



Chiraler Phasenübergang und Expansion des
Universums in einem phänomenologischen Modell
der QCD

Diplomarbeit

von

Aleksander Nikolla

Institut für Theoretische Physik

Johann Wolfgang Goethe-Universität

Frankfurt am Main

August 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Quanten-Chromodynamik (QCD)	1
1.2	Kosmologie	3
1.3	Grundidee der Arbeit	5
2	Das einfache LSM	7
2.1	Die chirale Symmetrie der QCD	7
2.2	Das Sigma-Modell mit nur einem σ und einem π	8
2.3	Das einfache Sigma-Modell bei $T \neq 0$	11
3	Das eLSM im Vakuum	15
4	Das eLSM bei $T \neq 0$	23
4.1	Chirale Kondensate als Funktion von T	23
4.2	Massen als Funktion von T	26
4.3	Druck und Energiedichte als Funktion von T	33
5	Kosmologische Anwendung	41
6	Konklusion und Ausblick	45

Kapitel 1

Einführung

In diesem einführenden Kapitel präsentieren wir kurz die zwei wichtigsten Theorien, auf denen diese Arbeit beruht: die Quanten-Chromodynamik (QCD), die Quarks und Gluonen beschreibt, und die Kosmologie, die die Expansion des Universums darstellt. Zum Schluss erklären wir dann den Plan der Arbeit.

Wenn nicht anders geschrieben, verwenden wir natürliche Einheiten: $\hbar = c = k_B = 1$.

1.1 Quanten-Chromodynamik (QCD)

Die Lagrangedichte der QCD beschreibt die starke Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen. Sie basiert auf der lokalen Invarianz unter Farbtransformationen. Die explizite Form lautet (für Details siehe Ref. [1]):

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)q_f - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

wobei:

- q_f sind Quarkfelder;
- $f = u, d, s, c, b, t$ ist der Quark-Flavor-Index;
- m_f sind die nackten Quarkmassen;
- Das Quark-Feld ist ein Vektor im Farbraum, ein Quark kann also 3 Farben haben: rot (R), grün (G), und blau (B);
- A_μ^a ist das Gluon-Feld, $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ ist der Feldstärke-Tensor der Gluonen, g ist die Kopplungskonstante und f^{abc} sind die Strukturkonstanten der Gruppe $SU(3)$;
- $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a$ ist die kovariante Ableitung, in der die Generatoren t^a der $SU(3)$ -Algebra auftauchen;

- $a = 1, \dots, 8$ zählt die Gluon-Farbe.

Die QCD wird derzeit in verschiedenen Bereichen untersucht. Bis jetzt war es nicht möglich, diese Theorie mathematisch exakt zu lösen. Nämlich, wenn die Quarks und Gluonen sich langsam bewegen, ist ihre Wechselwirkung sehr stark, was die Anwendung von Störungstheorie nicht erlaubt. Außerdem werden die Quarks und Gluonen nicht direkt in Detektoren gesehen, weil sie in sogenannten Hadronen confiniert sind (das ist ‘Confinement’). Insbesondere, Hadronen können als Mesonen (d.h. Hadronen mit ganzzahligen Gesamtspin, wie Quark-Antiquark-Zustände) und Baryonen (d.h. Hadronen mit halbzahligen Gesamtspin, wie Quark-Quark-Quark Zustände) vorkommen. Alle Hadronen sind ‘weiss’, das heisst, dass sie invariant unter einer Transformation der Farbgruppe sind. Ein Quark-Antiquark-Meson besteht aus Farbe-Antifarbe

$$\sqrt{1/3} (\bar{R}R + \bar{G}G + \bar{B}B) , \quad (1.2)$$

wobei ein drei-Quark-Baryon aus der Kombination von allen drei Farben

$$\sqrt{1/6} (RGB + BRG + GBR - GRB - BGR - RBG) . \quad (1.3)$$

besteht.

Deswegen wurden Modelle der QCD entwickelt, die nur Hadronen enthalten. Solche Modelle basieren auf den Symmetrien, die die QCD Lagrange-Dichte (1.1) hat. Gleichzeitig wurden auch zahlreiche Simulationen der QCD entwickelt (sogenannte Gitter-Rechnungen), die die QCD numerisch lösen und dabei zeigen, dass die QCD die richtige grundlegende Theorie der Hadronen und der Kerne ist, siehe z.B. Ref. [2].

Wenn man aber eine hinreichend hohe Temperatur und/oder Dichte erreicht, können die Quarks aus den Hadronen befreit werden: ein Phasenübergang findet statt, der Confinement-Deconfinement-Phasenübergang heißt, siehe z.B. das Review-Paper [3]. In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf endliche Temperatur und verschwindende Dichte. Entlang dieser Richtung ist der Phasenübergang -wie verschiedene Gitter-QCD-Studien gezeigt haben ein Cross-Over, d.h. man hat bei wachsender Temperatur eine kontinuierliche Verwandlung der Hadronen in Quarks. Die entsprechende kritische Temperatur beträgt $T_{kr} \simeq 155$ MeV [4]. Wie wir später detaillierter diskutieren werden, ist eine wichtige Symmetrie der QCD die sogenannte chirale Symmetrie. Sie ist eine Konsequenz der Tatsache, dass die Gluonen an alle Quark-Flavors mit derselben Intensität koppeln (Flavorsymmetrie) und außerdem an beide Chiralitäten der Quarks koppeln (chirale Symmetrie). Diese Symmetrie ist explizit gebrochen durch die Quarkmassen und, noch wichtiger, spontan durch ein nicht-triviales Quanten-Vakuum. Als Konsequenz treten Goldstone-Bosonen auf, wie z.B. die Pionen. Bei höher Temperatur wird diese Symmetrie wiederhergestellt; laut jetziger Kenntnis passiert der entsprechende Phasenübergang parallel und gleichzeitig mit dem Confinement-Deconfinement-Übergang. Das bedeutet, dass der chirale Phasenübergang, der in dieser Arbeit eine zentrale Rolle spielt, als Cross-Over-Übergang mit derselben kritischen Temperatur T_{kr} stattfindet.

1.2 Kosmologie

Unser Universum zeigt eine Expansion, die vor $13.7 \cdot 10^9$ Jahren in dem ‘Big-Bang’ angefangen hat [5, 6]. Unter der Annahme, dass unser Universum homogen ist, ist die Metrik gegeben durch

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (1.4)$$

wobei t die Zeit ist, $a(t)$ der Skalen-Faktor ist, der von der Zeit abhängt, $k = 0, \pm 1$ die Krümmung ist, und r, θ, φ die räumlichen Koordinaten sind. Zu einem sehr genauen Grad ist unsere Universum flach. In einem flachen Universum ($k = 0$) hat man:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a^2(t) [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \\ &= dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

in der die euklidische dreidimensionale Metrik $dx^2 + dy^2 + dz^2$ vorkommt.

Die Friedmann-Gleichung kann aus der allgemeinen Relativitätstheorie unter der Annahme eines homogenen Universums hergeleitet werden [5, 6]:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon, \quad (1.6)$$

wobei ϵ die Energiedichte des Universums und G die Gravitationskonstante ist. $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ ist die Hubble-Funktion.

Die Energiedichte ϵ enthält die folgenden vier Beiträge:

$$\epsilon = \epsilon_{\text{Krümmung}} + \epsilon_{\text{Strahlung}} + \epsilon_{\text{Materie}} + \epsilon_{\text{Dunkle-Energie}}. \quad (1.7)$$

(i) Der erste Term

$$\epsilon_{\text{Krümmung}} = -\frac{kc^2}{a^2} \quad (1.8)$$

ist der Anteil, der von der Krümmung des Universums stammt. In dieser Arbeit wird er nicht betrachtet, weil er in sehr gute Näherung verschwindet.

(ii) Der zweite Term $\epsilon_{\text{Strahlung}}$ enthält den Beitrag von relativistischen Teilchen (z.B. Photonen und Neutrinos); die Strahlungsenergie skaliert als

$$\epsilon_{\text{Strahlung}} = \epsilon_{\text{Strahlung}}^0 \frac{a_0^4}{a^4} \quad (1.9)$$

(a_0 ist der Skalenfaktor zu einer gewissen Zeit t_0).

(iii) Der dritte Term $\epsilon_{\text{Materie}}$ enthält den Beitrag von massiven Teilchen, wie die sichtbare Materie (Protonen, Kerne, etc...) und unsichtbare Materie (dunkle Materie):

$$\epsilon_{\text{Materie}} = \epsilon_{\text{Materie}}^0 \frac{a_0^3}{a^3}. \quad (1.10)$$

(iv) Der vierte Term

$$\epsilon_{\text{Dunkle-Energie}} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (1.11)$$

ist der Beitrag der dunklen Energie: Λ ist die berühmte kosmologische Konstante.

Diese Trennung ist nicht exakt, da manche Teilchen am Anfang relativistisch sein können und später bei Abkühlung nicht-relativistisch werden. Jedoch ist diese Beschreibung eine gute und nützliche Näherung.

Es ist interessant, einige Spezialfälle zu betrachten:

1. Krümmung-dominiertes Universum: $\epsilon = \epsilon_{\text{Krümmung}}$. Man kann die Differentialgleichung leicht lösen (für $k = -1$):

$$a(t) = a_0 \frac{t}{t_0}. \quad (1.12)$$

2. Strahlungsdominiertes Universum: $\epsilon = \epsilon_{\text{Strahlung}}$. Man kann die Differentialgleichung leicht lösen:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}. \quad (1.13)$$

3. Materiedominiertes Universum: $\epsilon = \epsilon_{\text{Materie}}$. Man kann die Differentialgleichung leicht lösen:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}. \quad (1.14)$$

4. Universum, da von der Kosmologischen Konstante dominiert wird:

$$a(t) = a_0 e^{\Lambda t/3}. \quad (1.15)$$

Unser Universum wurde am Anfang zunächst von der Strahlung dominiert, dann hat die Materie den größten Beitrag übernommen, und später (relativ neulich) ist die dunkle Energie der wichtigste Term geworden. Der Krümmungsanteil, der zwischen Materie und dunkler Energie hätte prinzipiell dominieren können, ist nicht anwesend: das Universum scheint flach zu sein. Um das zu erklären wird postuliert, dass sehr kurz nach dem Bing-Bang (Anfang: 10^{-36} sek) eine sehr schnelle Inflationsphase (mathematisch analog zu Gl. (1.15) aber mit einem viel größeren Λ und für eine sehr kurze Dauer, bis zu ungefähr 10^{-32} sek) stattgefunden hat. Nämlich, durch eine schnelle Expansion wird das Universum praktisch flach.

In Gl. (1.6) kann man die jetzige Zeit t_{jetzt} einsetzen:

$$1 = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\epsilon}{H_{\text{jetzt}}^2} = \Omega_{\text{Krümmung}} + \Omega_{\text{Strahlung}} + \Omega_{\text{Materie}} + \Omega_{\text{Dunkle-Energie}}. \quad (1.16)$$

Die jetzige Energiebilanz des Universums zeigt, dass $\Omega_{\text{krümmung}} = 0$ und $\Omega_{\text{Strahlung}}$ vernachlässigbar ist (war es aber nicht in der Vergangenheit). Ausserdem:

$$\Omega_{\text{Materie}} = 0.27, \Omega_{\text{Dunkle-Energie}} = 0.73. \quad (1.17)$$

Der Materie-Anteil besteht aus der dunklen Materie und aus der baryonischen (sichtbaren) Materie:

$$\Omega_{\text{Materie}} = \Omega_{\text{dunkle-Materie}} + \Omega_{\text{baryonische-Materie}} \quad (1.18)$$

$$\text{mit: } \Omega_{\text{dunkle-Materie}} = 0.23, \Omega_{\text{baryonische-Materie}} = 0.04. \quad (1.19)$$

Man sieht also, dass die dunkle Materie und die dunkle Energie, die noch unbekannt sind, 96% des jetzigen Universums ausmachen.

Eine weitere Möglichkeit, die Friedmansgleichung auszudrücken, wird in dieser Arbeit benutzt. Sie lautet:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{\epsilon}}{3(\epsilon + P)} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon}. \quad (1.20)$$

Hier P ist der Druck. Nämlich, wir werden in der Nähe eines Phasentüberganges (der chirale Phasentübergang) arbeiten. Deswegen müssen wir sowohl die Energiedichte als auch den Druck berücksichtigen. Dieser Phasentübergang hat ungefähr 10^{-4} sek nach dem Big-Bang stattgefunden. Die Materie war sehr heiss (im 1.8-Terra (Billionen) Grad Kelvin bereich).

1.3 Grundidee der Arbeit

In dieser Arbeit untersuchen wir zuerst das Verhalten der chiralen Kondensate und der Massen von Mesonen in Abhängigkeit der Temperatur T . Dazu benutzen wir ein effektives Modell der QCD, namens erweitertes lineares Sigma-Modell (kurz: eLSM), das nur Mesonen enthält. Im allgemeinen beruhen Sigma-Modelle auf der chiralen Symmetrie sowie auf ihrer spontanen und expliziten Brechung. Um die Diskussion klarer zu machen, beschreiben wir zunächst (Kap. 2) eine vereinfachte Version des Sigma-Modells: man kann das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung auf eine einfache Art und Weise erklären, wenn nur zwei Mesonen vorhanden sind. Wir zeigen auch, wie die Temperaturabhängigkeit eingeführt wird.

Die volle Version des eLSM wird dann in Kap. 3 präsentiert. Die für uns wichtigste Veröffentlichung ist Ref. [7], für Details siehe auch Refs. [8, 9]. Die Temperaturabhängigkeit (Kap. 4) wird durch eine einfache Methode berücksichtigt: zwei Massenparameter werden explizit temperaturabhängig und sorgen dafür, dass bei hohem T die chirale Symmetrie wiederhergestellt wird.

Wir wenden dann die Resultate an (Kap. 5), indem wir den Effekt dieses chiralen Phasentüberganges auf die Expansion des Universums untersuchen. Der Gedanke ist, dass bei hohen Temperaturen die chirale Symmetrie noch erhalten ist. Somit haben Mesonen, die durch chirale Transformationen verbunden

sind (chirale Partner), oberhalb des chiralen Phasenüberganges dieselbe Masse. Erst bei der Abkühlung, bei der (und unterhalb der) kritischen Temperatur $T_{kr} = 0.155 \text{ GeV}$ (entspricht etwa 1.8 Terra (Billionen) Grad Kelvin), sind Massenunterschiede entstanden: die spontane Symmetriebrechung wurde sichtbar. Außerdem sind die chiralen Kondensate, die die Ordnungsparameter des Überganges sind, größer geworden. Der Phasenübergang hat bei der kritischen Zeit $t_{kr} = 2.537 \times 10^{-5} \text{ sek}$ nach dem Big Bang stattgefunden.

Wir folgen der Methode von Ref. [10] und berechnen die Temperatur als Funktion der Zeit t : wir sind insbesondere daran interessiert, wie schnell die Temperatur gefallen ist. Für andere Arbeiten, die sich mit diesem Thema befasst haben, verweisen wir auf Ref. [11] und auf Ref. [12].

