von $\mathcal{M}_{\pi/\rho,s}$ die folgende Form für $\mathcal{M}_{\pi/\rho,t}$ ergibt:

$$\mathcal{M}_{\pi/\rho,t} = i^2 (-i) (-i)^2 g^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2})^2 \epsilon^{eca} \epsilon^{edb} \frac{1}{t - m_\rho^2}$$


 Abbildung 3.9: Pion-Pion-Streuung, mit Rho-Meson als virtuellem Meson - t -Kanal

$$\begin{aligned}
 & \times (Q_2^\alpha - Q_4^\alpha) \left[g_{\alpha\beta} - \frac{(Q_2 + Q_4)_\alpha (Q_2 + Q_4)_\beta}{s} \right] (Q_3^\beta - Q_5^\beta) \\
 = & -ig^2 \left(1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2}\right)^2 (\delta^{ab}\delta^{cd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{t - m_\rho^2} [(Q_2^\alpha - Q_4^\alpha) g_{\alpha\beta} (Q_3^\beta - Q_5^\beta)] \\
 & + ig^2 \left(1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2}\right)^2 (\delta^{ab}\delta^{cd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{t - m_\rho^2} [(Q_2^\alpha - Q_4^\alpha) \frac{(Q_2 + Q_4)_\alpha (Q_2 + Q_4)_\beta}{s} \\
 & \times (Q_3^\beta - Q_5^\beta)].
 \end{aligned}$$

Wie in (3.37) verschwindet der zweite Term im letzten Ausdruck, da er aus dem Produkt eines unter dem Austausch $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ symmetrischen und eines unter diesem Austausch antisymmetrischen Terms besteht:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\pi/\rho,t} &= -ig^2 \left(1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2}\right)^2 (\delta^{ab}\delta^{cd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{t - m_\rho^2} [(Q_2^\alpha - Q_4^\alpha) g_{\alpha\beta} (Q_3^\beta - Q_5^\beta)] \\
 &= -ig^2 \left(1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2}\right)^2 (\delta^{ab}\delta^{cd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{t - m_\rho^2} (Q_{2\beta} - Q_{4\beta}) (Q_3^\beta - Q_5^\beta) \\
 &= -ig^2 \left(1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2}\right)^2 (\delta^{ab}\delta^{cd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{t - m_\rho^2} (Q_2 \cdot Q_3 - Q_3 \cdot Q_4 - Q_2 \cdot Q_5 + Q_4 \cdot Q_5).
 \end{aligned}$$

Mit (siehe Abbildungen 3.8 und 3.10)

$$\begin{aligned}
 s &= (Q_2 + Q_3)^2 = (Q_4 + Q_5)^2 \\
 u &= (Q_2 + Q_5)^2 = (Q_3 + Q_4)^2
 \end{aligned}$$

können die Produkte von Viererimpulsen in $\mathcal{M}_{\pi/\rho,t}$ ersetzt werden und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\pi/\rho,t} &= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2})^2 (\delta^{ab}\delta^{cd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{t - m_\rho^2} \\
&\quad \times (\frac{s}{2} - m_\pi^2 - \frac{u}{2} + m_\pi^2 - \frac{u}{2} + m_\pi^2 + \frac{s}{2} - m_\pi^2) \\
&= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2})^2 (\delta^{ab}\delta^{cd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{1}{t - m_\rho^2} (s - u) \\
&= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2})^2 \frac{1}{t - m_\rho^2} [\delta^{ab}\delta^{cd}(s - u) - \delta^{ad}\delta^{bc}(s - u)]. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

U-Kanal. Den Vertex (3.36) passen wir den Bezeichnungen auf der Abbildung 3.10 an.

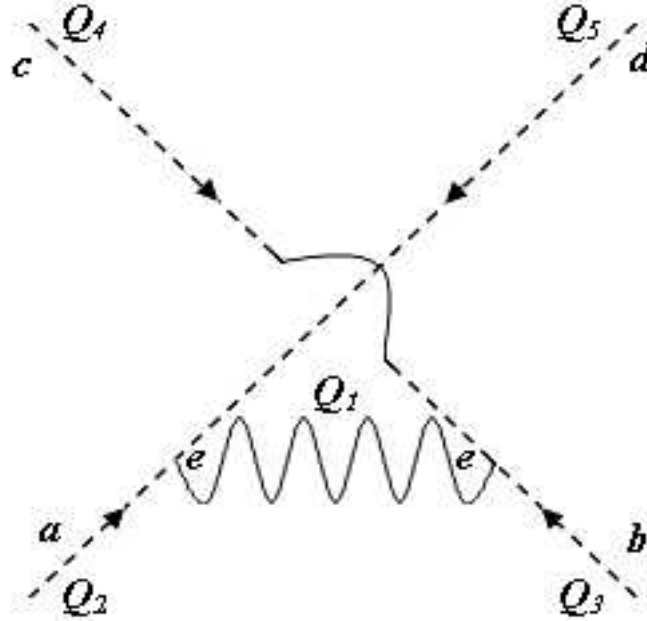


Abbildung 3.10: Pion-Pion-Streuung, mit Rho-Meson als virtuellem Meson - u-Kanal

Im Vertex (3.36) ersetzen wir $Q_3 \leftrightarrow Q_5$ und die dazugehörigen Isospin-Indizes b und d , um den (Q_2, Q_5) -Vertex aus dem Feynman-Diagramm *Abbildung 3.10* zu erhalten; für den (Q_3, Q_4) -Vertex aus derselben Abbildung verfahren wir analog, und erhalten

für $\mathcal{M}_{\pi/\rho, u}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\pi/\rho, u} &= i^2 (-i) (-i)^2 g^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 \epsilon^{eda} \epsilon^{ecb} \frac{1}{u - m_\rho^2} \\
 &\quad \times (Q_2^\alpha - Q_5^\alpha) [g_{\alpha\beta} - \frac{(Q_2 + Q_5)_\alpha (Q_2 + Q_5)_\beta}{s}] (Q_3^\beta - Q_4^\beta) \\
 &= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 (\delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ac} \delta^{bd}) \frac{1}{u - m_\rho^2} [(Q_2^\alpha - Q_5^\alpha) g_{\alpha\beta} (Q_3^\beta - Q_4^\beta)] \\
 &\quad + ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 (\delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ac} \delta^{bd}) \frac{1}{u - m_\rho^2} [(Q_2^\alpha - Q_5^\alpha) \frac{(Q_2 + Q_5)_\alpha (Q_2 + Q_5)_\beta}{s} \\
 &\quad \times (Q_3^\beta - Q_4^\beta)] \\
 &\equiv -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 (\delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ac} \delta^{bd}) \frac{1}{u - m_\rho^2} [(Q_2^\alpha - Q_5^\alpha) g_{\alpha\beta} (Q_3^\beta - Q_4^\beta)] \\
 &= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 (\delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ac} \delta^{bd}) \frac{1}{u - m_\rho^2} (Q_2 \cdot Q_3 - Q_3 \cdot Q_5 - Q_2 \cdot Q_4 + Q_4 \cdot Q_5).
 \end{aligned}$$

