

Diplomarbeit

Der Einfluss von Tetraquarkzuständen
auf den chiralen Phasenübergang

Achim Heinz

Institut für Theoretische Physik
Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Frankfurt am Main, September 2009

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit setzt sich mit dem Einfluss von Tetraquarkzuständen auf den chiralen Phasenübergang auseinander.

Das Quarkmodell ist ein wirkungsvolles Instrument zum Verständnis des Verhaltens der Mesonen und Baryonen. Im Bereich von Energien unter 1.8 GeV gibt es in Bezug auf die Mesonen dennoch eine Vielzahl von Problemen. So ist bis dato nicht klar, wie sich die skalaren Resonanzen unter 1.8 GeV zusammensetzen. In der Vergangenheit wurde eine Vielzahl von Möglichkeiten diskutiert, wie beispielsweise die Existenz eines Glueballs, die von mesonischen Molekülen sowie die von Tetraquarkzuständen. Alle diese Ansätze sind mehr oder weniger in der Lage, die Phänomene bei $T = 0$ zu erklären. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Ansatz, Tetraquarkzuständen leichte skalare Resonanzen zuzuordnen.

Im Bereich der nichtverschwindenden Temperaturen wurden durch Gitterrechnungen große Erfolge erzielt, die effektiven Modellen bei nichtverschwindender Temperatur als Referenz dienen. Gleichwohl fehlt ein effektives Modell bei $T \neq 0$, das einen Tetraquarkzustand beinhaltet. Hier setzt diese Arbeit an und erweitert das Modell, das leichte skalare Resonanzen mittels Tetraquarkzuständen erklärt, zu nichtverschwindenden Temperaturen.

In dieser ersten Studie zum Thema wird das Lineare Sigma-Modell um den leichtesten Tetraquarkzustand ergänzt und sein Einfluss auf den chiralen Phasenübergang untersucht.

Es zeigt sich, dass dieser Ansatz nicht nur Fragen im Bereich der Vakuumphysik lösen kann, sondern auch solche hinsichtlich der Restaurierung der chiralen Symmetrie.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Quantenchromodynamik	1
1.2	Quark-Modelle	3
1.2.1	Das Lineare Sigma-Modell	3
1.2.2	Quarkmodelle in der Realität	6
1.3	Die Zustandssumme als Pfadintegral	10
1.4	Das effektive Potential im Cornwall-Jackiw-Tomboulis-Formalismus	14
1.5	Ziel und Aufbau der Arbeit	23
2	Erweiterung des $SU(2)_R \times SU(2)_L$-Modells um den leichtesten Tetraquarkzustand	25
2.1	$T = 0$	25
2.2	$T \neq 0$, Variante A	30
2.3	Chiraler Limes	37
2.4	alternative Vorgehensweise, Variante B	38
2.5	Direkte Zerfälle	41
3	Ergebnisse	45
3.1	Einführung	45
3.2	$M_S > M_H$	47
3.2.1	Phasenübergang	47
3.2.2	Wechsel der Massenzuordnung	52
3.2.3	Temperaturabhängigkeit	56
3.3	$M_H > M_S$	61
3.3.1	Phasenübergang	61
3.3.2	Wechsel der Massenzuordnung	63
3.3.3	Temperaturabhängigkeit	63

3.4	Variante B	67
3.5	Der chirale Limes	70
3.6	Zerfallsbreiten	73
4	Zusammenfassung und Ausblick	79
A	Transformationseigenschaften von Quarkoniumzuständen	82
B	Bestimmung der kritischen Temperatur	83
C	Chirale Invarianz der Terme $\varphi^2 + \vec{\pi}^2$ und χ	85
D	Zerfallsbreiten	88

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Quantenchromodynamik

Alle bekannten Phänomene lassen sich auf vier elementare Kräfte zurückführen: die Gravitation, die elektromagnetische Kraft, die schwache Wechselwirkung sowie die starke Wechselwirkung. Die Quantenchromodynamik (QCD) befasst sich mit der starken Wechselwirkung und beschreibt die Wechselwirkung zwischen den Quarks durch den Austausch von Gluonen. Bekannt sind die folgenden sechs Quark-Flavour: u, d, s, c, b und t. Im Gegensatz zur elektromagnetischen Kraft, in der es ein Ladungszustand gibt, besitzt die starke Wechselwirkung drei Ladungszustände. Diese werden Farbe genannt, wobei die einzelnen Quarks rot, grün oder blau geladen sein können. Die Antiteilchen der Quarks besitzen als mögliche Ladungszustände die Farben antirot, antigrün und antiblau.

In der Natur treten nur Objekte auf, welche nach außen hin farbneutral sind (Confinement). Da Quarks eine Farbe besitzen, müssen sie farbneutrale Objekte bilden wie Mesonen (Quark-Antiquark) und Baryonen (drei Quarks oder drei Antiquarks), und möglicherweise auch Tetraquarks (Diquark + Antidiquark) und Pentaquarks (vier Quarks und ein Antiquark oder vier Antiquarks und ein Quark). Bei sehr hohen Temperaturen hingegen können sich Quarks und Gluonen frei bewegen und treten nicht mehr in gebundenen Zuständen auf (Deconfinement).

Eine Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung muss diese Eigenschaften beinhalten. Aus dem Confinement und der Anzahl der Quarkfarben folgt, dass die QCD-Lagrangedichte invariant unter $SU(3)$ -Trans-

formationen im Frabraum sein muss. Eine $U(3)$ -Symmetrie kann nicht verwendet werden, da es unter einer solchen eine farbneutrale Wechselwirkung geben sollte und diese nicht beobachtet werden konnte. Die Gluonen werden als Eichfelder der $SU(3)$ -Farbgruppe eingeführt. Da die $SU(3)$ eine nicht-abelsche Gruppe ist, können die Gluonen mit sich selbst wechselwirken und besitzen somit auch eine Farbladung.

Die QCD-Lagrangedichte [1, 2, 3], welche die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen beschreibt, lautet:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{q}_f (\not{v}\gamma_\mu D^\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4g^2} F_{\mu,\nu}^a F_a^{\mu,\nu}, \quad (1.1)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a T^a, \quad (1.2)$$

$$F_{\mu,\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.3)$$

Im ersten Term findet man die Quarkspinoren q_f , wobei die Summe über f für die sechs verschiedenen Quarkarten steht. Bei m_f handelt es sich um eine Diagonalmatrix, welche aus den Massen der Quarks gebildet wird. D^μ stellt die kovariante Ableitung dar; sie enthält den Impuls der Quarks und die Kopplung an die Gluonen A_μ^a . Die Summe über a ist die Summe über die Generatoren T^a der zugrunde liegenden $SU(3)$ -Symmetrie. Der zweite Term ist das Quadrat des Feldstärketensors der Gluonen $F_a^{\mu,\nu}$. In ihm stehen die kinetischen Terme der Gluonen sowie Selbstwechselwirkungsterme.

An diesem Beispiel sieht man, dass allein durch die Betrachtung der Symmetrie der Lagrangedichte eine Vielzahl von Informationen gewonnen werden kann. Grundlegende Symmetrien sind zum Beispiel die C-, P- und T-Transformationen. Das C steht für die Ladungskonjugation (Charge Conjugation). Sie transformiert ein Teilchen in ein Antiteilchen, ohne die Spinorientierung zu ändern. Das P steht für die Paritätstransformation (Parity Transformation). Sie bewirkt, dass ein Teilchen die Richtung des Impulses wechselt, ohne die Orientierung des Spins zu verändern. Das T schließlich steht für Zeitumkehr (Time Reversal), was bedeutet, dass die Entwicklung eines Systems unabhängig vom Vorzeichen der Zeit ist.

Die CPT-Transformation ist eine Symmetrie, unter der eine allgemeine Lagrangedichte \mathcal{L} invariant ist. Daneben gibt es jedoch auch Lagrangedichten, die unter einer der Transformationen im einzelnen nicht invariant sind. Ist \mathcal{L} zum Beispiel nicht invariant unter der T-Transformation, müssen die C- und P-Transformationen die CPT-Symmetrie wiederherstellen. Von den anfangs genannten Kräften sind die elektromagnetische Kraft und die starke

Wechselwirkung für C-, P- und T-Transformation im Einzelnen invariant. Für die schwache Wechselwirkung gilt eine Invarianz unter der T- sowie der CP-Transformation.

Da die QCD-Lagrangedichte zu komplex ist, um exakt gelöst zu werden, werden effektive Modelle herangezogen, die Symmetrien der QCD-Lagrangedichte beinhalten.

1.2 Quark-Modelle

1.2.1 Das Lineare Sigma-Modell

Die QCD-Lagrangedichte ist für masselose Quarks invariant unter der chiralen Symmetrie $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$. Es ist zweckmäßig, die Quarks über die Projektoren $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ und $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ in linkshändige und rechtshändige Quarks aufzuspalten.

$$\begin{aligned} q_L &= P_L q = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q, \\ q_R &= P_R q = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q, \end{aligned} \tag{1.4}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{q}_L &= q^\dagger P_L \gamma_0 = \bar{q} \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \bar{q} P_R, \\ \bar{q}_R &= q^\dagger P_R \gamma_0 = \bar{q} \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \bar{q} P_L. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Die chirale Symmetrie spaltet die Quarks in rechtshändige und linkshändige Quarks. Die Transformation $U(N_f)_L$ hat keine Einfluss auf q_R , ebenso wie die Transformation $U(N_f)_R$ keinen Einfluss auf q_L hat. Die Transformationsvorschriften der einzelnen Felder unter der chiralen Symmetrie reduzieren sich zu:

$$q_L \rightarrow U_L q_L, \tag{1.6}$$

$$q_R \rightarrow U_R q_R. \tag{1.7}$$

In der Natur besitzen die einzelnen Quarks Massen und die QCD-La-

grangedichte teilt sich unter den Projektoren wie folgt auf:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = & \sum_f^{N_f} (\bar{q}_{f,L} \gamma_\mu D^\mu q_{f,L} + \bar{q}_{f,R} \gamma_\mu D^\mu q_{f,R} - \bar{q}_{f,R} m_f q_{f,L} - \bar{q}_{f,L} m_f q_{f,R}) \\ & - \frac{1}{4g^2} F_{\mu,\nu}^a F_a^{\mu,\nu}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Die Summe über f steht für die Anzahl der verwendeten Quark-Flavour. Nur im Fall von verschwindenden Quarkmassen $m_f = 0$ gibt es keine Mischung zwischen rechtshändigen und linkshändigen Quarks und die chirale Symmetrie wird zu einer exakten Symmetrie. Die sechs verschiedenen Quarks besitzen sechs verschiedene Massen. Sie lassen sich in die leichten u- und d-Quarks sowie die schweren s-, c-, t- und b-Quarks aufteilen.

$$\begin{aligned} m_u &= 2 - 8 \text{ MeV}, & m_d &= 5 - 15 \text{ MeV}, \\ m_c &= 1.0 - 1.6 \text{ GeV}, & m_s &= 0.1 - 0.3 \text{ GeV}, \\ m_t &= 180 \pm 12 \text{ GeV}, & m_b &= 4.1 - 4.5 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Liegen nur die beiden Quarkfamilien u und d vor, ist die chirale Symmetrie eine fast exakte Symmetrie. Es ist somit sinnvoll, im Falle von $N_f = 2$ von dem Punkt zu starten, dass die QCD-Lagrangedichte invariant unter der chiralen Symmetrie $U(2)_R \times U(2)_L$ ist. Unter Berücksichtigung der $U(1)_A$ -Anomalie [4], ist die QCD-Lagrangedichte symmetrisch unter $SU(2)_R \times SU(2)_L \times U(1)_V$ -Transformation, mit $V = R + L$.

Die chirale Symmetrie schlägt sich nicht nur in den elementarsten Teilchen nieder, sondern auch in den aus ihnen gebildeten Objekten. Linearisiert man diese Symmetrie, ergeben sich für die Masseneigenzustände entartete Paare, die sogenannten chiralen Partner. Diese chiralen Partner unterscheiden sich in ihren Quantenzahlen nur in der Parität und der G-Parität. Die G-Parität ist eine Quantenzahl, welche unter der starken Wechselwirkung erhalten ist, wenn die Quarkmassen verschwinden.

Der chirale Partner des skalaren $q\bar{q}$ -Zustands (Quarkonium) mit Isospin $I = 0$ ist das pseudoskalare Pionen-Isospintriplet ($I = 1$). Diese Symmetrie ist im Vakuum spontan zu $SU(N_f)_V$ gebrochen [5], die Massenentartung verschwindet und die Pionen werden zu Goldstonebosonen. Wird die chirale Symmetrie bei einer kritischen Temperatur T_c restauriert, kommt es wieder zur Massenentartung zwischen der Masse des skalaren Isospinsinglets und der Masse des pseudoskalaren Isospintriplets.

Ein Beispiel für eine chiral invariante Theorie ist das Lineare Sigma-Modell. Es beschreibt das Verhalten von Quarkoniumzuständen $q\bar{q}$ und geht zurück auf Gell-Mann und Levi [6]. In einer einfachen Variante beschränkt man sich nur auf das pseudoskalare Quarkoniumtriplet, die Pionen $\vec{\pi}$, und das skalare Quarkonium σ . Dies ist möglich, da für $N_f = 2$, $U(2)_R \times U(2)_L$ isomorph zu $O(4)$ ist. Die Lagrangedichte des Linearen Sigma-Modells lautet

$$\mathcal{L}(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial\vec{\pi})^2 - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - F^2)^2 + \epsilon\sigma, \quad (1.10)$$

wobei es sich bei λ , F und ϵ um positive Konstanten handelt. Zur weiteren Betrachtung ist das Potential von Bedeutung:

$$V = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - F^2)^2 - \epsilon\sigma. \quad (1.11)$$

Das Potential ist spontan und explizit in der Symmetrie gebrochen. Das negative Vorzeichen vor der Konstanten F sorgt für die spontane Symmetriebrechung und die Konstante ϵ für die explizite Symmetriebrechung. Für sich alleine genommen werden durch die spontane Symmetriebrechung die Pionen zu masselosen Goldstonebosonen, und sie sorgt somit für einen Massenunterschied zwischen den Pionen und dem Sigma. Die explizite Symmetriebrechung erzeugt eine Masse für die Pionen. Zur Bestimmung der Massen werden die Minima des Potentials benötigt:

$$\pi_{i,0} = 0, \quad \sigma_0 = F + \frac{\epsilon}{2\lambda F^2} + O(\epsilon^2). \quad (1.12)$$

Der Vakuumerwartungswert σ_0 ist die Vakuum-Zerfallskonstante der Pionen. Das Feld σ hat die Quantenzahlen des Vakuums und der Vakuumerwartungswert kann mit einem Quark-Kondensat identifiziert werden. Hierzu muss der Erwartungswert mit passenden Potenzen von $\Lambda_{QCD} \sim 0.25$ GeV multipliziert werden: $\langle\bar{q}q\rangle \sim \Lambda_{QCD}^2\sigma_0$. Die Massen der Felder erhält man über die folgenden Definitionen

$$M_{i,j}^2 \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j} \right|_{\alpha_i=\alpha_{i,0}, \alpha_j=\alpha_{j,0}},$$

$$\alpha \equiv (\sigma, \vec{\pi}), \quad (1.13)$$

wobei die Einträge in dieser Matrix das Quadrat der einzelnen Massen wiedergeben. In diesem Beispiel handelt es sich bei der Massenmatrix um eine

Diagonalmatrix. Die dem Minimum entsprechenden Massen lauten

$$M_\sigma^2 = \lambda(3\sigma_0^2 - F^2), \quad M_\pi^2 = \lambda(\sigma_0^2 - F^2). \quad (1.14)$$

Die drei freien Parameter des Modells λ , F und ϵ lassen sich durch nachstehende Gleichungen auf tree-level Niveau bestimmen

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma_0^2}(M_\sigma^2 - M_\pi^2), \quad (1.15)$$

$$F^2 = \sigma_0^2 - \frac{1}{\lambda}M_\pi^2, \quad (1.16)$$

$$\epsilon = \sigma_0 M_\pi^2. \quad (1.17)$$

1.2.2 Quarkmodelle in der Realität

In dieser Arbeit liegt das Interesse bei leichten skalaren Resonanzen. Quarkmodelle wurden in den vergangenen Jahren erfolgreich dazu herangezogen, Phänomene und Probleme im Bereich der Niederenergiephysik zu erklären [7, 8, 9]. Zum Beispiel kann in Bezug auf die Vektormesonen mit einem solchen Modell das Massenspektrum (Abbildung 1.1) und die Quantenzahlen der einzelnen Resonanzen erklärt werden. Die leichten Resonanzen bestehen aus den leichten u- und d-Quarks, die mittleren aus einem u- oder d-Quark und einem schweren s-Quark, und die schwere Resonanz nur aus s-Quarks. Die annähernd gleichen Massen der $\rho(770)$ Resonanzen und der $\omega^0(782)$ Resonanz folgen direkt aus dem Modell.

Neben diesen Erfolgen gibt es im Bereich der skalaren und pseudoskalaren Resonanzen unter 1.8 GeV und in Bezug auf den chiralen Phasenübergang immer noch physikalische Phänomene, die nicht erklärt werden können. Versucht man die Resonanzen unter 1.8 GeV nur mit Quarkoniumzuständen zu erklären, ergibt sich für die skalaren Resonanzen folgende Zuordnung: Die leichteste skalare Resonanz $f_0(600)$ entspricht dem Zustand $1/\sqrt{2}(u\bar{u} + d\bar{d})$. Das Isospinduplet $\kappa_0(800)$ wird mit den Zuständen $s\bar{u}$, $\bar{s}u$, $s\bar{d}$ und $\bar{s}d$ in Verbindung gebracht. Für $a_0(980)$ ergeben sich die Zustände $\bar{d}u$, $\bar{u}d$ sowie $1/\sqrt{2}(u\bar{u} - d\bar{d})$ und für die Resonanz $f_0(980)$ der Zustand $s\bar{s}$. Dieses einfache Bild für Zustände unter 1.8 GeV ist nicht ausreichend. Einige der Kritikpunkte an diesem einfachen Modell sind folgende:

- Die angegebene Zuordnung beschreibt nur einen Teil der gefundenen Resonanzen. Es wurden mehr Resonanzen, als von diesem Bild zu er-

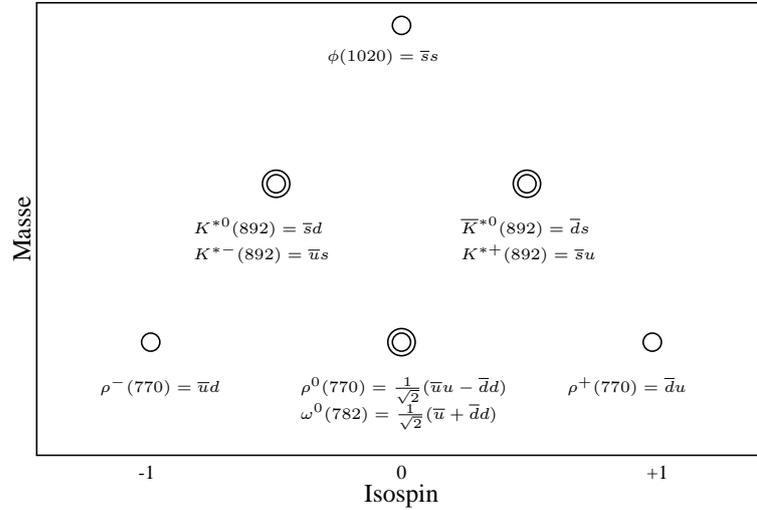


Abbildung 1.1: Massenspektrum der Vektormesonen.

warten sind, beobachtet. Zum Beispiel gibt es im skalaren und isoskalaren Kanal fünf Resonanzen mit gleichen Quantenzahlen: $f_0(600)$, $f_0(980)$, $f_0(1370)$, $f_0(1500)$ und $f_0(1710)$ [10], jedoch würde man von einem einfachen Quarkoniumbild nur zwei erwarten. Zu diesem Problem finden sich in der Literatur viele Erklärungsansätze [7, 8]. So wird die Existenz von mesonischen Molekülen, Tetraquarkzuständen und die Existenz eines Glueball-Zustandes diskutiert [11].

- Bis heute kann keine klare Aussage getroffen werden, bei welchen Zuständen es sich um Quarkoniumzustände handelt und bei welchen nicht. Viele Ansätze zu diesem Thema wurden diskutiert [7, 12, 13]. Es gibt zahlreiche Argumente, die dagegen sprechen, dass der skalare Quarkoniumzustand mit der leichtesten gefundenen Resonanz $f_0(600)$ zu identifizieren ist. Die Masse des leichtesten Quarkoniumzustandes sollte über 1 GeV liegen. Aus Gitterrechnungen folgt für das skalare Quarkonium $u\bar{d}$ eine Masse von $M_{u\bar{d}} = 1.4 - 1.5$ GeV [14]. Es wäre somit verwunderlich, wenn vergleichbare Quarkoniumzustände mit wesentlich leichteren Resonanzen identifiziert würden. Ein anderer Ansatz lässt zudem auf eine Masse größer als 1 GeV schließen. Betrachtet man die Quanten-

zahlen des Zustandes genauer, so ergibt sich, dass die Wellenfunktion des Zustandes eine p-Welle sein muss. Eine kurze Herleitung findet sich in Anhang A. Von einem solchen Zustand wird jedoch eine Masse im Bereich der Tensor- und Axialvektor-Mesonen erwartet, diese besitzen Massen über 1 GeV. Diese Argumente lassen daran zweifeln, dass die $f_0(600)$ -Resonanz ein Quarkoniumzustand sein kann.

- Weitere Probleme ergeben sich durch die Massenentartung der $f_0(980)$ -Resonanz und der $a_0(980)$ -Resonanzen. In einem einfachen Quarkoniumbild besteht $f_0(980)$ aus zwei schweren s-Quarks und die $a_0(980)$ -Resonanz nur aus Kombinationen von wesentlich leichteren u- und d-Quarks. Es wäre schon recht verwunderlich, wenn zwei Resonanzen, die aus unterschiedlich schweren Quarks aufgebaut wären, annähernd die gleiche Masse besäßen.
- Weitere Arugmente die gegen eine Quarkoniumnatur der $f_0(600)$ -Resonanz sprechen, folgen aus einer large- N_c -Studie im Rahmen der unitären, chiralen Störungstheorie [15] und der Gitterrechnung in Referenz [16].