Kapitel 2

Das einfache LSM

2.1 Die chirale Symmetrie der QCD

Zunächst erklären wir kurz die chirale Symmetrie der QCD. Zu diesem Zweck diskutieren wir die Gruppe $U(N)$. Ein Element der unitären $U(N)$ -Gruppe ist eine komplexe $N \times N$ -Matrix, die die Gleichung

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1_N \quad (2.1)$$

erfüllt. Die Lagrange-Dichte der QCD ist im chiralen Limes ($m_f = 0$) invariant unter der chiralen Symmetrie, die aus zwei unitären Gruppen besteht und als $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ bezeichnet wird. Nämlich, wir können die rechtshändige und die linkshändige Komponente der Quark-Felder unabhängig voneinander transformieren. In Formeln:

$$q_i = q_{i,R} + q_{i,L} \rightarrow U_{R,ij} q_{j,R} + U_{L,ij} q_{j,L} , \quad (2.2)$$

mit zwei unitären Matrizen

$$U_R \in U(N_f)_R , \quad U_L \in U(N_f)_L . \quad (2.3)$$

Zur Erinnerung, die rechtshändigen und linkshändigen Spinoren $q_{i,R}$ und $q_{i,L}$ sind definiert als:

$$q_{i,R} = P_R q_i , \quad q_{i,R}^\dagger = q_i^\dagger P_R , \quad \bar{q}_{i,R} = \bar{q}_i P_L , \quad (2.4)$$

$$q_{i,L} = P_L q_i , \quad q_{i,L}^\dagger = q_i^\dagger P_L , \quad \bar{q}_{i,L} = \bar{q}_i P_R , \quad (2.5)$$

mit $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$, $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$, wobei γ^5 die chirale Matrix ist, siehe Details in Ref. [1].

Die chirale Symmetrie ist gebrochen durch die nicht-verschwindenden Quark-Massen. Außerdem ist sie auch spontan gebrochen zu sogenannten Flavor-Symmetrie: $U(N_f)_V \times SU(N_f)_A \rightarrow U(N_f)_V$. Dieses Phänomen der spontanen Symmetriebrechung ist für das Verständnis der Hadronen sehr wichtig. Im nächsten Abschnitt erklären wir diesen Sachverhalt anhand eines einfachen Modelles.

In dieser Arbeit werden wir in Kap. 3 und in Kap. 4 den Fall $N_f = 3$ betrachten; wir befassen uns also mit Hadronen, insbesondere Mesonen, die aus den Quarks u , d und s bestehen.

2.2 Das Sigma-Modell mit nur einem σ und einem π

Wir beschreiben zunächst ein einfaches hadronisches Modell, wo ein einziges skalares Teilchen, σ , und ein einziges pseudoskalares Teilchen, π , vorhanden sind (siehe z.B. von Ref. [13]). In diesem Fall ist die vorher besprochene chirale Symmetrie sehr einfach, weil sie einer Drehung in der (π, σ) -Ebene entspricht:

$$\begin{pmatrix} \pi \\ \sigma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \sigma \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Das Potential, da die Massen und die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen π und σ beschreibt, muss (im chiralen Limes) invariant unter dieser Drehung sein. Die Form des Potential lautet deshalb:

$$V(\sigma, \pi) = \frac{m_0^2}{2} (\pi^2 + \sigma^2) + \frac{\lambda}{4} (\pi^2 + \sigma^2)^2, \quad (2.7)$$

wobei wir Terme höherer Ordnung nicht berücksichtigen (siehe z.B. [8, 9, 14] für die Begründung). Das Potential hängt von zwei Konstanten ab, m_0^2 und λ . Die Konstante λ ist positiv, weil das Potential von unten begrenzt sein muss. Wir nennen das Modell ‘einfaches Lineares Sigma Modell’ (LSM).

Nun, wenn $m_0^2 > 0$, hat das Potential die schematische Form in Abb. 2.1. Dieses Potential hat ein eindeutiges absolutes Minimum bei $P_{\min} = (\sigma = 0, \pi = 0)$. Nämlich, entlang der σ -Richtung das Minimum ist durch die Gleichung

$$\partial_\sigma V(\sigma, 0) = m_0^2 \sigma + \lambda \sigma^3 = 0 \quad (2.8)$$

gegeben.

Diese Gleichung hat als Lösungen

$$\sigma = 0 \text{ und } \sigma = \pm \sqrt{\frac{-m_0^2}{\lambda}}. \quad (2.9)$$

Die letzteren zwei sind aber imaginäre Zahlen für $m_0^2 > 0$, was wiederum heißt, dass $\sigma = 0$ die einzige Lösung ist. Dieser Fall entspricht einem Minimum, wie die zweite Ableitung zeigt.

Die Massen der Teilchen werden wie üblich durch die zweite Ableitung des Potentials am Minimum bestimmt:

$$m_\pi^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} \right|_{P=P_{\min}} = m_0^2, \quad (2.10)$$

$$m_\sigma^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right|_{P=P_{\min}} = m_0^2. \quad (2.11)$$

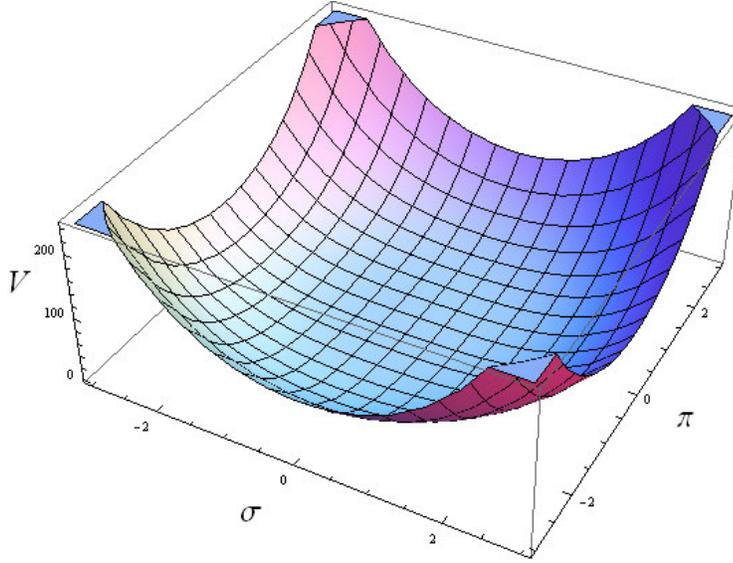


Abbildung 2.1: Normales Potential

Wie erwartet, haben die zwei Teilchen dieselbe Masse m_0 . Das ist zunächst eine Konsequenz der chiralen Symmetrie, wenn das Potential exakt chiral symmetrisch ist und eine einzige Minimum hat.

Es gibt aber ein Problem: die experimentellen Werte der Massen von σ und π sind sehr unterschiedlich, siehe Ref. [15]. Sogenannte chirale Partner sind nie gleich schwer. Der Grund dafür ist die spontane Symmetriebrechung. Die können wir in unserem Modell beschreiben, indem wir den Fall

$$m_0^2 < 0 \quad (2.12)$$

berücksichtigen. Das heißt, dass m_0 rein imaginär ist. Das entsprechende Potential ist in Abbildung (2.2) gezeigt und hat die typische Form eines mexikanischen Huts. Der Koordinatenursprung ist nicht mehr ein Minimum, sondern ein Maximum, was eine Instabilität bedeutet (imaginäre Massen). Man hat hingegen einen Kreis von Minima, die die Gleichung

$$\pi^2 + \sigma^2 = -\frac{m_0^2}{\lambda} . \quad (2.13)$$

erfüllen.

Das Vakuum des Systems wird bei einem von diesen unendlich vielen Minima realisiert. Wir wählen:

$$P_{\min} = \left(\sqrt{-\frac{m_0^2}{\lambda}}, 0 \right) \quad (2.14)$$

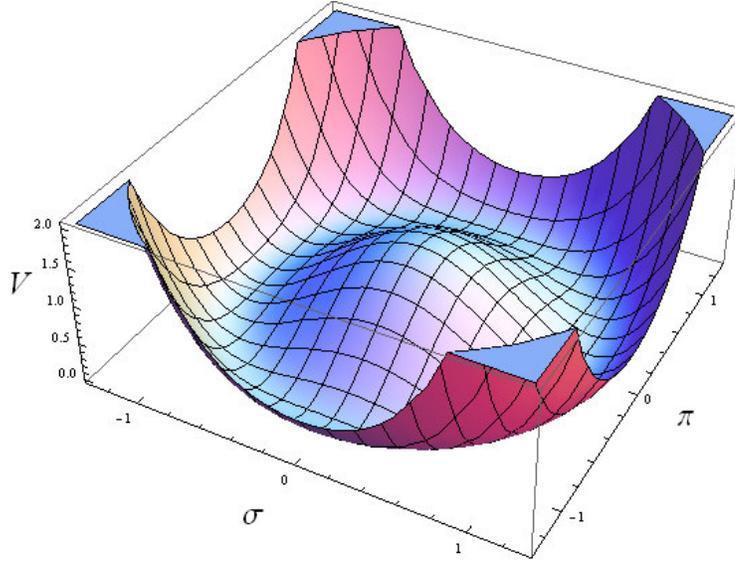


Abbildung 2.2: Mexikanischer Hut

Indem wir diese Wahl für das Vakuum gemacht haben, haben wir die chirale Symmetrie spontan gebrochen.

Der Wert des σ -Feld am Minimum ist ein sogenannter Vakuumerwartungswert und wird mit

$$\sigma_{\min} = \phi_N = \sqrt{-\frac{m_0^2}{\lambda}} \quad (2.15)$$

bezeichnet. Wir berechnen nun die Massen:

$$m_\pi^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} \right|_{P=P_{\min}} = 0, \quad (2.16)$$

$$m_\sigma^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right|_{P=P_{\min}} = m_0^2 + 3\lambda\phi_N^2 = -2m_0^2 > 0. \quad (2.17)$$

Die Massen sind in diesem Fall sehr verschieden. Das Pion ist masselos: das ist ein Spezialfall des Goldstone-Theorems. Die σ -Masse ist hingegen schwer. Man versteht also, warum die spontane Symmetriebrechung unterschiedliche Massen von chiralen Partnern verursacht.

In der Natur ist die Masse des Pions nicht null; die ist zwar klein im Vergleich zu dem σ Meson (und zu anderen Hadronen): sie beträgt 135 MeV. Hingegen, das σ -Teilchen wird mit der Resonanz $f_0(1370)$ identifiziert, die eine Masse 1350 ± 150 MeV hat, siehe Details in Refs. [7, 8]. Um die nicht-verschwindende Pion-Masse zu beschreiben, wird eine explizite chirale Symmetriebrechung benötigt. Das neue Potential lautet:

$$V(\sigma, \pi) = \frac{m_0^2}{2} (\pi^2 + \sigma^2) + \frac{\lambda}{4} (\pi^2 + \sigma^2)^2 - h\sigma, \quad (2.18)$$

wobei der Term $-h\sigma$ für die explizite Brechung verantwortlich ist. Die Form des Potentials wird in der Abbildung 2.3 gezeigt. Das Potential hat aber jetzt ein eindeutiges Minimum. Der Vakuumerwartungswert (VEW) des Pion-Feldes ist noch null am Minimum, aber das VEW des σ -Feldes (das chirale Kondensat ϕ_N) wird durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V(\sigma, 0)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_{\min}=\phi_N} &= m_0^2 \phi_N + \lambda \phi_N^3 - h \\ &= \phi_N (m_0^2 + \lambda \phi_N^2) - h = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Diese Gleichung ist eine Gleichung dritter Ordnung, deren analytische Lösungen durch die Cardano-Formel bestimmt werden können; nur eine Lösung entspricht dem absoluten Minimum und ist daher physikalisch, siehe die Diskussion in Ref. [8]. Das Minimum ist daher $P_{\min} = (\phi_N, 0)$. Die Masse des Pions lautet:

$$m_\pi^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} \right|_{P=P_{\min}} = m_0^2 + \lambda \phi_N^2 = \frac{h}{\phi_N}. \quad (2.20)$$

Man sieht, dass die Pionmasse nicht mehr null ist, aber vom Parameter h abhängt. (Die Pionmasse verschwindet im Limes $h \rightarrow 0$, wie erwartet, weil das Potential wieder der symmetrische mexikanische Hut ist).

Die Masse des σ -Teilchen lautet:

$$m_\sigma^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right|_{P=P_{\min}} = m_0^2 + 3\lambda \phi_N^2 = m_\pi^2 + 2\lambda \phi_N^2. \quad (2.21)$$

Die σ -Masse ist also immer größer als die Pionmasse und der Massenunterschied beträgt $m_\sigma^2 - m_\pi^2 = 2\lambda \phi_N^2 > 0$.

Das chirale Kondensat ϕ_N taucht explizit in den Ausdrücken für die Massen auf und auch bei Zerfällen, wie z.B. bei dem Zerfall $\sigma \rightarrow \pi\pi$. Man kann aber zeigen, dass ϕ_N auch den schwachen Zerfall des Pions beeinflusst und somit experimentell bestimmt werden kann. In dieser einfachen Version des σ -Modelles ist das Kondensat die Pionzerfallskonstante $\phi_N = f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$ [13].

2.3 Das einfache Sigma-Modell bei $T \neq 0$

In dieser Arbeit sind wir daran interessiert zu bestimmen, wie die Massen der Mesonen bei endlichen Temperatur variieren. Das bedeutet z.B., dass wir die Funktionen der Pion-Masse und Sigma-Masse als Funktion der Temperatur, $m_\pi(T)$ und $m_\sigma(T)$, bestimmen wollen. Eine rigorose Rechnung im Rahmen einer Quantenfeldtheorie ist hier nicht beabsichtigt; wir wählen aber ein einfaches phänomenologisches Verfahren, das in Ref. [16] diskutiert wurde. Wir nehmen

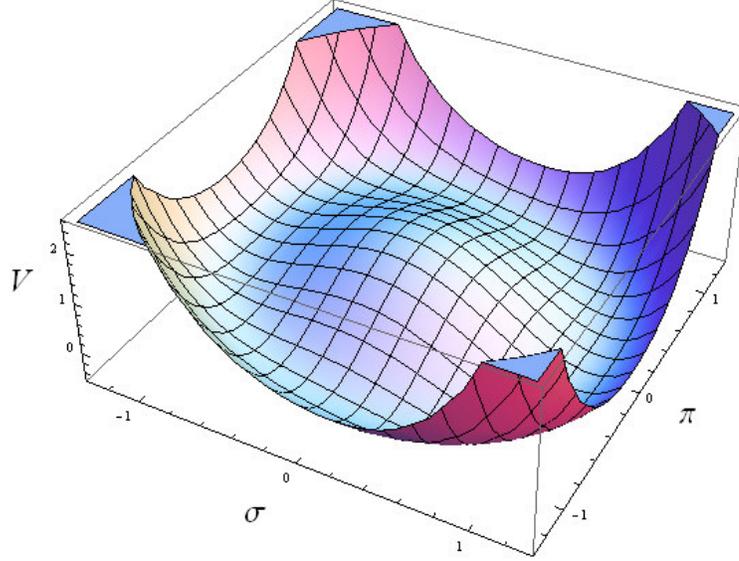


Abbildung 2.3: Schräger mexikanischer Hut.

an, dass die Konstante m_0^2 von der Temperatur abhängt und die folgende Form hat:

$$m_0^2 \rightarrow m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right), \quad (2.22)$$

also das Potential als Funktion der Temperatur lautet:

$$V(\sigma, \pi, T) = \frac{m_0^2}{2} \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right) (\pi^2 + \sigma^2) + \frac{\lambda}{4} (\pi^2 + \sigma^2)^2 - h\sigma. \quad (2.23)$$

Diese einfache Temperaturabhängigkeit erlaubt, eine Inkonsistenz von hadronischen Modellen bei endlicher Temperatur zu lösen (die Inkonsistenz hat mit theoretischen Betrachtungen zu tun, wenn die Anzahl der Farben groß ist) [16, 17]. Diese T^2 -Abhängigkeit wurde auch in Ref. [18] gefunden.