Mit (siehe Abbildungen 3.8 und 3.9)

$$\begin{aligned}
 s &= (Q_2 + Q_3)^2 = (Q_4 + Q_5)^2 \\
 t &= (Q_2 + Q_4)^2 = (Q_3 + Q_5)^2
 \end{aligned}$$

ist dann

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\pi/\rho, u} &= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 (\delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ac} \delta^{bd}) \frac{1}{u - m_\rho^2} \\
 &\quad \times (\frac{s}{2} - m_\pi^2 - \frac{t}{2} + m_\pi^2 - \frac{t}{2} + m_\pi^2 + \frac{s}{2} - m_\pi^2) \\
 &= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 (\delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ac} \delta^{bd}) \frac{1}{u - m_\rho^2} (s - t) \\
 &= -ig^2 (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 \frac{1}{u - m_\rho^2} [\delta^{ab} \delta^{cd} (s - t) - \delta^{ac} \delta^{bd} (s - t)]. \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Mit (3.38), (3.39) und (3.40) ergibt sich für den **Anteil $\mathcal{M}_{\pi/\rho}$ an der Gesamt-Streuamplitude \mathcal{M}** :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\pi/\rho} &= \mathcal{M}_{\pi/\rho, s} + \mathcal{M}_{\pi/\rho, t} + \mathcal{M}_{\pi/\rho, u} \\
 &= -ig^2 \{ \delta^{ab} \delta^{cd} [(1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2})^2 \frac{s - u}{t - m_\rho^2} + (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 \frac{s - t}{u - m_\rho^2}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta^{ac} \delta^{bd} \left[(1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 \frac{t-u}{s-m_\rho^2} + (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 \frac{t-s}{u-m_\rho^2} \right] \\
& + \delta^{ad} \delta^{bc} \left[(1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 \frac{u-t}{s-m_\rho^2} + (1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2})^2 \frac{u-s}{t-m_\rho^2} \right] \}. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Demzufolge ist die *gesamte Streuamplitude der Pion-Pion-Streuung auf dem Baumgraphenniveau bis zur zweiten Ordnung* mit (3.29), (3.35) und (3.41):

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = & i \delta^{ab} \delta^{cd} \{ g^2 w^2 Z^4 s - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) Z^4 \\
& + \frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 [(t - 2m_\pi^2)^2 + (u - 2m_\pi^2)^2 - 2(s - 2m_\pi^2)^2] \\
& - [2m_\pi^2 g w Z^2 - g(1 + Z^2) w (2m_\pi^2 - s) - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2]^2 \frac{1}{s - m_\sigma^2} \\
& + g^2 [(1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2})^2 \frac{u-s}{t-m_\rho^2} + (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 \frac{t-s}{u-m_\rho^2}] \} \\
& + i \delta^{ac} \delta^{bd} \{ g^2 w^2 Z^4 t - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) Z^4 \\
& + \frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 [(s - 2m_\pi^2)^2 + (u - 2m_\pi^2)^2 - 2(t - 2m_\pi^2)^2] \\
& - [2m_\pi^2 g w Z^2 - g(1 + Z^2) w (2m_\pi^2 - t) - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2]^2 \frac{1}{t - m_\sigma^2} \\
& + g^2 [(1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 \frac{u-t}{s-m_\rho^2} + (1 - w^2 Z^2 \frac{u}{2})^2 \frac{s-t}{u-m_\rho^2}] \} \\
& + i \delta^{ad} \delta^{bc} \{ g^2 w^2 Z^4 u - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) Z^4 \\
& + \frac{1}{4} g^2 w^4 Z^4 [(s - 2m_\pi^2)^2 + (t - 2m_\pi^2)^2 - 2(u - 2m_\pi^2)^2] \\
& - [2m_\pi^2 g w Z^2 - g(1 + Z^2) w (2m_\pi^2 - u) - 2(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2]^2 \frac{1}{u - m_\sigma^2} \\
& + g^2 [(1 - w^2 Z^2 \frac{s}{2})^2 \frac{t-u}{s-m_\rho^2} + (1 - w^2 Z^2 \frac{t}{2})^2 \frac{s-u}{t-m_\rho^2}] \}. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Streuamplitude und Streulängen

4.1 Mandelstam-Variablen im Schwerpunktsystem

Für die weitere Verarbeitung des Ergebnisses für die Streuamplitude (3.42) beschäftigen wir uns zunächst mit den Definitionen der Mandelstam-Variablen (3.19) - (3.21) im Schwerpunktsystem. In diesem Bezugssystem ist $\vec{q}_1 = -\vec{q}_2$ und $\vec{q}_3 = -\vec{q}_4$; es ist bekanntlich $E_i = \sqrt{q_i^2 + m_\pi^2}, i = 1, \dots, 4$.

So gilt beispielsweise für die **Variable** s :

$$s = (Q_1 + Q_2)^2 = \left[\begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{q}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_2 \\ -\vec{q}_1 \end{pmatrix} \right]^2 = (E_1 + E_2)^2 = 4E_1^2 = 4(m_\pi^2 + \vec{q}_1^2). \quad (4.1)$$

Für die **Mandelstam-Variable** t ergibt sich (die entsprechende Formel wird auf die physikalische Bedingung angepasst, dass die auslaufenden Impulse als negativ gezählt werden):

$$t = (Q_1 - Q_3)^2 = \begin{pmatrix} E_1 - E_3 \\ \vec{q}_1 - \vec{q}_3 \end{pmatrix}^2 = (E_1 - E_3)^2 - (\vec{q}_1 - \vec{q}_3)^2 = (E_1^2 - \vec{q}_1^2) + (E_3^2 - \vec{q}_3^2) - 2E_1E_3 + 2\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_3 = 2m_\pi^2 - 2E_1E_3 + 2|\vec{q}_1||\vec{q}_3| \cos \theta,$$

wobei θ der Winkel zwischen dem Eingangsimpuls \vec{q}_1 und dem Ausgangsimpuls \vec{q}_3 ist. Die Erhaltung der Energie E erzwingt, dass die Gleichheit der Eingangs- und Ausgangsimpuls**eträge** gegeben ist: $|\vec{q}_1| = |\vec{q}_2| = |\vec{q}_3| = |\vec{q}_4|$ (zusätzlich zu den schon bekannten Beziehungen $\vec{q}_1 = -\vec{q}_2; \vec{q}_3 = -\vec{q}_4$).

Dann ist

$$t = 2m_\pi^2 - 2E_1^2 + 2|\vec{q}_1|^2 \cos \theta = -2\vec{q}_1^2 + 2|\vec{q}_1|^2 \cos \theta = -2\vec{q}_1^2(1 - \cos \theta) \quad (4.2)$$

$$\iff \cos \theta = \frac{t}{2\vec{q}_1^2} + 1.$$

Für die ***u*-Variable** gilt die Formel (3.22) - also ist $s+t+u = 4m_\pi^2$, oder, bei bekanntem s und t :

$$u = 4m_\pi^2 - s - t. \quad (4.3)$$

4.2 Anpassung der Konstanten in der Streuamplitude \mathcal{M} an die physikalischen Größen

Um aus der Streuamplitude physikalische Werte berechnen zu können, werden nun die in der Streuamplitude vorhandenen Konstanten (freien Parameter) durch die physikalischen Größen ausgedrückt.

Dazu bemerken wir zunächst, dass in der Lagrange-Dichte (2.35) die folgenden Massenterme vorhanden sind:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} [\mu^2 - c + 3(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})\phi^2]\sigma^2, \quad - \frac{1}{2} [\mu^2 - c + (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})\phi^2]Z^2\vec{\pi}^2, \\ & - \frac{1}{2} [\mu^2 + c + (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})\phi^2]Z^2\eta^2, \quad - \frac{1}{2} [\mu^2 + c + (\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda)\phi^2]\vec{a}_0^2, \\ & \frac{m^2}{2} (\omega^\mu)^2, \quad \frac{m^2}{2} (\vec{\rho}^\mu)^2, \quad \frac{m^2 + g^2\phi^2}{2} (f_1^\mu)^2, \quad \frac{m^2 + g^2\phi^2}{2} (\vec{a}_1^\mu)^2. \end{aligned}$$

Daraus ist sofort ersichtlich, dass dieses Modell *gleiche Massen* für das ω - und ρ -Meson ($m_\omega = m_\rho$) und gleiche Massen für das f_1 - und a_1 -Meson ($m_{f_1} = m_{a_1}$) vorhersagt. Dass dies den experimentellen Daten näherungsweise entspricht, ist aus Kapitel 1.4.4 ($m_\omega \approx 782\text{MeV}$; $m_\rho \approx 776\text{MeV}$) und Kapitel 1.4.5 ($m_{f_1} \approx 1282\text{MeV}$; $m_{a_1} \approx 1230\text{MeV}$) bekannt.