Neben diesen Problemen gibt es noch weitere, doch durch die Hinzunahme von Tetraquarkzuständen können die meisten beseitigt werden. Das Konzept von Tetraquarkzuständen ist nicht neu, sondern wurde schon 1977 von Jaffe vorgestellt [17]. Bei einem Tetraquarkzustand handelt es sich um einen Vier-Quark-Zustand $[4q]$. Das Interesse dieser Arbeit liegt bei den skalaren Tetraquarkzuständen, welche sich aus Diquarks zusammensetzen. In Referenz [18] wurde gezeigt, dass skalare Diquarkzustände favorisierte Diquarks sind. Skalare Diquarks sind antisymmetrisch in der Farbladung und den Quark-Flavour. Des Weiteren beträgt die Parität +1 und für den Bahndrehimpuls und den Spin ergibt sich $L = S = 0$. Ein skalarer Diquarkzustand hat die Form:

$$\rho_i = \sqrt{\frac{1}{2}} \epsilon_{ijk} q_j^t C \gamma^5 q_k. \quad (1.18)$$

Die Diquarks haben die gleiche Struktur in den Quark-Flavour und in der Farbe. Diese beiden Eigenschaften wurden symbolisch in einem Index zusammengefasst. Der total antisymmetrische Tensor ϵ_{ijk} sorgt für die nötige

Antisymmetrie in den Quark-Flavour und den Farben. Ein möglicher Diquarkzustand könnte folgende Form haben:

$$|qq\rangle = |L = 0\rangle |\text{Spin}:(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\rangle |\text{Farbe}:(RB - BR)\rangle |\text{Quarks}:(ud - du)\rangle, \\ J^P = 0^+. \quad (1.19)$$

Für $N_f = 3$ gibt es drei skalare Diquarks und drei skalare Antidiquarks:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}}[d, s] \leftrightarrow \bar{u}, & \bar{\rho}_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}}[\bar{d}, \bar{s}] \leftrightarrow u, \\ \rho_2 &= -\sqrt{\frac{1}{2}}[u, s] \leftrightarrow \bar{d}, & \bar{\rho}_2 &= -\sqrt{\frac{1}{2}}[\bar{u}, \bar{s}] \leftrightarrow d, \\ \rho_3 &= \sqrt{\frac{1}{2}}[u, d] \leftrightarrow \bar{s}, & \bar{\rho}_3 &= \sqrt{\frac{1}{2}}[\bar{u}, \bar{d}] \leftrightarrow s. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Der Doppelpfeil zeigt die Korrespondenz der Diquarkzustände zu Antiquarks an, die durch den total antisymmetrischen Tensor ϵ_{ijk} entstehen. Diese sechs Diquarks können ein komplettes skalares Nonet formen mit umgekehrter Massenanzuordnung. Es zeichnet sich ab, dass unter 1 GeV ein solches skalares Nonet gefunden werden kann. Dies sind die isoskalaren Resonanzen $f_0(600)$ und $f_0(980)$ sowie das Isospin-Triplet $a_0(980)$ und das Isodoublet $\kappa_0^*(800)$. In einer Beschreibung durch Tetraquarkzustände (Abbildung 1.2) entspricht die leichteste skalare Resonanz $f_0(600)$ dem Tetraquarkzustand,

$$1/2[\bar{u}, \bar{d}][u, d], \quad (1.21)$$

wobei der Kommutator die Antisymmetrie in den Quark-Flavour und -farben anzeigt. Für die Zustände $\kappa_0^*(800)$ ergäben sich folgende Kombinationen:

$$\begin{aligned} 1/2[\bar{u}, \bar{d}][d, s], & \quad 1/2[\bar{u}, \bar{d}][u, s], \\ 1/2[\bar{u}, \bar{s}][u, d], & \quad 1/2[\bar{d}, \bar{s}][u, d]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Das Isospin-Triplet $a_0(980)$ setzt sich zusammen aus

$$1/2[u, s][\bar{d}, \bar{s}], \quad 1/(2\sqrt{2})([u, s][\bar{u}, \bar{s}] - [d, s][\bar{d}, \bar{s}]), \quad 1/2[\bar{u}, \bar{s}][d, s]. \quad (1.23)$$

Für den schweren skalaren Zustand $f_0(980)$ ergibt sich

$$1/(2\sqrt{2})([u, s][\bar{u}, \bar{s}] + [d, s][\bar{d}, \bar{s}]). \quad (1.24)$$

Eine solche Zuordnung erklärt ohne weitere Annahmen die umgekehrte Massenanzuordnung im Nonet, und die Massenentartung der Zustände $a_0(980)$

und $f_0(980)$. Die schweren Resonanzen müßten somit mit Quarkoniumzuständen mit Massen über 1 GeV identifiziert werden. Dies würde auch im Einklang stehen mit Gitterrechnungen. In einem kombinierten Quarkonium-Tetraquark-Modell könnten die beiden skalaren Zustände $1/\sqrt{2}(u\bar{u} + d\bar{d})$, $\bar{s}s$ zusammen mit dem Glueball-Zustand die Resonanzen $f_0(1370)$, $f_0(1500)$ und $f_0(1710)$ darstellen [19]. Eine Aussage, bei welchen der Resonanzen es sich um den Glueball-Zustand oder den $1/\sqrt{2}(u\bar{u} + d\bar{d})$ -Zustand handelt, ist modellabhängig. Gleichwohl haben sich die an vorangegangener Stelle aufgezeigten Probleme vereinfacht. Diese Erkenntnis hat in den vergangenen Jahren zu vielen Arbeiten geführt, die sich beispielweise mit den Einfluss von Tetraquarkzuständen auf Zerfälle beschäftigt haben.

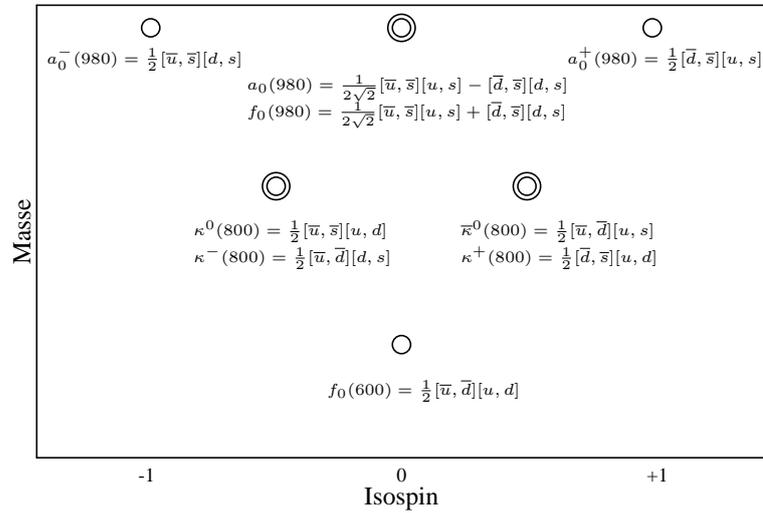


Abbildung 1.2: Mögliches Massenspektrum in einem Tetraquarkmodell.

1.3 Die Zustandssumme als Pfadintegral

In diesem Kapitel wird der Übergang von der Quantenstatistik zur Quantenfeldtheorie skizziert [1, 2, 20]. Die großkanonische Zustandssumme Z stellt die wichtigste Größe der Thermodynamik wie auch der Quantenfeldtheorie dar.

In der statistischen Mechanik kann die Zustandssumme aus dem großkanonischen Potential Ω bestimmt werden. Dieses hat die Form:

$$\Omega = E - TS - \mu_i N_i = -pV. \quad (1.25)$$

Dabei ist E die Energie, p der Druck und S die Entropie. Das großkanonische Potential Ω beschreibt ein System mit dem Volumen V , welches in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T steht, und einen Austausch der Teilchensorte N_i mit einem Reservoir erlaubt. Der Index i berücksichtigt das Vorhandensein verschiedener Teilchensorten. Für ein solches Ensemble sind die Energie E wie auch die Teilchenzahl N_i im Mittel erhalten:

$$E \rightarrow \langle E \rangle = \text{const.}, \quad (1.26)$$

$$N_i \rightarrow \langle N_i \rangle = \text{const.} \quad (1.27)$$

Somit sind die thermodynamisch unabhängigen Variablen die Temperatur T , das Volumen V und das chemische Potential μ_i :

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T} \Big|_{V, \{\mu_i\}}, \quad N_j = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_j} \Big|_{V, T, \{\mu_i\}_{i \neq j}}, \quad p = -\frac{\partial \Omega}{\partial V} \Big|_{T, \{\mu_i\}} = -\frac{\Omega}{V}. \quad (1.28)$$

Für das großkanonische Potential Ω lautet der erste Hauptsatz der Thermodynamik:

$$d\Omega = -SdT - pdV - N_i d\mu_i. \quad (1.29)$$

In der klassischen Mechanik gestaltet sich das Auffinden der Zustandssumme als kompliziert und langwierig. Hingegen in der Quantenmechanik gelingt dies recht einfach. Benötigt wird hierzu die Dichtematrix $\hat{\rho}$, die einen Zustand $|\Psi\rangle$ in seine reinen Zustände $|\Psi_m\rangle$ zerlegt, gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit p_m sich in diesem zu befinden.

$$\hat{\rho} = \sum_m p_m |\Psi_m\rangle \langle \Psi_m|. \quad (1.30)$$

Die Dichtematrix $\hat{\rho}$ für ein quantenmechanisches System, in dem für verschiedene Teilchensorten i Erhaltungssätze gelten, hat folgende Form:

$$\hat{\rho} = \exp \left[-\beta (\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i) \right]. \quad (1.31)$$

Sie besitzt die Temperaturabhängigkeit $\beta = 1/T$. Bei \hat{H} handelt es sich um den Hamiltonoperator. Aus der Dichtematrix folgt die großkanonische Zustandssumme:

$$Z = \text{Tr} \hat{\rho} = \text{Tr} \left\{ \exp \left[-\beta(\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i) \right] \right\}. \quad (1.32)$$

Die Spur geht über sämtliche Zustände. Für die thermodynamisch abhängigen Variablen ergibt sich folgender Zusammenhang zur großkanonischen Zustandssumme Z :

$$S = \left. \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial T} \right|_{V, \{\mu_i\}}, \quad N_j = T \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu_j} \right|_{V, T, \{\mu_i\}_{i \neq j}}, \quad p = T \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right|_{T, \{\mu_i\}}. \quad (1.33)$$

Dem Pfadintegral liegt die Idee zugrunde, unter Berücksichtigung der Gesamtheit der möglichen Übergänge den Übergang eines Anfangszustandes zu einem Endzustand zu betrachten. Dieser Grundgedanke findet sich auch in der analytischen Mechanik. Dort wird die Lagrangefunktion über alle der möglichen Wege, von einem Start- zu einem Endpunkt zu gelangen, integriert. Der letztlich ausgewählte, klassische Weg ist jener, für den das Integral extremal wird. In der klassischen Mechanik wird über die Anfangsbedingungen derjenige Weg, der zur Lösung beiträgt, festgelegt. Innerhalb der Quantenmechanik ergeben sich darüber hinaus auch Beiträge von sämtlichen anderen Wegen. Im Rahmen der Quantenfeldtheorie kommt es zum Übergang der Bewegungen im Raum zum Verhalten von Feldern zwischen zwei Raum-Zeit-Punkten.

Die Verknüpfung zwischen Quantenstatistik und Quantenfeldtheorie gestaltet sich wie folgt: Die Zustandssumme, die von Operatoren abhängig ist, kann mit dem Pfadintegral in Verbindung gebracht werden. Eine ausführliche Diskussion dazu findet sich in den Referenzen [1, 2]:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} \left\{ \exp \left[-\beta(\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i) \right] \right\} \\ &= \int \prod_{\vec{x}} d\phi_0(\vec{x}) \langle \phi_0(\vec{x}) | \exp \left[-\beta(\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i) \right] | \phi_0(\vec{x}) \rangle \\ &= \int \mathcal{D}\pi(\tau, \vec{x}) \int_{\phi(0, \vec{x}) = \phi_0}^{\phi(\tau, \vec{x}) = \phi_0} \mathcal{D}\phi(\tau, \vec{x}) \\ &\times \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3 \vec{x} \left(\pi_i \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi) + \mu_i \mathcal{N}_i(\pi, \phi) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Im letzten Schritt wurde auf Imaginärzeit $\tau = it$ gewechselt, die Integrationsgrenzen gehen über in das Intervall von 0 bis β . $\pi(t, \vec{x})$ sind die kanonisch konjugierten Felder:

$$\pi(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\dot{\phi}(t, \vec{x})}. \quad (1.35)$$

Die Integrale $\int \mathcal{D}\pi(\tau, \vec{x})$ und $\int \mathcal{D}\phi(\tau, \vec{x})$ stehen für ein Produkt aller Integrale über $\pi(\tau, \vec{x})$ bzw. $\phi(\tau, \vec{x})$:

$$\mathcal{D}\pi(\tau, \vec{x}) \equiv \prod_{\tau \in [0, \beta]} \prod_{\vec{x}} d\pi(\tau, \vec{x}), \quad \mathcal{D}\phi(\tau, \vec{x}) \equiv \prod_{\tau \in [0, \beta]} \prod_{\vec{x}} d\phi(\tau, \vec{x}), \quad (1.36)$$

Die Verbindung zwischen Pfadintegral und Zustandssumme gilt nur für den Fall, dass das Feld $\phi(\tau, \vec{x})$ periodisch ist, $\phi(\tau, \vec{x}) = \phi(0, \vec{x}) = \phi_0$; für das Feld $\pi(\tau, \vec{x})$ ist diese Beschränkung nicht notwendig. Für die Hamiltonfunktion und die Teilchenzahl bedarf es des Übergangs auf Dichten:

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}, \quad N_i = \int d^3\vec{x} \mathcal{N}_i. \quad (1.37)$$

Von der Zustandssumme ausgehend, können mittels der Pfadintegralmethode die elektromagnetische Kraft, die schwache Wechselwirkung sowie die starke Wechselwirkung untersucht werden. Neben diesen Theorien lohnt sich auch das Studium effektiver Theorien, wie beispielsweise der ϕ^4 -Theorie. Für ein neutrales skalares Feld ϕ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi), \quad (1.38)$$

und dem Potential

$$U(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4, \quad (1.39)$$

lautet die Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \pi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + U(\phi). \quad (1.40)$$

Dies führt für ein verschwindendes chemisches Potential $\mu_i = 0$ zu der Zustandssumme:

$$Z = \mathcal{N} \int_{\phi(0, \vec{x}) = \phi_0}^{\phi(\tau, \vec{x}) = \phi_0} \mathcal{D}\phi(\tau, \vec{x}) \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \mathcal{L} \right). \quad (1.41)$$

Bei \mathcal{N} handelt es sich um eine Normierungskonstante. Zwar kann die Zustandssumme der ϕ^4 -Theorie kompakt zusammengefasst werden, ihre Auswertung gestaltet sich jedoch als schwierig. An diesem Punkt setzen Näherungsverfahren ein. Eine Möglichkeit zur Auswertung dieser Zustandssumme wird im nachfolgendem Kapitel beschrieben.

Die in der vorliegenden Arbeit verwendete Notation gestaltet sich wie folgt:

$$\int_x f(x) \equiv \int_0^{1/T} d\tau \int d^3\vec{x} f(\tau, \vec{x}), \quad \int_k f(k) \equiv T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} f(i\omega_n, \vec{k}). \quad (1.42)$$

Alle Rechnungen werden in natürlichen Einheiten durchgeführt, $\hbar = c = k_B = 1$. Winkel werden im Bogenmaß angegeben. Der metrische Tensor hat die Form $g_{\mu,\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$.

1.4 Das effektive Potential im Cornwall-Jackiw-Tomboulis-Formalismus

In der klassischen Mechanik ist das effektive Potential bei verschwindender Temperatur gegeben durch die potentielle Energie: der Vakuumzustand entspricht deren Minimum der potentiellen Energie. In der Quantenmechanik gilt dies nicht zwangsläufig, da sich durch Quantenfluktuationen zu zusätzlichen Termen im effektiven Potential ergeben können [2].

Um das Verhalten einer Lagrangedichte mit spontan gebrochener Symmetrie bei nichtverschwindender Temperatur zu verstehen, bietet sich als ein denkbarer Lösungsweg die Bestimmung der effektiven Wirkung dieser Dichte an. Bei dem im Folgenden vorgestellten Cornwall-Jackiw-Tomboulis-Formalismus (CJT-Formalismus) [21] handelt es sich um ein selbstkonsistentes Vielteilchenresummationsschema.

Gewöhnlich berechnet man das effektive Potential über Schleifenentwicklung [22]. Dieser Ansatz führt in der Regel zu der Schwierigkeit, dass bei Theorien mit spontan gebrochenen Symmetrien das Potential nicht mehr konvex ist. Die Anregungen der Quasi-Teilchen mit kleinen 3-Impulsen werden imaginär. Um dennoch ein effektives Potential zu bestimmen, könnte mittels einer Maxwellkonstruktion die Konvexität des Potentials wieder hergestellt

oder auf ein anderes Verfahren zurückgegriffen werden, wie den bereits erwähnten CJT-Formalismus. Der CJT-Formalismus erweitert die übliche effektive Wirkung für Einpunktfunktionen um die Hinzunahme der Zweipunktfunktionen. Durch diese Erweiterung wird sichergestellt, dass die Anregungen der Quasi-Teilchen für kleine Impulse reell bleiben. Im Falle von translationsinvarianten Theorien wird die effektive Wirkung zum effektiven Potential.

Als Beispiel soll ein skalares Feld dienen mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi); \quad (1.43)$$

in der ϕ^4 -Theorie lautet das Potential

$$U(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4. \quad (1.44)$$

Das erzeugende Funktional von Greens-Funktionen einer skalaren Theorie in Abhängigkeit der beiden Quellenfelder J und K lautet:

$$\mathcal{Z}[J, K] = e^{\mathcal{W}[J, K]} = \int \exp \left\{ I[\phi] + \phi J + \frac{1}{2} \phi K \phi \right\}, \quad (1.45)$$

wobei es sich bei $\mathcal{W}[J, K]$ um das erzeugende Funktional der verbundenen Greens-Funktionen handelt. Die klassische Wirkung $I[\phi]$ setzt sich aus der freien Lagrangedichte $\mathcal{L}_0(x)$ und dem Wechselwirkungsterm $I_{int}[\phi]$ zusammen.

$$I[\phi] = \int_x \mathcal{L}_0(x) + \int_x \mathcal{L}_{int}(x) = \int_{x,y} \phi(x) iD^{-1}(x-y) \phi(y) + I_{int}[\phi], \quad (1.46)$$

dabei stellt $D(x-y)$ den tree-level Propagator dar. Dieser hat die bekannte Form

$$D(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (1.47)$$

und der inverse tree-level Propagator die Form

$$iD^{-1}(x-y) = -(\square + m^2) \delta^4(x-y). \quad (1.48)$$

Der Term $\nu\epsilon$ verhindert die Divergenz an der Stelle $k^2 = m^2$. Desweiteren wurden folgende Abkürzungen vorgenommen:

$$\phi J \equiv \int_x \phi(x)J(x), \quad (1.49)$$

$$\phi K \phi \equiv \int_{x,y} \phi(x)K(x,y)\phi(y). \quad (1.50)$$

Die Erwartungswerte der Ein-Punkt-Funktionen $\bar{\phi}$ und der verbundenen Zwei-Punkt-Funktion $G(x,y)$, in Abhängigkeit der Quellen $J(x)$ und $K(x,y)$, sind auf folgende Weise definiert:

$$\frac{\delta \mathcal{W}[J, K]}{\delta J(x)} \equiv \bar{\phi}(x), \quad (1.51)$$

$$\frac{\delta \mathcal{W}[J, K]}{\delta K(x, y)} \equiv \frac{1}{2} [G(x, y) + \bar{\phi}(x)\bar{\phi}(y)]. \quad (1.52)$$

Dies führt bei einer doppelten Legendre-Transformation zu dem gewünschten effektiven Potential, das nicht mehr von den Variablen J und K abhängt, sondern von $\bar{\phi}$ und G

$$\Gamma[\bar{\phi}, G] = \mathcal{W}[J, K] - \bar{\phi}J - \frac{1}{2}\bar{\phi}K\bar{\phi} - \frac{1}{2}GK, \quad (1.53)$$

mit einer weiteren Abkürzung $GK \equiv \int_{x,y} G(x,y)K(x,y)$. Die für die Rücktransformation benötigten Gleichungen lauten

$$\frac{\delta \Gamma[J, K]}{\delta \bar{\phi}(x)} = -J(x) - \int_y K(x, y)\phi(y), \quad (1.54)$$

$$\frac{\delta \Gamma[J, K]}{\delta G(x, y)} = -\frac{1}{2}K(x, y). \quad (1.55)$$

Dies bedeutet jedoch, dass für verschwindende Quellen J und K Stationaritätsbedingungen für die Erwartungswerte des Feldes $\varphi(x)$ und für den Propagator \mathcal{G} gefunden werden,

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta \bar{\phi}(x)} \right|_{\bar{\phi}=\varphi, G=\mathcal{G}} = 0, \quad (1.56)$$

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta G(x, y)} \right|_{\bar{\phi}=\varphi, G=\mathcal{G}} = 0. \quad (1.57)$$

Die untere Gleichung entspricht der Schwinger-Dyson-Gleichung für den vollständigen Propagator. Die Schwierigkeit besteht nun darin, die effektive Wirkung in eine brauchbare Form zu bringen. Es wurde in Referenz [21] gezeigt, dass die effektive Wirkung $\Gamma[\bar{\phi}, G]$ folgende Form hat:

$$\Gamma[\bar{\phi}, G] = I[\bar{\phi}] - \frac{1}{2}\text{Tr}(\ln G^{-1}) - \frac{1}{2}\text{Tr}(D^{-1}G - 1) + \Gamma_2[\bar{\phi}, G] + \text{const.} \quad (1.58)$$

Die Konstante wird weggelassen. Für den inversen tree-level Propagator wurde die Abkürzung $D^{-1}(x, y; \bar{\phi})$ verwendet:

$$D^{-1}(x, y; \bar{\phi}) \equiv - \left. \frac{\delta^2 I[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right|_{\phi=\bar{\phi}}. \quad (1.59)$$

Bei $\Gamma_2[\bar{\phi}, G]$ handelt es sich um die Summe aller Zwei-Teilchen-irreduziblen Diagramme (two-particle irreducible, 2 PI), in denen alle Linien durch vollständige Propagatoren G repräsentiert werden.

Um nun von der effektiven Wirkung $\Gamma_2[\bar{\phi}, G]$ zum effektiven Potential $V[\bar{\phi}, G]$ zu gelangen, nutzt man die aus der Thermodynamik stammende Relation $V = -T \frac{\Gamma}{\Omega}$. Bei Ω handelt es sich um das dreidimensionale Volumen des Systems. In der vorliegenden Arbeit wird ein homogenes System betrachtet, die Ortsabhängigkeit des Feldes $\bar{\phi}(x)$ verschwindet und somit gilt $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi}$. Das effektive Potential hat für diesen Fall folgende Form:

$$V[\bar{\phi}, G] = U(\bar{\phi}) + \frac{1}{2} \int_k \ln G^{-1}(k) + \frac{1}{2} \int_k [D^{-1}(k; \bar{\phi})G(k) - 1] + V_2[\bar{\phi}, G], \quad (1.60)$$

mit

$$D^{-1}(k; \bar{\phi}) = -k^2 + U''(\bar{\phi}), \quad (1.61)$$

und der Definition $V_2[\bar{\phi}, G] \equiv -T \frac{\Gamma_2[\bar{\phi}, G]}{\Omega}$.

Die physikalische Bedeutung des Minimums des effektiven Potentials ist gleich dem negativen thermodynamischen Druck $V[\varphi, \mathcal{G}] = -p$. Für den Fall, dass keine Ladungserhaltungssätze vorhanden sind, ist der Druck bis auf ein Vorzeichen identisch mit der freien Energie. Um nun das Verhalten des Systems zu erhalten, muss das Potential für das Feld $\bar{\phi}$ und den Propagator

G minimiert werden, da sich die Physik am Minimum des Systems abspielt. Die Stationaritätsbedingungen sind gegeben durch

$$\left. \frac{\delta V[\bar{\phi}, G]}{\delta \bar{\phi}} \right|_{\bar{\phi}=\varphi, G=\mathcal{G}} = 0, \quad (1.62)$$

$$\left. \frac{\delta V[\bar{\phi}, G]}{\delta G(k)} \right|_{\bar{\phi}=\varphi, G=\mathcal{G}} = 0. \quad (1.63)$$

Die letzte der beiden Gleichungen kann mit dem gefundenen Potential $V[\bar{\phi}, G]$ auf eine Form gebracht werden, die der Schwinger-Dyson Gleichung entspricht

$$\mathcal{G}^{-1}(k) = D^{-1}(k; \varphi) + \Pi(k), \quad (1.64)$$

mit der Selbstenergie in der Form

$$\Pi(k) \equiv 2 \left. \frac{\delta V_2[\bar{\phi}, G]}{\delta G(k)} \right|_{\bar{\phi}=\varphi, G=\mathcal{G}}. \quad (1.65)$$

Der CJT-Formalismus berücksichtigt die Symmetrien der zugrunde liegenden Lagrangedichte. Dennoch kann es bei der Bestimmung von $V_2[\bar{\phi}, G]$ passieren, dass durch die verwendete Näherung Symmetrien der Lagrangedichte verletzt werden. Dies wiederum kann zu einer Verletzung der Ward-Takahashi-Identitäten führen, was sich beispielweise derart im Goldstonetheorem niederschlägt, dass die Pionen bei nichtverschwindender Temperatur unterhalb einer kritischen Temperatur T_c nicht masselos bleiben.