Intuitiv bedeutet die Funktion $m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right)$, dass das chirale Kondensat kleiner wird, wenn die Temperatur wächst. Im Fall ohne explizite Symmetriebrechung ($h = 0$) hat man:

$$\phi_N(T) = \sqrt{-\frac{m_0^2}{\lambda} \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right)} \quad \text{für } T \leq T_0 \quad (2.24)$$

und

$$\phi_N(T) = 0 \quad \text{für } T > T_0. \quad (2.25)$$

Die Temperatur T_0 ist die kritische Temperatur im chiralen Limes. Für $T > T_0$ ist das chirale Kondensat null, was bedeutet, dass die chirale Symmetrie nicht

mehr gebrochen ist (Wiederherstellung der Symmetrie bei hohen Temperaturen). Es ist interessant zu bemerken, dass

$$\left. \frac{d\phi_N(T)}{dT} \right|_{T=0} = 0 \quad (2.26)$$

was auch kompliziertere Verfahren zeigen. Außerdem gilt

$$\left. \frac{d\phi_N(T)}{dT} \right|_{T=T_0^-} = \infty \quad (2.27)$$

was bedeutet, dass die Steigung bei der kritischen Temperatur T_0 unendlich ist. Wir können also einen Phasenübergang zweiter Ordnung einfach modellieren. Der Verlauf der Massen als Funktion der Temperatur ist:

$$m_\pi^2(T) = 0, \quad (2.28)$$

$$m_\sigma^2(T) = \begin{cases} -2m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right) & \text{für } T \leq T_0 \\ 0 & \text{für } T > T_0 \end{cases}. \quad (2.29)$$

Für $T > T_0$ sind die Teilchen entartet (beide haben Masse null).

Wenn die chirale Symmetrie explizit gebrochen ist ($h > 0$ und $m_\pi^2 > 0$), dann muss man die Gleichung

$$m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right) \phi_N + \lambda \phi_N^3 - h = 0 \quad (2.30)$$

für jede Temperatur T lösen. Das kann man numerisch ohne Probleme machen, siehe das Resultat in Abb. 2.4, wobei die numerischen Werte $m_\pi = 0.141$ GeV, $m_\sigma = 1.367$ GeV, $f_\pi = 0.092$ GeV benutzt wurden. Für T_0 wählen wir den Wert 0.155 GeV: das ist die kritische Temperatur, die in der Lattie-QCD bestimmt wurde [4]. Man sieht also, dass $\phi_N(T)$ den Null-Wert asymptotisch nähert. Die kritische Temperatur T_{kr} ist die Temperatur, bei der die Steigung am größten ist:

$$\left. \frac{d^2\phi_N}{dT^2} \right|_{T=T_{kr}} = 0. \quad (2.31)$$

Numerisch lautet sie $T_{kr} = 0.1552$ GeV und ist wie erwartet dem Wert von T_0 sehr nahe.

Die Massen von π und σ für dieses Modell werden in Abbildung 2.5 gezeigt. Man sieht ein ganz anderes Verhalten für große Temperaturen. Nämlich, die Pionmasse steigt, wie man aus der Gleichung $m_\pi^2 = h/\phi_N$ sieht. Hingegen fällt die σ -Masse erst ab, steigt aber für große T und ist wieder mit dem Pion entartet: $m_\sigma \simeq m_\pi$ für $T \gg T_0$. Nämlich, für die Massendifferenz gilt:

$$m_\sigma^2 - m_\pi^2 = 2\lambda\phi_N^2 \rightarrow 0 \text{ für } T \rightarrow \infty. \quad (2.32)$$

Es ist interessant zu bemerken, dass die Massen der Mesonen in komplizierteren Verfahren der Quantenfeldtheorie auch linear mit steigender Temperatur steigen.

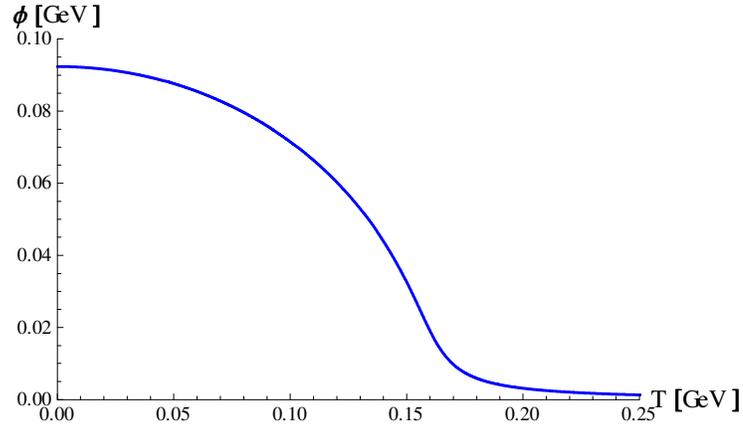


Abbildung 2.4: Chirales Kondensat $\phi_N(T)$ im einfachen LSM.

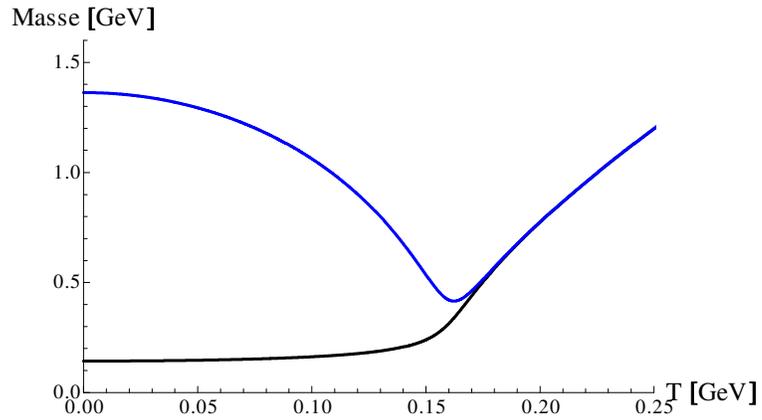


Abbildung 2.5: Funktionen $m_\sigma(T)$ (blau) und $m_\pi(T)$ (schwarz) im einfachen LSM. Bei hohen T sind die Massen entartet, im Einklang mit der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie.

Kapitel 3

Das eLSM im Vakuum

In diesem Kapitel besprechen wir eine vollständige Version des linearen Sigma-Modelles, das in Refs. [7, 8, 9] präsentiert wurde. Das Modell ist ein effektives Modell der QCD und man nennt es ‘erweitertes Lineares Sigma-Modell’ (eLSM) und enthält pseudoskalare, skalare, vektorielle und axial-vektorielle Mesonen für den Fall mit drei Flavours: wir betrachten also Mesonen, die die Quarks u, d und s enthalten. Die mathematischen Eigenschaften sind dem einfachen Sigma-Modell mit nur einem σ und einem π sehr ähnlich. Es gibt aber mehr Felder und deswegen mehr Möglichkeiten, das Modell zu testen und anzuwenden.

Das Modell setzt sich zusammen aus:

1) pseudoskalaren Mesonen:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\eta_N + \pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{\eta_N - \pi^0}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & K^0 & \eta_S \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Das Feld π entspricht dem Pion, das Feld K entspricht dem Kaon. Die Felder η_N und η_S entsprechen einer Mischung der physikalischen Zustände η und η' , siehe Refg. [15].

2) skalare Mesonen:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_N + a_0}{\sqrt{2}} & a_0^+ & K_S^+ \\ a_0^- & \frac{\sigma_N - a_0}{\sqrt{2}} & K_S^0 \\ K_S^- & K_S^0 & \sigma_S \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Das Feld a_0 entspricht der Resonanz $a_0(1450)$, das Feld K_S entspricht der Resonanz $K_0^*(1430)$, das Feld σ_N entspricht $f_0(1370)$, und das Feld σ_S entspricht $f_0(1710)$, siehe Ref. [15]. (Eine Mischung mit dem skalaren Glüball ist auch möglich, siehe Details in Ref. [14]).

3) Vektormesonen:

$$V^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\omega_N^\mu + \rho^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & \rho^{\mu +} & K^{*\mu +} \\ \rho^{\mu -} & \frac{\omega_N^\mu - \rho^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K^{*\mu 0} \\ K^{*\mu -} & \bar{K}^{*\mu 0} & \omega_S^\mu \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Das Feld ρ entspricht dem ρ -Meson, das Feld K^* entspricht $K^*(892)$, ω_N dem ω -Meson, und ω_S dem ϕ -Meson.

4) Axialvektormesonen:

$$A^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{f_{1N}^\mu + a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & a_1^{\mu +} & K_1^{\mu +} \\ a_1^{\mu -} & \frac{f_{1N}^\mu - a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K_1^{\mu 0} \\ K_1^{\mu -} & \bar{K}_1^{\mu 0} & f_{1S}^\mu \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Das Feld a_1 entspricht der Resonanz $a_1(1230)$, K_1 der Resonanz $K_1(1270)$, $f_{1,N}$ der Resonanz $f_1(1285)$, und $f_{1,S}$ der Resonanz $f_1(1420)$.

Alle Felder und ihre Entsprechungen werden in Tabelle 1 gezeigt. Die Massen kommen aus dem PDG [15] (für ein Isospin-Multiplett wird die Masse eines geladenen Elements gegeben; Fehler werden ausgelassen). I steht für Isospin, J für den Gesamtspin, P für Parität, und C für die Ladungskonjugation. (Die Ladungskonjugation bezieht sich auf die neutralen Elemente eines Nonets). Für die isoskalare Pesudoskalare gilt: $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$, wobei $\theta \simeq -44^\circ$ [7].

Tab. 1: Felder des Modells und PDG

Feld	PDG	Inhalt	I	J^{PC}	Masse (MeV)
π^+, π^-, π^0	π	$u\bar{d}, d\bar{u}, \frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	1	0^{-+}	139.57
K^+, K^-, K^0, \bar{K}^0	K	$u\bar{s}, s\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{d}$	1/2	0^{-+}	493.677
$\eta_N a + \eta_S b$	η	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}} a + s\bar{s} b$	0	0^{-+}	547.86
$-\eta_N a + \eta_S b$	$\eta'(958)$	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}} a + s\bar{s} b$	0	0^{-+}	957.78
a_0^+, a_0^-, a_0^0	$a_0(1450)$	$u\bar{d}, d\bar{u}, \frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	1	0^{++}	1474
$K_S^+, K_S^-, K_S^0, \bar{K}_S^0$	$K_0^*(1430)$	$u\bar{s}, s\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{d}$	1/2	0^{++}	1425
σ_N	$f_0(1370)$	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	0	0^{++}	1350
σ_S	$f_0(1710)$	$s\bar{s}$	0	0^{++}	1722
ρ^+, ρ^-, ρ^0	$\rho(770)$	$u\bar{d}, d\bar{u}, \frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	1	1^{--}	775.26
$K^{*+}, K^{*-}, K^{*0}, \bar{K}^{*0}$	$K^*(892)$	$u\bar{s}, s\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{d}$	1/2	1^{--}	891.86
ω_N	$\omega(782)$	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	0	1^{--}	782.65
ω_S	$\phi(1020)$	$s\bar{s}$	0	1^{--}	1019.461
a_1^+, a_1^-, a_1^0	$a_1(1230)$	$u\bar{d}, d\bar{u}, \frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	1	1^{++}	1230
$K_1^+, K_1^-, K_1^0, \bar{K}_1^0$	$K_1(1270)$	$u\bar{s}, s\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{d}$	1/2	1^{++}	1272
$f_{1,N}$	$f_1(1285)$	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	0	1^{++}	1281.9
$f_{1,S}$	$f_1(1420)$	$s\bar{s}$	0	1^{++}	1426.4

Die pseudoskalaren Mesonen und skalaren Mesonen kann man in der Matrix Φ zusammenfassen:

$$\Phi = S + iP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{(\sigma_N + a_0^0) + i(\eta_N + \pi^0)}{\sqrt{2}} & a_0^+ + i\pi^+ & K_S^+ + iK^+ \\ a_0^- + i\pi^- & \frac{(\sigma_N - a_0^0) + i(\eta_N - \pi^0)}{\sqrt{2}} & K_S^0 + iK^0 \\ K_S^- + iK^- & \bar{K}_S^0 + i\bar{K}^0 & \sigma_S + i\eta_S \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Die adjungierte Matrix Φ^\dagger lautet:

$$\Phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{(\sigma_N + a_0^0) - i(\eta_N + \pi^0)}{\sqrt{2}} & a_0^+ - i\pi^+ & K_S^+ - iK^+ \\ a_0^- - i\pi^- & \frac{(\sigma_N - a_0^0) - i(\eta_N - \pi^0)}{\sqrt{2}} & K_S^0 - iK^0 \\ K_S^- - iK^- & \bar{K}_S^0 - i\bar{K}^0 & \sigma_S - i\eta_S \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Die Matrix Φ transformiert einfach unter einer chiralen Transformation: $\Phi \rightarrow U_L \Phi U_R^\dagger$. Deswegen dient Φ als Baustein des Modells.