Des Weiteren ist

$$m_{f_1}^2 = m_{a_1}^2 = m_\rho^2 + g^2\phi^2. \quad (4.4)$$

Da wir die **Konstante** Z laut (2.31) und (2.32) als $Z = \frac{m^2 + g^2\phi^2}{m^2}$ definiert haben,

folgt¹

$$Z^2 = \frac{m_\rho^2 + g^2 \phi^2}{m_\rho^2} = \frac{m_{a_1}^2}{m_\rho^2} \implies Z = \frac{m_{a_1}}{m_\rho} \approx 1.57. \quad (4.5)$$

Da $\phi = Z f_\pi$ (f_π : Pionenzerfallskonstante; $f_\pi \approx 91.9 \text{ MeV}$ [1]) $\implies \phi \approx 144.28 \text{ MeV}$, kann (4.4) nach g^2 aufgelöst werden und es folgt für die **Konstante** g :

$$g^2 = \frac{m_{a_1}^2 - m_\rho^2}{Z^2 f_\pi^2} \approx 43.22. \quad (4.6)$$

In der Streuamplitude (3.42) ist die **Konstante** w ebenfalls vorhanden, die in (2.22) definiert wurde; mit (4.6) folgt dann:

$$w = \frac{g\phi}{m^2 + (g\phi)^2} = \frac{\sqrt{m_{a_1}^2 - m_\rho^2}}{m_{a_1}^2} \approx 6.27 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{MeV}}. \quad (4.7)$$

Um den Wert für die **Konstante** c zu bestimmen, ziehen wir den Massenterm für das Pion von dem Massenterm für das η -Meson ab und erhalten:

$$2c = \frac{m_\eta^2 - m_\pi^2}{Z^2} \iff c = \frac{m_\eta^2 - m_\pi^2}{2Z^2} \approx 57219 \text{ MeV}^2 \quad (4.8)$$

[Z aus (4.5) bekannt; $m_\eta \approx 548 \text{ MeV}$ und $m_\pi \approx 135 \text{ MeV}$ nach den Angaben im Abschnitt 1.4.3].

Um die **Konstante** μ zu bestimmen, addieren wir die Massenterme für das Pion und das η -Meson:

$$\frac{1}{Z^2} (m_\eta^2 + m_\pi^2) = 2\mu^2 + 2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi^2.$$

Da aus dem Sigma-Massenterm folgt, dass $\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} = \frac{m_\sigma^2 - \mu^2 + c}{3}$ ist, ergibt sich aus dem obigen Ausdruck:

$$\frac{1}{Z^2} (m_\eta^2 + m_\pi^2) = \frac{4}{3}\mu^2 + \frac{2}{3}m_\sigma^2 + \frac{2}{3}c.$$

Mit (4.8) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\mu^2 + \frac{2}{3}m_\sigma^2 + \frac{1}{3}\frac{m_\eta^2 - m_\pi^2}{Z^2} &= \frac{1}{Z^2} (m_\eta^2 + m_\pi^2) \\ \iff \frac{4}{3}\mu^2 &= \frac{2}{3}\frac{1}{Z^2}m_\eta^2 + \frac{4}{3}\frac{1}{Z^2}m_\pi^2 - \frac{2}{3}m_\sigma^2 \\ \iff \mu^2 &= \frac{\frac{1}{Z^2}m_\eta^2 - m_\sigma^2}{2} + \frac{1}{Z^2}m_\pi^2 \approx -111690 \text{ MeV}^2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

¹Die Masse des f_1 -Teilchens wird auf die Masse des a_1 -Teilchens angepasst.

wobei für die Sigma-Masse der Standardwert $m_\sigma = 600\text{MeV}$ genommen wurde.²

Um den Wert für die **Konstante** λ zu erhalten, ziehen wir den η -Massenterm von dem a_0 -Massenterm ab:

$$m_{a_0}^2 - \frac{1}{Z^2} m_\eta^2 = \lambda \phi^2$$

oder, mit $\phi = Z f_\pi$:

$$\lambda = \frac{m_{a_0}^2 - \frac{1}{Z^2} m_\eta^2}{Z^2 f_\pi^2} \approx 40.76, \quad (4.10)$$

wobei für die Masse des a_0 -Teilchens $m_{a_0} \approx 985\text{MeV}$ nach den Angaben in Abschnitt 1.4.2 genommen wurde.

Für die **Konstante** λ_1 folgt aus dem Pionen-Massenterm:

$$\lambda_1 = \frac{\frac{1}{Z^2} m_\pi^2 - \mu^2 + c - \frac{\lambda}{2} \phi^2}{\phi^2}.$$

Setzt man in den obigen Ausdruck die Ausdrücke (4.8), (4.9), (4.10) sowie $\phi = Z f_\pi$ ein, so ergibt sich

$$\lambda_1 = \frac{m_\sigma^2 - m_{a_0}^2 + \frac{1}{Z^2} (m_\eta^2 - m_\pi^2)}{2 Z^2 f_\pi^2} \approx -11.91, \quad (4.11)$$

das heißt,

$$\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} = \frac{m_\sigma^2 - \frac{1}{Z^2} m_\pi^2}{2 Z^2 f_\pi^2} \approx 8.47. \quad (4.12)$$

Für die nachfolgenden Berechnungen werden sich diese Relationen als nützlich erweisen:

$$g^2 w^2 Z^4 = \frac{Z^2}{f_\pi^2} \left(1 - \frac{1}{Z^2}\right)^2 \quad (4.13)$$

[sie folgt aus (4.5), (4.6) und (4.7)];

$$2 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right) Z^4 = \frac{Z^2}{f_\pi^2} \left(m_\sigma^2 - \frac{1}{Z^2} m_\pi^2\right) \quad (4.14)$$

²Das Vorzeichen des Parameters μ^2 wurde im Zuge der spontanen Symmetriebrechung geändert, wodurch μ imaginär und sein Quadrat negativ wurde.

[folgt aus (4.5) und (4.12)];

$$gw = \frac{1}{Zf_\pi} \left(1 - \frac{1}{Z^2}\right), \quad (4.15)$$

beziehungsweise

$$gw(1 + Z^2) = \frac{Z}{f_\pi} \left(1 - \frac{1}{Z^4}\right) \quad (4.16)$$

[folgt aus (4.5), (4.6) und (4.7)];

$$2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2 = \frac{Z}{f_\pi} \left(m_\sigma^2 - \frac{1}{Z^2}m_\pi^2\right) \quad (4.17)$$

[folgt aus (4.5) und (4.12)].

4.3 Die Streuamplitude an der Schwelle im chiralen Limes

Nun kann die Streuamplitude im chiralen Limes (Masse des Goldstone-Bosons $m_\pi \rightarrow 0$) berechnet werden, wobei alle Pionenenergien zu null werden [folglich $s = t = u = 0$, gemäß (4.1), (4.2) und (4.3)]. In diesem Fall ändert sich der Wert der in (3.42) vorhandenen Konstante $\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}$, denn $\lambda_1 + \frac{\lambda}{2} = \frac{m_\sigma^2 - \frac{1}{Z^2}m_\pi^2}{2\phi^2} \rightarrow \frac{m_\sigma^2}{2\phi^2} \equiv \frac{m_\sigma^2}{2Z^2f_\pi^2}$.