Im nächsten Schritt wird das Potential auf vier skalare Teilchen erweitert und die Symmetrie spontan und explizit gebrochen. Daraus resultiert das in Kapitel 1.2.1 vorgestellte Lineare Sigma-Modell, das im Folgenden auf nichtverschwindende Temperatur erweitert wird. Zur Betrachtung dieses Modell bei nichtverschwindender Temperatur wird der zuvor besprochene CJT-Formalismus verwendet. Hierzu wird das temperaturabhängige Quarkkondensat $\langle \bar{q}q \rangle \sim \phi(T)$ eingeführt. Das σ -Feld wird um dieses Kondensat verschoben und beschreibt Fluktuationen um diesen Wert. Das effektive Potential wird in Hartree-Fock-Näherung (nur Doppelblasendiagramme werden berücksichtigt) betrachtet. Allgemein lautet das effektive Potential:

$$V_{eff} = V_{cl} + \frac{1}{2} \int \text{Tr}[\ln G^{-1} + D^{-1}G - 1] + V_2. \quad (1.66)$$

V_{tl} ist das tree-level Potential, in dem das Feld σ den Wert des Kondensates $\phi(T)$ annimmt,

$$V_{tl} = V(\vec{\pi} = 0, \sigma = \phi(T)) = \frac{\lambda}{4}(\phi(T)^2 - F^2)^2 - \epsilon\phi(T). \quad (1.67)$$

Bei den Ausdrücken G und G^{-1} handelt es sich um diagonale Matrizen mit den vollständigen Propagatoren des σ -Teilchens und der Pionen sowie den inversen vollständigen Propagatoren als Einträgen. Die vollständigen Propagatoren, und somit die physikalischen Massen, sind temperaturabhängig. Die Propagatoren haben die Form:

$$G = \begin{pmatrix} G_\sigma & 0 \\ 0 & G_\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-k^2 + M_\sigma(T)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-k^2 + M_\pi(T)^2} \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} G_\sigma^{-1} & 0 \\ 0 & G_\pi^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^2 + M_\sigma(T)^2 & 0 \\ 0 & -k^2 + M_\pi(T)^2 \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

Die Diagonalmatrix D^{-1} beinhaltet die inversen Propagatoren auf tree-level Niveau. Die tree-level Massen werden durch das Kondensat temperaturabhängig, wobei die Beziehung $\phi(0) = \sigma_0$ gilt:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} D_\sigma^{-1} & 0 \\ 0 & D_\pi^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^2 + M_\sigma^2 & 0 \\ 0 & -k^2 + M_\pi^2 \end{pmatrix}, \quad (1.70)$$

$$M_\sigma^2 = \lambda[3\phi(T)^2 - F^2], \quad M_\pi^2 = \lambda[\phi(T)^2 - F^2]. \quad (1.71)$$

Bei V_2 handelt es sich um die Summe aller 2 PI-Diagramme, die in dieser Näherung verwendet werden (Abbildung 1.3). Die Vorfaktoren in V_2 folgen aus denen des ursprünglichen Potentials und den kombinatorischen Faktoren der entsprechenden Diagramme.

$$V_2 = \frac{3}{4}\lambda \left(\int G_\sigma \right)^2 + \frac{3}{2}\lambda \int G_\sigma \int G_\pi + \frac{15}{4}\lambda \left(\int G_\pi \right)^2. \quad (1.72)$$

Aus diesen Teilen setzt sich das gesamte effektive Potential zusammen. Die Integrale über den vollständigen Propagator lauten:

$$\int G_i = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{k^2 + M_i(T)^2}} \left[\frac{1}{\exp\left(\sqrt{k^2 + M_i(T)^2}/T\right)} + \frac{1}{2} \right]. \quad (1.73)$$

Für den Index gilt $i = \sigma, \pi$. Dieses Integral führt zu diversen Divergenzen in der Lagrangedichte. Zu deren Beseitigung muss die Lagrangedichte renormiert werden. Hier wird eine triviale Renormierung verwendet, folglich alle divergenten Terme werden gleich Null gesetzt. Eine umfassende Studie zur Renormierung des Linearen Sigma-Modells findet sich in einer Arbeit von Lenaghan und Rischke [23].

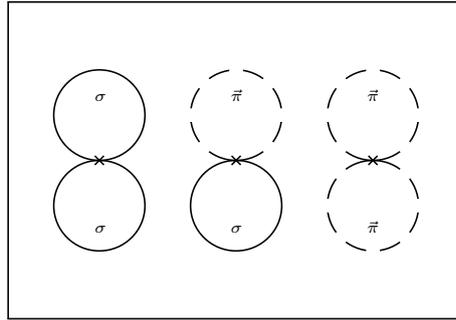


Abbildung 1.3: Alle Diagrammtypen, die in der 2PI-Näherung in V_2 einfließen. Links die $\sigma\sigma$ -Schleife, in der Mitte die $\sigma\pi$ -Schleife und rechts die $\pi\pi$ -Schleife.

Nun muss das effektive Potential für die Propagatoren und das Kondensat minimiert werden:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_\sigma}, \quad (1.74)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_\pi}, \quad (1.75)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta \phi(T)}. \quad (1.76)$$

Das entstandene Gleichungssystem wird im Anschluss selbstkonsistent gelöst.

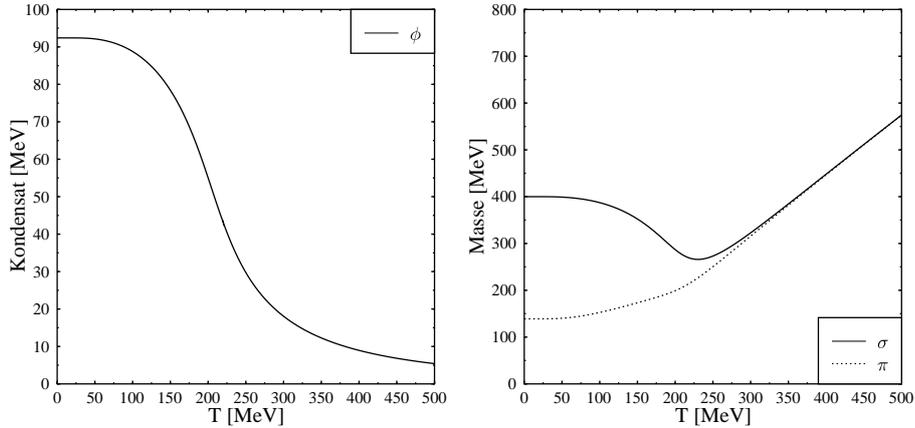
Die drei Formeln lauten im Einzelnen:

$$G_\sigma^{-1} = D_\sigma^{-1} + 3\lambda \left(\int G_\sigma + \int G_\pi \right), \quad (1.77)$$

$$G_\pi^{-1} = D_\pi^{-1} + \lambda \left(\int G_\sigma + 5 \int G_\pi \right), \quad (1.78)$$

$$\epsilon = \lambda\phi(T)[\phi(T)^2 - F^2] - 2g\alpha\phi(T) + 3\lambda\phi(T) \left(\int G_\sigma + \int G_\pi \right). \quad (1.79)$$

Die Particle Data Group (PDG) [10] liefert für die Masse der Pionen $M_\pi = 0.139$ GeV und die Vakuums-Zerfallskonstante $\sigma_0 = 0.0924$ GeV. Die σ -Resonanz innerhalb der angegebenen Resonanzen zuzuordnen gestaltet sich problematisch, da es hier mehrere Möglichkeiten gibt. Die Auswahl kann auf zwei skalare Resonanzen, die für die σ -Masse infrage kommen, begrenzt werden: $f_0(600)$ und $f_0(1370)$. Phänomenologisch unterscheidet das Modell lediglich zwischen leichten und schweren Resonanzen. Hierzu werden in den nachstehenden Beispielen dem σ einmal die $f_0(600)$ -Resonanz zugeordnet, und im Anschluss die $f_0(1370)$ -Resonanz.



(a) Verlauf des Kondensates

(b) Masse der Pionen und von Sigma

Abbildung 1.4: Das Verhalten des Kondensates und der Massen bei nichtverschwindender Temperatur für $M_\sigma = 0.4$ GeV.

Im ersten der beiden Fälle (Abbildung 1.4), die an dieser Stelle diskutiert werden, wird deutlich, dass der Verlauf des Kondensates einen crossover-Pha-

senübergang macht. Das Kondensat fällt erst langsam, dann immer schneller. Bei einer kritischen Temperatur von $T_c = 204.9$ MeV ändert sich das Verhalten: Das Kondensat fällt nur noch langsam und geht bei hohen Temperaturen gegen Null. Die Masse von σ beginnt bei $M_\sigma = 0.4$ GeV und verhält sich für Temperaturen kleiner T_c ähnlich wie das Kondensat, im Gegensatz zu der Masse der Pionen, welche langsam zu wachsen anfängt. Für Temperaturen größer als T_c wächst die Masse von σ wieder und entartet mit der der Pionen. Für große Temperaturen T steigen beide Massen linear an.

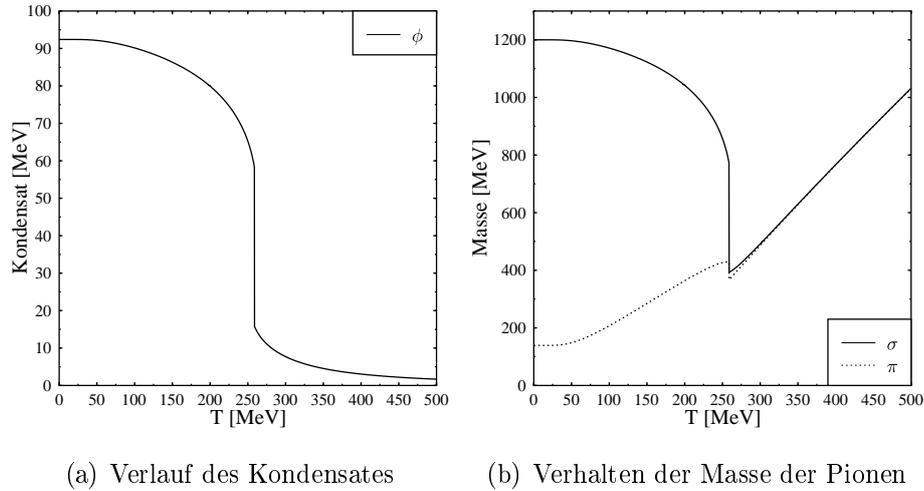


Abbildung 1.5: Das Verhalten des Kondensates und der Massen bei nichtverschwindender Temperatur für $M_\sigma = 1.2$ GeV.

Der zweite Fall stellt einen Phasenübergang erster Ordnung dar (Abbildung 1.5). Die Masse für σ beträgt $M_\sigma = 1.2$ GeV. Das Kondensat fällt mit steigender Temperatur. Bei der kritischen Temperatur $T_c = 258.7$ MeV ist das System nicht stetig. Das Kondensat fällt augenblicklich von einem recht hohen auf einen deutlich niedrigeren Wert. Nach dem Phasenübergang nähert sich das Kondensat langsam Null an. Die Massen verhalten sich bis zur kritischen Temperatur T_c wie bei einer σ -Masse von 0.4 GeV. Bei dem Phasenübergang treffen sich beide Massen fast in der Nähe der Pionenmasse. Für weiter steigende Temperaturen entarten die beiden Werte und wachsen für hohe Temperaturen linear an.

Ein kurze Einführung in die Bestimmung der kritischen Temperatur T_c

findet sich in Anhang B.

Die beiden Hauptprobleme des Linearen Sigma-Modells sind die folgenden: Zunächst ist die Ordnung des Phasenübergangs sensitiv bezüglich der Masse des σ . Für Massen $M_\sigma \gtrsim 0.948$ GeV liegt ein Phasenübergang erster Ordnung vor. Massen $M_\sigma \lesssim 0.948$ GeV liefern einen crossover-Phasenübergang. Für eine Masse $M_\sigma \approx 0.948$ GeV erhält man einen Phasenübergang zweiter Ordnung. Zudem wird die kritische Temperatur T_c mit steigender Sigmamasse größer. Gitterrechnungen widersprechen den Ergebnissen des Modells. In ihnen wird für die Masse des chiralen Partners der Pionen ein Wert von $M_\sigma > 1$ GeV und ein crossover-Phasenübergang gefunden, und die kritische Temperatur liegt bei $T_c = 164$ MeV [24, 25, 26].

1.5 Ziel und Aufbau der Arbeit

Ein Modell, das den chiralen Phasenübergang mit einem Tetraquarkzustand verbindet, wurde bislang nicht untersucht. An diesem Punkt knüpft die vorliegende Untersuchung an. Zunächst wird das Lineare Sigma-Modell um den leichtesten Tetraquarkzustand ergänzt, um anschließend den Einfluss auf den chiralen Phasenübergang ausführlich zu diskutieren. Das verwendete Modell ist der $N_f = 2$ Grenzfall eines allgemeineren $N_f = 3$ Modells, vorgestellt in einer Arbeit von Giacosa [13]. Da lediglich zwei Quark-Flavour betrachtet werden, ergibt sich nur ein skalares Diquark und ein skalares Antidiquark. Dies führt zu einer Erweiterung des Linearen Sigma-Modells um den Tetraquarkzustand $\frac{1}{2}[\bar{u}, \bar{d}][u, d]$. Um das Verhalten bei nichtverschwindender Temperatur zu studieren, wurde der CJT-Formalismus in einer Hartree-Fock-Näherung angewendet [27]. Der Tetraquarkzustand und das skalare Quarkonium werden Mischterme aufweisen, die zu unphysikalischen Massen führen. Diese Terme werden über eine temperaturabhängige Drehung beseitigt.

In früheren Arbeiten wurde häufig die $f_0(600)$ -Resonanz als der chirale Partner der Pionen ausgegeben. Dies führte zu Resultaten, die nicht im Einklang mit der hadronischen Spektroskopie stehen. Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte effektive Modell erlaubt eine Beschreibung des Phasenübergangs unter Berücksichtigung zweier skalarer Resonanzen. Die chirale Restauration kann somit zum Einen für den Fall, dass sich im Vakuum eine skalare Resonanz zwischen den chiralen Partnern befindet (ein Szenario, welches durch Gitterrechnungen und die vorangegangenen Überlegungen gestützt wird) betrachtet werden, zum Andern kann der Einfluss einer schwe-

ren skalaren Resonanz auf einen relativ leichten chiralen Partner der Pionen getestet werden.

Der weitere Aufbau der Arbeit gestaltet sich wie folgt: Im zweiten Kapitel wird die Herleitung einer effektiven Theorie bei nichtverschwindender Temperatur besprochen, die einen Tetraquarkzustand beinhaltet. Hierzu werden Vakuumsgrößen wie die Massen und Zerfallsbreiten bestimmt, und im Anschluss zwei unterschiedliche Varianten zur Herleitung eines effektiven Modells bei nichtverschwindender Temperatur vorgestellt. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit den Resultaten der Studie. Für beide Anordnungsmöglichkeiten der skalaren Resonanzen wird das Verhalten bei nichtverschwindender Temperatur untersucht. Zuerst wird der Einfluss des Tetraquarks auf die Ordnung des Phasenübergangs und schließlich das Verhalten der einzelnen Vakuumsgrößen betrachtet. Der letzte Teil des Kapitels befasst sich mit dem chiralen Limes und den Zerfallsbreiten. Im vierten Kapitel folgt eine Zusammenfassung der Ergebnisse sowie ein Ausblick auf weitere mögliche Arbeiten.

Kapitel 2

Erweiterung des $SU(2)_R \times SU(2)_L$ -Modells um den leichtesten Tetraquarkzustand

2.1 $T = 0$

Bei dem hier verwendeten Modell handelt es sich um das Lineare Sigma-Modell, das um das leichteste Tetraquark $\chi \equiv \frac{1}{2}[u, d][\bar{u}, \bar{d}]$ erweitert wird. Im Linearen Sigma-Modell gibt es neben dem pseudoskalaren Quarkoniumtriplet einen skalaren Quarkoniumzustand. Die Notation ist wie folgt gewählt: $\varphi = 1/\sqrt{2}(\bar{u}u + \bar{d}d)$ beschreibt den skalaren Quarkoniumzustand, die Pionen $\vec{\pi} \equiv (\bar{d}u, 1/\sqrt{2}(\bar{u}u - \bar{d}d), \bar{u}d)$ das pseudoskalare Quarkoniumtriplet und χ den Tetraquarkzustand. Der Tetraquarkzustand besitzt die gleichen Quantenzahlen wie der skalare Quarkoniumzustand. Darüber hinaus ist er invariant unter chiraler Transformation und koppelt an den chiral invarianten Term $(\varphi^2 + \vec{\pi}^2)$ (Anhang C). Die erweiterte Lagrangedichte lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, \chi, \vec{\pi}) = & \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\vec{\pi})^2 \\ & - \frac{1}{2}M_\chi^2\chi^2 - \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 + \vec{\pi}^2 - F^2)^2 + \epsilon\varphi + g\chi(\varphi^2 + \vec{\pi}^2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Die Lagrangedichte entspricht dem $SU(2)_R \times SU(2)_L$ -Limes des allgemeinen $SU(3)_R \times SU(3)_L$ -Modells, entwickelt von Giacosa [13]. Die Lagrangedichte beschreibt zwar die Kopplung des Linearen Sigma-Modells an einen skalaren

Zustand, kann aber nicht für beliebige skalare Felder verwendet werden. Skalare Felder, die für sich alleine genommen nicht chiral invariant sind, kann die Lagrangedichte (2.1) nicht beschreiben. Auch die Beschreibung eines Glueballs ist nicht möglich, da dieser Terme der Art $\sim \chi^4 \ln \chi$ benötigt. Das Potential lautet:

$$V = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 + \vec{\pi}^2 - F^2)^2 - \epsilon\varphi + \frac{1}{2}M_\chi^2\chi^2 - g\chi(\varphi^2 + \vec{\pi}^2). \quad (2.2)$$

Um die Massen der einzelnen Felder zu bestimmen, wird das absolute Minimum des Potentials benötigt. Das Minimum liegt bei folgenden Werten der einzelnen Felder:

$$\pi_{0,i} = 0, \quad \chi_0 = \frac{g}{M_\chi^2}\varphi_0^2, \quad \varphi_0 = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{2g^2}{\lambda M_\chi^2}}} + \frac{\epsilon}{2\lambda F^2} + O(\epsilon^2). \quad (2.3)$$

Der Vakuumerwartungswert des Pions ist $\pi_{0,i}$, der des Tetraquarks χ ist χ_0 und der des skalaren Quarkoniums φ ist φ_0 . Der Vakuumerwartungswert φ_0 wird mit der Pionzerfallskonstanten f_π identifiziert. Bei φ_0 handelt es sich bis auf einen Vorfaktor um das Quarkkondensat $\langle \bar{q}q \rangle \sim \Lambda_{QCD}^2 \varphi_0$, und im Falle χ_0 handelt es sich bis auf einen Vorfaktor um das Tetraquarkkondensat $\langle [\bar{q}, \bar{q}] \times [q, q] \rangle \sim \Lambda_{QCD}^5 \chi_0$. Im Folgenden wird aus Gründen der Einfachheit φ_0 mit dem Quarkkondensat identifiziert und χ_0 mit dem Tetraquarkkondensat. Das Tetraquarkkondensat χ_0 ist proportional zum Quarkkondensat φ_0^2 ; es ist somit durch die spontane Symmetriebrechung induziert. Der Vakuumerwartungswert der Pionen verhält sich analog zum einfachen Linearen Sigma-Modell und verschwindet. Zur Bestimmung der Massen wird das Potential um das Minimum bis zur zweiten Ordnung in den Feldern φ , π und χ entwickelt:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}M_\chi^2\chi^2 + \frac{1}{2}M_\varphi^2\varphi^2 + \frac{1}{2}M_\pi^2\vec{\pi}^2 - 2g\varphi_0\varphi\chi + \dots \\ &= \frac{1}{2}(\chi, \varphi) \begin{pmatrix} M_\chi^2 & -2g\varphi_0 \\ -2g\varphi_0 & M_\varphi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + \frac{1}{2}M_\pi^2\vec{\pi}^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2}(\chi, \varphi)M \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + \frac{1}{2}M_\pi^2\vec{\pi}^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Für die einzelnen Massen ergeben sich folgende Werte:

$$M_\chi^2 = M_{\chi_0}^2, \quad M_\varphi^2 = \lambda(3\varphi_0^2 - F^2) - 2g\chi_0, \quad M_\pi^2 = \lambda(\varphi_0^2 - F^2) - 2g\chi_0. \quad (2.5)$$

Es wird deutlich, dass die Massenmatrix auch nicht-diagonale Terme enthält.

$$M = \begin{pmatrix} M_\chi^2 & -2g\varphi_0 \\ -2g\varphi_0 & M_\varphi^2 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Eine solche Mischung würde bedeuten, dass sich das Feld φ bzw. χ spontan in das Feld χ bzw. φ umwandeln könnte. Da dies bei Mesonen nicht beobachtet wird, benötigt man ein neues System, das solches Verhalten ausschließt. Hierzu werden zwei neue Felder S und H sowie ein Mischwinkel θ_0 eingeführt. Diese neuen Koordinaten wurden so gewählt, dass die Massenmatrix diagonal wird. Im Übrigen ist deutlich zu erkennen, dass die Mischung abhängig von der Kopplung g ist und dass im Limes $g \rightarrow 0$ das Modell in das in Kapitel 1.2.1 beschriebene Lineare Sigma-Modell übergeht. Für $g = 0$ entkoppeln φ und χ , die Vakuumerwartungswerte und die Massen der Felder φ und π gehen in die des Linearen Sigma-Modells über. Der Vakuumerwartungswert des Tetraquarks verschwindet. Eine diagonale Massenmatrix erhält man durch eine $SO(2)$ -Rotation der ursprünglichen Felder (φ, χ) in die neuen Felder (S, H) . Die verwendete Drehmatrix lautet wie folgt:

$$O = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix}, \quad O^T = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Im nächsten Schritt wird die Drehung in das Potential eingebaut:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(\chi, \varphi)M \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + \frac{1}{2}M_\pi^2\vec{\pi}^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2}(\chi, \varphi)O^T O M O^T O \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + \frac{1}{2}M_\pi^2\vec{\pi}^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2}(H, S)O M O^T \begin{pmatrix} H \\ S \end{pmatrix} + \frac{1}{2}M_\pi^2\vec{\pi}^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2}(H, S)M_{diag} \begin{pmatrix} H \\ S \end{pmatrix} + \frac{1}{2}M_\pi^2\vec{\pi}^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die diagonalisierte Massenmatrix hat die Form

$$M_{diag} = \begin{pmatrix} M_H^2 & 0 \\ 0 & M_S^2 \end{pmatrix} = O M O^T. \quad (2.9)$$

Die Felder S und H setzen sich wie folgt aus den ursprünglichen zusammen,

$$\begin{pmatrix} H \\ S \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (H, S) = (\chi, \varphi)O^T. \quad (2.10)$$

Statt nichtdiagonaler Einträge in der Massenmatrix gibt es jetzt einen Drehwinkel von der Form:

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{4g\varphi_0}{M_\varphi^2 - M_\chi^2}; \quad -\frac{\pi}{4} < \theta_0 < \frac{\pi}{4}. \quad (2.11)$$

Die Drehung wurde so gewählt, dass der Winkel θ_0 einen Bereich von $-\frac{\pi}{4}$ bis $\frac{\pi}{4}$ durchläuft. Somit ist das Feld H dasjenige, das wenigstens zu 50 Prozent aus dem Tetraquark χ besteht, und S das Feld, welches wenigstens zu 50 Prozent aus dem Quarkonium φ besteht. Aus Gleichung (2.11) wird erkenntlich, dass M_φ und M_χ nur dann gleiche Werte annehmen können, wenn g Null ist. Durch die Rotation ergeben sich nun die tatsächlichen Massen:

$$\begin{aligned} M_H^2 &= M_\chi^2 \cos^2 \theta_0 + M_\varphi^2 \sin^2 \theta_0 - 4g\varphi_0 \cos \theta_0 \sin \theta_0 \\ &= \frac{1}{2} \left[M_\chi^2 + M_\varphi^2 - \text{sign}(M_\varphi^2 - M_\chi^2) \sqrt{(M_\varphi^2 - M_\chi^2)^2 + (4g\varphi_0)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} M_S^2 &= M_\chi^2 \sin^2 \theta_0 + M_\varphi^2 \cos^2 \theta_0 + 4g\varphi_0 \cos \theta_0 \sin \theta_0 \\ &= \frac{1}{2} \left[M_\chi^2 + M_\varphi^2 + \text{sign}(M_\varphi^2 - M_\chi^2) \sqrt{(M_\varphi^2 - M_\chi^2)^2 + (4g\varphi_0)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Auch hier ist die enge Verbindung zum ursprünglichen Linearen Sigma-Modell zu erkennen. Wenn g Null ist, verschwindet auch der Mischwinkel θ_0 und es folgt, dass M_H zu M_χ und M_S zu M_φ wird. Eine weitere wichtige Gleichung ergibt sich aus der Betrachtung der Spur und der Determinante der Massenmatrix M vor und nach der Drehung

$$\text{Tr} M_{diag} = \text{Tr}(O^T M O) = \text{Tr}(O O^T M) = \text{Tr} M, \quad (2.14)$$

$$\det M_{diag} = \det(O^T M O) = \det O^T \det M \det O = \det M. \quad (2.15)$$

Durch den Vergleich der jeweils rechten und linken Seite ergeben sich folgende Gleichungen

$$M_H^2 + M_S^2 = M_\chi^2 + M_\varphi^2, \quad (2.16)$$

$$M_H^2 M_S^2 = M_\chi^2 M_\varphi^2 - (2g\varphi_0)^2. \quad (2.17)$$

Einfache Algebra führt nun zu dem Ausdruck

$$(M_S^2 - M_H^2)^2 = (M_\varphi^2 - M_\chi^2)^2 + (4g\varphi_0)^2. \quad (2.18)$$

Diese Formeln sind leicht zu interpretieren. Für ein nicht-verschwindendes g stoßen sich die Massen der Felder H und S ab. Es ergeben sich zwei mögliche Anordnungen der Massen:

$$M_S < M_\varphi \leq M_\chi < M_H, \quad (2.19)$$

$$M_H < M_\chi \leq M_\varphi < M_S. \quad (2.20)$$

Je nach Art der Massenordnung ergibt sich das Vorzeichen des Winkels θ_0 . Aus der Gleichung lässt sich weiterhin folgern: Die Annahme, dass alle Parameter reell sind, führt zu einer Ungleichung:

$$|M_S^2 - M_H^2| \geq 4g\varphi_0. \quad (2.21)$$

Die Ungleichung zeigt, dass nicht jede beliebige Kopplung g zwischen χ und φ zu reellen Massen M_S und M_H führt. Betrachtet man die Gleichung von Seiten der physikalischen Massen M_S und M_H , ist zu erkennen, dass es eine maximale Kopplung g_{max} zwischen χ und φ gibt.