Wir kombinieren die Vektormesonen V^μ und die Axialvektormesonen A^μ zu einer rechtshändiger Struktur:

$$\begin{aligned}
R^\mu &= V^\mu - A^\mu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\omega_N^\mu + \rho^{\mu 0}}{\sqrt{2}} - \frac{f_{1N}^\mu + a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & \rho^{\mu+} - a_1^{\mu+} & K^{*\mu+} - K_1^{\mu+} \\ \rho^{\mu-} - a_1^{\mu-} & \frac{\omega_N^\mu - \rho^{\mu 0}}{\sqrt{2}} - \frac{f_{1N}^\mu - a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K^{*\mu 0} - K_1^{\mu 0} \\ K^{*\mu-} - K_1^{\mu-} & \bar{K}^{*\mu 0} - \bar{K}_1^{\mu 0} & \omega_S^\mu - f_{1S}^\mu \end{pmatrix}, \tag{3.7}
\end{aligned}$$

und einer linkshändigen Struktur:

$$\begin{aligned}
L^\mu &= V^\mu + A^\mu \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\omega_N^\mu + \rho^{\mu 0}}{\sqrt{2}} + \frac{f_{1N}^\mu + a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & \rho^{\mu+} + a_1^{\mu+} & K^{*\mu+} + K_1^{\mu+} \\ \rho^{\mu-} + a_1^{\mu-} & \frac{\omega_N^\mu - \rho^{\mu 0}}{\sqrt{2}} + \frac{f_{1N}^\mu - a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K^{*\mu 0} + K_1^{\mu 0} \\ K^{*\mu-} + K_1^{\mu-} & \bar{K}^{*\mu 0} + \bar{K}_1^{\mu 0} & \omega_S^\mu + f_{1S}^\mu \end{pmatrix}. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Die Matrizen R^μ und L^μ transformieren unter chiralen Transformationen wie: $R^\mu \rightarrow U_R R^\mu U_R^\dagger$, $L^\mu \rightarrow U_L L^\mu U_L^\dagger$. Sie dienen auch als Bausteine des Modelles. Die resultierende Lagrangedichte des eLSM lautet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \text{Tr}[(D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)] - m_0^2 \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi) - \lambda_1 [\text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi)]^2 - \lambda_2 \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi)^2 \\
&\quad - \frac{1}{4} \text{Tr}(L_{\mu\nu}^2 + R_{\mu\nu}^2) + \text{Tr} \left[\left(\frac{m_1^2}{2} + \Delta \right) (L_\mu^2 + R_\mu^2) \right] + \text{Tr}[H(\Phi + \Phi^\dagger)] \\
&\quad + c_1 (\det \Phi - \det \Phi^\dagger)^2 + i \frac{g_2}{2} (\text{Tr}\{L_{\mu\nu}[L^\mu, L^\nu]\} + \text{Tr}\{R_{\mu\nu}[R^\mu, R^\nu]\}) \\
&\quad + \frac{h_1}{2} \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi) \text{Tr}(L_\mu^2 + R_\mu^2) + h_2 \text{Tr}[|L_\mu \Phi|^2 + |\Phi R_\mu|^2] + 2h_3 \text{Tr}(L_\mu \Phi R^\mu \Phi^\dagger) \\
&\quad + g_3 [\text{Tr}(L_\mu L_\nu L^\mu L^\nu) + \text{Tr}(R_\mu R_\nu R^\mu R^\nu)] \\
&\quad + g_4 [\text{Tr}(L_\mu L^\mu L_\nu L^\nu) + \text{Tr}(R_\mu R^\mu R_\nu R^\nu)] \\
&\quad + g_5 \text{Tr}(L_\mu L^\mu) \text{Tr}(R_\nu R^\nu) \\
&\quad + g_6 [\text{Tr}(L_\mu L^\mu) \text{Tr}(L_\nu L^\nu) + \text{Tr}(R_\mu R^\mu) \text{Tr}(R_\nu R^\nu)]. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Das Modell beinhaltet 36 unterschiedliche Mesonen. Die kovariante Ableitung hat die Form:

$$D^\mu \Phi = \partial^\mu \Phi - i g_1 (L^\mu \Phi - \Phi R^\mu). \tag{3.10}$$

Die Feldstärketensoren für die links und rechtshändigen Vektorfelder sind:

$$L^{\mu\nu} = \partial^\mu L^\nu - \partial^\nu L^\mu, \tag{3.11}$$

$$R^{\mu\nu} = \partial^\mu R^\nu - \partial^\nu R^\mu. \tag{3.12}$$

Die Lagrangedichte ist so aufgebaut, dass sie invariant unter chiralen Symmetrietransformationen ist (im chiralen Limes). Um Massenunterschiede mit diesem Modell zu erklären, brauchen wir die spontane Symmetriebrechung. Die

entsteht, sobald $m_0^2 < 0$ (genau wie in dem einfachen Sigma-Modell aus Kap. 2). Um die Quarkmassen explizit zu berücksichtigen, benötigen wir eine explizite Symmetriebrechung. Die Terme, die für die explizite Symmetriebrechung verantwortlich sind, lauten:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{h_{0N}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_{0N}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_{0S}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_N & 0 & 0 \\ 0 & \delta_N & 0 \\ 0 & 0 & \delta_S \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Desweiteren berücksichtigen wir die chirale Anomalie. Das ist der Term proportional zu c_1 .

In der verallgemeinerten Version des σ -Modelles entstehen Kondensate für die Felder σ_N und σ_S :

$$\phi_N = Z_\pi f_\pi, \quad (3.15)$$

$$\phi_S = \frac{Z_K f_K}{\sqrt{2}}, \quad (3.16)$$

wobei f_π die Pion-Zerfallskonstante und f_K die Kaon-Zerfallskonstante ist.

Die sogenannten Wellenrenormierungskonstanten Z lauten:

$$Z_\pi = Z_{\eta_N} = \frac{m_{a_1}}{\sqrt{m_{a_1}^2 - g_1^2 \phi_N^2}}, \quad Z_K = \frac{2m_{K_1}}{\sqrt{4m_{K_1}^2 - g_1^2 (\phi_N + \sqrt{2}\phi_S)^2}}, \quad (3.17)$$

$$Z_{\eta_S} = \frac{m_{f_{1S}}}{\sqrt{m_{f_{1S}}^2 - 2g_1^2 \phi_S^2}}, \quad Z_{K_0^*} = \frac{2m_{K^*}}{\sqrt{4m_{K^*}^2 - g_1^2 (\phi_N - \sqrt{2}\phi_S)^2}}. \quad (3.18)$$

Diese entstehen, wenn man die unphysikalische Mischung von pseudoskalaren und axial-vektoriellen Teilchen beseitigt, siehe Details in Ref. [7]. Die Z tauchen in den Ausdrücken der Massen auf.

Die Massen der Teilchen wurden in Refs. [7, 8] berechnet. Sie sind Funktion der Kondensate (genau wie in unserem einfachen Sigma-Modell).

Die Massen der pseudoskalaren Teilchen sind:

$$m_\pi^2 = Z_\pi^2 \left[m_0^2 + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi_N^2 + \lambda_1 \phi_S^2 \right] \equiv \frac{Z_\pi^2 h_{0N}}{\phi_N}, \quad (3.19)$$

$$m_{K^*}^2 = Z_K^2 \left[m_0^2 + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi_N^2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \phi_N \phi_S + (\lambda_1 + \lambda_2) \phi_S^2 \right], \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} m_{\eta_N}^2 &= Z_\pi^2 \left[m_0^2 + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi_N^2 + \lambda_1 \phi_S^2 + c_1 \phi_N^2 \phi_S^2 \right] \\ &\equiv Z_\pi^2 \left(\frac{h_{0N}}{\phi_N} + c_1 \phi_N^2 \phi_S^2 \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} m_{\eta_S}^2 &= Z_{\eta_S}^2 \left[m_0^2 + \lambda_1 \phi_N^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) \phi_S^2 + \frac{c_1}{4} \phi_N^4 \right] \\ &\equiv Z_{\eta_S}^2 \left(\frac{h_{0S}}{\phi_S} + \frac{c_1}{4} \phi_N^4 \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$m_{\eta_{NS}}^2 = Z_\pi Z_{\pi_S} \frac{c_1}{2} \phi_N^3 \phi_S, \quad (3.23)$$

$m_{\eta_{NS}}^2$ ist ein zu beseitigender Mischterm.

$$m_{\eta'/\eta}^2 = \frac{1}{2} \left[m_{\eta_N}^2 + m_{\eta_S}^2 \pm \sqrt{(m_{\eta_N}^2 - m_{\eta_S}^2)^2 + 4m_{\eta_{NS}}^4} \right]. \quad (3.24)$$

Die Massen der skalaren Teilchen sind:

$$m_{a_0}^2 = m_0^2 + \left(\lambda_1 + \frac{3}{2} \lambda_2 \right) \phi_N^2 + \lambda_1 \phi_S^2, \quad (3.25)$$

$$m_{K_0^*}^2 = Z_{K_0^*}^2 \left[m_0^2 + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi_N^2 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \phi_N \phi_S + (\lambda_1 + \lambda_2) \phi_S^2 \right], \quad (3.26)$$

$$m_{\sigma_N}^2 = m_0^2 + 3 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \right) \phi_N^2 + \lambda_1 \phi_S^2, \quad (3.27)$$

$$m_{\sigma_S}^2 = m_0^2 + \lambda_1 \phi_N^2 + 3(\lambda_1 + \lambda_2) \phi_S^2. \quad (3.28)$$

Die Massen der Vektormesonen sind:

$$m_\rho^2 = m_1^2 + \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3) \phi_N^2 + \frac{h_1}{2} \phi_S^2 + 2\delta_N, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} m_{K^*}^2 &= m_1^2 + \frac{1}{4}(g_1^2 + 2h_1 + h_2) \phi_N^2 \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_N \phi_S (h_3 - g_1^2) + \frac{1}{2}(g_1^2 + h_1 + h_2) \phi_S^2 + \delta_N + \delta_S, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$m_{\omega_N}^2 = m_\rho^2, \quad (3.31)$$

$$m_{\omega_S}^2 = m_1^2 + \frac{h_1}{2} \phi_N^2 + \left(\frac{h_1}{2} + h_2 + h_3 \right) \phi_S^2 + 2\delta_S, \quad (3.32)$$

Die Massen der Axialvektormesonen sind:

$$m_{a_1}^2 = m_1^2 + \frac{1}{2}(2g_1^2 + h_1 + h_2 - h_3)\phi_N^2 + \frac{h_1}{2}\phi_S^2 + 2\delta_N, \quad (3.33)$$

$$m_{K_1}^2 = m_1^2 + \frac{1}{4}(g_1^2 + 2h_1 + h_2)\phi_N^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_N\phi_S(h_3 - g_1^2) + \frac{1}{2}(g_1^2 + h_1 + h_2)\phi_S^2 + \delta_N + \delta_S, \quad (3.34)$$

$$m_{f_{1N}}^2 = m_{a_1}^2, \quad (3.35)$$

$$m_{f_{1S}}^2 = m_1^2 + \frac{h_1}{2}\phi_N^2 + \left(2g_1^2 + \frac{h_1}{2} + h_2 - h_3\right)\phi_S^2 + 2\delta_S. \quad (3.36)$$

Das Potential in Abhängigkeit der Kondensate lautet (das bedeutet, dass alle andere Felder gleich Null gesetzt worden sind):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\phi_N, \phi_S) &= \frac{1}{2}m_0^2(\phi_N^2 + \phi_S^2) + \frac{\lambda_1}{4}(\phi_N^4 + 2\phi_N^2\phi_S^2 + \phi_S^4) \\ &\quad + \frac{\lambda_2}{4}\left(\frac{\phi_N^4}{2} + \phi_S^4\right) - h_{0N}\phi_N - h_{0S}\phi_S. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Man bestimmt die Kondensate, indem man das Potential nach ϕ_N und ϕ_S ableitet:

$$\frac{\partial\mathcal{V}(\phi_N, \phi_S)}{\partial\phi_N} = [m_0^2 + \lambda_1(\phi_N^2 + \phi_S^2)]\phi_N + \frac{\lambda_2}{2}\phi_N^3 - h_{0N}, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial\mathcal{V}(\phi_N, \phi_S)}{\partial\phi_S} = [m_0^2 + \lambda_1(\phi_N^2 + \phi_S^2)]\phi_S + \lambda_2\phi_S^3 - h_{0S}. \quad (3.39)$$

und das Minimum berechnet:

$$\frac{\partial\mathcal{V}(\phi_N, \phi_S)}{\partial\phi_N} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow h_{0N} = [m_0^2 + \lambda_1(\phi_N^2 + \phi_S^2)]\phi_N + \frac{\lambda_2}{2}\phi_N^3, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial\mathcal{V}(\phi_N, \phi_S)}{\partial\phi_S} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow h_{0S} = [m_0^2 + \lambda_1(\phi_N^2 + \phi_S^2)]\phi_S + \lambda_2\phi_S^3. \quad (3.41)$$

Die Parameter wurden im Vakuum festgelegt und folgen aus dem Papier von Ref. [7] und sind in der Tabelle 2 zu finden. (Die weiteren Parameter h_1 , λ_1 wurden zu Null gesetzt). Der Vergleich der theoretischen Resultate mit den entsprechenden experimentellen Werten ist in Tabelle 3 gezeigt.

Tab. 2: Werte der Parameter (aus Ref. [7])

Parameter	Werte
m_0^2 [GeV ²]	-0.9183 ± 0.0006
m_1^2 [GeV ²]	0.4135 ± 0.0147
c_1 [GeV ⁻²]	450.5420 ± 7.033
δ_S [GeV ²]	0.1511 ± 0.0038
g_1	5.843 ± 0.018
g_2	3.0250 ± 0.2329
ϕ_N [GeV]	0.1646 ± 0.0001
ϕ_S [GeV]	0.1262 ± 0.0001
h_2	9.8796 ± 0.6627
h_3	4.8667 ± 0.0864
λ_2	68.2972 ± 0.0435

(3.42)

Mit der oben genannten Parameterwahl erhalten wir folgende Tabelle (aus Ref. [7]).

Tab 3: Theorie-Experiment-Vergleich (aus Ref. [7])

Observable	Fit [MeV]	Experiment [MeV]
f_π	96.3 ± 0.7	92.2 ± 4.6
f_K	106.9 ± 0.6	110.4 ± 5.5
m_π	141.0 ± 5.8	137.3 ± 6.9
m_K	485.6 ± 3.0	495.6 ± 24.8
m_η	509.4 ± 3.0	547.9 ± 27.4
$m_{\eta'}$	962.5 ± 5.6	957.8 ± 47.9
m_ρ	783.1 ± 7.0	775.5 ± 38.8
m_{K^*}	885.1 ± 6.3	893.8 ± 44.7
m_ϕ	975.1 ± 6.4	1019.5 ± 51.0
m_{a_1}	1186 ± 6.0	1230 ± 62
$m_{f_1(1420)}$	1372.4 ± 5.3	1426 ± 71
m_{a_0}	1363 ± 1	1474 ± 74
$m_{K_0^*}$	1450 ± 1	1425 ± 71
$\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}$	160.9 ± 4.4	149.1 ± 7.4
$\Gamma_{K^* \rightarrow K\pi}$	44.6 ± 1.9	46.2 ± 2.3
$\Gamma_{\phi \rightarrow \bar{K}K}$	3.34 ± 0.14	3.54 ± 0.18
$\Gamma_{a_1 \rightarrow \rho\pi}$	549 ± 43	425 ± 175
$\Gamma_{a_1 \rightarrow \pi\gamma}$	0.66 ± 0.01	0.64 ± 0.25
$\Gamma_{f_1(1420) \rightarrow K^*K}$	44.6 ± 39.9	43.9 ± 2.2
Γ_{a_0}	266 ± 12	265 ± 13
$\Gamma_{K_0^* \rightarrow K\pi}$	285 ± 12	270 ± 80

(3.43)

Man sieht also, dass die Beschreibung der experimentellen Daten sehr gut ist.

Kapitel 4

Das eLSM bei $T \neq 0$

4.1 Chirale Kondensate als Funktion von T

Der QCD-Phasenübergang wird durch den chiralen Phasenübergang beschrieben. In dem eLSM gibt es zwei chirale Kondensate, ϕ_N und ϕ_S . Sie sind Ordnungsparameter des Phasenüberganges. Wir sollten daher ihren Verlauf als Funktion von T bestimmen.

Wie schon in Kap. 2 beschrieben, implementieren wir eine explizite Temperaturabhängigkeit des Massenparameters m_0 :

$$m_0^2 \rightarrow m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right). \quad (4.1)$$

Diese Wahl ist ziemlich einfach, hat aber viele Vorteile, siehe Refs. [16, 17].