Dann wird die Streuamplitude zu

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= i\delta^{ab}\delta^{cd} \left\{-2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 + [2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2]^2 \frac{1}{m_\sigma^2}\right\} \\ &\quad + i\delta^{ac}\delta^{bd} \left\{-2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 + [2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2]^2 \frac{1}{m_\sigma^2}\right\} \\ &\quad + i\delta^{ad}\delta^{bc} \left\{-2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 + [2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2]^2 \frac{1}{m_\sigma^2}\right\} \\ &= -i(\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{bc}) \left\{2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 \left[1 - 2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi^2 \frac{1}{m_\sigma^2}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Werden nun die Gleichungen (4.12) und $\phi = Zf_\pi$ in den obigen Ausdruck eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -i(\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{bc}) \frac{m_\sigma^2}{Z^2f_\pi^2} Z^4 \left(1 - \frac{m_\sigma^2}{Z^2f_\pi^2} Z^2f_\pi^2 \frac{1}{m_\sigma^2}\right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Pion-Pion-Streuamplitude verschwindet an der Schwelle im chiralen Limes.

4.4 Berechnung von Streulängen

Da in dieser Arbeit die elastische Pionenstreuung mit Vernachlässigung elektromagnetischer Wechselwirkung betrachtet wird, lassen sich die Komponenten der Streuamplitude zum Isospin $I = 0, 1, 2$ folgendermaßen ausdrücken [17]:

$$T^0(s, t) = 3A(s, t, u) + A(t, u, s) + A(u, s, t) \quad (4.19)$$

$$T^1(s, t) = A(t, u, s) - A(u, s, t) \quad (4.20)$$

$$T^2(s, t) = A(t, u, s) + A(u, s, t), \quad (4.21)$$

wobei $A(s, t, u)$ dem Anteil der Streuamplitude (3.42) entspricht, dessen Vorfaktor $i\delta^{ab}\delta^{cd}$ ist; $A(t, u, s)$ dem Anteil der Streuamplitude (3.42) entspricht, dessen Vorfaktor $i\delta^{ac}\delta^{bd}$ ist und $A(u, s, t)$ dem Anteil der Streuamplitude (3.42) entspricht, dessen Vorfaktor $i\delta^{ac}\delta^{bd}$ ist. Die Amplitudenkomponenten $T^{0,1,2}$ hängen von der Mandelstam-Variable u nicht ab, da diese mittels (3.22) durch die anderen beiden Variablen ausgedrückt werden kann.

Nun gilt für die Entwicklung nach den Partialwellenamplituden $t_l^I(s)$:

$$T^I(s, t) = 32\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) t_l^I(s), \quad (4.22)$$

wobei $P_l(\cos\theta)$ die Legendre-Polynome sind und t durch (4.2) sowie s durch (4.1) gegeben ist³ [der Raumimpuls-Index in (4.1) und (4.2) sei unterdrückt].

Dann lässt sich (4.22) umkehren:

$$32\pi (2l+1) t_l^I(s) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\cos\theta) T^I(\cos\theta) d\cos\theta$$

oder

$$t_l^I(s) = \frac{1}{64\pi} \int_{-1}^1 P_l(\cos\theta) T^I(\cos\theta) d\cos\theta. \quad (4.23)$$

³In der Formel (4.22) ist die t -Abhängigkeit in den Legendre-Polynomen $P_l(\cos\theta)$ mittels (4.2) enthalten, die s -Abhängigkeit hingegen in den Partialwellenamplituden $t_l^I(s)$.

Danach berechnen sich die Streulängen gemäß

$$\operatorname{Re} t_l^I(s) = q^{2l} [a_l^I + q^2 b_l^I + O(q^4)]; \quad (4.24)$$

dabei sind für das Modell in dieser Arbeit die Partialwellenamplituden stets reell.

In dieser Arbeit werden alle Betrachtungen an der Schwelle gemacht ($\vec{q} = 0$). Für den Fall $l = 0$ ist dann möglich, in den Lorentz-invarianten Amplituden aus (4.19) - (4.21) die Werte der Mandelstam-Variablen s und t gemäß (4.1) und (4.2) festzusetzen: $s = 4m_\pi^2$, $t = 0$ ($\Rightarrow u = 0$).

Um dann die s -Wellen-Streulängen a_0^0 , a_0^1 und a_0^2 zu berechnen, ist es zunächst notwendig, $T^{0,1,2}$ zu bestimmen. Dies wird in den nachfolgenden Abschnitten immer als Erstes durchgeführt.

4.4.1 Berechnung der Streulänge a_0^0

Bestimmung von T^0 . Die Berechnung von T^0 gemäß (4.19) erfolgt komponentenweise.

- $A(s, t, u)$ kann an der Streuamplitude (3.42) abgelesen werden. Es ergibt sich dann bei den oben genannten Bedingungen:

$$\begin{aligned} A(s, t, u) &= g^2 w^2 Z^4 4m_\pi^2 - 2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right) Z^4 \\ &\quad - \left[4m_\pi^2 gwZ^2 + 2m_\pi^2 gw - 2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2\right]^2 \frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} \\ &\quad + 8g^2 \frac{m_\pi^2}{m_\rho^2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

- Für $A(t, u, s)$ gilt an der Schwelle:

$$\begin{aligned} &-2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right) Z^4 + [-2m_\pi^2 gw - 2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2]^2 \frac{1}{m_\sigma^2} - g^2 \frac{4m_\pi^2}{m_\rho^2} \\ &= -2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right) Z^4 + 4[m_\pi^2 gw + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2]^2 \frac{1}{m_\sigma^2} - g^2 \frac{4m_\pi^2}{m_\rho^2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

- Für $A(u, s, t)$ gilt an der Schwelle:

$$\begin{aligned}
& -2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 + [-2m_\pi^2 gw - 2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2]^2 \frac{1}{m_\sigma^2} - g^2 \frac{4m_\pi^2}{m_\rho^2} \\
& = -2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 + 4[m_\pi^2 gw + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2]^2 \frac{1}{m_\sigma^2} - g^2 \frac{4m_\pi^2}{m_\rho^2}. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Aus (4.26) und (4.27) ist ersichtlich, dass $A(t, u, s) = A(u, s, t)$ ist.

Mit (4.19), und (4.25) - (4.27) ergibt sich also

$$\begin{aligned}
T^0 &= 3g^2 w^2 Z^4 4m_\pi^2 - 6\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 \\
& - 3[4m_\pi^2 gw Z^2 + 2m_\pi^2 gw - 2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2]^2 \frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} + 24g^2 \frac{m_\pi^2}{m_\rho^2} \\
& - 4\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 + 8[m_\pi^2 gw + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2]^2 \frac{1}{m_\sigma^2} - 8g^2 \frac{m_\pi^2}{m_\rho^2} \\
& = 12m_\pi^2 g^2 w^2 Z^4 - 10\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 + 8[m_\pi^2 gw + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2]^2 \frac{1}{m_\sigma^2} \\
& - 12[m_\pi^2 gw(1 + 2Z^2) - \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2]^2 \frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} + 16g^2 \frac{m_\pi^2}{m_\rho^2}. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Aus (4.23) ist ersichtlich, dass die Integration über den Kosinus nur den Faktor 2 liefern wird; daher ergibt sich für die Partialwellenamplitude:

$$32\pi t_l^0(s) = T^0. \quad (4.29)$$

An (4.24) kann man ablesen, dass für die s -Welle bei $q \rightarrow 0$ die Gleichheit der Partialwellenamplitude und der Streulänge gegeben ist [$t_0^0(4m_\pi^2) = a_0^0$], so dass sich mit (4.29)

$$a_0^0 = \frac{1}{32\pi} T^0 \quad (4.30)$$

ergibt.