Das Modell besitzt fünf Parameter λ , F , ϵ , M_χ und g . Vier werden durch die drei Massen M_S , M_H und M_π sowie die Vakuum-Zerfallskonstante des Pions φ_0 bestimmt. Der Parameter g könnte zwar aus Zerfällen festgelegt werden, doch scheint dies im Rahmen des verwendeten Modells wenig angebracht, da seine einfache Konstruktion die Bestimmung tatsächlicher Zerfallsbreiten nicht zulässt. Daher werden in der vorliegenden Studie die Parameter über einen großen Bereich variiert. Es bleiben somit vier unabhängige Parameter, die sich wie folgt ergeben: Aus den Gleichungen (2.16) und (2.17) folgt eine Gleichung M_χ . Die Gleichung für λ erhält man aus denen der tree-level Massen (2.5) für M_ϕ und M_π sowie der zuvor genannten Gleichung für M_χ . Diejenigen für F und ϵ ergeben sich direkt aus der tree-level Masse des Pions und dem Vakuumerwartungswert des Feldes ϕ . Im Einzelnen lauten die Gleichungen:

$$M_\chi^2 = \frac{1}{2} \left[M_S^2 + M_H^2 - \text{sign}(M_S^2 - M_H^2) \sqrt{(M_S^2 - M_H^2)^2 - (4g\varphi_0)^2} \right], \quad (2.22)$$

$$\lambda = \frac{1}{2\varphi_0^2} (M_S^2 + M_H^2 - M_\pi^2 - M_\chi^2), \quad (2.23)$$

$$F^2 = \varphi_0^2 - \frac{1}{\lambda} \left(M_\pi^2 + \frac{2g^2}{M_\chi^2} \varphi_0^2 \right), \quad (2.24)$$

$$\epsilon = \varphi_0 M_\pi^2. \quad (2.25)$$

2.2 $T \neq 0$, Variante A

In diesem Abschnitt wird mittels des CJT-Formalismus ein selbstkonsistentes Gleichungssystem geschaffen, das eine Analyse bei nichtverschwindender Temperatur zulässt. Es wird sich in diesem Fall auf Tadpole-Beiträge beschränkt. Dazu werden alle Doppelblasendiagramme benötigt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden zwei Verfahren erarbeitet, um das Verhalten bei nichtverschwindender Temperatur zu beschreiben. In Variante A wird die Mischung als ein eigener Freiheitsgrad betrachtet und erhält eine explizite Temperaturabhängigkeit. In Variante B ist die Mischung kein eigener Freiheitsgrad, und es kommt nur indirekt über die anderen Freiheitsgrade zu einer Temperaturabhängigkeit. Beide Varianten zeigen Unterschiede, die an späterer Stelle diskutiert werden sollen. Der Fokus in dieser Arbeit liegt auf Variante A. Im vorangegangenen Kapitel ist zu sehen, dass φ und χ nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte haben. Im ersten Schritt werden für diese Felder zwei voneinander unabhängige, von der Temperatur abhängige Kondensate $\phi = \phi(T)$ und $\alpha = \alpha(T)$ eingeführt und um ihren Vakuumerwartungswert verschoben. Die modifizierten Felder lauten somit $\varphi \rightarrow \varphi + \phi(T)$ und $\chi \rightarrow \chi + \alpha(T)$. Das verschobene Potential ergibt sich zu

$$V = \frac{\lambda}{4} \{ [\varphi + \phi(T)]^2 + \vec{\pi}^2 - F^2 \}^2 - \epsilon [\varphi + \phi(T)] + \frac{1}{2} M_\chi^2 [\chi + \alpha(T)]^2 - g [\chi + \alpha(T)] \{ [\varphi + \phi(T)]^2 + \vec{\pi}^2 \}. \quad (2.26)$$

Für die Vakuumerwartungswerte erhält man wie erwartet $\phi(0) = \varphi_0$ und $\alpha(0) = \chi_0$. Das Einführen der verschobenen Felder liefert eine Vielzahl neuer Terme. Die Mehrzahl dieser Terme sind für die hier verwendete CJT-Näherung überflüssig. Die benötigten Terme sind von quadratischer, biquadratischer oder vierter Ordnung. Nach Aussortieren der überflüssigen Terme ergibt sich für das Potential folgendes:

$$V = \frac{1}{2} M_\chi^2 \chi^2 + \frac{1}{2} M_\varphi^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} M_\pi^2 \vec{\pi}^2 - 2g\phi(T)\varphi\chi + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 + \frac{\lambda}{4} \vec{\pi}^4 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 \vec{\pi}^2 + \dots, \quad (2.27)$$

mit den entsprechenden Massen:

$$\begin{aligned}
M_\chi^2 &= M_\chi^2, \\
M_\varphi^2 &= \lambda[3\phi(T)^2 - F^2] - 2g\alpha(T), \\
M_\pi^2 &= \lambda[\phi(T)^2 - F^2] - 2g\alpha(T).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Das allgemeine CJT-Potential lautet:

$$V_{eff} = V_{tl} + \frac{1}{2} \int \text{Tr}[\ln G^{-1} + D^{-1}G - 1] + V_2. \tag{2.29}$$

V_{tl} ist das tree-level Potential, die einzelnen Felder nehmen die Werte der Kondensate an:

$$\begin{aligned}
V_{tl} &= V(\vec{\pi} = 0, \varphi = \phi(T), \chi = \alpha(T)) \\
&= \frac{\lambda}{4} [\phi(T)^2 - F^2]^2 - \epsilon\phi(T) + \frac{1}{2} M_\chi^2 \alpha(T)^2 - g\alpha(T)\phi(T)^2.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Bei V_2 handelt es sich um die Summe aller Doppelblasendiagramme:

$$V_2 = \frac{3}{4} \lambda \left(\int G_\varphi \right)^2 + \frac{3}{2} \lambda \int G_\varphi \int G_\pi + \frac{15}{4} \lambda \left(\int G_\pi \right)^2. \tag{2.31}$$

Die Vorfaktoren ergeben sich aus kombinatorischen Faktoren der Diagramme und den Vorfaktoren des Potentials. Für die Pion-Pion-Schleife erhält man als Beitrag für den Vorfaktor aus dem Potential $\lambda/4$, und die Pion-Pion-Schleife lässt 15 verschiedene Möglichkeiten zu, das Diagramm zu schließen. Für die Pion- φ -Schleife erhält man aus dem Potential $\lambda/2$ und drei für die Anzahl der Pionen, die φ - φ -Schleife erhält aus dem Potential den Vorfaktor $\lambda/4$, und dieses Diagramm lässt sich auf drei verschiedene Arten schließen.

Wie schon im Vakuum gibt es auch hier auf der Massenebene einen Mischterm zwischen φ und χ . Diese Mischung führt zu einem nicht-physikalischen Propagator $G_{\chi,\varphi}$. Dieser wird ähnlich dem nicht-diagonalen Term bei $T = 0$ durch eine Drehung beseitigt. Da jedoch die Mischung der beiden Felder temperaturabhängig ist, muss bei jeder Temperatur entmischt werden. Um zu den physikalischen Propagatoren zu gelangen, werden die vollständigen Propagatoren G_φ und G_χ entdreht. Nach der Drehung werden die vollständigen und auch physikalischen Propagatoren G_S und G_H betrachtet. Daneben ergibt sich eine weitere Observable: der Mischwinkel $\theta(T)$, der eine Temperaturabhängigkeit besitzt. Auch hier gehen alle Werte für $T = 0$ in das

Vakuummodell über. Am Ende wird gezeigt werden, dass es auch möglich ist, weiterhin mit den Propagatoren G_φ , G_χ und einem Mischpropagator $G_{\varphi,\chi}$ zu arbeiten und erst in einem letzten Schritt diesen zu beseitigen. Das Entdrehen gestaltet sich wie folgt. Zuerst wird das Verhalten der vollständigen Propagatoren und der inversen Propagatoren unter Drehung zueinander betrachtet:

$$\begin{aligned} 1 &= OO^T = OGG^{-1}O^T = OGO^T OG^{-1}O^T = G_{diag}OG^{-1}O^T \\ &= G_{diag}G_{diag}^{-1} = 1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Die Drehung ist so gewählt, dass sie die Propagatoren diagonalisiert

$$G_{diag} = OGO^T, \quad G_{diag}^{-1} = OG^{-1}O^T. \quad (2.33)$$

Zur Diagonalisierung des effektiven Potentials muss zudem geklärt werden, wie die Drehung die Determinante und Spur beeinflusst:

$$\det G^{-1} = \det O \det G^{-1} \det O^T = \det(OG^{-1}O^T) = \det G_{diag}^{-1}, \quad (2.34)$$

$$\text{Tr}G^{-1} = \text{Tr}(G^{-1}O^T O) = \text{Tr}(OG^{-1}O^T) = \text{Tr}G_{diag}^{-1}, \quad (2.35)$$

$$\text{Tr}(D^{-1}G) = \text{Tr}(D^{-1}O^T OGO^T O) = \text{Tr}(OD^{-1}O^T OGO^T) = \text{Tr}(D_{rot}^{-1}G_{diag}). \quad (2.36)$$

Wie erwartet sind die Spur und die Determinante invariant unter dieser Koordinatentransformation. Für die weitere Rechnung werden die einzelnen Größen wie folgt gewählt. Bei O und O^T handelt es sich um eine $SO(2)$ -Drehmatrix und ihr Inverses, eingebettet in eine 3×3 Matrix:

$$O = \begin{pmatrix} \cos \theta(T) & \sin \theta(T) & 0 \\ -\sin \theta(T) & \cos \theta(T) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O^T = \begin{pmatrix} \cos \theta(T) & -\sin \theta(T) & 0 \\ \sin \theta(T) & \cos \theta(T) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Unter der Bedingung, dass die Drehung die Propagatoren diagonalisiert, führt dies zu folgenden Gleichungen für die Propagatoren:

$$G_{diag} = \begin{pmatrix} G_H & 0 & 0 \\ 0 & G_S & 0 \\ 0 & 0 & G_\pi \end{pmatrix}, \quad G_{diag}^{-1} = \begin{pmatrix} G_H^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & G_S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G_\pi^{-1} \end{pmatrix}; \quad (2.38)$$

mit den vollständigen Propagatoren

$$G_H^{-1} = -k^2 + M_H(T)^2, \quad G_S^{-1} = -k^2 + M_S(T)^2, \quad G_\pi^{-1} = -k^2 + M_\pi(T)^2. \quad (2.39)$$

Der Zusammenhang zwischen den neuen und den alten Propagatoren wird hier deutlich:

$$\int G_\chi = \cos^2 \theta(T) \int G_H + \sin^2 \theta(T) \int G_S, \quad (2.40)$$

$$\int G_\varphi = \sin^2 \theta(T) \int G_H + \cos^2 \theta(T) \int G_S, \quad (2.41)$$

$$\int G_{\chi,\varphi} = \sin \theta(T) \cos \theta(T) \left(\int G_S - \int G_H \right). \quad (2.42)$$

Zum Verhalten der tree-level Massen unter Rotation:

$$D_{rot}^{-1} = O D^{-1} O^T. \quad (2.43)$$

Die Notation ist wie folgt gewählt:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} D_\chi^{-1} & D_{\chi,\varphi}^{-1} & 0 \\ D_{\chi,\varphi}^{-1} & D_\varphi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & D_\pi^{-1} \end{pmatrix}, \quad D_{rot}^{-1} = \begin{pmatrix} D_H^{-1} & D_{H,S}^{-1} & 0 \\ D_{H,S}^{-1} & D_S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & D_\pi^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Da G_{diag} diagonal ist und nur die Spur über das Produkt aus D_{rot}^{-1} und G_{diag} benötigt wird, ist der Term $D_{H,S}^{-1}$ nicht von weiterem Interesse. Die restlichen Propagatoren lauten:

$$\begin{aligned} D_H^{-1} &= -k^2 + M_H^2 \\ &= D_\chi^{-1} \cos^2 \theta(T) + D_\varphi^{-1} \sin^2 \theta(T) + 2D_{\chi,\varphi}^{-1} \sin \theta(T) \cos \theta(T), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} D_S^{-1} &= -k^2 + M_S^2 \\ &= D_\chi^{-1} \sin^2 \theta(T) + D_\varphi^{-1} \cos^2 \theta(T) - 2D_{\chi,\varphi}^{-1} \sin \theta(T) \cos \theta(T), \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$D_\pi^{-1} = -k^2 + M_\pi^2, \quad (2.47)$$

mit den Abkürzungen:

$$D_\chi^{-1} = -k^2 + M_\chi^2, \quad (2.48)$$

$$D_\varphi^{-1} = -k^2 + M_\varphi^2, \quad (2.49)$$

$$D_{\chi,\varphi}^{-1} = -2g\phi(T). \quad (2.50)$$

Mit Hilfe dieser Vorüberlegungen kann nun das diagonalisierte effektive Potential $V_{eff,diag}$ aufgestellt werden:

$$V_{eff,diag} = V_{tl} + \frac{1}{2} \int \text{Tr}[\ln G_{diag}^{-1} + D_{rot}^{-1} G_{diag} - 1] + V_{2,diag}. \quad (2.51)$$

Das diagonalisierte Potential lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} V_{eff,diag} &= \frac{\lambda}{4} [\phi(T)^2 - F^2]^2 - \epsilon \phi(T) + \frac{1}{2} M_\chi^2 \alpha(T)^2 - g \alpha(T) \phi(T)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int [\ln G_H^{-1} + D_H^{-1} G_H - 1] + \frac{1}{2} \int [\ln G_S^{-1} + D_S^{-1} G_S - 1] \\ &+ \frac{3}{2} \int [\ln G_\pi^{-1} + D_\pi^{-1} G_\pi - 1] \\ &+ \frac{3}{4} \lambda \left(\sin^2 \theta(T) \int G_H + \cos^2 \theta(T) \int G_S \right)^2 \\ &+ \frac{3}{2} \lambda \left(\sin^2 \theta(T) \int G_H + \cos^2 \theta(T) \int G_S \right) \int G_\pi \\ &+ \frac{15}{4} \lambda \left(\int G_\pi \right)^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Dieses Potential wird nun für die beiden Kondensate $\phi(T)$ und $\alpha(T)$, sowie für die inversen physikalischen Propagatoren G_S^{-1} , G_H^{-1} und G_π^{-1} der beteiligten Teilchen, sowie um den Mischwinkel $\theta(T)$ minimiert:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff,diag}}{\delta G_H}, \quad (2.53)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff,diag}}{\delta G_S}, \quad (2.54)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff,diag}}{\delta G_\pi}, \quad (2.55)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff,diag}}{\delta \phi(T)}, \quad (2.56)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff,diag}}{\delta \alpha(T)}, \quad (2.57)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff,diag}}{\delta \theta(T)}. \quad (2.58)$$

Es ergeben sich sechs gekoppelte Gleichungen. Die drei Gleichungen für die inversen Propagatoren lauten:

$$G_H^{-1} = D_H^{-1} + 3\lambda \sin^2 \theta(T) \left(\sin^2 \theta(T) \int G_H + \cos^2 \theta(T) \int G_S + \int G_\pi \right), \quad (2.59)$$

$$G_S^{-1} = D_S^{-1} + 3\lambda \cos^2 \theta(T) \left(\sin^2 \theta(T) \int G_H + \cos^2 \theta(T) \int G_S + \int G_\pi \right), \quad (2.60)$$

$$G_\pi^{-1} = D_\pi^{-1} + \lambda \left(\sin^2 \theta(T) \int G_H + \cos^2 \theta(T) \int G_S + 5 \int G_\pi \right). \quad (2.61)$$

Für die beiden Kondensatgleichungen ergeben sich:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \lambda \phi(T) [\phi(T)^2 - F^2] - 2g\alpha(T)\phi(T) + 3\lambda \phi(T) \int G_\pi \\ &+ (3\lambda \phi(T) \sin^2 \theta(T) - 2g \cos \theta(T) \sin \theta(T)) \int G_H \\ &+ (3\lambda \phi(T) \cos^2 \theta(T) + 2g \cos \theta(T) \sin \theta(T)) \int G_S, \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$0 = -g\phi(T)^2 + M_\chi^2 \alpha(T) - 3g \int G_\pi - g \sin^2 \theta(T) \int G_H - g \cos^2 \theta(T) \int G_S. \quad (2.63)$$

Die Gleichung für den Mischwinkel $\theta(T)$ lautet letztlich:

$$\begin{aligned} \theta(T) &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{-2D_{\chi,\phi}^{-1}}{D_\varphi^{-1} + 3\lambda (\sin^2 \theta(T) \int G_H + \cos^2 \theta(T) \int G_S + \int G_\pi) - D_\chi^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{-2G_{\chi,\varphi}^{-1}}{G_\varphi^{-1} - G_\chi^{-1}} \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Es wird deutlich, dass der Winkel $\theta(T)$ auf den Bereich von $-\frac{\pi}{4} \leq \theta(T) \leq \frac{\pi}{4}$ beschränkt ist. Die Bedeutung entspricht derjenigen im Vakuum. Somit besitzt das Feld H wenigstens einen Tetraquarkanteil χ von 50 Prozent, und das Feld S wenigstens einen Quarkoniumanteil φ von 50 Prozent. Folglich setzen sich auch die Masse M_S zu einem Anteil größer als 50 Prozent aus M_φ und die Masse M_H zu einem Anteil größer als 50 Prozent aus M_χ zusammen.

Die numerischen Lösungen dieser sechs Gleichungen werden an späterer Stelle besprochen.

Folgend wird eine alternative Herangehensweise beschrieben, die zu den gleichen Ergebnissen führt. Bei diesem Verfahren werden die Massen nicht im effektiven Potential entdrehet. Stattdessen wird mit dem unphysikalischen Mischpropagator $G_{\chi,\varphi}^{-1}$ gearbeitet. Hierzu wird das nicht-diagonalisierte effektive Potential V_{eff} betrachtet. In diesem Fall ergeben sich modifizierte Stationaritätsbedingungen:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_\varphi}, \quad (2.65)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_\chi}, \quad (2.66)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_{\varphi,\chi}}, \quad (2.67)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_\pi}, \quad (2.68)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta \phi(T)}, \quad (2.69)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta \alpha(T)}. \quad (2.70)$$

Das resultierende Gleichungssystem lautet:

$$G_\chi^{-1} = D_\chi^{-1}, \quad (2.71)$$

$$G_\varphi^{-1} = D_\varphi^{-1} + 3\lambda \left(\int G_\varphi + \int G_\pi \right), \quad (2.72)$$

$$G_\pi^{-1} = D_\pi^{-1} + \lambda \left(\int G_\varphi + 5 \int G_\pi \right), \quad (2.73)$$

$$G_{\chi,\varphi}^{-1} = D_{\chi,\varphi}^{-1}, \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \lambda \phi(T) [\phi(T)^2 - F^2] - 2g\alpha(T)\phi(T) \\ &+ 3\lambda \phi(T) \left(\int G_\varphi + \int G_\pi \right) - 2g \int G_{\chi,\varphi}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$0 = -g\phi(T)^2 + M_\chi^2 \alpha(T) - g \left(\int G_\varphi + 3 \int G_\pi \right). \quad (2.76)$$

Das Gleichungssystem liefert neben den physikalischen Größen $M_\pi(T)$, $\phi(T)$ und $\alpha(T)$ auch nichtphysikalische Größen wie $M_\chi(T)$, $M_\varphi(T)$ und $M_{\chi,\varphi}(T)$. Da diese nicht in der Natur vorkommen, müssen die Massen nachträglich so gedreht werden, dass die Mischung verschwindet. Es zeigt sich, dass beide Verfahren nicht nur zu den exakt gleichen Ergebnissen führen, sondern auch äquivalent sind. Die Äquivalenz beider Verfahren zeigt sich, wenn die Drehung als Koordinatentransformation aufgefasst wird $(G_H^{-1}, G_S^{-1}, \theta(T)) \rightarrow (G_\chi^{-1}, G_\varphi^{-1}, G_{\chi,\varphi}^{-1})$. Die Jakobideterminante J dieser Transformation lautet $J = G_\chi^{-1} - G_\varphi^{-1}$. Dies bedeutet, dass die Transformation nur für den Fall nicht definiert ist, wenn die Massen $M_\chi(T)$ und $M_\varphi(T)$ gleich sind. Man kann aber den Limes $M_\chi(T) - M_\varphi(T) \rightarrow 0$ untersuchen. Die Differenz ist lediglich in der Größe $\theta(T)$ (Gleichung (2.64)) bedeutsam. Es werden zwei Fälle unterschieden: $M_\chi(T) > M_\varphi(T)$ und $M_\chi(T) < M_\varphi(T)$. An diesem Punkt geht das Argument des arctan gegen $+\infty$ oder $-\infty$, je nach Verhältnis von $M_\chi(T)$ zu $M_\varphi(T)$ und somit $\theta(T)$ gegen $-\frac{\pi}{4}$ oder $+\frac{\pi}{4}$. An diesen Stellen tauschen $M_S(T)$ und $M_H(T)$ ihre Rollen.

2.3 Chiraler Limes

Im chiralen Limes wird das Pion ein Goldstoneboson: Der Parameter ϵ wird gleich Null gesetzt und die Masse des Pions im Vakuum verschwindet. Die Gleichungen für die Vakuumerwartungswerte der Felder χ , φ und π verändern sich auf folgende Weise:

$$\pi_{0,i} = 0, \quad \chi_0 = \frac{g}{M_\chi^2} \varphi_0^2, \quad \varphi_0 = \begin{cases} 0 & \text{(Maximum)} \\ \pm \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{2g^2}{\lambda M_\chi^2}}} & \text{(Minima)} \end{cases} \quad (2.77)$$

Die Extrema von φ werden dadurch wie erwartet achsensymmetrisch. Zur Lösung der Gapgleichungen wird das Minimum bei $\varphi_0 = +F/\sqrt{1 - \frac{2g^2}{\lambda M_\chi^2}}$ verwendet. Die Vakuummassen sind im Vergleich zu denen des ursprünglichen Modells leicht verändert.

$$M_\chi^2 = M_{\chi_0}^2, \quad M_\varphi^2 = 2\lambda\varphi_0^2, \quad M_\pi^2 = 0. \quad (2.78)$$

Die weitere Vorgehensweise für nicht verschwindende Temperaturen ist analog zu $\epsilon \neq 0$. Erst wird das CJT-Potential aufgestellt, danach werden die

Felder entdreht und zum Abschluss wird durch Variation der Propagatoren, Kondensate und des Mischwinkels das zu lösende Gleichungssystem bestimmt. Die Massengleichungen, die Kondensatgleichungen und die des Mischwinkels sind identisch zu denen des ursprünglichen Modells (2.59, 2.60, 2.61, 2.62, 2.63, 2.64); der einzige Unterschied liegt in dem Parameter ϵ , der nun den Wert Null hat.