Außerdem muss im eLSM auch der Massenparameter der axial-vektoriellen Mesonen temperaturabhängig werden:

$$m_1^2 \rightarrow m_1^2 - m_0^2 \frac{T^2}{T_0^2} \quad (4.2)$$

Die Abhängigkeit ist so gewählt, dass für große T alle Mesonen die gleiche Temperaturabhängigkeit haben. Diese Ansätze führen zu einer Temperaturabhängigkeit der chiralen Kondensate:

$$\phi_N \rightarrow \phi_N(T), \quad (4.3)$$

$$\phi_S \rightarrow \phi_S(T), \quad (4.4)$$

die aus den folgenden Gleichungen bestimmt werden:

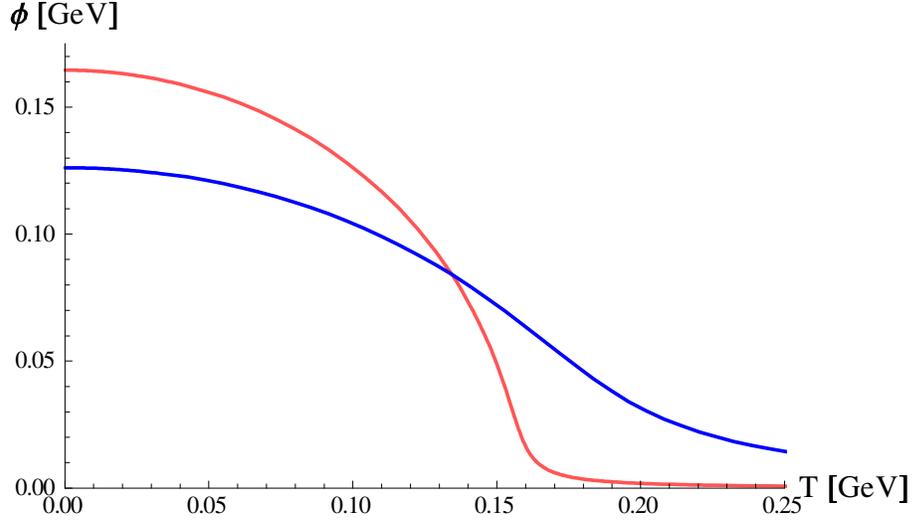


Abbildung 4.1: Chirale Kondensate ϕ_N (rot) und ϕ_S (blau) als Funktion der T Temperatur.

$$h_{0N} = m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) \phi_N(T) + \frac{\lambda_2}{2} \phi_N^3(T), \quad (4.5)$$

$$h_{0S} = m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) \phi_S(T) + \lambda_2 \phi_S^3(T). \quad (4.6)$$

Die Resultate werden in Abb. 4.1 gezeigt. Wie erwartet, werden die Kondensate kleiner für steigendes T und haben Null als asymptotischen Limes. Außerdem ist der Verlauf des Kondensats ϕ_S sanfter. Der große Wert der Kondensate für kleine Temperaturen folgt aus der spontanen Symmetriebrechung und der Übergang zu kleinen Werten folgt aus der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie. Die in der Grafik dargestellte Änderung der chiralen Kondensates bezeichnen wir als chiralen Phasenübergang.

Die kritische Temperatur des chiralen Phasenüberganges definieren wir über die zweite Ableitung des chiralen Kondensats: das ist nämlich der Punkt, wo die Zweite Ableitung verschwindet. Das wird in Abb. 4.2 gezeigt.

$$0 \equiv \left. \frac{\partial^2}{\partial T^2} \phi_N(T) \right|_{T=T_{kr}}. \quad (4.7)$$

Um genau zu sein, erhalten wir eigentlich zwei kritische Temperaturen: T_{kr} entspricht der kritischen Temperatur von ϕ_N (non-strange Sektor) und analog dazu

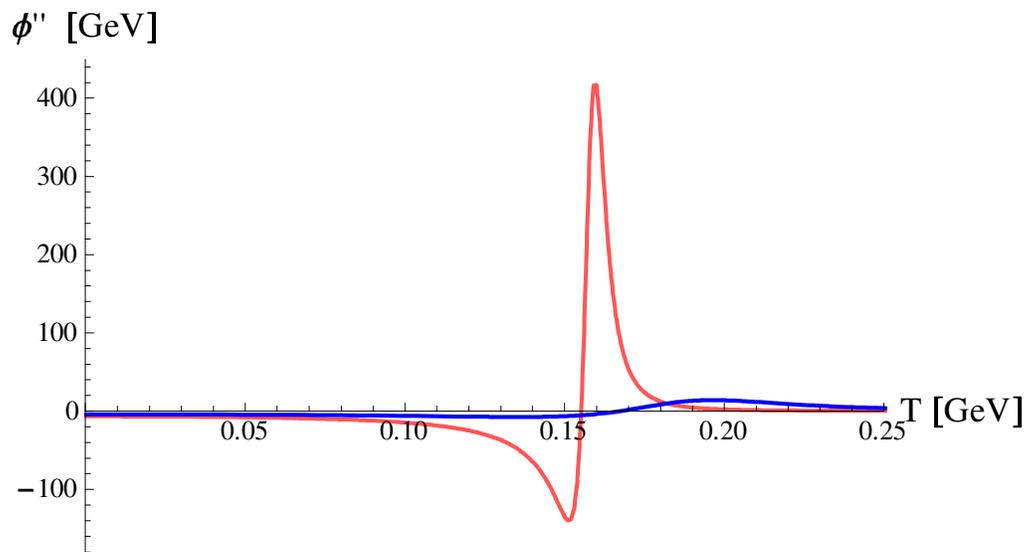


Abbildung 4.2: Zweite Ableitung der Kondensate. Die rote Linie entspricht $\phi''_N(T)$ und die blaue Linie ist $\phi''_S(T)$.

$T_{kr,s}$ entspricht der kritischen Temperatur von ϕ_S (also des strange Sektors). Die numerischen Werte sind: $T_{kr} = 0.1552$ GeV und für $T_{kr,s} = 0.1676$ GeV. Beide sind dem Parameter T_0 sehr nah.

4.2 Massen als Funktion von T

Aus der Temperaturabhängigkeit der chiralen Kondensate ϕ_N und ϕ_S folgen die temperaturabhängigen Massen der Mesonen und ihre Wellenfunktionsrenormierung.

Die Wellenfunktionsrenormierungskonstanten Z sind:

$$Z_\pi(T) = Z_{\eta_N}(T) = \frac{m_{a_1}(T)}{\sqrt{m_{a_1}^2(T) - g_1^2 \phi_N^2(T)}} , \quad (4.8)$$

$$Z_K(T) = \frac{2m_{K_1}(T)}{\sqrt{4m_{K_1}^2(T) - g_1^2(\phi_N(T) + \sqrt{2}\phi_S(T))^2}} , \quad (4.9)$$

$$Z_{\eta_S}(T) = \frac{m_{f_{1S}}(T)}{\sqrt{m_{f_{1S}}^2(T) - 2g_1^2 \phi_S^2(T)}} , \quad (4.10)$$

$$Z_{K_0^*}(T) = \frac{2m_{K^*}(T)}{\sqrt{4m_{K^*}^2(T) - g_1^2(\phi_N(T) - \sqrt{2}\phi_S(T))^2}} . \quad (4.11)$$

Die Wellenfunktionsrenormierungskonstanten $Z_\pi(T)$, $Z_K(T)$ und $Z_{\eta_S}(T)$ haben im Vakuum ($T = 0$) den Wert von etwa 1.6 und nehmen mit steigender Temperatur kontinuierlich ab bis zum chiralen Phasentübergang. Für Temperaturen, die höher sind als die kritische Temperatur T_{kr} , entarten sie. Die Wellenfunktionsrenormierungskonstante $Z_{K_0^*}(T)$ hat bei $T = 0$ den Wert 1. Beim chiralen Phasentübergang nimmt $Z_{K_0^*}(T)$ leicht zu und bei hohen Temperaturen geht es wieder gegen 1 wie die anderen drei Wellenfunktionsrenormierungskonstanten. Ihr Verhalten wird in Abb. 4.3 gezeigt.

Wir wenden nun unsere Aufmerksamkeit den Massen der Mesonen zu. Die Massen der skalaren Mesonen als Funktion von T lauten:

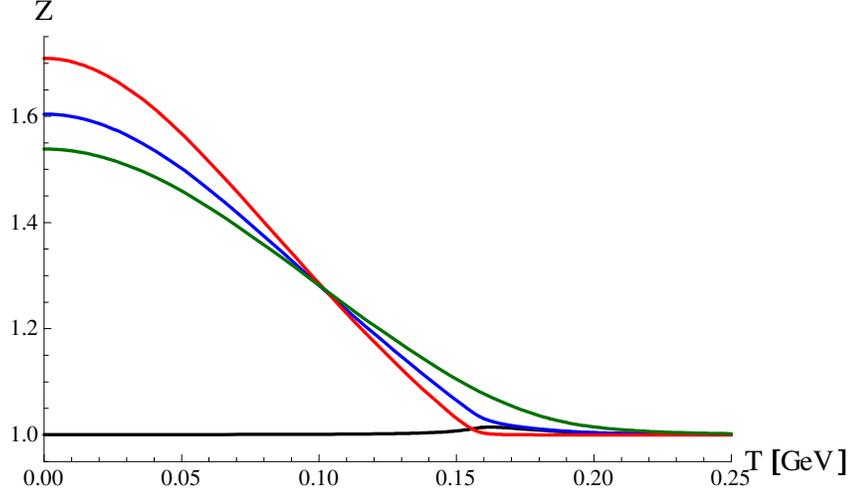


Abbildung 4.3: Die Wellenfunktionsrenormierungskonstanten $Z_\pi(T)$ (rot), $Z_K(T)$ (blau), $Z_{\eta_S}(T)$ (grün) und $Z_{K_0^*}(T)$ (schwarz) als Funktion von T .

$$m_{\sigma_N}^2(T) = m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) + \frac{3}{2} \lambda_2 \phi_N^2(T), \quad (4.12)$$

$$m_{K_0^*}^2(T) = Z_{K_0^*}^2(T) \left[m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) + \frac{\lambda_2}{2} \phi_N^2(T) + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \phi_N(T) \phi_S(T) + \lambda_2 \phi_S^2(T) \right], \quad (4.13)$$

$$m_{a_0}^2(T) = m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) + \frac{3}{2} \lambda_2 \phi_N^2(T), \quad (4.14)$$

$$m_{\sigma_S}^2(T) = m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) + 3 \lambda_2 \phi_S^2(T), \quad (4.15)$$

Die Massen der Pseudoskalaren Mesonen als Funktion von T sind:

$$m_\pi^2(T) = Z_\pi^2(T) \left[m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) + \frac{\lambda_2}{2} \phi_N^2(T) \right] \equiv \frac{Z_\pi^2(T) h_{0N}}{\phi_N(T)}, \quad (4.16)$$

$$m_K^2(T) = Z_K^2(T) \left[m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) + \frac{\lambda_2}{2} \phi_N^2(T) - \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \phi_N(T) \phi_S(T) + \lambda_2 \phi_S^2(T) \right], \quad (4.17)$$

$$m_{\eta_N}^2(T) = Z_\pi^2(T) \left[m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) + \frac{\lambda_2}{2} \phi_N^2(T) + c_1 \phi_N^2(T) \phi_S^2(T) \right] \equiv Z_\pi^2(T) \left(\frac{h_{0N}}{\phi_N(T)} + c_1 \phi_N^2(T) \phi_S^2(T) \right), \quad (4.18)$$

$$m_{\eta_S}^2(T) = Z_{\eta_S}^2(T) \left[m_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) + \lambda_2 \phi_S^2(T) + \frac{c_1}{4} \phi_N^4(T) \right] \equiv Z_{\eta_S}^2(T) \left(\frac{h_{0S}}{\phi_S(T)} + \frac{c_1}{4} \phi_N^4(T) \right), \quad (4.19)$$

$$m_{\eta_{NS}}^2(T) = Z_\pi(T) Z_{\pi_S}(T) \frac{c_1}{2} \phi_N^3(T) \phi_S(T). \quad (4.20)$$

Auch bei endlicher Temperatur T müssen η_N und η_S entmischt werden. Ihre Massen sind gegeben durch:

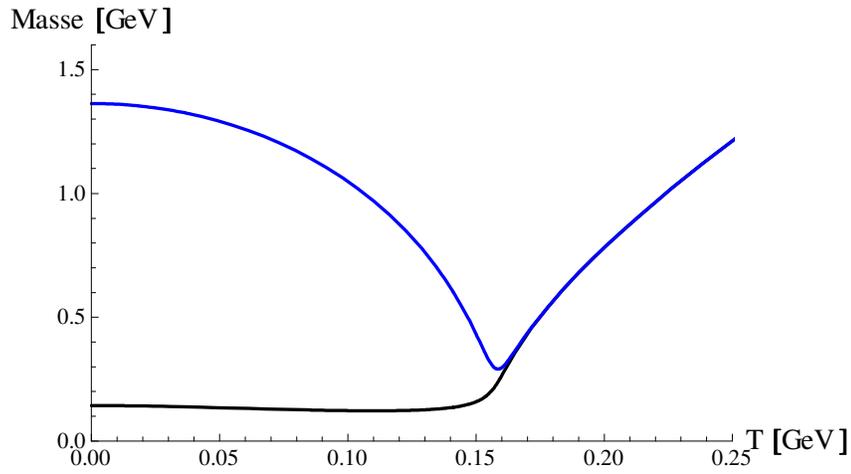
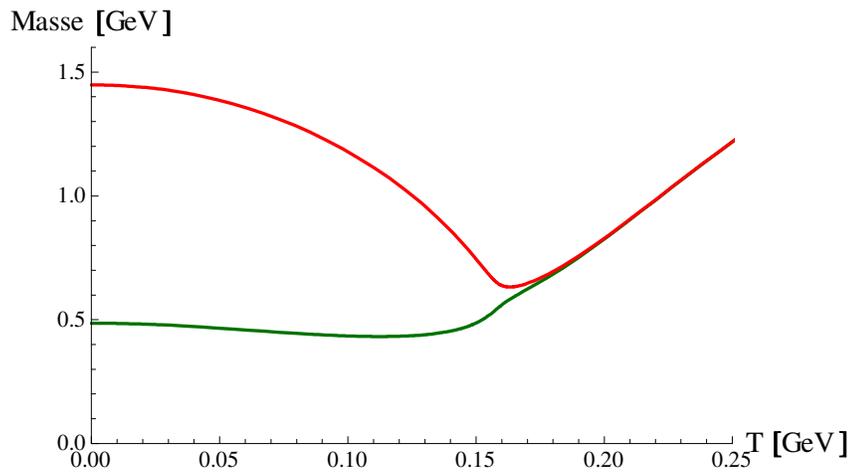
$$m_{\eta'/\eta}^2(T) = \frac{1}{2} \left[m_{\eta_N}^2(T) + m_{\eta_S}^2(T) \pm \sqrt{(m_{\eta_N}^2(T) - m_{\eta_S}^2(T))^2 + 4m_{\eta_{NS}}^4(T)} \right]. \quad (4.21)$$

Der Plot, der analog zur Abb. 2.5 des einfachen Sigma-Modell ist, ist die Abb. 4.4: $m_\sigma(T)$ verhält sich bei niedrigen Temperaturen wie eine negative quadratische Funktion von T fast bis zum chiralen Phasenübergang bei der kritischen Temperatur $T_{kr} = 0.1552$ GeV. $m_\pi(T)$ verhält sich fast wie eine Konstante ebenso bis zum chiralen Phasenübergang. Danach entarten bei höheren Temperaturen $m_\pi(T)$ mit $m_\sigma(T)$ und beide steigen linear mit wachsender Temperatur an. Für große Temperaturen verhalten sich die Massen wie :

$$m_\sigma(T) = m_\pi(T) = \frac{\sqrt{-m_0^2}}{T_0} T \approx 6.18T. \quad (4.22)$$

Die Massen der kaonischen Teilchen werden in Abb. 4.5 gezeigt. Der Plot verhält sich analog zu dem vorherigen Plot.