Nun empfiehlt es sich, die Konstanten im obigen Ausdruck [beziehungsweise in (4.28)] durch die physikalischen Werte zu ersetzen. Dadurch werden die Streulängen nur noch von Mesonenmassen und der Pionzerfallskonstante abhängen.

$$\begin{aligned}
T^0 &= \frac{12m_\pi^2 g^2 w^2 Z^4 (4m_\pi^2 - m_\sigma^2) m_\sigma^2}{(4m_\pi^2 - m_\sigma^2) m_\sigma^2} - \frac{10(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) Z^4 (4m_\pi^2 - m_\sigma^2) m_\sigma^2}{(4m_\pi^2 - m_\sigma^2) m_\sigma^2} \\
&+ \frac{8(4m_\pi^2 - m_\sigma^2) [m_\pi^2 gw + (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2]^2}{(4m_\pi^2 - m_\sigma^2) m_\sigma^2} - \frac{12m_\sigma^2 [m_\pi^2 gw(1 + 2Z^2) - (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2]^2}{(4m_\pi^2 - m_\sigma^2) m_\sigma^2} \\
&+ 16g^2 \frac{m_\pi^2}{m_\rho^2}. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Für die weitere Rechnung sind nur die Zähler der Brüche im obigen Ausdruck von Interesse, und zwecks Übersichtlichkeit werden sie separat behandelt.

- Der Zähler der ersten beiden Brüche in (4.31).

Es ist

$$\begin{aligned}
&12m_\pi^2 g^2 w^2 Z^4 (4m_\pi^2 - m_\sigma^2) m_\sigma^2 - 10(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) Z^4 (4m_\pi^2 - m_\sigma^2) m_\sigma^2 \\
&= 48m_\pi^4 m_\sigma^2 g^2 w^2 Z^4 - 12m_\pi^2 m_\sigma^4 g^2 w^2 Z^4 - 40m_\pi^2 m_\sigma^2 (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) Z^4 \\
&\quad + 10m_\sigma^4 (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) Z^4.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formeln (4.13) und (4.14) ergibt sich dann⁴

$$\begin{aligned}
&12m_\pi^2 g^2 w^2 Z^4 (4m_\pi^2 - m_\sigma^2) m_\sigma^2 - 10(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) Z^4 (4m_\pi^2 - m_\sigma^2) m_\sigma^2 \\
&= m_\pi^4 m_\sigma^2 48g^2 w^2 Z^4 + m_\pi^2 m_\sigma^4 \frac{1}{f_\pi^2} (-12Z^2 + 24 - \frac{12}{Z^2}) \\
&\quad + m_\pi^2 m_\sigma^2 \frac{1}{f_\pi^2} (-20Z^2 m_\sigma^2 + 20m_\pi^2) + m_\sigma^4 \frac{1}{f_\pi^2} (5Z^2 m_\sigma^2 - 5m_\pi^2) \\
&= m_\pi^4 m_\sigma^2 48g^2 w^2 Z^4 + m_\pi^2 m_\sigma^4 \frac{1}{f_\pi^2} (-12Z^2 + 24 - \frac{12}{Z^2}) + m_\pi^2 m_\sigma^4 \frac{1}{f_\pi^2} (-20Z^2) \\
&\quad + 20m_\pi^4 m_\sigma^2 \frac{1}{f_\pi^2} + m_\sigma^6 \frac{1}{f_\pi^2} (5Z^2) - 5m_\pi^2 m_\sigma^4 \frac{1}{f_\pi^2} \\
&= m_\pi^4 m_\sigma^2 48g^2 w^2 Z^4 + \frac{1}{f_\pi^2} [m_\pi^2 m_\sigma^4 (-32Z^2 + 19 - \frac{12}{Z^2}) + 20m_\pi^4 m_\sigma^2 \\
&\quad + m_\sigma^6 (5Z^2)]. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

⁴Der erste Term bleibt unberührt, da er sich später mit einem anderen Term aus dem letzten Bruch in (4.31) aufheben wird.

- Der Zähler des dritten Bruchs in (4.31).

Es ist

$$\begin{aligned}
& 8(4m_\pi^2 - m_\sigma^2) [m_\pi^2 gw + (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2]^2 \\
&= (32m_\pi^2 - 8m_\sigma^2) [m_\pi^4 g^2 w^2 + 2m_\pi^2 gw (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2 + (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})^2 \phi^2 Z^4] \\
&= (32m_\pi^6 - 8m_\pi^4 m_\sigma^2) g^2 w^2 + (64m_\pi^4 - 16m_\pi^2 m_\sigma^2) gw (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2 \\
&\quad + (32m_\pi^2 - 8m_\sigma^2) (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})^2 \phi^2 Z^4.
\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Formeln (4.15) und (4.17) folgt:

$$\begin{aligned}
& 8(4m_\pi^2 - m_\sigma^2) [m_\pi^2 gw + (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2]^2 \\
&= \frac{1}{f_\pi^2} [m_\pi^6 (\frac{32}{Z^2} - \frac{64}{Z^4} + \frac{32}{Z^6}) + m_\pi^4 m_\sigma^2 (-\frac{8}{Z^2} + \frac{16}{Z^4} - \frac{8}{Z^6}) \\
&\quad + (m_\pi^4 m_\sigma^2 - \frac{m_\pi^6}{Z^2}) (32 - \frac{32}{Z^2}) + (m_\pi^2 m_\sigma^4 - \frac{m_\pi^4 m_\sigma^2}{Z^2}) (-8 + \frac{8}{Z^2}) + m_\pi^2 m_\sigma^4 \cdot 8Z^2 \\
&\quad - 16m_\pi^4 m_\sigma^2 + m_\pi^6 \frac{8}{Z^2} + m_\sigma^6 (-2Z^2) + 4m_\pi^2 m_\sigma^4 + m_\pi^4 m_\sigma^2 \cdot \frac{-2}{Z^2}] \\
&= \frac{1}{f_\pi^2} [m_\pi^6 (\frac{8}{Z^2} - \frac{32}{Z^4} + \frac{32}{Z^6}) + m_\pi^2 m_\sigma^4 (8Z^2 - 4 + \frac{8}{Z^2}) \\
&\quad + m_\pi^4 m_\sigma^2 (16 - \frac{34}{Z^2} + \frac{8}{Z^4} - \frac{8}{Z^6}) + m_\sigma^6 (-2Z^2)]. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

- Der Zähler des vierten Bruchs in (4.31). Es ist

$$\begin{aligned}
& -12m_\sigma^2 [m_\pi^2 gw(1 + 2Z^2) - (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2]^2 \\
&= -12m_\sigma^2 [m_\pi^4 g^2 w^2 (1 + 4Z^2 + 4Z^4) - 2m_\pi^2 gw(1 + 2Z^2) (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2 \\
&\quad + (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})^2 \phi^2 Z^4] \\
&= -12m_\pi^4 m_\sigma^2 g^2 w^2 (1 + 4Z^2) - 48m_\pi^4 m_\sigma^2 g^2 w^2 Z^4 \\
&\quad + 24m_\pi^2 m_\sigma^2 (1 + 2Z^2) gw (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2 - 12m_\sigma^2 (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2})^2 \phi^2 Z^4. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Der dritte Term im Ausdruck (4.34) hebt sich mit dem ersten Term im Ausdruck (4.32) auf, und kann im Folgenden ausgelassen werden. Die Anwendung

der Formeln (4.13), (4.15) und (4.17) ergibt dann

$$\begin{aligned}
& -12 m_\sigma^2 [m_\pi^2 g w (1 + 2Z^2) - (\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}) \phi Z^2]^2 \\
& = \frac{1}{f_\pi^2} [m_\pi^2 m_\sigma^4 (24Z^2 - 6 - \frac{12}{Z^2}) + m_\pi^4 m_\sigma^2 (-72 + \frac{93}{Z^2} - \frac{12}{Z^4} - \frac{12}{Z^6}) + m_\sigma^6 (-3Z^2)].
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Mit der Summe von (4.32), (4.33) und (4.35) ergibt sich die Summe der vier Zähler in (4.31) zu

$$\frac{1}{f_\pi^2} [m_\pi^6 (\frac{8}{Z^2} - \frac{32}{Z^4} + \frac{32}{Z^6}) + m_\pi^4 m_\sigma^2 (-36 + \frac{59}{Z^2} - \frac{4}{Z^4} - \frac{20}{Z^6}) + m_\pi^2 m_\sigma^4 (9 - \frac{16}{Z^2})]. \tag{4.36}$$