2.4 alternative Vorgehensweise, Variante B

In einer alternativen Vorgehensweise wird das Potential erst entmischt und darauf anschließend der CJT-Formalismus angewendet. Das gesamte System wird um einen Freiheitsgrad reduziert und es gibt keine explizite thermische Abhängigkeit der Mischung. Beide Vorgehensweisen sind für $T = 0$ identisch, die Parameter und Vakuummassen stimmen überein, der Unterschied ergibt sich erst für $T \neq 0$. Die für die alternative Vorgehensweise benötigte Lagrangedichte entsteht aus der ursprünglichen, in dem alle nichtdiagonalen Terme mittels einer Drehung entfernt werden:

$$\begin{aligned}
V_{diag} = & \frac{1}{2}M_S^2 S^2 + \frac{1}{2}M_H^2 H^2 + \frac{1}{2}M_\pi^2 \vec{\pi}^2 \\
& + \frac{\lambda}{4} \cos^4 \theta S^4 + \frac{\lambda}{4} \sin^4 \theta H^4 + \frac{\lambda}{4} \pi^4 \\
& + \frac{3\lambda}{2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta S^2 H^2 + \frac{\lambda}{2} \cos^2 \theta S^2 \pi^2 + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \theta H^2 \pi^2 \\
& + O(S^2 H) + O(H^2 S) + O(H \vec{\pi}^2) + O(S \vec{\pi}^2) + O(SH \vec{\pi}^2). \quad (2.79)
\end{aligned}$$

Mit den bekannten Abkürzungen für die Vakuummassen und den Mischwinkel:

$$\begin{aligned}
M_H^2 &= \frac{1}{2} \left[M_\chi^2 + M_\varphi^2 - \text{sign}(M_\varphi^2 - M_\chi^2) \sqrt{(M_\varphi^2 - M_\chi^2)^2 + (4g\phi)^2} \right], \\
M_S^2 &= \frac{1}{2} \left[M_\chi^2 + M_\varphi^2 + \text{sign}(M_\varphi^2 - M_\chi^2) \sqrt{(M_\varphi^2 - M_\chi^2)^2 + (4g\phi)^2} \right], \\
M_\pi^2 &= \lambda[\phi(T)^2 - F^2] - 2g\alpha(T), \quad (2.80)
\end{aligned}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{4g\phi(T)}{M_\varphi^2 - M_\chi^2}. \quad (2.81)$$

Für M_φ ergibt sich der Ausdruck

$$M_\varphi^2 = \lambda[3\phi(T)^2 - F^2] - 2g\alpha(T). \quad (2.82)$$

Auf dieses Potential wird nun der CJT-Formalismus angewendet. Die einzelnen Teile des effektiven Potentials haben die Form:

$$\begin{aligned} V_{tl} &= V(\vec{\pi} = 0, \varphi = \phi(T), \chi = \alpha(T)) \\ &= \frac{\lambda}{4}[\phi(T)^2 - F^2]^2 - \epsilon\phi(T) + \frac{1}{2}M_\chi^2\alpha(T)^2 - g\alpha(T)\phi(T)^2, \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{3}{4}\lambda \left(\sin^2 \theta \int G_H + \cos^2 \theta \int G_S \right)^2 \\ &\quad + \frac{3}{2}\lambda \left(\sin^2 \theta \int G_H + \cos^2 \theta \int G_S \right) \int G_\pi \\ &\quad + \frac{15}{4}\lambda \left(\int G_\pi \right)^2, \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} V_{ln} &= \frac{1}{2} \int [\ln G_H^{-1} + D_H^{-1}G_H - 1] + \frac{1}{2} \int [\ln G_S^{-1} + D_S^{-1}G_S - 1] \\ &\quad + \frac{3}{2} \int [\ln G_\pi^{-1} + D_\pi^{-1}G_\pi - 1], \end{aligned} \quad (2.85)$$

mit den Abkürzungen:

$$G_H^{-1} = -k^2 + M_H(T)^2, \quad G_S^{-1} = -k^2 + M_S(T)^2, \quad G_\pi^{-1} = -k^2 + M_\pi(T)^2. \quad (2.86)$$

Das gesamte Potential ergibt sich zu

$$V_{eff} = V_{tl} + V_{ln} + V_2. \quad (2.87)$$

Auch wenn sich die beiden effektiven Potentiale der unterschiedlichen Varianten A und B ähneln, gibt es einen grundlegenden Unterschied: Die Mischung und somit auch der Mischwinkel stellen in diesem Falle keinen eigenen Freiheitsgrad dar, sondern werden durch die Gleichung (2.81) festgelegt. Am

deutlichsten wird der Unterschied in der expliziten Form der Gapgleichungen. Wie bereits mehrfach beschrieben, gibt es in diesem Verfahren nur fünf Stationaritätsbedingungen. Diese lauten:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_H}, \quad (2.88)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_S}, \quad (2.89)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta G_\pi}, \quad (2.90)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta \phi(T)}, \quad (2.91)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta V_{eff}}{\delta \alpha(T)}. \quad (2.92)$$

Die drei Massengleichungen lauten somit:

$$G_H^{-1} = D_H^{-1} + 3\lambda \sin^2 \theta \left(\sin^2 \theta \int G_H + \cos^2 \theta \int G_S + \int G_\pi \right), \quad (2.93)$$

$$G_S^{-1} = D_S^{-1} + 3\lambda \cos^2 \theta \left(\sin^2 \theta \int G_H + \cos^2 \theta \int G_S + \int G_\pi \right), \quad (2.94)$$

$$G_\pi^{-1} = D_\pi^{-1} + \lambda \left(\sin^2 \theta \int G_H + \cos^2 \theta \int G_S + 5 \int G_\pi \right). \quad (2.95)$$

Aufgrund der expliziten Abhängigkeit der Winkel von beiden Kondensaten werden die Gapgleichungen für $\alpha(T)$ und $\varphi(T)$ länger.

$$\begin{aligned}
0 &= M_\chi^2 \alpha(T) - g \phi(T)^2 \\
&\quad - g \left(\cos^2 \theta \int G_S + \sin^2 \theta \int G_H + 3 \int G_\pi \right) \\
&\quad - \frac{3}{2} \lambda^2 g \frac{\text{sign}(M_\varphi^2 - M_\chi^2) (4g\phi(T))^2}{\sqrt{(M_\varphi^2 - M_\chi^2)^2 + (4g\phi(T))^2}^3} \left(\int G_S - \int G_H \right) \\
&\quad \times \left(\cos^2 \theta \int G_S + \sin^2 \theta \int G_H + \int G_\pi \right), \tag{2.96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \phi(T) \left[\lambda \phi(T)^2 - \lambda F^2 - 2g\alpha(T) \right. \\
&\quad + (3\lambda \sin^2 \theta - 2g \cos \theta \sin \theta) \int G_H \\
&\quad + (3\lambda \cos^2 \theta + 2g \cos \theta \sin \theta) \int G_S + 3\lambda \int G_\pi \\
&\quad + 12\lambda g^2 \frac{\text{sign}(M_\varphi^2 - M_\chi^2) (6\lambda \phi(T)^2) - |M_\varphi^2 - M_\chi^2|}{\sqrt{(M_\varphi^2 - M_\chi^2)^2 + (4g\phi(T))^2}^3} \left(\int G_S - \int G_H \right) \\
&\quad \left. \times \left(\cos^2 \theta \int G_S + \sin^2 \theta \int G_H + \int G_\pi \right) \right]. \tag{2.97}
\end{aligned}$$

Die einzelnen Kondensate werden somit nicht nur von den Tadpole-Beiträgen der einzelnen Felder bestimmt, sondern auch von Vakuumbigrammen. Diese scheinen dann einen großen Einfluss auf das System geltend zu machen, wenn sich die Mischung schnell ändert und das Kondensat groß ist. Beim Vergleich dieser Gleichungen mit denen der Variante A wird deutlich, dass sie sich nur an wenigen Stellen prägnant voneinander unterscheiden. Zum einen sind die Kondensate von geschlossenen Doppelblasendiagramme abhängig, zum anderen gibt es eine andere Temperaturabhängigkeit des Winkels.

2.5 Direkte Zerfälle

Das Modell erlaubt zwar die Untersuchung des chiralen Phasenübergangs zu betreiben und die Bestimmung des quantitativen Verhaltens der Massen,

Kondensate und des Mischwinkels. Es ermöglicht jedoch keine realistische Beschreibung der Zerfälle. Frühere Arbeiten zum Thema haben gezeigt, dass hierzu das Modell erweitert werden muss. Einen möglichen Schritt stellt die Hinzunahme der Vektor-/ Axialvektor-Mesonen [28, 29] und eine Erweiterung auf drei Quarkfamilien [30] dar. Aus diesem Grund wird sich hier auf eine Betrachtung der direkten Zerfälle beschränkt. Dies soll einen ersten Eindruck darüber erlauben, wie sich in einem Modell mit einem Tetraquarkzustand die Zerfallsbreiten verändern. Auch wird aufgrund der Einfachheit des Modells von einer Berechnung temperaturabhängiger Zerfallskonstanten Abstand genommen. Es werden nur die direkten Zerfälle $S \rightarrow \pi\pi$ und $H \rightarrow \pi\pi$ betrachtet. Hierzu wird das Potential bis zu den Termen $H \vec{\pi}^2$ und $S \vec{\pi}^2$ entwickelt:

$$V = \frac{1}{2}M_S^2 S^2 + \frac{1}{2}M_H^2 H^2 + \frac{1}{2}M_\pi^2 \vec{\pi}^2 + (\lambda\phi \sin \theta_0 - g \cos \theta_0)H \vec{\pi}^2 + (\lambda\phi \cos \theta_0 + g \sin \theta_0)S \vec{\pi}^2 + \dots \quad (2.98)$$

mit den bereits bekannten Abkürzungen:

$$M_H^2 = M_\chi^2 \cos^2 \theta_0 + M_\varphi^2 \sin^2 \theta_0 - 4g\phi \cos \theta_0 \sin \theta_0, \quad (2.99)$$

$$M_S^2 = M_\chi^2 \sin^2 \theta_0 + M_\varphi^2 \cos^2 \theta_0 + 4g\phi \cos \theta_0 \sin \theta_0, \quad (2.100)$$

$$M_\pi^2 = \lambda(\varphi_0^2 - F^2) - 2g\chi_0, \quad (2.101)$$

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{4g\varphi_0}{M_\phi^2 - M_\chi^2}. \quad (2.102)$$

Mit Kenntnis der für die Zerfälle entscheidenden Vertizes kann nun mit nachstehender Formel der Zerfall in zwei identische Teilchen in erster Ordnung berechnet werden:

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi} \frac{\sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2}}{M^2} |-i\mathcal{M}|^2, \quad (2.103)$$

wobei es sich bei M um die Masse des zerfallenden Teilchen handelt, bei m um die der Zerfallsprodukte und bei \mathcal{M} um den zweifachen Vorfaktor des Vertex, der den Zerfall beschreibt. Eine genaue Erläuterung zur Herleitung dieser Formel ist im Anhang D nachzulesen. Es ergibt sich:

$$\mathcal{M}_H = 2(\lambda\varphi_0 \sin \theta_0 - g \cos \theta_0), \quad (2.104)$$

$$\mathcal{M}_S = 2(\lambda\varphi_0 \cos \theta_0 + g \sin \theta_0). \quad (2.105)$$

Für die Zerfallsbreiten der einzelnen Zerfälle ergibt sich folgendes Resultat:

$$\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi} = 3 \frac{1}{16\pi} \frac{\sqrt{\frac{M_H^2}{4} - M_\pi^2}}{M_H^2} |-\mathcal{M}_H|^2, \quad (2.106)$$

$$\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi} = 3 \frac{1}{16\pi} \frac{\sqrt{\frac{M_S^2}{4} - M_\pi^2}}{M_S^2} |-\mathcal{M}_S|^2. \quad (2.107)$$

Der zusätzliche Faktor drei steht für die Möglichkeit, auf drei unterschiedliche Arten in Pionen zu verfallen:

$$H \rightarrow \pi^0 \pi^0, \quad S \rightarrow \pi^0 \pi^0, \quad (2.108)$$

$$H \rightarrow \pi^+ \pi^-, \quad S \rightarrow \pi^+ \pi^-, \quad (2.109)$$

$$H \rightarrow \pi^- \pi^+, \quad S \rightarrow \pi^- \pi^+. \quad (2.110)$$

Mittels einer umfangreichen Rechnung lässt sich das Ergebnis auf folgende Weise zusammenfassen:

$$\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi} = 3 \frac{1}{16\pi} \frac{\sqrt{\frac{M_H^2}{4} - M_\pi^2}}{M_H^2} \sin^2 \theta_0 \left(\frac{M_H^2 - M_\pi^2}{\varphi_0} \right)^2, \quad (2.111)$$

$$\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi} = 3 \frac{1}{16\pi} \frac{\sqrt{\frac{M_S^2}{4} - M_\pi^2}}{M_S^2} \cos^2 \theta_0 \left(\frac{M_S^2 - M_\pi^2}{\varphi_0} \right)^2. \quad (2.112)$$

Die Zerfallsbreite ist somit stark von der Massendifferenz des zerfallenden Teilchens, dem Ausgangsprodukt so wie dem Mischwinkel θ_0 abhängig. Die maximale Zerfallsbreite für $H \rightarrow \pi\pi$ erreicht man für maximale Mischung $\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{4}$:

$$\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi, max} = 3 \frac{1}{32\pi} \frac{\sqrt{\frac{M_H^2}{4} - M_\pi^2}}{M_H^2} \left(\frac{M_H^2 - M_\pi^2}{\varphi_0} \right)^2. \quad (2.113)$$

Die minimale Zerfallsbreite ergibt Null, da $\sin(\theta = 0) = 0$. Die minimale Zerfallsbreite für den Zerfall $S \rightarrow \pi\pi$ erhält man für einen Winkel $\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{4}$ und sie lautet:

$$\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi, min} = 3 \frac{1}{32\pi} \frac{\sqrt{\frac{M_S^2}{4} - M_\pi^2}}{M_S^2} \left(\frac{M_S^2 - M_\pi^2}{\varphi_0} \right)^2. \quad (2.114)$$

Für die maximale Zerfallsbreite bei einem Mischwinkel von $\theta = 0$ ergibt sich:

$$\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi, max} = 3 \frac{1}{16\pi} \frac{\sqrt{\frac{M_S^2}{4} - M_\pi^2}}{M_S^2} \left(\frac{M_S^2 - M_\pi^2}{\varphi_0} \right)^2. \quad (2.115)$$

Diese Formeln gelten sowohl für Variante A als auch für Variante B, da ein Unterschied erst bei nichtverschwindender Temperatur auftritt. Im chiralen Limes verschwindet die Pionenmasse $M_\pi = 0$ und die Zerfallsbreiten ergeben sich zu:

$$\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi, cL} = 3 \frac{1}{16\pi} M_H^3 \frac{1}{\varphi_0^2} \sin^2 \theta_0, \quad (2.116)$$

$$\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi, cL} = 3 \frac{1}{16\pi} M_S^3 \frac{1}{\varphi_0^2} \cos^2 \theta_0. \quad (2.117)$$

Weitere Zerfälle, wie beispielweise in vier Pionen, werden hier nicht näher betrachtet. Um solche Zerfälle beschreiben zu können, müsste das Modell erweitert werden.

Kapitel 3

Ergebnisse

3.1 Einführung

Das untersuchte Modell zeigt eine Reihe interessanter Ergebnisse bezüglich des Phasenübergangs und des Verhaltens der Massen, der Kondensate und des Mischwinkels. Das verwendete Potential lautet:

$$V = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 + \vec{\pi}^2 - F^2)^2 - \epsilon\varphi + \frac{1}{2}M_\chi^2\chi^2 - g\chi(\varphi^2 + \vec{\pi}^2). \quad (3.1)$$

Es besitzt fünf Parameter: F , ϵ , λ , g und M_χ . Drei der Parameter sind nicht eindeutig zu bestimmen. Zum einen können die Massen der skalaren Felder M_S und M_H nicht eindeutig den skalaren Resonanzen zugeordnet werden, zum andern kann auch die Kopplung g , die das Tetraquarkfeld an die Felder π und φ bindet, nicht präzise bestimmt werden.

In Hinblick auf die beiden skalaren Felder treten zwei Probleme auf. Aus Experimenten wird nicht ersichtlich, ob die leichte oder die schwere Resonanz dem chiralen Partner des Pions zugeordnet werden muss. Des weiteren ist die genaue Lage der beiden Resonanzen nicht bekannt, und die Experimente geben ein breites Band an möglichen Werten an. In der vorliegenden Arbeit werden beide Fälle betrachtet und die Massen über einen ausreichend großen Bereich variiert.

Zwar könnte aus Zerfällen die Kopplung g bestimmt werden, doch ist dies wenig sinnvoll, da in dem betrachteten Modell - wie bereits mehrfach beschrieben - zu viele Vereinfachungen enthalten sind, die eine realistische Beschreibung der Zerfälle nicht zulassen. Dieses Problem wird durch eine breite Variation der Kopplung g umgangen.

Aus Gitterrechnungen folgt für den chiralen Phasenübergang ein crossover-Übergang [24, 25, 26], und der chirale Partner der Pionen hat eine Masse von mehr als 1 GeV [14]. Für das in dieser Arbeit diskutierte Modell ergibt sich für den Grenzfall $g \rightarrow 0$, dass der S -Zustand zu einem reinen Quarkoniumzustand wird und das Modell mit dem Linearen Sigma-Modell aus Kapitel 1.4 identisch ist. Für $M_S \lesssim 0.948$ GeV ergibt sich ein crossover-Phasenübergang, während man für $M_S \gtrsim 0.948$ GeV einen Phasenübergang erster Ordnung erhält. Diese Beobachtung steht im Widerspruch zu den Gitterrechnungen.

Die Erweiterung des Linearen Sigma-Modells um einen Tetraquarkzustand führt an dieser Stelle zu einer Veränderung: Durch eine Erhöhung der Stärke der Kopplung g kann die Region des crossover-Phasenübergangs erweitert und die geforderte Ordnung des Phasenübergangs auch für Massen $M_S \gtrsim 0.948$ GeV erzwungen werden. Es ist nicht möglich, für alle Startmassen M_S und M_H einen crossover-Phasenübergang zu erhalten. Liegt eine Massenordnung der Art $M_S > M_H$ vor (Kapitel 3.2), geht der Phasenübergang für eine größere Kopplung g immer in Richtung eines “weicheren” Phasenüberganges erster Ordnung und verändert sich in vielen Fällen sogar zu einem crossover-Phasenübergang. Werden die Massen umgekehrt angeordnet, $M_S < M_H$ (Kapitel 3.3), ändert sich das Verhalten vollkommen. Die Grenze für einen crossover-Phasenübergang liegt noch immer bei einer Masse $M_S \approx 0.948$ GeV für ein verschwindendes g , für ein größer werdendes g jedoch erhält man einem “härteren” Phasenübergang erster Ordnung. Für Massen $M_S < 0.948$ GeV kann aus einem crossover-Phasenübergang durch Einschalten der Kopplung g ein Phasenübergang erster Ordnung erzeugt werden. Die kritische Temperatur T_c ist stark von der Mischung abhängig und nimmt in beiden Fällen im Bereich des crossover-Phasenübergangs mit größer werdender Mischung ab.

Die Bedingungen für einen crossover-Phasenübergang lauten wie folgt: Für $M_S > M_H$ und eine Masse $M_S \gtrsim 0.948$ GeV wird eine relativ große Differenz von M_S zu M_H benötigt sowie eine starke Kopplung g , die mit steigendem Abstand weniger stark ausfallen muss. Für $M_H > M_S$ gibt es einen crossover-Phasenübergang bei geringer Kopplung g für $M_S \lesssim 0.948$ GeV; ist die Kopplung g größer, muss M_S kleiner werden.

Zum besseren Verständnis sollen beide Fälle der Massenanordnung im Folgenden ausführlicher betrachtet werden. Die Particle Data Group gibt für die Lage der Resonanz $f_0(1370)$ ein Spektrum von 1.2 GeV bis 1.5 GeV an. Die Zerfallsbreite reicht von $\Gamma_{f_0(1370)} = 0.3 - 0.5$ GeV. Die Angabe für die

Masse der $f_0(600)$ -Resonanz reicht von 0.4 GeV bis 1.2 GeV, wobei neuere Studien eine Tendenz in Richtung der unteren Grenze belegen können [31]. Die Zerfallsbreite wird angegeben mit $\Gamma_{f_0(600)} = 0.5 - 1.0$ GeV.

Um einen vollständigen Überblick über das Verhalten des Modells am Phasenübergang zu erhalten, werden für die schwere Resonanz Werte von 1.2 GeV und 1.1 GeV gewählt und für die leichte Werte von 0.4 GeV bzw. 0.6 GeV. Die Größen $M_\pi = 0.139$ GeV und $\phi = 92.4$ MeV werden aus der Particle Data Group übernommen.

Die Resultate werden - sofern nicht anders beschrieben - über Variante A (Kapitel 2.2) bestimmt: In Kapitel 3.2 wird S die schwere Resonanz zugeordnet und H die leichte. In Kapitel 3.3 wird S die leichte und H die schwere Resonanz zugeordnet. In den beiden Unterkapiteln (Kapitel 3.2.1 und 3.3.1) wird jeweils die Ordnung des Phasenübergangs beschrieben. Im Anschluss daran wird (in Kapitel 3.2.2 und 3.3.2) für die jeweilige Massenanordnung das Phänomen des Wechsels in der Massenzuordnung genauer untersucht. Die Kapitel 3.2.3 und 3.3.3 betrachten zuletzt das Verhalten der Massen, der Kondensate und des Mischwinkels. Das Verhalten der einzelnen Größen wird in diesen Kapiteln für diverse Parametersätze ausführlich diskutiert. In Kapitel 3.4 schließlich wird Variante B (eingeführt in Kapitel 2.4) näher betrachtet. Der chirale Limes wird mit Variante A in Kapitel 3.5 untersucht. Abschließend folgt in Kapitel 3.6 eine Betrachtung der Zerfälle. Hier ist die Unterscheidung zwischen Variante A und Variante B nicht notwendig, da es sich um Vakuumszerfallsbreiten auf tree-level Niveau handelt.

3.2 $M_S > M_H$

3.2.1 Phasenübergang

Die Frage, ob es sich bei der $f_0(600)$ -Resonanz um einen Quarkoniumzustand handelt, kann nicht eindeutig beantwortet werden. Von den verschiedenen Möglichkeiten der Resonanzzuordnung wird in diesem Kapitel der Fall betrachtet, dass der $f_0(600)$ -Resonanz nicht der skalare Quarkoniumzustand zugeordnet wird, sondern der skalare Tetraquarkzustand. Das skalare Quarkonium wird der $f_0(1370)$ -Resonanz zugeordnet.