In Abb. 4.6 sind die Verläufe der Massen der Teilchen a_0 und η präsentiert. $m_{a_0}(T)$ ist bei jeder Temperatur mit $m_\sigma(T)$ entartet und somit haben beide denselben Verlauf. Daher sind auch beide in blau dargestellt. $m_\eta(T)$ verhält sich bei niedrigen Temperaturen bis zu T_{kr} wie eine negative quadratische Funktion von T und danach entarten die Massen analog zu den vorherigen Plots. Das Verhalten von $m_\eta(T)$ ist auf die chirale Anomalie zurückzuführen. Das bedeutet:

Abbildung 4.4: $m_\sigma(T)$ (blau) und $m_\pi(T)$ schwarz als Funktion von T .Abbildung 4.5: $m_{K^*}(T)$ (rot) und $m_K^2(T)$ (grün).

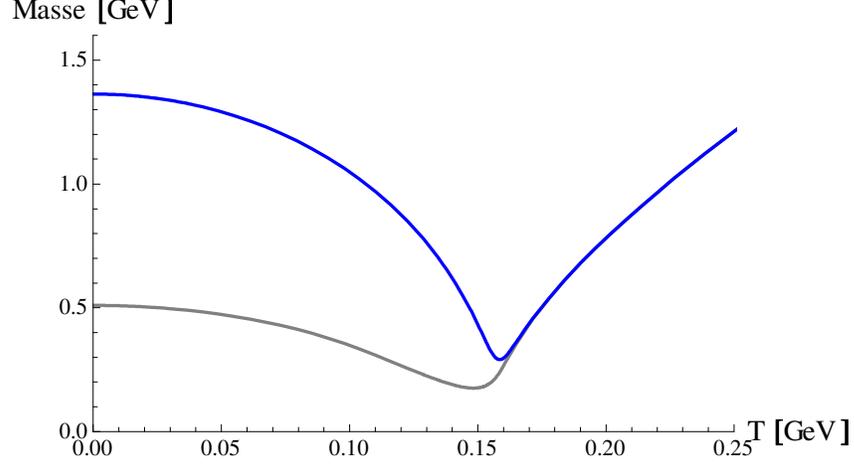


Abbildung 4.6: $m_{a_0}(T)$ (blau) und $m_{\eta}(T)$ (grau).

ohne die chirale Anomalie würde sich $m_{\eta}(T)$ wie die Masse $m_{\pi}(T)$ verhalten für jede Temperatur T . Für niedrigere Temperaturen als T_{kr} wäre $m_{\eta}(T)$ konstant.

In Abb. 4.7 werden die Massen der Teilchen σ_S und η' dargestellt. Die Massen verhalten sich ähnlich wie im vorherigen Plot aber mit dem Unterschied, dass die Entartung langsamer und bei höheren Temperaturen stattfindet.

Zum Schluss in der Abb. 4.8 werden nochmals alle Massen der pseudoskalaren und skalaren Mesonen gezeigt. Ihre Entartung bei großen T ist deutlich zu sehen. Wir widmen uns jetzt dem (axial-)vektoriellen Sektor. Die Massen der Axialvektormesonen als Funktion von T lauten:

$$m_{a_1}^2(T) = m_1^2 - m_0^2 \frac{T^2}{T_0^2} + \frac{1}{2} (2g_1^2 + h_2 - h_3) \phi_N^2(T), \quad (4.23)$$

$$m_{K_1}^2(T) = m_1^2 - m_0^2 \frac{T^2}{T_0^2} + \frac{1}{4} (g_1^2 + h_2) \phi_N^2(T) - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_N(T) \phi_S(T) (h_3 - g_1^2) + \frac{1}{2} (g_1^2 + h_2) \phi_S^2(T) + \delta_S, \quad (4.24)$$

$$m_{f_{1N}}^2(T) = m_{a_1}^2(T), \quad (4.25)$$

$$m_{f_{1S}}^2(T) = m_1^2 - m_0^2 \frac{T^2}{T_0^2} + (2g_1^2 + h_2 - h_3) \phi_S^2(T) + 2\delta_S. \quad (4.26)$$

Die Massen der Vektormesonen als Funktion von T sind:

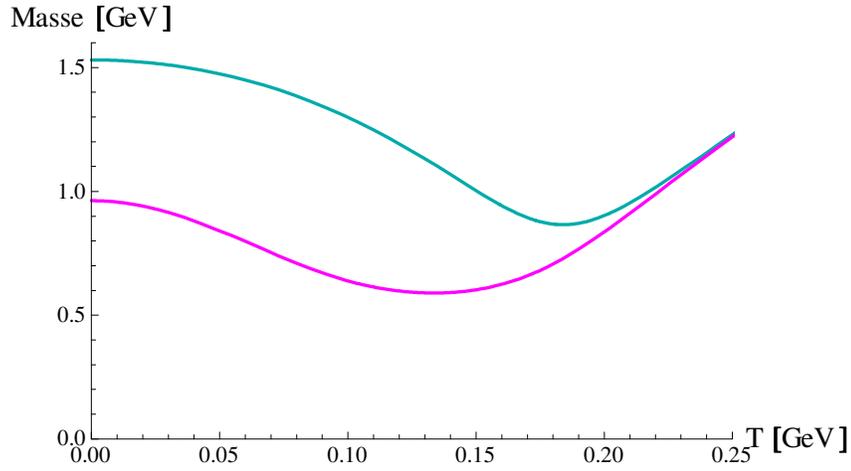


Abbildung 4.7: Der Plot zeigt die Masse $m_{\sigma_S}(T)$ (türkis) und die von $m_{\eta'}(T)$ (magenta).

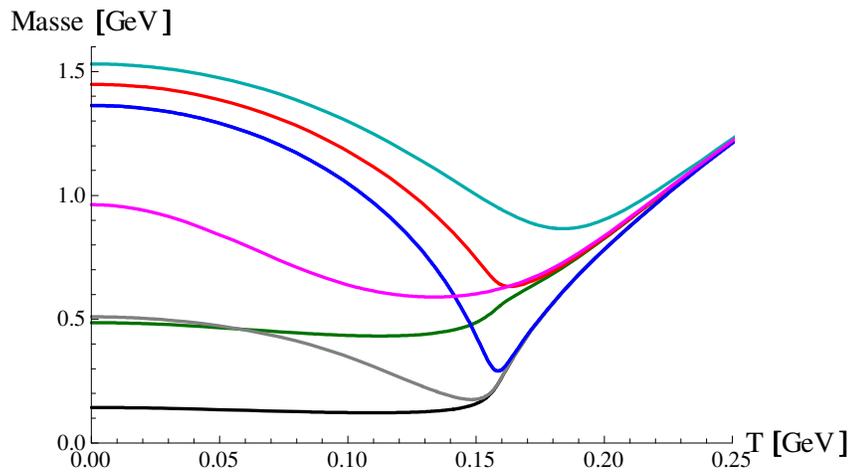


Abbildung 4.8: Alle (pseudo-)skalaren Teilchen (Farben wie in den vorherigen Plots).

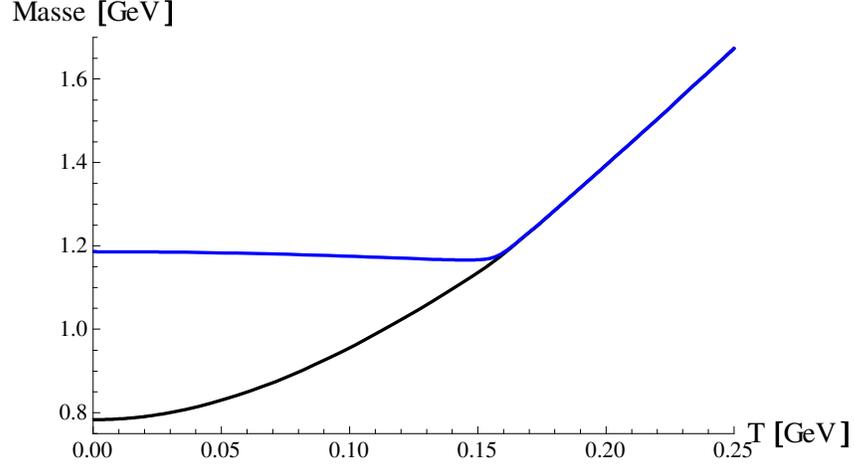


Abbildung 4.9: Die Funktionen $m_\rho(T)$ (schwarz) und $m_{a_1}(T)$ (blau).

$$m_\rho^2(T) = m_1^2 - m_0^2 \frac{T^2}{T_0^2} + \frac{1}{2}(h_2 + h_3)\phi_N^2(T), \quad (4.27)$$

$$m_{K^*}^2(T) = m_1^2 - m_0^2 \frac{T^2}{T_0^2} + \frac{1}{4}(g_1^2 + h_2)\phi_N^2(T) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_N(T)\phi_S(T)(h_3 - g_1^2) + \frac{1}{2}(g_1^2 + h_2)\phi_S^2(T) + \delta_S, \quad (4.28)$$

$$m_{\omega_N}^2(T) = m_\rho^2(T), \quad (4.29)$$

$$m_{\omega_S}^2(T) = m_1^2 - m_0^2 \frac{T^2}{T_0^2} + (h_2 + h_3)\phi_S^2(T) + 2\delta_S. \quad (4.30)$$

Die Massen der non-strange axial-vektoriellen Mesonen sind in Abb. 4.9 zu finden. Blau sind die zwei identischen Massen für die Axialvektormesonen $m_{a_1}(T)$ und $m_{f_{1N}}(T)$, und schwarz die zwei Massen für die Vektormesonen $m_\rho(T)$ und $m_{\omega_N}(T)$. Die Massen der Axialvektormesonen bleiben für niedrige Temperaturen konstant auf etwa $m_{a_1}(T=0) = m_{f_{1N}}(T=0)$. Dagegen steigen die Massen der Vektormesonen $m_\rho(T)$ und $m_{\omega_N}(T)$ für niedrige Temperaturen mit T^2 an. Oberhalb des chiralen Phasenübergangs bei der kritischen Temperatur $T_{kr} = 0.1552$ GeV entarten die Massen der Axialvektormesonen und Vektormesonen. Danach steigen alle vier Massen linear mit steigender Temperatur an. Die Massen der kaonischen Axialvektormesonen und Vektormesonen werden in

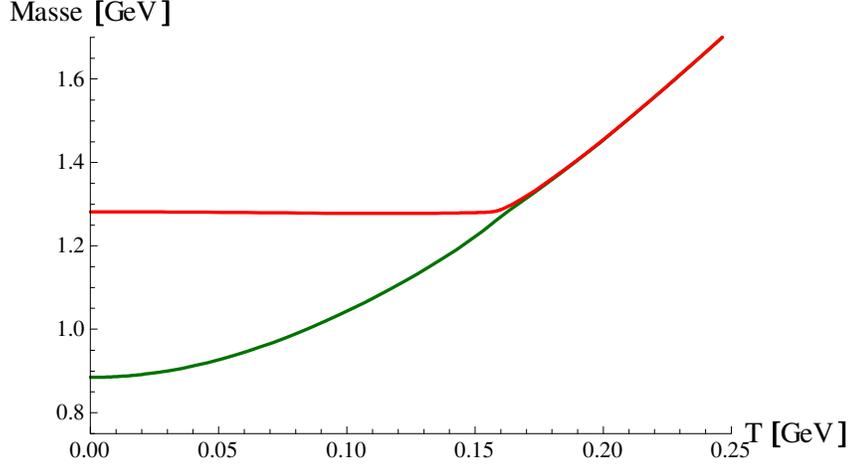


Abbildung 4.10: Massen $m_{K^*}(T)$ (rot) und $m_{K_1}(T)$ (grün).

Abb. 4.10 zeigt und verhalten sich analog zu dem vorherigen Plot. Auch hier entarten die Massen oberhalb der kritischen Temperatur T_{kr} .

Die Massen der strange-antistrange Axialvektormesonen und Vektormesonen sind in Abb. 4.11 gezeigt und verhalten sich ähnlich zu den vorherigen Plots. Die Entartung findet bei höheren Temperaturen statt, da diese Mesonen sich in unserem Modell aus s -Quarks zusammensetzen. Dies sieht man an den Massenformeln der Mesonen, da die Massen zum großen Teil aus dem s -Kondensat $\phi_S(T)$ folgen.

Zum Schluss zeigen wir alle (axial-)vektoriellen Teilchen in Abb. 4.12. Für sehr hohe Temperaturen entarten alle Massen.

4.3 Druck und Energiedichte als Funktion von T

In diesem Abschnitt berechnen wir die thermodynamischen Eigenschaften (Druck und Energiedichte als Funktion von T). Dafür benutzen wir die Funktionen der Massen, die im vorherigen Abschnitt berechnet worden sind.

Der (naive Ausdruck von) Druck $P(T)$ setzt sich aus den einzelnen Drücken zusammen:

$$P(T) = \sum_{i=\pi, K, \eta, \dots} P_i(T), \quad (4.31)$$

wobei $i = \pi, K, \eta, \dots$. Die Summe läuft über alle 16 Teilchensorten (siehe die Ta-

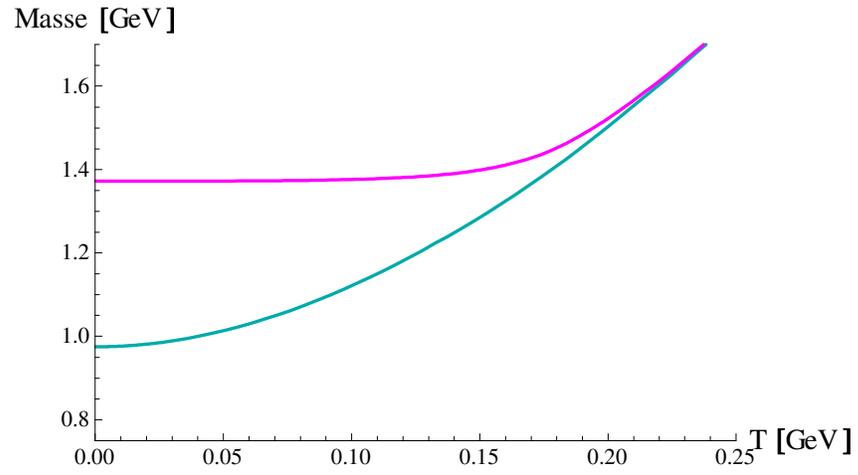


Abbildung 4.11: Massen $m_{f_{1S}}(T)$ (magenta) und $m_{\omega_S}(T)$ (türkis).