Somit ist T^0 aus (4.31) bekannt; der Wert von T^0 ist aber gemäß (4.30) bis auf eine Konstante das Gleiche wie die Streulänge a_0^0 . Mit (4.30) folgt also:

$$\begin{aligned}
a_0^0 & = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{f_\pi^2} \left[\left(\frac{1}{4Z^2} - \frac{1}{Z^4} + \frac{1}{Z^6} \right) \frac{m_\pi^6}{(4m_\pi^2 - m_\sigma^2) m_\sigma^2} \right. \right. \\
& \quad + \left(-\frac{9}{8} + \frac{59}{32Z^2} - \frac{1}{8Z^4} - \frac{5}{8Z^6} \right) \frac{m_\pi^4}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{9}{32} - \frac{1}{2Z^2} \right) \frac{m_\pi^2 m_\sigma^2}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} \right] + \frac{1}{2} g^2 \frac{m_\pi^2}{m_\rho^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Für die Standardwerte $m_\sigma = 600\text{MeV}$, $m_\pi = 135\text{MeV}$ und $Z = \frac{m_{a_1}}{m_\rho} = 1.585051546$ mit $m_{a_1} = 1230\text{MeV}$ und $m_\rho = 776\text{MeV}$ ergibt sich die s -Wellenstreulänge a_0^0 zu

$$a_0^0 = 0.1555. \tag{4.38}$$

Die Formel (4.37) zeigt, dass die Streulänge a_0^0 von der Sigma-Masse abhängt (die experimentell bisher nur ungenau bestimmt wurde, siehe Abschnitt 1.4.2). Die Abhängigkeit der Streulänge von der Sigma-Masse ist auf der unteren Abbildung angegeben.

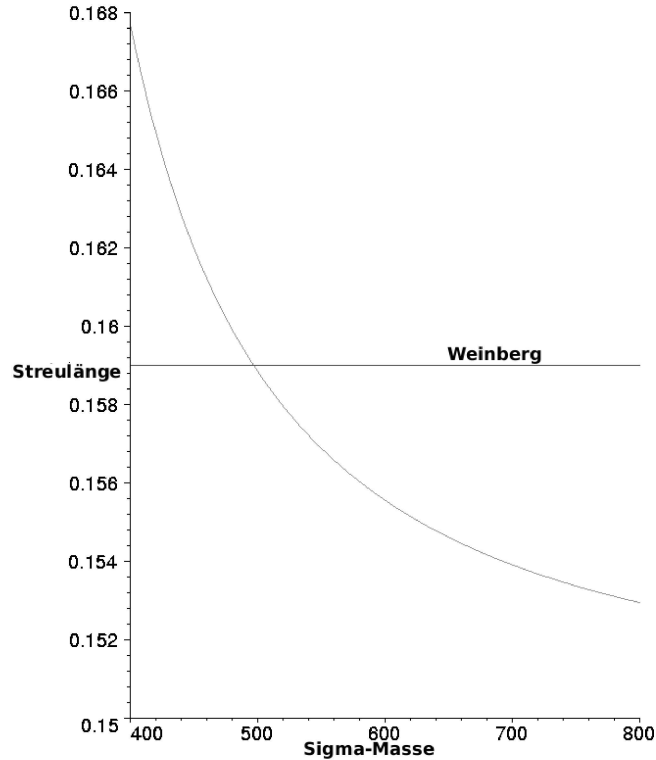


Abbildung 4.1: Abhängigkeit der Streulänge a_0^0 von der Sigma-Masse m_σ

Auf der obigen Abbildung ist zum Vergleich der von Weinberg [18] mithilfe des Niedrig-Energie-Theorems (als konstant) berechnete Wert der Streulänge $a_0^0 = 0.159$ angegeben. Der in dieser Arbeit berechnete Wert ist also etwas kleiner als der von Weinberg vorhergesagte; der Weinbergsche Wert der Streulänge entsteht bei der Sigma-Masse von etwa $m_\sigma \simeq 500\text{MeV}$.

Beide Werte der Streulänge weichen allerdings von den experimentellen Ergebnissen ab; der in der Literatur oftmals zitierte Wert von Nagels *et al.* [19] beträgt $a_0^0 = 0.26 \pm 0.05$ und wird durch das in dieser Arbeit berechnete Ergebnis also unterboten. Inzwischen sind auch andere, neuere Messdaten bekannt:

- laut Meißner *et al.* [20] ist $a_0^0 = 0.23 \pm 0.08$;
- andere Experimente führen zu $a_0^0 = 0.228 \pm 0.012 \pm 0.003$, beziehungsweise $0.203 \pm 0.033 \pm 0.004$ ([21]; die unterschiedlichen Werte sind auf die unterschiedlichen Datenauswertungen zurückzuführen).

Daraus ist ersichtlich, dass der Wert (4.38) im Fehlertoleranzintervall von [20] liegt - was womöglich als interessant erscheinen mag, da die Berechnungen in dieser Arbeit keinerlei (Schleifen-)Korrekturen beinhalten, sondern auf einem linearen Modell in Baumgraphennäherungen basieren.

Zudem sei angemerkt, dass der Wert (4.38) außerhalb des laut Gasser und Leutwyler theoretisch akzeptablen Bereiches der Streuwellenwerte liegt⁵ ([17], S. 45), der $a_0^0 \in [0.18, 0.3]$ erfordert; Gasser und Leutwyler [23] sagen mit **Zweischleifenkorrekturen** den Wert $a_0^0 = 0.220 \pm 0.005$ voraus.

4.4.2 Berechnung der Streulänge a_0^1

Da laut (4.26) und (4.27) $A(t, u, s) = A(u, s, t)$ ist, verschwindet der Streuamplitudenanteil T^1 (4.20) identisch. Aus (4.23) folgt dann, dass die Partialwellenamplitude t_0^1 an der Schwelle identisch verschwindet, was wegen (4.24) dann ebenfalls für die Streulänge a_0^1 gilt:

$$a_0^1 = 0.$$

4.4.3 Berechnung der Streulänge a_0^2

Das Verfahren zur Bestimmung dieser Streulänge ist dem zur Bestimmung der Streulänge a_0^0 analog; unter Beachtung von $A(t, u, s) = A(u, s, t)$ folgt mit (4.21), dass $T^2 = 2A(t, u, s)$ ist; da $A(t, u, s)$ in (4.26) bestimmt wurde, ergibt sich T^2 zu

$$T^2 = 2\left\{-2\left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)Z^4 + 4\left[m_\pi^2 gw + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}\right)\phi Z^2\right]^2 \frac{1}{m_\sigma^2} - g^2 \frac{4m_\pi^2}{m_\rho^2}\right\}. \quad (4.39)$$

Mit (4.14), (4.16) und (4.17) und analog wie im Abschnitt 4.4.1 ergibt sich dann

$$a_0^2 = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{f_\pi^2} \left[\left(\frac{1}{16Z^2} - \frac{1}{4Z^4} + \frac{1}{4Z^6} \right) \frac{m_\pi^4}{m_\sigma^2} + \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{4Z^2} \right) m_\pi^2 \right] - \frac{1}{4} g^2 \frac{m_\pi^2}{m_\rho^2} \right\}. \quad (4.40)$$

⁵Die Argumentation basiert hauptsächlich auf der Olssonschen Summenregel [22], die das richtige asymptotische Verhalten der t -Kanal-Streuamplitude $T^1(s, t)$ für $s \rightarrow \infty$, $t = 0$ sicherstellt.