Das Vorgehen gestaltet sich wie folgt: Da das Modell drei unabhängige Freiheitsgrade besitzt, die nicht eindeutig bestimmt werden können, wird ein Freiheitsgrad fixiert und die anderen innerhalb eines geeigneten Rahmens ge-

wählt. Die Wahl der beiden anderen Parameter wird durch die Bedingung $|M_S^2 - M_H^2| \geq 4g\varphi_0$ (Gleichung 2.21) beschränkt. In Abbildung 3.1 wird diese Einschränkung dargestellt. Auf der Abszisse ist die Kopplung g , die das Tetraquark χ an die Quarkonia φ und π koppelt, aufgetragen. Zu erkennen ist, dass die Gleichung (2.21) wie bereits beschrieben verhindert, dass die Felder H und S für $T = 0$ in den Massen entarten. Mit größer werdendem Massenabstand ergibt sich die Möglichkeit einer starken Kopplung, was zu einer stärkeren Mischung der Felder ϕ und χ führt. Die Grenze zum verbotenen Bereich beschreibt den Fall maximaler Mischung mit $M_\chi = M_\phi$. Der verbotene Bereich beschreibt jene Region, in der die Wahl der Kopplung und der Massen keine physikalisch sinnvollen Parameter zulassen. Nun wird dieses Diagramm weiter bearbeitet und für die verschiedenen Fälle die Bereiche des Phasenübergangs erster Ordnung, zweiter Ordnung bzw. des crossover-Phasenübergangs eingezeichnet.

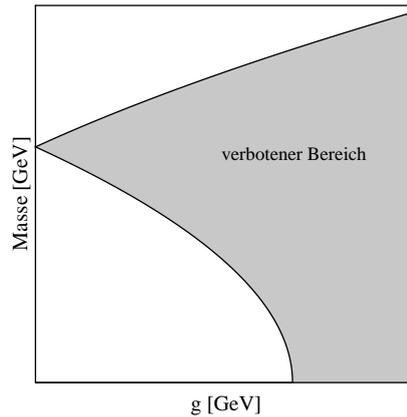


Abbildung 3.1: Skizze des verbotenen Bereichs. Eine der physikalischen Massen wird konstant gehalten, z.B. M_H , die andere physikalische Masse M_S und die Kopplung g werden variiert. Aus Gleichung (2.21) folgt für die Begrenzung $M_{S,\text{grenz.}} = \sqrt{\text{sign}(M_\phi^2 - M_\chi^2)4g\varphi_0 + M_{H,\text{const.}}^2}$.

Im ersten Teil wird die leichte Resonanz konstant gehalten (Abbildung 3.2). Legt man M_H auf einen Wert von $M_H = 0.4$ GeV (Abbildung 3.2(a)) oder $M_H = 0.6$ GeV (Abbildung 3.2(b)) fest, ist folgendes erkennbar: Ist die Kopplung $g = 0$ oder sehr klein, verläuft alles wie im Linearen Sigma-Modell;

für Massen $M_S \lesssim 0.948$ GeV ergibt sich ein crossover-Phasenübergang und für Massen $M_S \gtrsim 0.948$ GeV ein Phasenübergang erster Ordnung. Wird nun die Kopplung g erhöht, wächst der Bereich des crossover-Phasenübergangs an und auch für Massen $M_S \gtrsim 0.948$ GeV ist es möglich, einen crossover-Phasenübergang zu erhalten. Der Bereich des crossover-Phasenübergangs und des Phasenübergangs erster Ordnung wird durch eine Linie getrennt, auf der es zu einem Phasenübergang zweiter Ordnung kommt. Erhöht man die Kopplung weiter, kann bei Massen M_S von mehr als 1 GeV ein crossover-Phasenübergang eintreten; die Wahl der Kopplung g wird jedoch immer stärker eingeschränkt. Auf der einen Seite nähert sich die crossover-Region dem verbotenen Bereich, auf der anderen befindet sich die Trennlinie zum Phasenübergang erster Ordnung. Ab einem bestimmten g und M_S geht die Trennlinie in den Rand des verbotenen Bereichs über und die Möglichkeit eines crossover-Phasenübergangs ist nicht mehr gegeben. Für $M_H = 0.6$ GeV ergibt sich noch für eine Masse $M_S = 1.15$ GeV und $g = 2.602$ GeV ein Phasenübergang zweiter Ordnung. Für höhere Massen und eine stärkere Kopplung befindet man sich in der Phasenübergangsregion erster Ordnung. Im Falle $M_H = 0.4$ GeV lässt sich für $M_S = 1.35$ GeV und $g = 4.49$ GeV noch ein Phasenübergang zweiter Ordnung erhalten.

Eine weitere relevante Größe, die der Parameterwahl unterliegt, ist die kritische Temperatur T_c , bei welcher der Phasenübergang stattfindet. Allgemein gilt, dass mit steigender Kopplung g und konstant gehaltenem M_S und M_H die kritische Temperatur T_c abnimmt. Zur Orientierung soll nun die Trennlinie zwischen dem crossover-Phasenübergang und dem Phasenübergang erster Ordnung dienen (Abbildung 3.2). An dieser Linie findet ein Phasenübergang zweiter Ordnung statt. Für $g \rightarrow 0$ ergibt sich auf der Trennlinie das Lineare Sigma-Modell mit einer Masse $M_S \approx 0.948$ GeV und einer kritischen Temperatur von $T_c \approx 241$ MeV. Bei einer stärkeren Kopplung g nimmt T_c entlang der Trennlinie ab. Im Falle von $M_H = 0.6$ GeV geschieht dies sehr langsam und es ergibt sich letztlich ein Wert von $T_c = 214.0$ MeV bei einem maximalen $g = 2.602$ GeV und $M_S = 1.15$ GeV. Für $M_H = 0.4$ GeV fällt T_c schneller und resultiert in einem Wert von $T_c = 168.8$ MeV für $g = 4.49$ GeV und $M_S = 1.35$ GeV.

Der zweite Typ von Diagrammen beschreibt die Situation, dass M_S bei einer großen Masse fixiert wird (Abbildung 3.3). Die Masse M_S hat in einem Fall den Wert $M_S = 1.1$ GeV (Abbildung 3.3(a)) und im anderen den Wert $M_S = 1.2$ GeV (Abbildung 3.3(b)), während die Masse M_H variiert. Beide Werte für M_S liegen über 0.948 GeV. Somit ist für eine geringe Kopp-

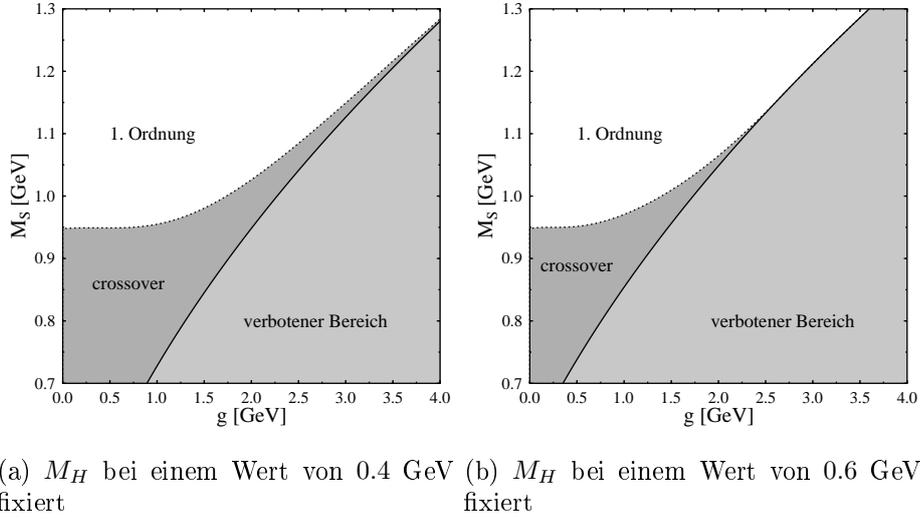


Abbildung 3.2: Variation von g , M_S und M_H für $M_S > M_H$.

lung g der Phasenübergang stets erster Ordnung. Erhöht man nun die Kopplung g , bildet sich für kleine Werte von M_H nach und nach ein Bereich, in dem ein crossover-Phasenübergang möglich wird. Dieser Bereich wächst mit steigendem g an, so dass selbst für Massen $M_H \approx 0.5$ GeV im Falle von $M_S = 1.2$ GeV und für Massen $M_H \approx 0.7$ GeV für $M_S = 1.1$ GeV crossover-Phasenübergänge erreicht werden können. Um für solch hohe Massen einen crossover-Phasenübergang zu erhalten, müssen die Parameter sehr genau angepasst werden: Beide Bereiche werden (wie in den vorangegangenen Beispielen) durch eine Linie getrennt, an der ein Phasenübergang zweiter Ordnung eintritt. Diese Trennlinie geht in dem Fall $M_S = 1.1$ GeV für $M_H = 0.7$ GeV und $g = 1.9457$ GeV in die Begrenzung des verbotenen Bereichs über. Für $M_S = 1.2$ GeV geschieht dies bei $M_H = 0.5$ GeV und $g = 3.214$ GeV.

In diesen Fällen ist bei größer werdendem g , bei konstanten M_S und M_H eine Zunahme der kritischen Temperatur T_c zu erkennen. Entlang der Linie des Phasenübergangs zweiter Ordnung (Abbildung 3.3) zeigt sich folgendes Verhalten: Für $g \rightarrow 0$ geht T_c für die entsprechenden Massen $M_S = 1.1$ GeV und $M_S = 1.2$ GeV in den Wert des Linearen Sigma-Modells über. Folgt man der Trennlinie, so steigen g und M_H an, während T_c fällt. Bei einer Masse $M_H \approx 0.1$ GeV hat T_c ein Minimum. Für $M_S = 1.1$ GeV liegt das Minimum bei $T_c \approx 154$ MeV mit einem $g \approx 1.1293$ GeV und $M_H \approx 0.05$ GeV.

Für die etwas höhere Masse $M_S = 1.2$ GeV liegt das Minimum bei $T_c \approx 144.8$ MeV mit $g \approx 1.997$ GeV und $M_H \approx 0.1$ GeV. Danach steigt T_c entlang der Trennlinie bis auf einen Wert von $T_c = 227.15$ MeV für $M_S = 1.1$ GeV und $T_c = 196.9$ MeV für $M_S = 1.2$ GeV.

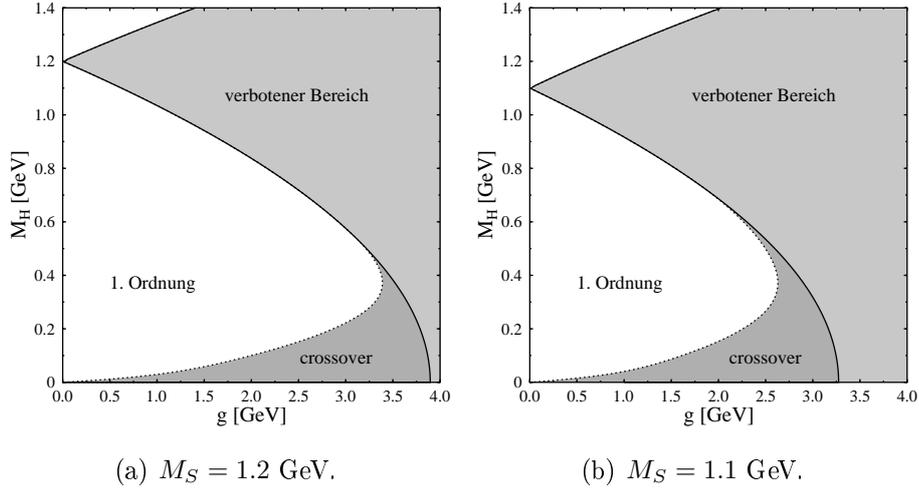


Abbildung 3.3: Variation von g , M_S und M_H für $M_S > M_H$.

Abschließend wird beschrieben, wie durch starke Kopplung des Tetraquarks an das Quarkonium die Ordnung des Phasenübergangs verändert werden kann. In Abbildung 3.4 stellt die schwere Resonanz den Zustand mit der größten Quarkoniumbeimischung dar, und die leichte Resonanz denjenigen mit der größten Tetraquarkbeimischung. Die Massen betragen $M_S = 1.2$ GeV und $M_H = 0.45$ GeV. Die Kopplung g startet rechts mit einem Wert von $g = 0$, was dem normalen Linearen Sigma-Modell entspricht. Für jede weitere Linie erhöht sich die Kopplung um 0.3 GeV. Zwischen einer Kopplung von $g = 2.4$ GeV und $g = 2.7$ GeV verändert sich das Verhalten; beim Phasenübergang handelt es sich nun nicht weiter um einen Phasenübergang erster Ordnung, sondern um einen crossover-Phasenübergang. Mit jeder Erhöhung der Kopplung hat sich die kritische Temperatur T_c verringert. Die Kopplung von $g = 2.7$ GeV liegt recht nahe am verbotenen Bereich, und die Massen $M_S = 1.2$ GeV und $M_H = 0.45$ GeV lassen nur noch eine leichte Erhöhung der Kopplung g zu.

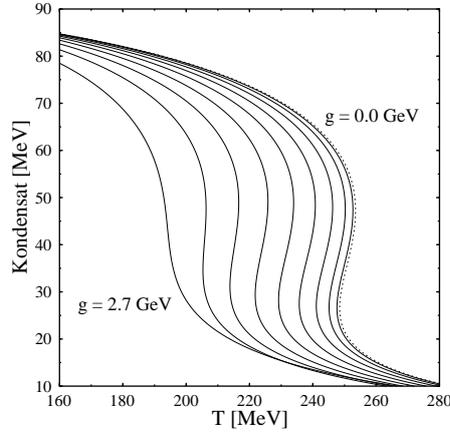


Abbildung 3.4: Abhängigkeit der kritischen Temperatur von der Kopplung g für konstantes M_S und M_H . Die Massen $M_S = 1.2$ GeV und $M_H = 0.45$ GeV werden konstant gehalten und g in 0.3 GeV-Schritten von rechts nach links erhöht.

3.2.2 Wechsel der Massenzuordnung

Eine weitere Eigenschaft, die sich bei Variation der Parameter verändert, ist der nicht stetige Verlauf der Massen M_S und M_H . Die Festlegung der Felder S und H kann zu Sprüngen in der Massenzuordnung führen: Per Definition ist das Feld S jenes mit dem größten Quarkoniumanteil, während das Feld H den Zustand mit dem größten Tetraquarkanteil darstellt. Der Winkel θ gibt das Mischverhältnis der Felder ϕ und χ in den Zuständen S und H wieder. Es ist zwischen zwei Arten von Sprüngen zu unterscheiden: Der erste Sprung findet vor der Massenentartung der chiralen Partner ϕ und π statt, der zweite bei höheren Temperaturen in der chiral restaurierten Phase.

Durch Variation der Vakuummassen und der Kopplungskonstanten g können drei verschiedene Szenarien moduliert werden. In Szenario I besteht keine Änderung der Massenzuordnungen. Die Masse des Feldes S liegt um einiges über der Masse des Feldes H , und die Kopplung g ist klein. In Szenario II liegen ähnliche Voraussetzungen zugrunde wie in Szenario I, wobei hier die Kopplung g groß ist und/oder der Abstand zwischen M_S und M_H klein. Der Übergang von Szenario I zu Szenario II wird durch einen Grenzfall separiert, indem der erste und der zweite Sprung zur gleichen Temperatur stattfinden. Die Mischung wird zwar maximal, gleichwohl findet kein Austausch der

Massenzuordnung statt. Eine letzte Variante stellt Szenario III dar, mit einem Sprung einzig in der restaurierten chiralen Phase. Bedingung für dieses Phänomen ist lediglich eine nichtverschwindende Kopplung g und eine Massenordnung der Art $M_S < M_H$.

Zum Verständnis der beschriebenen Szenarien ist eine Betrachtung der Temperaturabhängigkeit des Mischwinkels unerlässlich. Die Mischung θ steht für das Verhältnis von χ zu ϕ in S und ϕ zu χ in H . Es zeigt sich, dass für den Fall $M_S > M_H$ die Mischung und somit auch der Winkel θ mit zunehmender Temperatur ansteigen. Ob nun Szenario I (Abbildungen 3.5) oder Szenario II (Abbildungen 3.6) eintritt, ist abhängig von der Wahl der Parameter. Sind die Parameter passend für Szenario II gewählt, so steigt der Winkel bis auf $\frac{\pi}{4}$ an und springt dann auf $-\frac{\pi}{4}$; die Mischung nimmt nach dem Sprung ab und steigt wieder zur Temperatur des zweiten Sprunges. Bei diesem zweiten Sprung, der in Szenario II (Abbildungen 3.7) und Szenario III (Abbildungen 3.6) auftritt, handelt es sich um Level-repulsing. Vereinfacht bedeutet dies, dass zwei gekoppelte Zustände mit gleichen Quantenzahlen nicht denselben Wert annehmen. Allgemein gilt: Geht $\theta \rightarrow 0$, geht auch die Mischung gegen Null. Die Felder ϕ und χ entmischen, S wird zu einem fast reinen ϕ , also einem Quarkoniumzustand, und H wird zu einem fast reinen χ , also einem Tetraquarkzustand.

Ähnlich wie in den Parameterraumgraphen des Phasenüberganges werden die zuvor beschriebenen Szenarien verschiedenen Parametersätzen zugeordnet. In einem ersten Schritt wird der Parameterraum durch die Bedingung 2.21 begrenzt und dem Feld S wird die schwere Resonanz $f_0(1370)$ zugeordnet (Abbildung 3.9). Da demzufolge S die schwere Resonanz darstellt und H folglich nicht schwerer sein kann, gibt sich für diesen Fall das Szenario I oder II. Die Masse für die schwere Resonanz wird in der vorliegenden Untersuchung bei einem Wert von $M_S = 1.1$ GeV bzw. $M_S = 1.2$ GeV festgehalten und die der leichten variiert. In beiden Fällen tritt das Szenario I nur für kleine Massen $M_H < 0.44$ GeV und bei geringer Kopplung g ein. Diese Grenze erhöht sich nur leicht mit größerem M_S . Die Begrenzung in Richtung der Kopplung g liegt für $M_S = 1.1$ GeV bei etwas unter $g = 2$ GeV und steigt bei größerem $M_S = 1.2$ GeV auf etwas über $g = 2$ GeV. Für jede andere Parameterwahl mit $M_S > M_H$ ergibt sich Szenario II.

Im nachfolgenden Abschnitt wird M_H auf einem niedrigen Wert gehalten und M_S variiert (Abbildung 3.10). In der Regel ergibt sich auf diese Weise immer Szenario II. Lediglich bei Annäherung an den Rand des Parameterraums kann Szenario I eintreten. Damit eine Masse $M_H = 0.4$ GeV zu Szenario I

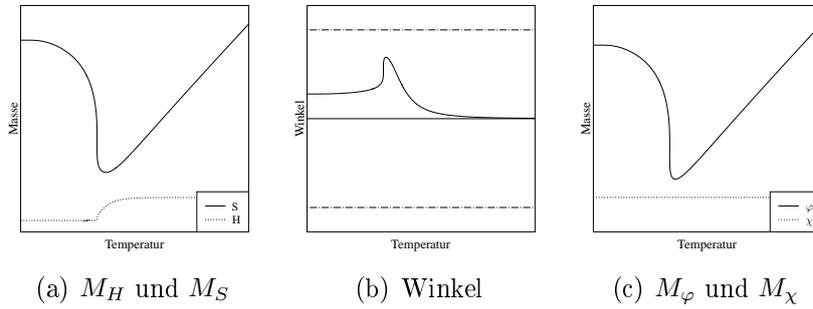


Abbildung 3.5: Szenario I besitzt keine Diskontinuität in S und H .

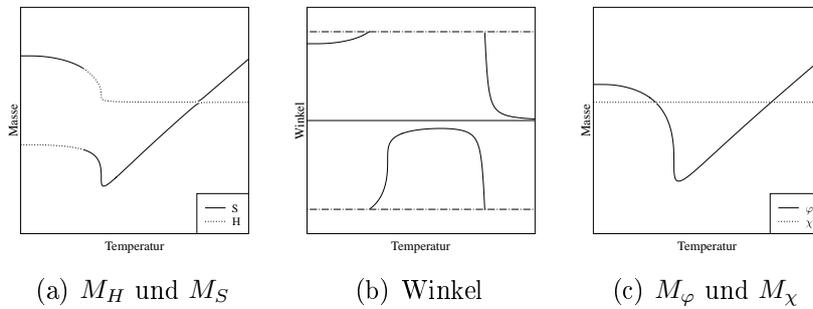


Abbildung 3.6: In Szenario II gibt es zwei Diskontinuitäten in S und H .

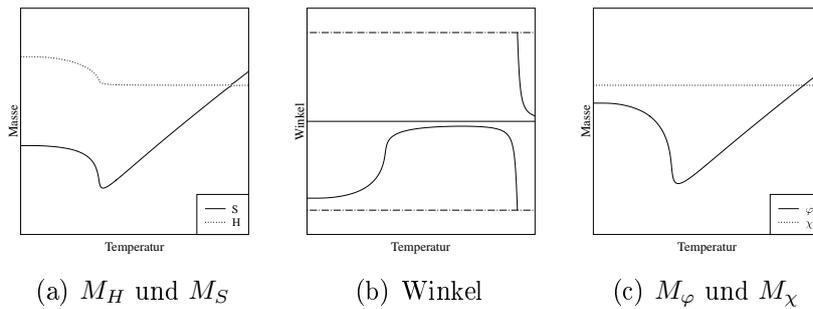


Abbildung 3.7: Szenario III hat eine Diskontinuität in S und H .

Abbildung 3.8: Diese Diagramme zeigen, wie durch Drehung die Sprünge in den Massen entstehen. Zur Übersicht wurden die Einheiten an den Achsen sowie das Verhalten der Pionmasse ausgelassen.

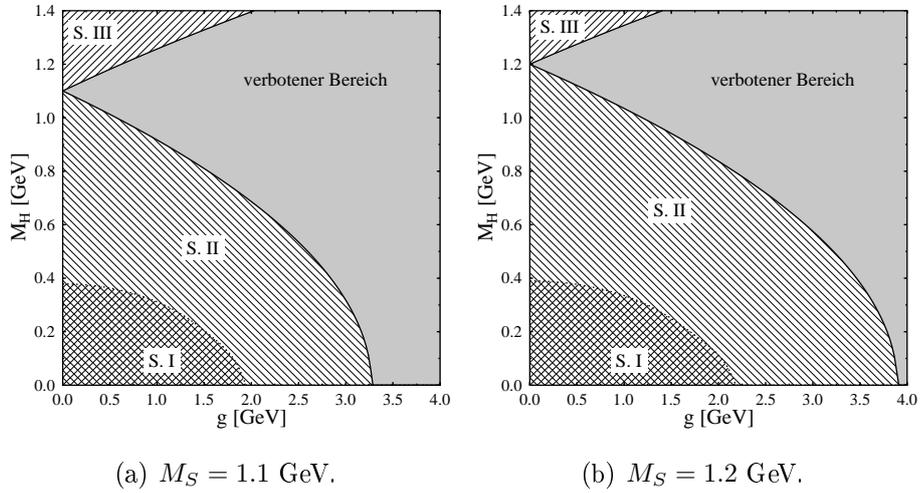


Abbildung 3.9: Variation von g und M_H bei konstantem M_S .

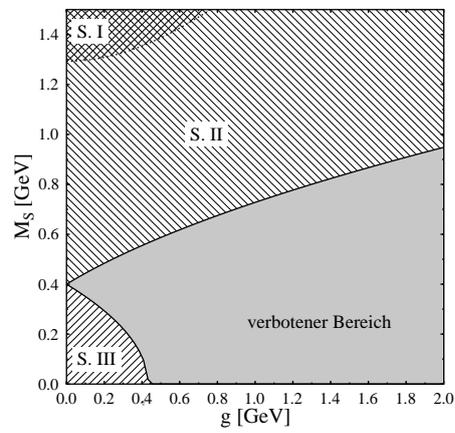


Abbildung 3.10: Variation von g und M_S bei konstantem $M_H = 0.4$ GeV.

führt, bedarf es einer Masse $M_S > 1.3$ GeV und einer kleinen Kopplung g ; bei einer Masse $M_H = 0.6$ GeV liegt die Grenze für die Masse M_H bei über 1.5 GeV.

Bei alternativer Vorgehensweise (Variante B) und dem chiralen Limes kann es nicht zu den Szenarien I und III kommen. Die Gründe hierfür sind jedoch verschieden: Im alternativen Verfahren ist der Winkel θ über Vakuumsgrößen festgelegt und stellt keinen eigenen Freiheitsgrad dar. Die Mischung besitzt nur eine indirekte Temperaturabhängigkeit über das Kondensat. Ferner besitzt der Mischwinkel keine Temperaturabhängigkeit, die zum Level-repulsing führt. Im chiralen Limes ist nach dem chiralen Phasenübergang $\varphi = 0$; unabhängig davon, ob Variante A oder B angewendet wird. Das Argument der Funktion \arctan ist proportional zum Kondensat φ . Verschwindet das Kondensat, so verschwindet der Winkel θ . Demnach kann es im chiralen Limes nur Szenario II geben.