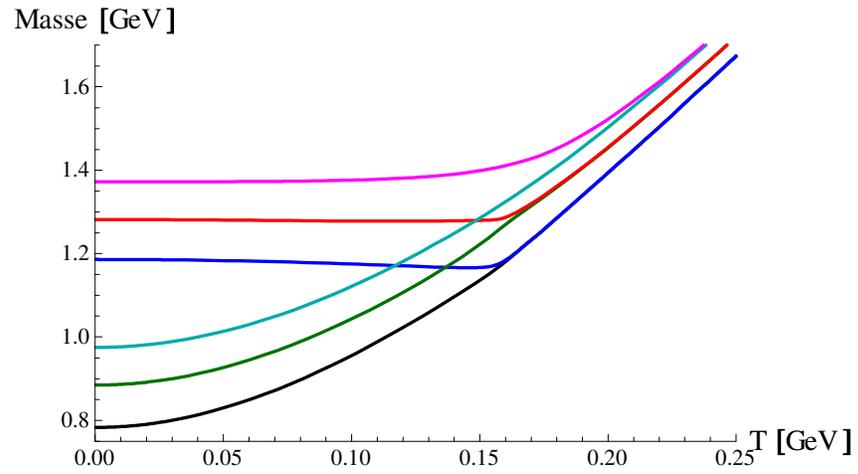
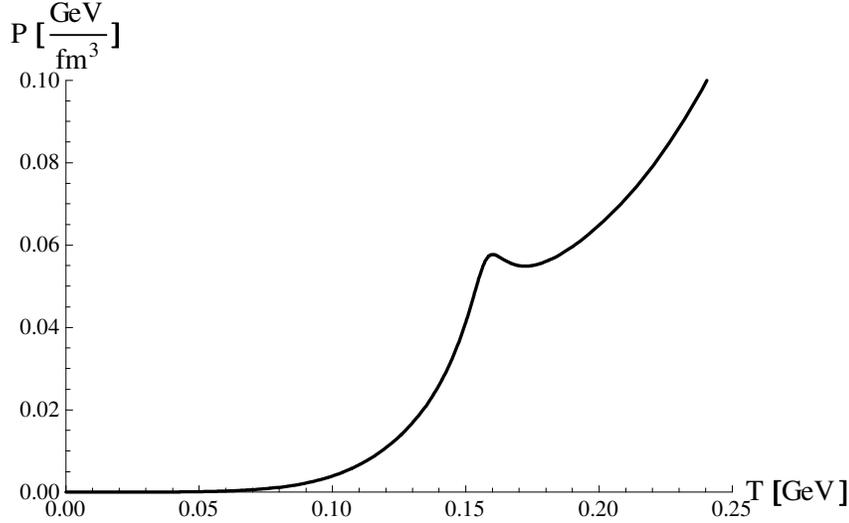


Abbildung 4.12: Alle (axial-)vektorielle Teilchen (Farbzuordnung wie in den vorherigen Plots).

Abbildung 4.13: Naives Verhalten des Drucks als Funktion von T .

belle 1). Ein Term der Summe lautet:

$$P_i(T) = -n_i \int_0^\infty dk \frac{k^2}{2\pi^2} \ln \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{k^2 + m_i(T)^2}}{T}} \right), \quad (4.32)$$

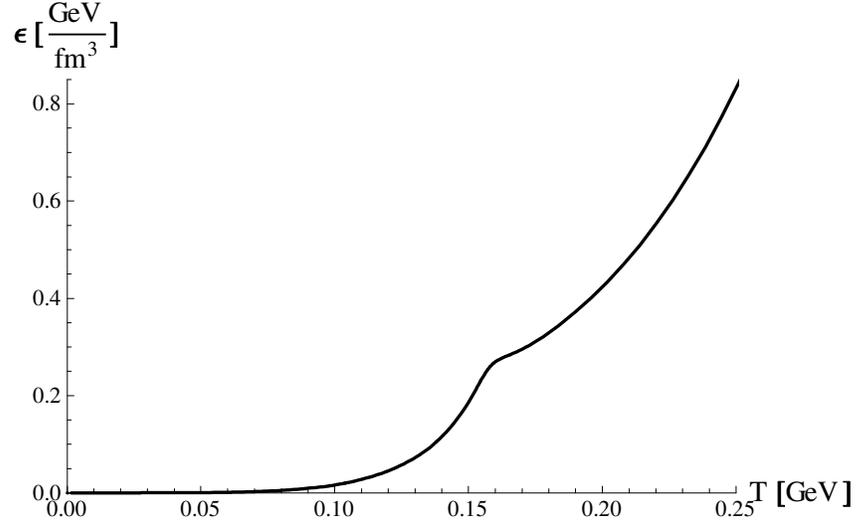
wobei n_i die Entartung der jeweiligen Teilchensorte ($n_\pi = 3$, $n_K = 4$, $n_\eta = n_{\eta'} = 1\dots$) ist und $m_i(T)$ die Masse der Teilchensorte. Das Verhalten des Drucks wird in Abb. 4.13 gezeigt. Man sieht schon, dass der Druck in der Nähe der kritischen Temperatur kleiner wird, wenn die Temperatur steigt. Das ist ein unphysikalisches Verhalten, deswegen müssen wir später die Formel korrigieren. Die gesamte Energiedichte setzt sich aus den einzelnen Energiedichten zusammen:

$$\epsilon(T) = \sum_{i=\pi, K, \eta, \dots} \epsilon_i(T), \quad (4.33)$$

wobei $i = \pi, K, \eta, \dots$. Die Summe läuft über alle 16 Teilchensorten, die in Kapitel 3 (Tabelle 1) eingeführt wurden. Ein Term in der Summe lautet:

$$\epsilon_i(T) = n_i \int_0^\infty dk \frac{k^2}{2\pi^2} \frac{\sqrt{k^2 + m_i(T)^2}}{e^{\frac{\sqrt{k^2 + m_i(T)^2}}{T}} - 1}. \quad (4.34)$$

Hier ist n_i die Entartung der jeweiligen Teilchensorte ($n_\pi = 3$, $n_K = 4$, $n_\eta = n_{\eta'} = 1\dots$) und $m_i(T)$ sind die Massen der jeweiligen Teilchensorte. Das Verhalten der Energiedichte wird in Abb. 4.14 präsentiert. Man sieht einen Knick

Abbildung 4.14: Verhalten der Energiedichte als Funktion von T .

in der Nähe der kritischen Temperatur. Dieser Knick wird vom Verhalten der Massen der skalaren und pseudoskalaren Teilchen verursacht, siehe Abb. 4.8. Wir müssen nun überprüfen, ob unsere Beschreibung der Thermodynamik konsistent ist. Folgende Energie-Druck-Relation muss für alle Temperaturen erfüllt sein, siehe z.B. Ref. [19]:

$$\epsilon(T) = T \frac{\partial P(T)}{\partial T} - P(T) \quad (4.35)$$

Das ist aber nicht der Fall. Mit den bisherigen Überlegungen verletzen wir die thermodynamische Konsistenz. Wir können die thermodynamische Konsistenz wiederherstellen, indem wir eine sogenannte Bag-Funktion $B(T)$ einführen (siehe auch Ref. [20]):

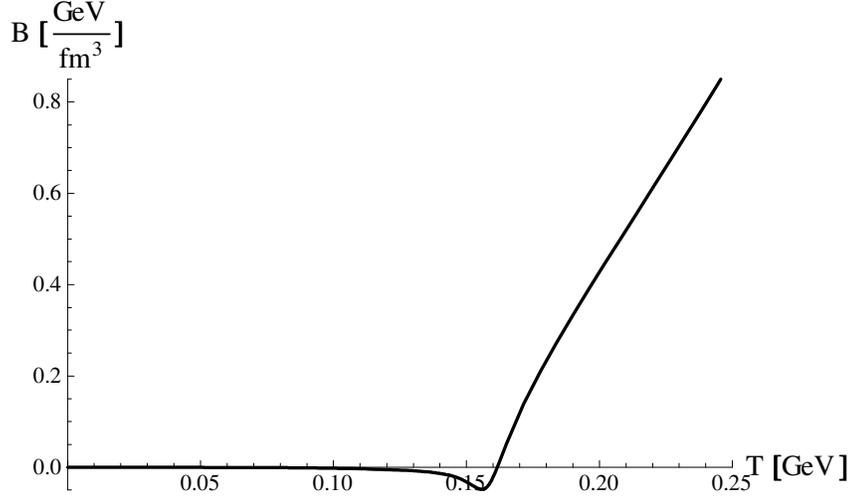
$$\epsilon(T) \rightarrow \epsilon'(T) = \epsilon(T) , \quad (4.36)$$

$$P(T) \rightarrow P'(T) = P(T) + TB(T) , \quad (4.37)$$

was für die Entropiedichte bedeutet:

$$s(T) \rightarrow s'(T) = s(T) + B(T) + T \frac{\partial B}{\partial T} \quad (4.38)$$

Um die Bag-Funktion $B(T)$ zu bestimmen, fordern wir, dass die thermodynamische Konsistenz für die neuen Funktionen $\epsilon'(T)$ und $P'(T) = P(T) + TB(T)$ erfüllt ist:

Abbildung 4.15: Bag-Funktion $B(T)$.

$$\epsilon'(T) = T \frac{\partial P'(T)}{\partial T} - P'(T) \rightarrow \quad (4.39)$$

$$\epsilon(T) = T \frac{\partial (P(T) + TB(T))}{\partial T} - P(T) - TB(T) . \quad (4.40)$$

Durch einfaches Umformungen erhalten wir:

$$\frac{1}{T^2} \left(\epsilon(T) + P(T) - T \frac{\partial P(T)}{\partial T} \right) = \frac{\partial B(T)}{\partial T} . \quad (4.41)$$

Durch Integrieren von beiden Seite erhalten wir die Bag-Funktion $B(T)$:

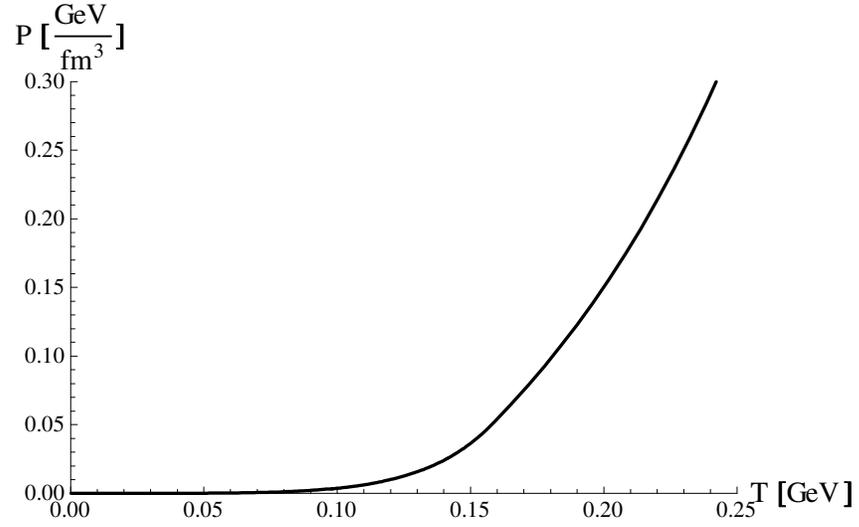
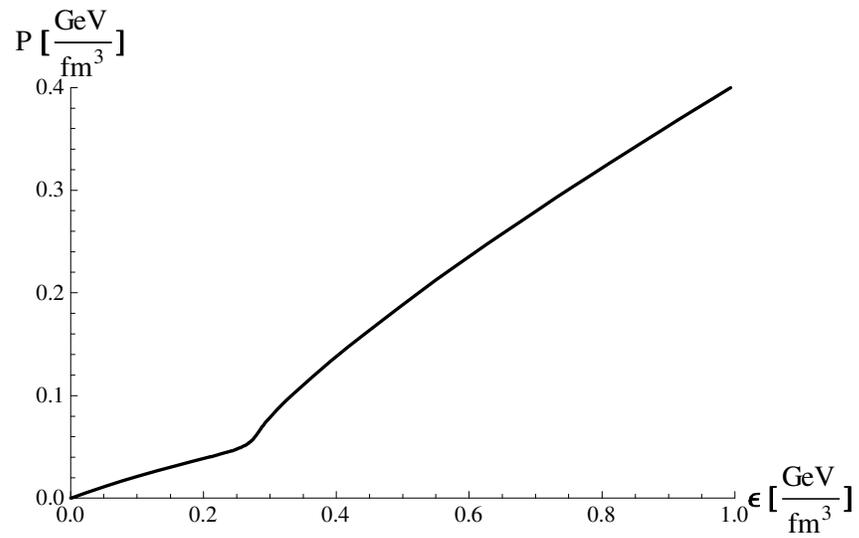
$$B(T) = \int_0^T d\tau \frac{\epsilon(\tau) + P(\tau) - \tau \frac{\partial P(\tau)}{\partial \tau}}{\tau^2} . \quad (4.42)$$

Das Verhalten der Bag-Funktion wird in Abb. 4.15 dargestellt. Für kleine Temperaturen ist die Bag-Funktion fast Null. In der Nähe des Phasenübergangs wird sie negativ und nach dem Phasenübergang wird sie positiv und steigt linear mit steigender Temperatur an.

In Abb. 4.16 wird die korrigierte Form des Druckes gezeigt. Sie wächst monoton und zeigt keinerlei unphysikalisches Verhalten.

Im Abb. 4.17 wird die Zustandsgleichung gezeigt: der Druck $P'(T)$ wird in dem Plot als Funktion der Energie $\epsilon(T) = \epsilon'(T)$ dargestellt.

Die Schallgeschwindigkeit ist gegeben als:

Abbildung 4.16: Druck $P'(T)$, nachdem die Bag-Funktion berücksichtigt wurde.Abbildung 4.17: Druck $P'(T)$ vs. Energiedichte $\epsilon'(T) = \epsilon(T)$.

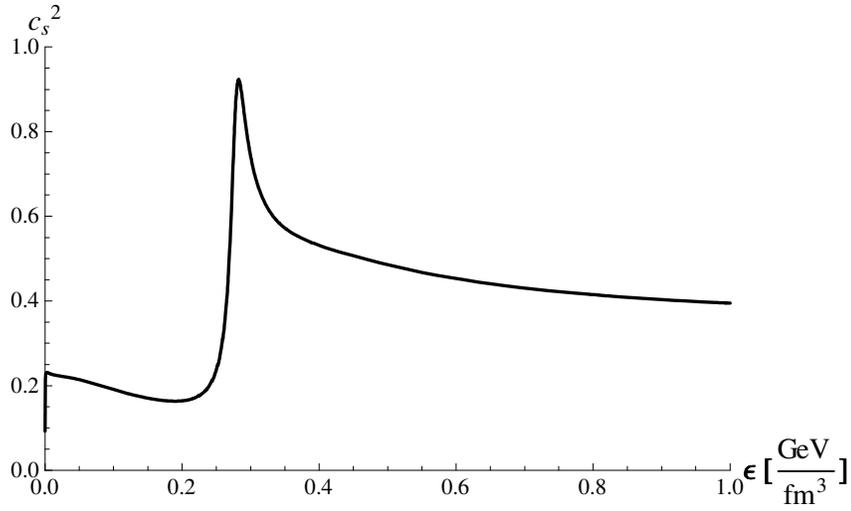


Abbildung 4.18: Quadrat der Schallgeschwindigkeit c_s^2 als Funktion der Energiedichte.

$$c_s^2 = \frac{\partial P'}{\partial \epsilon} . \quad (4.43)$$

Die Schallgeschwindigkeit c_s in Abhängigkeit von der Energie ϵ wird in Abb. 4.18 gezeigt: sie ist immer kleiner als eins und ist daher im Einklang mit der speziellen Relativitätstheorie. Sie zeigt aber ein Maximum in der Nähe des Phasenüberganges.

Kapitel 5

Kosmologische Anwendung

Mit Hilfe der Energiedichte und des Druckes, die im vorherigen Kapitel bestimmt wurden, berechnen wir jetzt die Zeitevolution des Universums. Zu diesem Zweck benutzen wir die Gleichung (siehe Kap. 1):

$$-\frac{d\epsilon(T)}{3\sqrt{\epsilon(T)}[\epsilon(T) + P(T)]} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} dt . \quad (5.1)$$

Auf der linken Seite haben wir die Energiedichte $\epsilon(T)$ in Abhängigkeit der Temperatur sowie den Druck $P(T)$ in Abhängigkeit der Temperatur. Auf der rechten Seite haben wir die Zeit t .