Für die Standardwerte $m_\sigma = 600\text{MeV}$, $m_\pi = 135\text{MeV}$ und $Z = 1.585051546$ mit $m_{a_1} = 1230\text{MeV}$ und $m_\rho = 776\text{MeV}$ ergibt sich dann

$$a_0^2 = -0.0429. \quad (4.41)$$

Dieser Wert ist - genau wie der Wert der Isospin-0-Streulänge a_0^0 - abhängig von der Auswahl der Masse des Sigma-Teilchens; diese Abhängigkeit ist allerdings weniger stark ausgeprägt als die Abhängigkeit der Streulänge a_0^0 von m_σ , da a_0^0 gemäß (4.37) mit $\frac{1}{m_\sigma^4}$ und a_0^2 gemäß (4.41) mit $\frac{1}{m_\sigma^2}$ unterdrückt wird.

Die entsprechende Abhängigkeit ist auf der nachfolgenden Abbildung gezeigt.

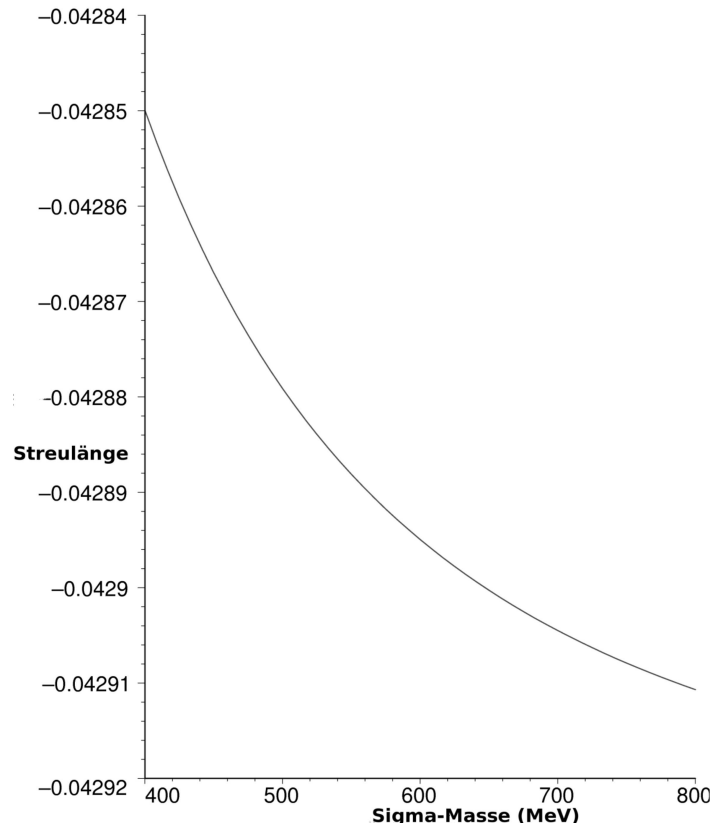


Abbildung 4.2: Abhängigkeit der Streulänge a_0^2 von der Sigma-Masse m_σ

Der Wert (4.41) ist etwas größer als der von Weinberg [18] berechnete Wert $a_0^2 = -0.0454$.

Zum Vergleich der beiden Streulängen sei die nächste Abbildung beigefügt.

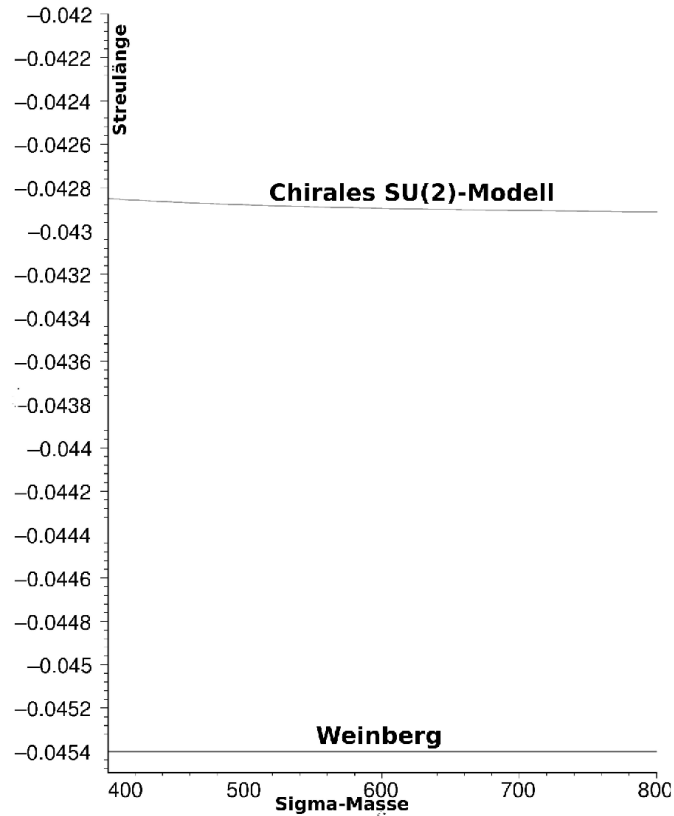


Abbildung 4.3: Vergleich der in dieser Arbeit ermittelten Streulänge mit der von Weinberg [18] berechneten Streulänge

Nun ist die experimentelle Lage wie folgt:

- Nagels *et al.* [19] hat $a_0^2 = -0.028 \pm 0.012$ gefunden;
- Meißner *et al.* [20] hat $a_0^2 = -0.031 \pm 0.008$ gefunden;
- Truöl [21] hat $a_0^2 = -0.036 \pm 0.009$, beziehungsweise $a_0^2 = -0.055 \pm 0.023 \pm 0.003$ gefunden,

so dass der in dieser Arbeit berechnete Wert innerhalb der Fehlertoleranz von [21] liegt. Ansonsten ist der Wert (4.41) tendenziell kleiner als die experimentellen Befunde [genau wie der Wert (4.38) für a_0^0].

Es sei noch angemerkt, dass der Wert (4.41) - im Gegensatz zu dem Wert für die Streulänge a_0^0 - innerhalb des laut Gasser und Leutwyler theoretisch erlaubten Wertebereichs liegt.

reichs für a_0^2 liegt ([17], S. 45); Gasser und Leutwyler sagen in [23] $a_0^2 = -0.0444 \pm 0.0010$ voraus.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Das Thema der vorliegenden Arbeit waren die leichten skalaren und vektoriellen Mesonen, die in einem chiralen symmetrischen $SU(2)$ -Modell zusammengefasst wurden; aufgrund der sich daraus ergebenden Lagrange-Dichte wurde die Streuamplitude für die Pion-Pion-Streuung im Vakuum berechnet, was sodann die Berechnung der s -Wellen-Streulängen an der Schwelle im Vakuum erlaubte.

Der Ausgangspunkt und eine der zentralen Fragestellungen in dieser Arbeit war also die Berechnung der Lagrange-Dichte; eine ebenso wichtige Aufgabe war die Durchsetzung *vernünftiger* Annahmen, um diese zu konstruieren. Eine von diesen Annahmen hat sich auf die Quarkmassenverhältnisse bezogen - wie in Kapitel 1.2 diskutiert, besitzen die Up- und Down-Quarks eine annähernd gleiche Masse, was unter der Annahme der *exakten* Massengleichheit zu der Erhaltung der $SU(2)_V$ -Symmetrie führte.

Allerdings sind die chiralen Symmetrien selbst bei gleichen (oder sogar verschwindenden) Quarkmassen nicht vollständig erhalten, denn, wie in Kapitel 1.3 in der Diskussion der QCD-Symmetrien betont wurde, gilt die chirale Anomalie auch im Fall $m_q = 0$. Außerdem musste in der Konstruktion der Lagrange-Dichte berücksichtigt werden, dass man die chiralen Symmetrien der QCD theoretisch spontan brechen kann, dass aber experimentell keine dazugehörigen masselosen Goldstone-Bosonen beobachtet wurden. Also wurde das Konzept der *näherungsweise* beobachteten spontanen Brechung der chiralen Symmetrien eingeführt, und ausgehend von allen diesen Annahmen die Lagrange-Dichte in Kapitel 2 konstruiert.