3.2.3 Temperaturabhängigkeit

In den beiden vorangegangenen Kapiteln 3.2.1 und 3.2.2 wurden die Phänomene, welche im Parameterraum auftreten, näher untersucht. Im folgenden Kapitel wird das Augenmerk auf die Temperaturabhängigkeit der verschiedenen Vakuumsgrößen und auf die Massenordnung $M_S > M_H$ gerichtet. Somit bildet H die $f_0(600)$ -Resonanz und S die $f_0(1370)$ -Resonanz. Exemplarisch werden zwei unterschiedliche Fälle betrachtet: im ersten gibt es einen crossover-Phasenübergang, und im zweiten einen Phasenübergang erster Ordnung.

Zunächst zum crossover-Phasenübergang (Abbildung 3.11): Ausgehend von den Betrachtungen in Kapitel 3.2.1 und in Verbindung mit den Erkenntnissen der Particle Data Group fällt unsere Wahl der Vakuumsgrößen und der Kopplung g auf folgende Werte: Für die Resonanz $f_0(1370)$ eine Masse $M_S = 1.2$ GeV, für die Resonanz $f_0(600)$ eine Masse von $M_H = 0.4$ GeV und - um einen crossover-Phasenübergang zu erhalten - eine Kopplung von $g = 3.4$ GeV. Eine Übersicht über alle Vakuumsgrößen und verwendeten Parameter findet sich in Tabelle 3.1. Die Masse des entdrehen Quarkoniumzustand beträgt $M_\phi = 0.96$ GeV.

Das ϕ -Kondensat Abbildung 3.11(a) startet bei einem Wert von $\phi = 92.4$ MeV, es fällt erst langsam, dann immer schneller. Bei der kritischen Temperatur ändert das Kondensat sein Verhalten und geht gegen null. So ergibt sich bei der kritischen Temperatur $T_c = 180.1$ MeV ein crossover-

Vakuumsgrößen		
$M_S = 1.2 \text{ GeV}$	$M_H = 0.4 \text{ GeV}$	$M_\pi = 0.139 \text{ GeV}$
$\phi = 92.4 \text{ MeV}$	$\alpha = 42.8 \text{ MeV}$	$\theta = 0.69$
Parameter		
$\lambda = 52.85$	$F = 51.6 \text{ MeV}$	$\epsilon = 1.785 \text{ MeV}$
$M_\chi = 0.82 \text{ GeV}$	$g = 3.4 \text{ GeV}$	

Tabelle 3.1: Vakuumsgrößen und Parameter für den Fall $M_S = 1.2 \text{ GeV}$, $M_H = 0.4 \text{ GeV}$ und $g = 3.4 \text{ GeV}$. Aus den hervorgehobenen Größen werden die restlichen Vakuumsgrößen und Parameter abgeleitet.

Phasenübergang. Das α -Kondensat verhält sich wie folgt: Bei niedrigen Temperaturen $T < T_c$ läuft es in guter Näherung wie $\alpha(T) \sim \phi(T)^2$; für Temperaturen $T > T_c$ steigt das α -Kondensat an. Dieser Anstieg kann als Ausgleich der Tadpolebeiträge der verschiedenen Teilchen erklärt werden. Das α -Kondensat verhält sich für große Temperaturen wie:

$$\lim_{\substack{\phi(T) \rightarrow 0 \\ T \gg 0}} \alpha(T) = \lim_{\substack{\phi(T) \rightarrow 0 \\ T \gg 0}} \frac{g}{M_\chi^2} \left(\sin^2 \theta \int G_H + \cos^2 \theta \int G_S + 3 \int G_\pi \right) \propto T^2. \quad (3.2)$$

Für große Temperaturen in der restaurierten Phase steigt das α -Kondensat wie $\alpha(T) \sim T^2$. Offen bleibt, inwiefern es sich bei diesem Kondensat um einen Ordnungsparameter handelt. Im Rahmen dieser Arbeit wird darauf nicht weiter eingegangen.

Der Verlauf der Massen der S - und H -Felder (Abbildung 3.11(b)) ist in Verbindung mit der Mischung θ (Abbildung 3.11(c)) zu verstehen und gestaltet sich folgendermaßen: Für kleine Temperaturen bleiben die Massen nahezu konstant und fallen nur leicht ab, gleichzeitig steigt der Mischwinkel θ und somit auch der Anteil des Quarkonium in H und der des Tetraquark in S . Bei der Temperatur $T_{S,1} \simeq 160 \text{ MeV}$ sind Quarkonium und Tetraquark zu 50 Prozent gemischt, der Winkel θ erreicht einen Wert von $\frac{\pi}{4}$. Ab dieser Stelle übernimmt das Feld H die Aufgabe des Feldes S , und das Feld S die des Feldes H . Im weiteren Verlauf fallen die Massen M_S und M_H weiter und die Felder χ und φ beginnen sich zu entmischen. Erst nach der kritischen Temperatur T_c ändern diese ihr Verhalten: sie sind nach diesem Punkt nahezu

komplett entmischt. S besteht nun ausschließlich aus Quarkonium φ , und H ausschließlich aus Tetraquark χ . M_H verharrt nun konstant bei einer Masse von 0.82 GeV. M_S entartet mit den Pionen und steigt mit der Temperatur linear weiter an. Bei einer Temperatur von $T_{S,2} \approx 490$ MeV kommt es zum Level-repulsion zwischen S und H . Innerhalb weniger MeV schnell die Mischung hoch, die Felder S und H tauschen ihre Rollen und entmischen sich erneut. Danach bleibt M_H konstant und M_S steigt zusammen mit M_π an.

Die Pionenmasse, dargestellt in Abbildung 3.11(b), steigt für kleine Temperaturen langsam, fällt leicht kurz vor T_c und entartet für Temperaturen größer T_c mit M_S , welches nahezu ausschließlich aus Quarkonium φ besteht. Das Verhalten der Pionenmasse verläuft unbeeinflusst von dem des Mischwinkels. Die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie findet somit wie angenommen zwischen den chiralen Partnern φ und π statt.

Für diesen ersten Fall liegen die Zerfallsbreiten weit außerhalb der angegebenen Bereiche. Für den Zerfall $S \rightarrow \pi\pi$ ergibt sich eine Breite von $\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi} = 3.403$ GeV und für den Zerfall $H \rightarrow \pi\pi$ eine Breite von $\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi} = 0.050$ GeV.

Hier ist der Einfluss des Tetraquarks gut zu erkennen. Denn bei Abschalten der Kopplung g ändert sich die Ordnung des Phasenübergangs und es ergibt sich der Fall des ersten Beispiels des Linearen Sigma-Modells aus Kapitel 1.4.

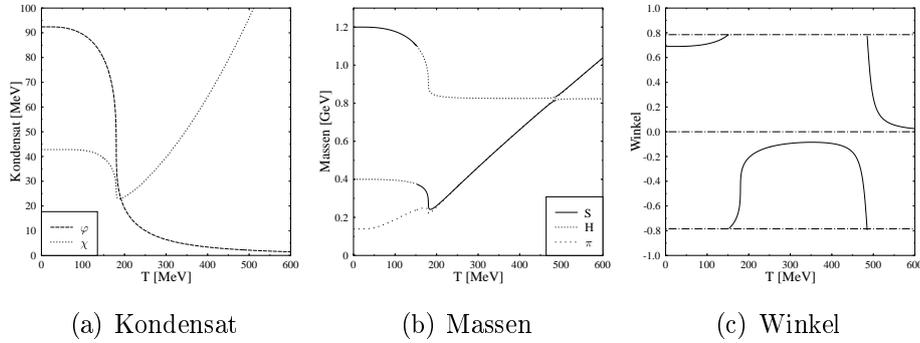


Abbildung 3.11: $M_S = 1.2$ GeV, $M_H = 0.4$ GeV und $g = 3.4$ GeV.

Der zweite Fall beschreibt einen Phasenübergang erster Ordnung (Abbildungen 3.12 und 3.13). Bei S handelt es sich um die schwere $f_0(1370)$ -Resonanz mit einer Startmasse von $M_S = 1.3$ GeV und bei H um die leichte $f_0(600)$ -Resonanz mit einer Startmasse von $M_S = 0.6$ GeV. Die Kopplung

g wird niedrig gehalten bei einem Wert von $g = 1.5$ GeV. Sämtliche Vakuumsgrößen und Parameter sind in Tabelle 3.2 aufgeführt. Für das entdrehete Quarkonium ergibt sich eine Masse $M_\phi = 1.277$ GeV.

Vakuumsgrößen		
$M_S = 1.3$ GeV	$M_H = 0.6$ GeV	$M_\pi = 0.139$ GeV
$\phi = 92.4$ MeV	$\alpha = 30.5$ MeV	$\theta = 0.21$
Parameter		
$\lambda = 94.3$	$F = 85.8$ MeV	$\epsilon = 1.785$ MeV
$M_\chi = 0.648$ GeV	$g = 1.5$ GeV	

Tabelle 3.2: Vakuumsgrößen und Parameter für den Fall $M_S = 1.3$ GeV, $M_H = 0.6$ GeV und $g = 1.5$ GeV. Aus den hervorgehobenen Größen werden die restlichen Vakuumsgrößen und Parameter abgeleitet.

Das Verhalten von φ und χ wird in Abbildung 3.12(a) dargestellt. Der Phasenübergang ist von erster Ordnung und findet bei einer kritischen Temperatur $T_c = 253.1$ MeV statt. Abbildung 3.12 zeigt den gesamten Verlauf und 3.13 zeigt das physikalische Verhalten am Phasenübergang. Somit wird in Abbildung 3.13(a) der tatsächliche Verlauf der Kondensate beschrieben. Das φ -Kondensat fällt bis T_c , springt dann um einige MeV zu einem niedrigeren Wert und nähert sich schließlich langsam Null. Das α -Kondensat fällt bis zu diesem Wert nur leicht, springt dann zu einem etwas tieferen Wert, und steigt anschließend wie im zuvor beschriebenen ersten Fall nach der chiralen Restauration mit $\alpha(T) \sim T^2$ an.

Für die Massen (Abbildung 3.13(b)) und den Mischwinkel (Abbildung 3.13(c)) läuft für kleine Temperaturen alles wie gehabt. Die Massen M_S und M_H fallen langsam und die Mischung steigt mit der Temperatur. Dabei erreicht die Mischung jedoch nicht $\frac{\pi}{4}$. Der Phasenübergang tritt vorher ein und erzeugt einen vorzeitigen Sprung in der Massenzuordnung. Die erste Sprungtemperatur $T_{S,1}$ entspricht damit der Temperatur des Phasenübergangs $T_{S,1} = T_c = 253.1$ MeV. Nach dem Phasenübergang reduziert sich die Mischung weiter und es kommt zur Massenentartung der Pionen und dem Feld S , das zum größten Teil aus dem chiralen Partner der Pionen besteht und mit der Temperatur linear steigt. Das Feld H , das nun fast ausschließlich Tetraquark enthält, verhält sich wie eine Konstante $M_H = 0.648$ GeV.

Steigt die Temperatur, kommt es zum Level-repulsion bei einer Temperatur von $T_{S,2} \simeq 350$ MeV.

Die Zerfallsbreiten für diesen Fall liegen weit außerhalb der erwarteten Bereiche $\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi} = 7.137$ GeV und $\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi} = 0.0082$ GeV

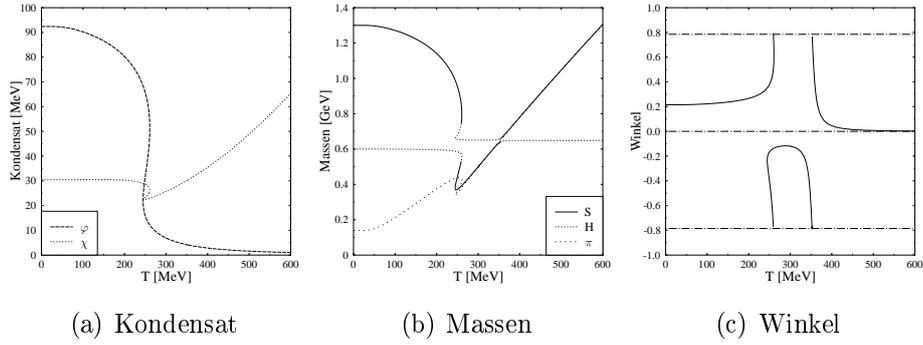


Abbildung 3.12: $M_S = 1.3$ GeV, $M_H = 0.6$ GeV und $g = 1.5$ GeV.

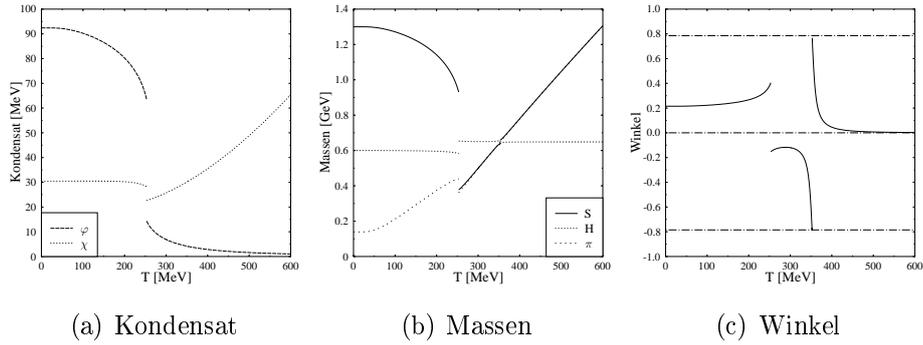


Abbildung 3.13: $M_S = 1.3$ GeV, $M_H = 0.6$ GeV und $g = 1.5$ GeV; $T_c = 253.1$ MeV.

3.3 $M_H > M_S$

3.3.1 Phasenübergang

Im Folgenden stellt H die $f_0(1370)$ -Resonanz dar, wodurch diese den größten Tetraquarkanteil besitzt. Gleichzeitig wird die Resonanz $f_0(400)$ S zugeordnet, sie trägt den größten Quarkoniumanteil. Erneut sind zwei Arten von Diagrammen abgebildet. In Abbildung 3.14 wird die Masse M_S konstant gehalten, $M_S = \text{const.}$, und in Abbildung 3.15 ist die Masse $M_H = \text{const.}$.

Zunächst wird die leichte Resonanz bei einem Wert von $M_S = 0.4$ GeV (Abbildung 3.14(b)) und $M_S = 0.6$ GeV (Abbildung 3.14(a)) fixiert. Für fast alle Werte der Masse M_H und Kopplung g findet ein crossover-Phasenübergang statt. Nur für sehr große Massen M_H entsteht ein Bereich, in dem ein Phasenübergang erster Ordnung möglich ist. Dieser wird durch eine Linie begrenzt, auf der es zu einem Phasenübergang zweiter Ordnung kommt. Wenn $M_S = 0.6$ GeV, kann ab einem $M_H = 1.2$ GeV und $g = 2.914$ GeV ein Phasenübergang erster oder zweiter Ordnung eintreten. Wenn $M_S = 0.4$ GeV, ist dies ab einem $M_H = 1.45$ GeV und $g = 5.251$ GeV möglich.

Bezüglich der kritischen Temperatur T_c ergibt sich für $g \rightarrow 0$ bei $M_S = 0.4$ GeV ein Wert von $T_c = 241.5$ MeV und bei $M_S = 0.6$ GeV ein Wert von $T_c = 218.2$ MeV. Durch Aufdrehen der Kopplung g sinkt T_c . In der Nähe der Trennlinie zwischen dem Phasenübergang erster Ordnung und dem crossover-Phasenübergang (Abbildung 3.14) bestehen die niedrigsten Temperaturen für letztgenannten. Für $M_S = 0.4$ GeV, $M_H = 1.45$ GeV und $g = 5.251$ GeV liegt diese bei $T_c = 162.8$ MeV und fällt stetig für größere M_H und g . Für $M_S = 0.6$ GeV, $M_H = 1.2$ GeV und $g = 2.914$ GeV ist die kritische Temperatur $T_c = 210.8$ MeV und sinkt für größere M_H und g nur langsam.

Nun wird die schwere Resonanz auf einen festen Wert von $M_H = 1.2$ GeV (Abbildung 3.15(b)) bzw. $M_H = 1.1$ GeV (Abbildung 3.15(a)) gesetzt. Es zeigt sich folgendes: Für kleine g ist alles wie gehabt. Für $M_S \lesssim 0.948$ GeV ergibt sich ein crossover-Phasenübergang und für $M_S \gtrsim 0.948$ GeV ein Phasenübergang erster Ordnung. Wird die Kopplung g erhöht, so verringert sich der Bereich eines crossover-Phasenübergangs kontinuierlich, bis der Übergang zwischen dem crossover-Phasenübergang und dem Phasenübergang erster Ordnung in die Begrenzung des verbotenen Bereichs übergeht. Für $M_H = 1.1$ GeV geschieht dies schon bei einem $g = 1.75$ GeV und einer entsprechenden Masse $M_S = 0.75$ GeV, im Falle von $M_H = 1.2$ GeV erst bei einem $g = 3.078$ GeV und einer Masse $M_S = 0.55$ GeV.

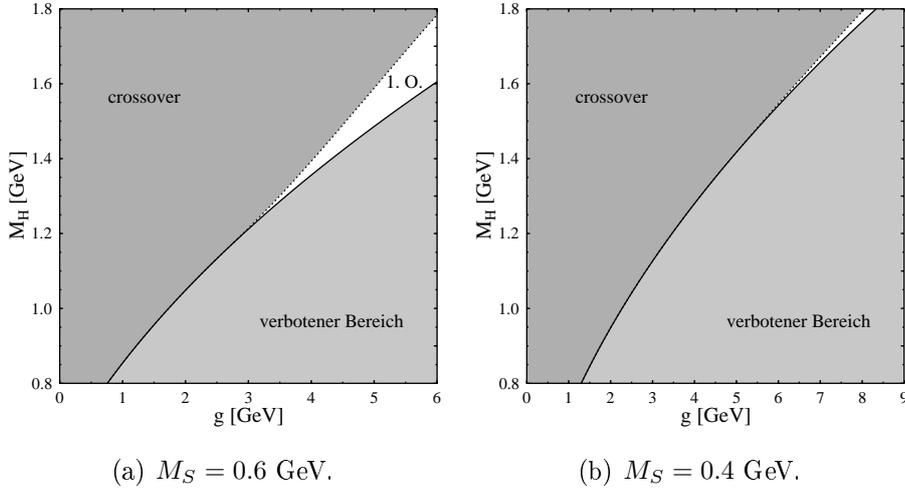


Abbildung 3.14: Variation von g , M_S und M_H für $M_S < M_H$.

Entlang der Linie des Phasenübergangs zweiter Ordnung (Abbildung 3.15) zeigt die kritische Temperatur T_c das folgende Verhalten: Die Trennlinie beginnt in beiden Fällen bei einem $g = 0$ und einem Wert für $M_S \approx 0.948$ GeV mit einem $T_c = 241.5$ MeV. Danach anschließend sinkt sie für $M_H = 1.1$ GeV auf einen Wert von $T_c = 230.8$ MeV bis zu dem Punkt, an dem die Trennlinie in die Begrenzung durch den verbotenen Bereich übergeht. Für $M_H = 1.2$ GeV fällt T_c auf einen Wert von $T_c = 204.2$ MeV.

Die kritische Temperatur T_c muss mit steigender Kopplung nicht in jedem Fall sinken. Im crossover-Bereich fällt die kritische Temperatur für konstantes M_H und M_S , wenn g erhöht wird. Im Bereich des Phasenübergangs erster Ordnung, bei Konstanthaltung von M_H und M_S und Erhöhung von g , steigt die kritische Temperatur.

Der letzte Teil dieses Unterkapitels geht auf den Fall ein, in dem durch Erhöhen der Kopplung des Tetraquarks an das Quarkonium sich die Ordnung des Phasenübergangs von einem crossover-Phasenübergang zu einem Phasenübergang erster Ordnung verändert. In Abbildung 3.16 wird die leichte Resonanz durch das Feld S beschrieben und die schwere durch das Feld H . Für die leichte Resonanz wird eine Masse $M_S = 0.75$ GeV gewählt, für die schwere Resonanz eine Masse $M_H = 1.3$ GeV. Bis zum Wechsel der Ordnung des Phasenübergangs zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie bei umgekehr-

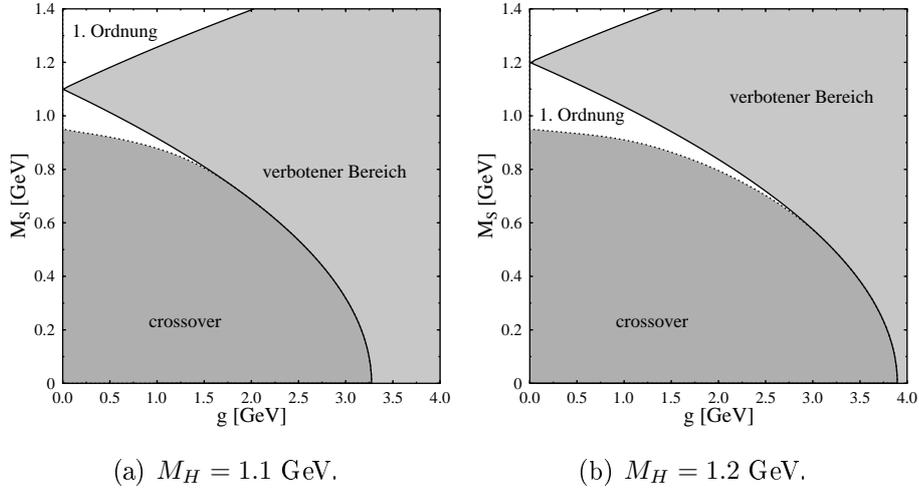


Abbildung 3.15: Variation von g , M_S und M_H für $M_S < M_H$.

ter Massenzuordnung (Kapitel 3.3.1, Abbildung 3.4). Für den Fall $g \rightarrow 0$ ergibt sich ein crossover-Phasenübergang, der sich mit steigender Kopplung langsam in einen Phasenübergang erster Ordnung umwandelt. Die Änderung der Ordnung geschieht zwischen $g = 3.0$ GeV und $g = 3.3$ GeV. Für eine steigende Kopplung im Bereich des crossover-Phasenübergangs nimmt die kritische Temperatur ab, im Bereich des Phasenübergangs erster Ordnung jedoch steigt sie wieder leicht an.

3.3.2 Wechsel der Massenzuordnung

Stellt S die Resonanz $f_0(600)$ dar und H die Resonanz $f_0(1370)$, so ergibt sich stets Szenario III, denn als alleinige Bedingung für dieses Szenario gilt $M_S > M_H$, was durch die Zuordnung der Resonanzen gegeben. Es kommt somit nur für hohe Temperaturen in der chiral restaurierten Phase zum Level-repulsing.

3.3.3 Temperaturabhängigkeit

Im Folgenden wird die Zuordnung der $f_0(600)$ -Resonanz zu S und die der $f_0(1370)$ -Resonanz zu H zugrunde gelegt. Betrachtungen in Kapitel 3.3.1 ha-

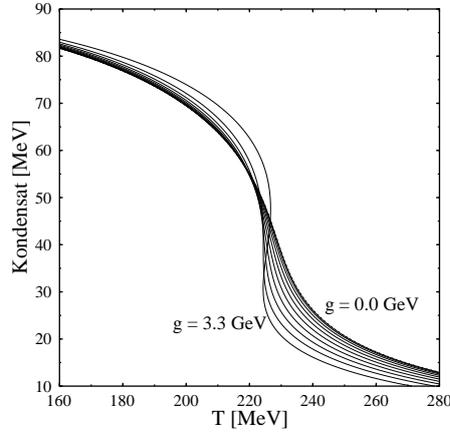


Abbildung 3.16: Abhängigkeit der kritischen Temperatur von der Kopplung g für konstante $M_S = 0.75$ GeV und $M_H = 1.3$ GeV. Die Kopplung g wird in 0.3 GeV-Schritten von rechts nach links erhöht.

ben gezeigt, dass für die hier relevanten Massen fast ausschließlich crossover-Phasenübergänge existieren.