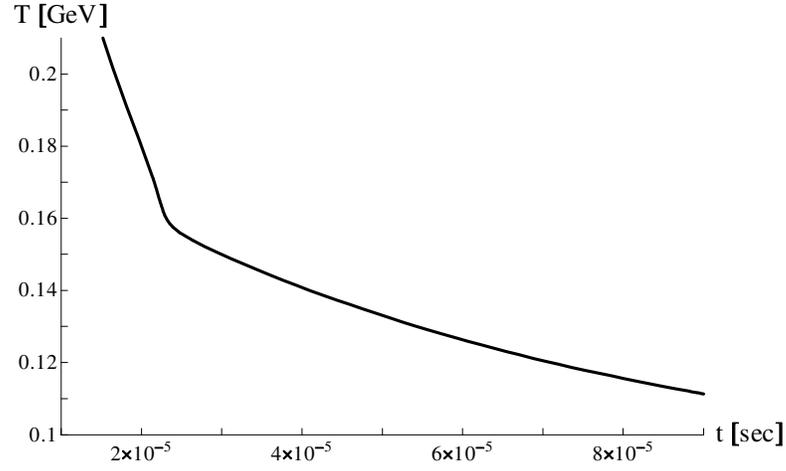
Das Differenzial von $d\epsilon(T)$ schreiben wir in das Differenzial $\frac{d\epsilon(T)}{dT} dT$ um:

$$-\frac{\frac{d\epsilon(T)}{dT} dT}{3\sqrt{\epsilon(T)}[\epsilon(T) + P(T)]} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} dt , \quad (5.2)$$

wobei G die Gravitationskonstante $G = 6.70837(80) \times 10^{-39} \frac{1}{\text{GeV}^2}$ ist. Wir integrieren beide Seiten. Dies ist möglich, weil die Integrationsvariablen dT und dt separiert sind:

$$-\int_{T_1}^{T_2} \frac{\frac{d\epsilon(\tau)}{d\tau}}{3\sqrt{\epsilon(\tau)}[\epsilon(\tau) + P(\tau)]} d\tau = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} (t_2 - t_1) . \quad (5.3)$$

Wir können aus der obigen Gleichung die Temperatur T als Funktion der Zeit t , also die Funktion $T(t)$, numerisch bestimmen. Für die weitere Betrachtung wählen wir die Anfangszeit $t_1 = 10^{-5} s$ und eine Anfangstemperatur von $T_1 = 0.25 \text{ GeV}$. Als maximale Temperatur wählen wir 0.25 GeV , weil wir nur Mesonen haben und kein Plasma aus Quarks und Gluonen. Deswegen kann unser Modell keine allzu hohe Temperaturen haben. Die für uns Anfangszeit $t_1 = 10^{-5} s$ bei $T_1 = 0.25 \text{ GeV}$ ist im Einklang mit der Simulation vom Ref. [10], in der aber auch frühere Zeiten untersucht wurden, weil Quarks und Gluonen berücksichtigt wurden. Es ist zu bemerken, dass t_2 größer als t_1 ist, aber T_2 kleiner als T_1 ist.

Abbildung 5.1: Temperatur als Funktion der Zeit t .

In Abb. 5.1 betrachten wir die Temperatur T in Abhängigkeit von der Zeit t . Für kleine Zeiten t fällt die Temperatur T bis zur kritischen Temperatur $T_{kr} = 0.15518$ GeV stark ab und für spätere Zeiten fällt die Temperatur schwächer. Die kritische Temperatur T_{kr} entspricht der kritischen Zeit $t_{kr} = 2.537 \times 10^{-5}$ sek. Wir sehen somit deutlich ein Signal des chiralen Phasenübergangs im frühen Universum. Das ist ein Unterschied zu dem Paper von Ref. [10] und auch von Ref. [12]. In Abb. 1 vom Ref. [10] kann man nämlich sehen, dass die Variation der Temperatur in demselben Zeitintervall ein anderes Verhalten hat.

Aus der Friedman Gleichung folgt (siehe Abschnitt 1.2):

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\epsilon(t)} ,$$

wobei $a(t)$ der Skalenfaktor (Expansion rate) ist. Auf der linken Seite können wir den Quotienten durch die Ableitung des Logarithmus ausdrücken:

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \partial_t \ln [a(t)] , \quad (5.4)$$

und damit erhalten wir:

$$\partial_t \ln [a(t)] = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\epsilon(t)} . \quad (5.5)$$

Wir integrieren beide Seiten und erhalten:

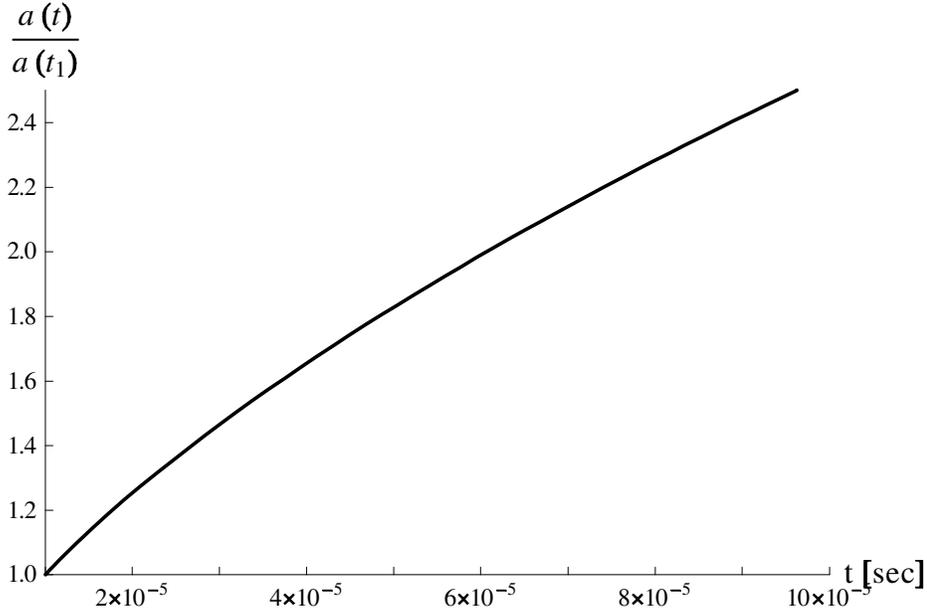


Abbildung 5.2: Skalenfaktor als Funktion der Zeit.

$$\ln [a(t)] \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \epsilon(t) dt . \quad (5.6)$$

Wir wenden die Exponentialfunktion auf beiden Seiten an und betrachten das Verhältnis von $a(t_2)$ zu $a(t_1)$:

$$\frac{a(t_2)}{a(t_1)} = \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \epsilon(t) dt \right\} . \quad (5.7)$$

Für Abb. 5.2 ersetzen wir t_2 durch t . Dieser Plot zeigt den Skalenfaktor a als Funktion der Zeit t . Für wachsende Zeiten nimmt der Skalenfaktor wie erwartet zu. Es ist aber im Gegensatz zur Temperatur T als Funktion der Zeit t , bei der kritischen Zeit t_{kr} kein ausgeprägter Knick zu erkennen. Der chirale Phasenübergang scheint keinen sichtbaren Einfluss auf den Skalenfaktor zu haben.

Kapitel 6

Konklusion und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir das chirale Kondensate und Massen von Mesonen bei nicht-verschwindender Temperatur T untersucht.

Zunächst (Kap. 2) haben wir ein einfaches Sigma-Modell mit nur einem Sigma-Teilchen σ und mit nur einem Pion π eingeführt und bei $T > 0$ studiert: das chirale Kondensat nimmt ab, wenn die Temperatur steigt, siehe Abb. 2.4. Die Massen von σ und π sind verschieden, entarten aber für hohe Temperatur T , siehe Abb. 2.5. Dafür wurde der Massen-Parameter des Modells explizit temperaturabhängig gemacht. Diese Wahl ist zwar einfach, erlaubt aber eine gute Beschreibung der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie, siehe Refs. [16, 17]. Dann (Kap. 3 und 4) haben wir das erweiterte Lineare Sigma-Modell untersucht: die zwei chiralen Kondensate sind in Abb. 4.1 zu finden. Sowohl das non-strange als auch das strange Kondensat nehmen ab, das letztere ist aber etwas träger. Die Massen der skalaren und pseudoskalaren Mesonen sind in Abb. 4.8 und die Massen der vektoriellen und axial-vektoriellen Mesonen in Abb. 4.12 dargestellt: die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie ist sichtbar. Wir haben dann den Druck und die Energiedichte berechnet: der Druck (nachdem wir sichergestellt haben, dass die thermodynamische Selbstkonsistenz erhalten bleibt) ist in Abb. 4.16 gezeigt (siehe Kap. 4 für alle Plots und Details).

Zuletzt (Kap. 5) haben wir eine kosmologische Anwendung unseres Modelles studiert. Nämlich: das Modell erlaubt eine Beschreibung des Phasenüberganges der QCD im frühen Universum und zeigt, wie Differenzen der Massen von chiralen Partnern entstanden sind, wenn das Universum die kritische Temperatur $T_{kr} = 0.155$ GeV für den chiralen Phasenübergang erreicht hat.

Wir sehen ein Signal des chiralen Phasenübergangs 2.537×10^{-5} sek nach dem Big Bang, als das Universum die kritische Temperatur T_{kr} hatte. Es gibt einen Knick der Temperaturfunktion in Abhängigkeit der Zeit. Die Temperatur ist vor dem chiralen Phasenübergang schneller gefallen als nach dem Phasenübergang. Dieses Verhalten wird in Abb. 5.1 gezeigt. Das Verhalten des Skalenfaktors wird in Abb. 5.2 präsentiert. Allerdings sieht man im letzteren Plot keine ausgeprägte Veränderung der Steigung bei der kritischen Zeit.

In der Zukunft kann man die Studie verbessern, indem man raffiniertere Me-

thoden der Quantenfeldtheorie bei endlicher Temperatur anwendet. Außerdem kann man auch mehr Teilchen (hadronische sowie nicht-hadronische) in Betracht ziehen. Man kann dann testen, ob das hier gefundene Verhalten der Temperatur als Funktion der Zeit auch in vollständigeren Modellen zu finden ist.

Dankesworte

Für die Fürsorge und die Bereitschaft jeder Zeit zu unterstützen und in jeglicher Hinsicht zu helfen, möchte ich Herrn Prof. Dr. Dirk Rischke sehr herzlich danken, dass er für mich während meiner Diplomarbeit da war. Herrn PD Dr. Jürgen Schaffner-Bielich bin ich dankbar für die Interesse und Fürsorge, die er für mich und meine Arbeit zeigte, sowie für die zur Verfügung gestellte Bücher. Ein besonderer herzlicher Dank geht an meinen Freundkameraden Dr. Achim Heinz, der nie zu schade war, seine Hilfe anzubieten und seine Zeit zu opfern, sogar auch an den Wochenenden, wenn es nötig war. Besonderes ganz herzlich mich zu bedanken, habe ich an meinen Betreuer, Herrn Prof. Dr. Francesco Giacosa, von dem die Idee dieses Themas stammt. Seine Idee hat die Realisierung meiner Diplomarbeit in dem Fachgebiet möglich gemacht, an dem ich Interesse und Spass habe. Seine Ratschläge haben mich jeder Zeit erreicht und während dieser Arbeit Tag und Nacht begleitet. Die Betreuung war hervorragend, sowohl in der Zeit, die er in Frankfurt am Main verbracht hat, als auch in der Zeit, in der es zwischen uns etwa mehr als 1000 km lagen.

Und zur guter Letzt möchte ich ein ganz besonderen Dank an meiner Freundin des Lebens, meine liebe Ehefrau Diana aussprechen, der ich diese Diplomarbeit widme. Ich bedanke mich in jeglicher Form für die unendliche Unterstützung, die ein Mensch einem anderen geben kann. Ich bedanke mich an sie für die Unterstützung und Ihre Hilfe, die sie mir vor und während meiner Diplomarbeit gegeben hat, ohne die das Ganze nicht möglich gewesen wäre.

Literaturverzeichnis

- [1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [2] P. Hagler, “Hadron structure from lattice quantum chromodynamics”, Phys. Rept. **490** (2010) 49 [arXiv:0912.5483 [hep-lat]].
- [3] D. H. Rischke, “The Quark gluon plasma in equilibrium”, Prog. Part. Nucl. Phys. **52** (2004) 197 [nucl-th/0305030].
- [4] T. Bhattacharya *et al.*, “QCD Phase Transition with Chiral Quarks and Physical Quark Masses”, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 8, 082001 [arXiv:1402.5175 [hep-lat]].
- [5] H. Goenner, Einfuehrung in die Kosmologie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford (1994).
- [6] J. Lesgourgues, “An Overview of cosmology”, astro-ph/0409426.
- [7] D. Parganlija, P. Kovacs, G. Wolf, F. Giacosa and D. H. Rischke, “Meson vacuum phenomenology in a three-flavor linear sigma model with (axial-)vector mesons,” Phys. Rev. D **87** (2013) 1, 014011 [arXiv:1208.0585 [hep-ph]].
- [8] D. Parganlija, “Quarkonium Phenomenology in Vacuum”, PhD Thesis in Theoretical Physics, J. W. Goethe University, Frankfurt am Main, 2012; arXiv:1208.0204 [hep-ph].
- [9] F. Giacosa, “Ein effektives chirales Modell der QCD mit Vektormesonen, Dilaton und Tetraquarks: Physik im Vakuum und bei nichtverschwindender Dichte und Temperatur”, Habilitation an der J. W. Goethe Universitaet, Frankfurt am Main, (2013).
- [10] S. M. Sanches, F. S. Navarra and D. A. Fogaça, “The quark gluon plasma equation of state and the expansion of the early Universe,” Nucl. Phys. A **937** (2015) 1 [arXiv:1410.3893 [hep-ph]].
- [11] T. Boeckel and J. Schaffner-Bielich, “A little inflation in the early universe at the QCD phase transition,” Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 041301 [Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 069901] [arXiv:0906.4520 [astro-ph.CO]].

- [12] W. Florkowski, “The realistic QCD equation of state in relativistic heavy-ion collisions and the early Universe,” Nucl. Phys. A **853** (2011) 173 [arXiv:1008.5225 [nucl-th]].
- [13] V. Koch, “Introduction to chiral symmetry,” nucl-th/9512029.
- [14] S. Janowski, F. Giacosa and D. H. Rischke, “Is $f_0(1710)$ a glueball?”, Phys. Rev. D **90** (2014) 11, 114005 [arXiv:1408.4921 [hep-ph]].
- [15] K. A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. **C38**, 090001 (2014).
- [16] A. Heinz, F. Giacosa and D. H. Rischke, “Restoration of chiral symmetry in the large- N_c limit,” Phys. Rev. D **85** (2012) 056005 [arXiv:1110.1528 [hep-ph]].
- [17] A. Heinz, “QCD under extreme conditions: the inhomogeneous condensation”, PhD Thesis in Theoretical Physics, J. W. Goethe University, Frankfurt am Main, 2014.
- [18] J. Gasser and H. Leutwyler, “Light Quarks at Low Temperatures,” Phys. Lett. B **184** (1987) 83.
- [19] M. I. Gorenstein and S. N. Yang, “Gluon plasma with a medium dependent dispersion relation”, Phys. Rev. D **52**, 5206 (1995).
- [20] F. Brau and F. Buisseret, “Glueballs and statistical mechanics of the gluon plasma,” Phys. Rev. D **79** (2009) 114007 [arXiv:0902.4836 [hep-ph]].