Bei der Konstruktion der Lagrange-Dichte ist nach der Verschiebung des Sigma-Feldes um seinen Vakuumerwartungswert das Problem der nichtdiagonalen Streumatrixelemente erschienen, das durch eine weitere Verschiebung (der axialvektoriellen Mesonen) behoben wurde. Danach mussten die Wellenfunktionen der Pionen und η -Mesonen

renormiert werden (damit sie kanonisch normiert sind), was mit der Auslassung aller konstanten Terme in der Lagrange-Dichte zu der endgültigen Form des Lagrangians (2.35) führte. Aus der Lagrange-Dichte wurden danach die Vertizes mit den Pseudo-Goldstone-Bosonen (Pionen) berechnet; dabei wurde festgestellt, dass sie drei Arten von Pion-Pion-Streuung beschreiben: ohne virtuelles Austauschteilchen; mit dem Sigma-Meson als Austauschteilchen; und mit dem Rho-Meson als Austauschteilchen. Für jeden von diesen drei Prozessen wurden die Vertizes berechnet (Kapitel 3.2, 3.3 und 3.4).

Danach konnte die Streuamplitude als Summe der sich aus der Lagrange-Dichte ergebenden Feynman-Diagramme berechnet werden (Kapitel 3.5).

Die Streuamplitude diente als Grundlage für die Berechnung der experimentell messbaren Größen; um diese Berechnungen durchführen zu können, war das Ersetzen der bei der Herleitung der Lagrange-Dichte eingeführten Kopplungskonstanten durch die physikalischen Größen (Mesonenmassen und Pionenzerfallskonstante) notwendig - dies wurde in Kapitel 4.2 durchgeführt und hat zu der (zumindest *näherungsweise richtigen*) Vorhersage der Massengleichheit jeweils der vektoriellen und axialvektoriellen Mesonen geführt. Dies konnte als der erste Anwendbarkeitstest für das in dieser Arbeit benutzte Modell angesehen werden.

Der nächste Test für das Modell stellte die Berechnung der Streuamplitude im chiralen Limes dar - wie in Kapitel 4.3 gezeigt, verschwindet die Streuamplitude unter den genannten Randbedingungen, was den Erwartungen entspricht.

Danach wurden die s -Wellen-Streulängen für die drei möglichen Isospinankopplungen ($I = 0, 1, 2$) berechnet und mit den experimentellen Werten verglichen. Die Diskussionen hierzu sind dem Kapitel 4.4 zu entnehmen; an dieser Stelle sei aber angemerkt, dass die berechneten Werte denjenigen von Weinberg mittels Niedrigenergietheorem bestimmten Werten entsprechen und eine Abhängigkeit von der Sigma-Masse aufweisen (im Gegensatz zu dem Weinbergschen Modell). Sowohl die Werte aus dieser Arbeit als auch die Weinbergschen Werte sind kleiner als die experimentell gefundenen Werte, wodurch sich die Fragen nach den Verbesserungsmöglichkeiten für die Streulängen-Berechnungsgrundlagen stellen.

Eine Weiterentwicklung dieses Modells ist selbstverständlich sowohl möglich als auch empfehlenswert. In Bezug auf die in dieser Arbeit berechneten Ergebnisse empfiehlt es sich beispielsweise, die Niedrigenergiekonstanten der QCD zu berechnen und die Schleifenkorrekturen zu den berechneten Ergebnissen für die Streulängen zu bestimmen. Als Grundlage dazu können beispielsweise die Arbeiten von Gasser und Leutwyler [23] dienen.

Empfehlenswert ist ebenfalls die Bestimmung der Streulängen zu anderen Drehimpulsen (p -, d -Welle und Wellen höheren Drehimpulses). Diesbezüglich könnte der Vergleich von Ergebnissen aus dem chiralen Modell in dieser Arbeit mit den Ergebnissen aus dem Modell von Weinberg interessante Einblicke in die theoretische Beschreibung der mesonischen Streuprozesse liefern, denn dieses chirale Modell hat (zumindest für die hier berechneten Streulängen) die Vorhersagen Weinbergs reproduziert, wodurch sich sofort die Frage stellt, ob diese Kongruenz der Ergebnisse auch für die anderen Streulängen gelten würde.

Andere Möglichkeiten für die weitere Arbeit könnten die nachfolgenden sein:

- Im $SU(2)$ -symmetrischen Modell können die Tensor- und Pseudotensormesonen in das Modell integriert werden;
- Die betrachtete Symmetriegruppe könnte auf drei Flavours ausgeweitet werden [Ausweitung auf die seltsamen Freiheitsgrade: $SU(3)$ -Symmetrien; es bleibt allerdings fraglich, inwieweit die Verallgemeinerung auf die Modelle mit mehr als drei Flavours wegen der starken expliziten Symmetriebrechung als Folge der großen Quarkmassen zu nachvollziehbaren Ergebnissen führen würde];
- Zu den in diesem Modell betrachteten Mesonen können die baryonischen Freiheitsgrade hinzugezogen werden, wodurch ein Modell zur Beschreibung von Zwei- und Dreiquarkzuständen erfolgen würde;
- Die Betrachtungen können von den Vakuum-Modellen auf die Materie mit endlichen Temperaturen und Dichten übergehen (Übergang zu der Statistischen Feldtheorie).

Außerdem bleibt die selbstverständliche Tatsache, dass die Quantenchromodynamik immer noch keineswegs eine vollständig erforschte physikalische Disziplin ist und dass ihre Grundlagenforschung - insbesondere bezüglich der Vereinheitlichung der starken Wechselwirkung mit den anderen fundamentalen Kräften der Natur - auch in der Zukunft eines der Hauptarbeitsfelder in der Physik darstellen wird.

Literaturverzeichnis

- [1] W-M Yao et al J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 (2006), 1
- [2] Torsten Fließbach: *Allgemeine Relativitätstheorie*, Spektrum Verlag, Heidelberg-Berlin, 2003
- [3] W. Nolting: *Theoretische Physik 4 - Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*, Springer, Berlin 2003
- [4] L. H. Ryder: *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1996
- [5] W. Pauli, Phys. Rev. 58 (1940), 716
- [6] E. Noether: *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, 1918
- [7] M. Gell-Mann, M. Levy: Nouvo Cim. 16 (1960), 705
- [8] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. 42 (1979), 1195
- [9] S. Adler, Phys. Rev. 177 (1969), 2426
- [10] J. Bernstein, Rev. Mod. Phys. 46 (1974), 7
- [11] G. Guralnik *et al.*, Phys. Rev. Lett. 13 (1964), 585
- [12] C. Vafa and E. Witten, Nucl.Phys. B 234 (1984), 173
- [13] F. Giacosa: *Glueball phenomenology within a nonlocal approach* (Dissertation), Universität Tübingen, 2005
- [14] F. Halzen - A. D. Martin: *Quarks And Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics*, Wiley, New York, 1984
- [15] G. 't Hooft, Phys. Rept. 142, No. 6 (1986), 357

- [16] M. Urban, M. Buballa, J. Wambach, Nucl. Phys. A 697 (2002), 338
- [17] B. Ananthanarayan, G. Colangelo, J. Gasser and H. Leutwyler, arXiv:hep-ph/0005297 v1, 2000
- [18] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 17 (1966), 616
- [19] M. M. Nagels *et al.*, Nucl. Phys. B 147 (1979), 189
- [20] U. Meißner *et al.*, arXiv:hep-ph/9711361v1, 1997
- [21] P. Truöl, arXiv:hep-ex/0012012 v1, 2000
- [22] M. G. Olsson, Phys. Rev. 162 (1967) 1338
- [23] G. Colangelo, J. Gasser and H. Leutwyler, arXiv:hep-ph/0103088 v1, 2001