Das nachfolgende erste Beispiel greift zurück auf die Massen und die Kopplung aus dem ersten Beispiel im Kapitel 3.2.3. Hier wird dem Feld S die Masse $M_S = 0.4$ GeV zugeordnet, dem Feld H die Masse $M_H = 1.2$ GeV. Die Kopplung beträgt $g = 3.4$ GeV (Abbildung 3.17). Der Parametersatz findet sich in Tabelle 3.3.

Es resultiert ein crossover-Phasenübergang bei einer Temperatur von $T_c = 174.2$ MeV (Abbildung 3.17(a)). Wird das Feld S der Resonanz $f_0(1370)$ mit einer Masse von $M_S = 1.2$ GeV zugeordnet, und das Feld H der Resonanz $f_0(600)$ mit einer Masse von $M_H = 0.4$ GeV, so liegt die kritische Temperatur T_c nur wenig oberhalb der erstgenannten (Abbildung 3.11). Das Quarkonium hat eine Masse von $M_\phi = 0.82$ GeV. Auch in diesem Fall folgt das α -Kondensat dem φ -Kondensat für Temperaturen kleiner T_c , für Temperaturen größer T_c steigt es mit T^2 .

Die Mischung (Abbildung 3.17(c)) sowie die Massen (Abbildung 3.17(b)) zeigen den folgenden Verlauf: Mit steigender Temperatur nehmen die anfangs recht große Mischung sowie die Massen M_S und M_H ab. Im Bereich des Phasenübergangs nimmt die Mischung massiv ab und geht im Anschluss gegen Null. Die Masse M_H bleibt konstant auf $M_S = 0.96$ GeV. Die Masse des Fel-

Vakuumsgrößen		
$M_S = 0.4 \text{ GeV}$	$M_H = 1.2 \text{ GeV}$	$M_\pi = 0.139 \text{ GeV}$
$\phi = 92.4 \text{ MeV}$	$\alpha = 31.5 \text{ MeV}$	$\theta = -0.69$
Parameter		
$\lambda = 38.59$	$F = 49.9 \text{ MeV}$	$\epsilon = 1.785 \text{ MeV}$
$M_\chi = 0.96 \text{ GeV}$	$g = 3.4 \text{ GeV}$	

Tabelle 3.3: Vakuumsgrößen und Parameter für den Fall $M_S = 0.4 \text{ GeV}$, $M_H = 1.2 \text{ GeV}$ und $g = 3.4 \text{ GeV}$. Aus den hervorgehobenen Größen werden die restlichen Vakuumsgrößen und Parameter abgeleitet.

des S entartet nach dem Phasenübergang mit der des Pions und steigt linear mit der Temperatur. Bei einer Temperatur von $T_{S,2} \approx 600 \text{ MeV}$ kommt es zum Level-repulsion zwischen S - und H -Zustand. Das Verhalten der Pionen zeigt keinerlei Besonderheiten.

Ein deutlicher Unterschied zur umgekehrten Massenzuordnung findet sich hinsichtlich der Zerfallsbreiten. Die Zerfallsbreite von $S \rightarrow \pi\pi$ beträgt lediglich $\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi} = 0.0740 \text{ GeV}$, die des Feldes $H \rightarrow \pi\pi$ beträgt $\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi} = 2.216 \text{ GeV}$. Demnach kehren sich die Größenordnungen durch die Zuordnungen um. Auch hier liegen die Zerfallsbreiten weit außerhalb der relevanten Bereiche.

Durch die Kopplung an das Tetraquark werden die kritische Temperatur und die Stärke der Krümmung des Kondensats beeinflusst, nicht jedoch die Ordnung des Phasenübergangs.

In einem abschließenden Beispiel werden die Massen durch die direkten Zerfälle bestimmt. Die Particle Data Group gibt für den Zerfall $S \rightarrow \pi\pi$ eine mögliche Breite von $\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi} = 0.5 - 1.0 \text{ GeV}$ an und für den Zerfall $H \rightarrow \pi\pi$ eine mögliche Breite von $\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi} = 0.3 - 0.5 \text{ GeV}$. Durch diese weitere Einschränkung der Massen ergibt sich die Massenzuordnung $M_S = 0.585 \text{ GeV}$, $M_H = 1.2 \text{ GeV}$ und $g = 1.68 \text{ GeV}$ (Abbildung 3.18). Aus diesen Startwerten geht der Parametersatz in Tabelle 3.4 hervor.

Die Zerfallsbreiten liegen in dem von der Particle Data Group geforderten Bereich von $\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi} = 0.5 \text{ GeV}$ und $\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi} = 0.5 \text{ GeV}$.

Es handelt sich um einen crossover-Phasenübergang (Abbildung 3.18(a)) bei einer Temperatur $T_c = 212.2 \text{ MeV}$. Der reine Quarkoniumzustand hat

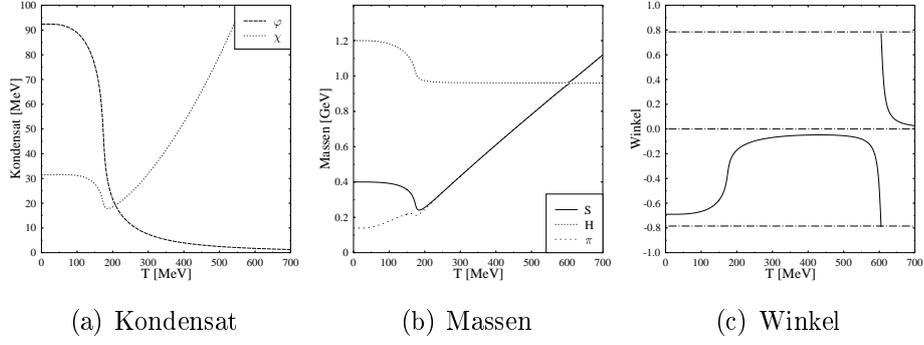


Abbildung 3.17: $M_S = 0.4$ GeV, $M_H = 1.2$ GeV und $g = 3.4$ GeV.

Vakuumsgrößen

$M_S = 0.585$ GeV	$M_H = 1.2$ GeV	$M_\pi = 0.139$ GeV
$\phi = 92.4$ MeV	$\alpha = 10.7$ MeV	$\theta = -0.30$

Parameter

$\lambda = 24.5$	$F = 79.3$ MeV	$\epsilon = 1.785$ MeV
$M_\chi = 1.16$ GeV	$g = 1.68$ GeV	

Tabelle 3.4: Vakuumsgrößen und Parameter für den Fall $M_S = 0.585$ GeV, $M_H = 1.2$ GeV und $g = 1.68$ GeV. Aus den hervorgehobenen Größen werden die restlichen Vakuumsgrößen und Parameter abgeleitet.

eine Masse $M_\phi = 0.66$ GeV. Der Mischwinkel θ (Abbildung 3.18(c)) ist anfangs klein, nimmt mit steigender Temperatur und verschwindet schließlich nach dem Phasenübergang. Die Mischung zwischen Quarkonium und Tetraquark ist so gering, dass kaum eine gegenseitige Beeinflussung zwischen beiden stattfindet. Erst beim Level-repulsion bei einer Temperatur von $T_{S,2} \approx 733$ MeV wird die Kopplung zwischen beiden wahrgenommen. M_S und M_H (Abbildung 3.18(b)) zeigen lediglich im Bereich des Level-repulsion Auffälligkeiten.

Das aus dem verwendeten Parametersatz hervorgegangene Verhalten stimmt hinsichtlich der Ordnung des Phasenübergangs und der Zerfallsbreiten mit gewünschten Resultaten überein. Dennoch ergeben sich an anderen Stellen Probleme: So ist zum einen ist die kritische Temperatur T_c zu hoch. Darüber hinaus steht die Massenzuordnung im Widerspruch zu der in Kapitel 1.2.2 motivierten Massenzuordnung, laut derer es sich nicht bei der $f_0(600)$ -Resonanz um den Zustand mit der größten Quarkoniumbeimischung handeln sollte, sondern diejenige Resonanz mit einer Masse von über 1 GeV die größte Quarkoniumbeimischung besitzen sollte. Weitere Gründe die geben eine Verwendung der Zerfallsbreiten zur Bestimmung der Parameter sprechen finden sich in Kapitel 3.6.

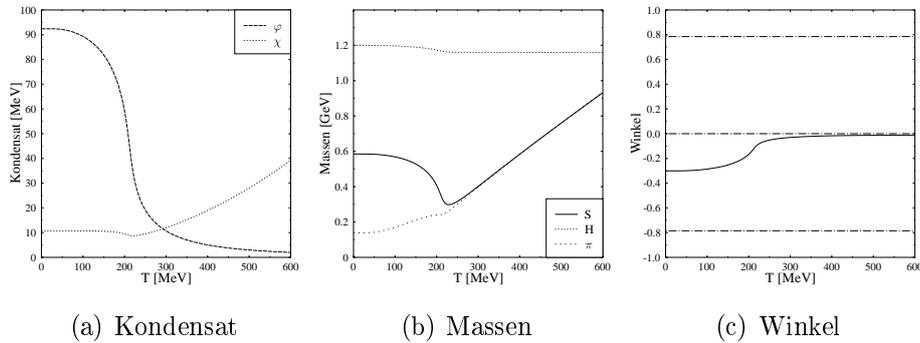


Abbildung 3.18: $M_S = 0.585$ GeV, $M_H = 1.2$ GeV und $g = 1.68$ GeV.

3.4 Variante B

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit den Resultaten der alternativen Vorgehensweise. Auch mit dieser Methode lässt sich die chirale Phase auf un-

terschiedliche Art restaurieren. Wie bereits in Kapitel 2.4 aufgeführt, liegen dieser Vorgehensweise nur fünf Freiheitsgrade zugrunde: die Masse der Pionen, die der S - sowie die der H -Teilchen, das ϕ - und das α -Kondensat. Der Winkel θ und somit die Mischung stellen indirekte Messgrößen dar, die aus den anderen errechnet werden müssen. Es ist zu erwarten, dass sich die größten Unterschiede ergeben, wenn sich die Mischung schnell ändert. Somit wird es in erster Linie den Phasenübergang betreffen. Die Schwierigkeiten dieser alternativen Vorgehensweise entsprechen denen der zuvor dargestellten Methode. Auf eine Studie des gesamten Parameterraums wird jedoch verzichtet, es werden nur einige ausgewählte Parametersätze diskutiert. So wird zunächst der Fall eines crossover-Phasenübergangs behandelt und im Anschluss der des Phasenübergangs erster Ordnung.

Zuerst wird der crossover-Phasenübergang betrachtet (Abbildung 3.19). Hierfür werden Massen $M_S = 1.5$ GeV und $M_H = 0.6$ GeV gewählt sowie eine Kopplung von $g = 5$ GeV. Die verschiedenen Parameter sind in Tabelle 3.5 aufgeführt.

Vakuumsgrößen		
$M_S = 1.5$ GeV	$M_H = 0.6$ GeV	$M_\pi = 0.139$ GeV
$\phi = 92.4$ MeV	$\alpha = 38.7$ MeV	$\theta = 0.68$
Parameter		
$\lambda = 86.9$	$F = 62.3$ MeV	$\epsilon = 1.785$ MeV
$M_\chi = 1.05$ GeV	$g = 5.0$ GeV	

Tabelle 3.5: Vakuumsgrößen und Parameter für den Fall $M_S = 1.5$ GeV, $M_H = 0.6$ GeV und $g = 5.0$ GeV. Aus den hervorgehobenen Größen werden die restlichen Vakuumsgrößen und Parameter abgeleitet.

Die reine Quarkoniummasse lautet $M_\varphi = 1.226$ GeV. Das Verhalten ist mit einem crossover-Phasenübergang in Variante A vergleichbar. Das Verhalten der Kondensate (Abbildung 3.19(a)) wurde bereits dargestellt: Das ϕ -Kondensat vollzieht bei einer Temperatur von $T_c \simeq 270$ MeV einen crossover-Phasenübergang, das α -Kondensat verhält sich für $T < T_c$ wie $\alpha \sim \phi(T)^2$ und steigt für Temperaturen $T > T_c$ wie $\alpha \sim T^2$.

Das Verhalten der Massen (Abbildung 3.19(b)) und des Mischwinkels (Abbildung 3.19(c)) lässt sich wie folgt beschreiben: Für zunehmende Tem-

peraturen steigt auch die Mischung, bei einer Temperatur $T_s \simeq 175$ MeV erreicht der Mischwinkel sein Maximum und es kommt zum Wechsel der Massenzuordnung. Daraufhin wird die chirale Phase restauriert und es kommt zur Massenentartung von M_S und M_π . Nach dem Phasenübergang geht die Mischung gegen Null. Bei einer Temperatur von $T \simeq 525$ MeV kommt es zum Level-crossing zwischen M_S und M_H , jedoch nicht zur Level-repulsion. Außergewöhnlich ist an diesem Beispiel die enorm hohe Masse M_S , sie liegt am oberen Limit der Resonanz $f_0(1370)$, bei der es zu einem crossover-Phasenübergang kommt.

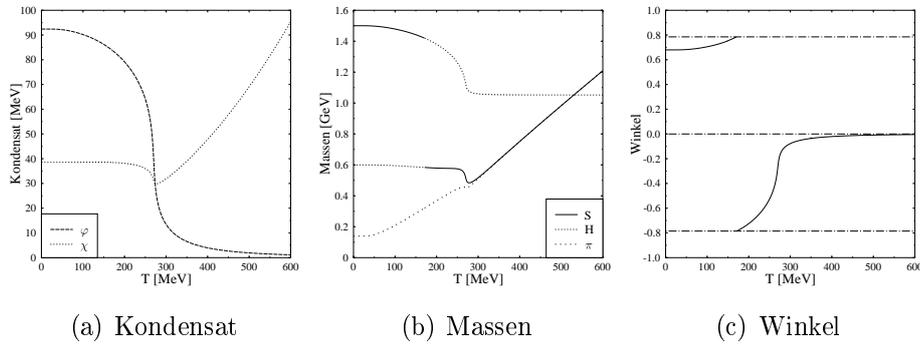


Abbildung 3.19: Die alternative Lösungsmethode führt selbst bei hohen Massen des skalaren Quarkoniums zum crossover-Phasenübergang. $M_S = 1.5$ GeV, $M_H = 0.6$ GeV und $g = 5.0$ GeV.

Zum Phasenübergang erster Ordnung: Hierfür werden die Massen $M_S = 1.3$ GeV und $M_H = 0.5$ GeV und die Kopplung $g = 1.5$ GeV gewählt (Abbildungen 3.20 und 3.21). Der resultierende Parametersatz wird in Tabelle 3.6 angegeben.

Für den reinen Quarkoniumzustand ergibt sich eine Masse von $M_\phi = 1.28$ GeV. Das ϕ -Kondensat zeigt bei $T_c = 261.5$ MeV einen Phasenübergang erster Ordnung (Abbildung 3.21(a)), das χ -Kondensat verhält sich für $T < T_c$ wie $\alpha \sim \varphi(T)^2$ und für $T > T_c$ wie $\alpha \sim T^2$.

Auch für diesen Parametersatz wächst die Mischung (Abbildung 3.20(c)) mit steigender Temperatur. Doch bevor die Mischung ihr Maximum erreichen kann, kommt es zur chiralen Restauration, was zu einem Sprung in allen Observablen führt. Beim Vergleich der beiden Abbildungen 3.20(b) und 3.21(b) wird deutlich, wie der Austausch der Massenzuordnung vom Phasenüber-

Vakuumsgrößen		
$M_S = 1.3 \text{ GeV}$	$M_H = 0.5 \text{ GeV}$	$M_\pi = 0.139 \text{ GeV}$
$\phi = 92.4 \text{ MeV}$	$\alpha = 42.3 \text{ MeV}$	$\theta = 0.20$
Parameter		
$\lambda = 94.5$	$F = 83.7 \text{ MeV}$	$\epsilon = 1.785 \text{ MeV}$
$M_\chi = 0.55 \text{ GeV}$	$g = 1.5 \text{ GeV}$	

Tabelle 3.6: Vakuumsgrößen und Parameter für den Fall $M_S = 1.3 \text{ GeV}$, $M_H = 0.5 \text{ GeV}$ und $g = 1.5 \text{ GeV}$. Aus den hervorgehobenen Größen werden die restlichen Vakuumsgrößen und Parameter abgeleitet.

gang verdeckt wird. Nach diesem ist die Mischung nahezu verschwunden, die Masse M_H ist fast identisch mit M_χ . Die Massen von M_S und M_π entarten wie erwartet. Bei einer Temperatur $T = 310 \text{ MeV}$ kommt es nicht zur Level-repulsion sondern zum Level-crossing. Im instabilen Bereich tritt Level-crossing häufiger ein.

Es tritt keine Level-repulsion ein, obwohl die Mischung nicht verschwunden ist. Dies lässt die Folgerung zu, dass dieses Verfahren nicht zur Beschreibung des chiralen Phasenübergang geeignet ist.

3.5 Der chirale Limes

Im chiralen Limes stellt das Pion im Vakuum ein masseloses Goldstoneboson dar. Für relevante Massen und Parametersätze resultiert ein Phasenübergang erster Ordnung. In den physikalisch relevanten Bereichen gibt es keine Änderung der Ordnung des Phasenüberganges durch Verändern der Kopplung g .

Nach dem chiralen Phasenübergang entkoppeln χ und ϕ , was an der Mischung zu erkennen ist. Diese lautet $-2g\varphi(T)$ und ist somit direkt proportional zum Kondensat $\varphi(T)$. Im chiralen Limes gilt für $T > T_c$ $\varphi(T) = 0$ - fällt also die Mischung weg, so verschwindet auch der Drehwinkel. Das Gleichungssystem vereinfacht sich nach dem Phasenübergang auf folgende Weise:

$$M_H(T) = M_\chi(T) = \text{const.}, \quad (3.3)$$

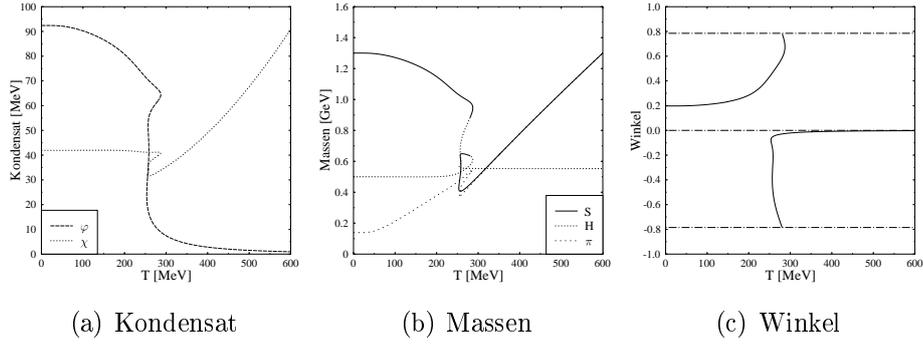


Abbildung 3.20: $M_S = 1.3$ GeV, $M_H = 0.5$ GeV und $g = 1.5$ GeV. Im Bereich des Phasenübergangs kommt es häufiger zum Level-crossing.

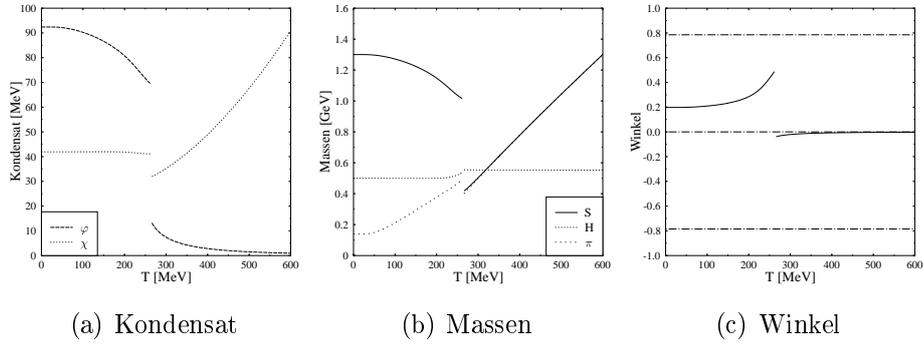


Abbildung 3.21: $M_S = 1.3$ GeV, $M_H = 0.5$ GeV und $g = 1.5$ GeV; $T_c = 253.1$ MeV.

$$M_\pi(T)^2 = M_S(T)^2 = -\lambda F^2 + 4\lambda \left(\frac{3}{2} - \frac{2g^2}{\lambda M_\chi^2} \right) \int G_S, \quad (3.4)$$

$$\alpha(T) = \frac{4g}{M_\chi^2} \int G_S. \quad (3.5)$$

Da das Kondensat wie auch die Massen M_S und M_π am gleichen Punkt verschwinden, lässt sich diese Temperatur analytisch bestimmen, $t_0 = \sqrt{3}F \left(\frac{3}{2} - \frac{2g^2}{\lambda M_\chi^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$. Hier hat das α -Kondensat den Wert $\alpha_0 = \frac{gF^2}{M_\chi^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{2g^2}{\lambda M_\chi^2} \right)^{-1}$. Ferner steigen M_S und M_π nach dem Phasenübergang linear an, die Steigung kann über die Kopplung und die Masse des Tetraquarks beeinflusst werden (Gleichung 3.4).

An einem Beispiel sollen weitere Eigenschaften diskutiert werden. Die Masse des Feldes S wird auf $M_S = 1.2 \text{ GeV}$ gesetzt und die des Feldes H auf $M_H = 0.4 \text{ GeV}$. Die Kopplung soll $g = 3.4 \text{ GeV}$ betragen (Abbildung 3.22). Sämtliche Parameter finden sich in Tabelle 3.7. Die Parameter weichen bei expliziter Symmetriebrechung nur in der Kopplung λ und in der Konstanten F ab. Für die reine Quarkoniummasse ergibt sich $M_\phi = 0.96 \text{ GeV}$.

Vakuumsgrößen		
$M_S = 1.2 \text{ GeV}$	$M_H = 0.4 \text{ GeV}$	$M_\pi = 0.0 \text{ GeV}$
$\phi = 92.4 \text{ MeV}$	$\alpha = 42.8 \text{ MeV}$	$\theta = 0.69$
Parameter		
$\lambda = 54.0$	$F = 56.0 \text{ MeV}$	
$M_\chi = 0.82 \text{ GeV}$	$g = 3.4 \text{ GeV}$	

Tabelle 3.7: Vakuumsgrößen und Parameter für den Fall $M_S = 1.2 \text{ GeV}$, $M_H = 0.4 \text{ GeV}$ und $g = 3.4 \text{ GeV}$. Aus den hervorgehobenen Größen werden die restlichen Vakuumsgrößen und Parameter abgeleitet.

Die Masse und die Kondensate mit Ausnahme der Pionen verhalten sich für niedrige Temperaturen wie für explizit gebrochen chirale Symmetrie. Zu Beginn fallen die Massen und das Kondensat leicht, der Mischwinkel hingegen steigt. Bei einer Temperatur von $t_{S,1} \simeq 140 \text{ MeV}$ kommt es zum Wechsel der Massenzuordnung (Abbildung 3.22(c)). Das Kondensat vollzieht einen Phasenübergang erster Ordnung bei einer Temperatur von $T_c = 151.8 \text{ MeV}$ (Abbildung 3.22(a)). Mit dem Phasenübergang verschwinden ϕ und θ . S besteht

somit ausschließlich aus Quarkonium und H ausschließlich aus Tetraquark. Zu einer Level-repulsion bei höherer Temperatur kommt es nicht, da φ und χ nun vollständig entkoppelt sind. M_S steigt linear mit der Pionenmasse an, wohingegen M_H bei einem Wert von $M_H = 0.824$ GeV konstant bleibt.

Die Zerfallsbreiten liegen außerhalb der physikalischen Relevanz und werden nur aus Gründen der Vollständigkeit angegeben; die Zerfallsbreite von $S \rightarrow \pi\pi$ beträgt $\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi} = 5.836$ GeV, die von $H \rightarrow \pi\pi$ nur $\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi} = 0.0075$ GeV.

Ein weiterer Unterschied im Verhalten der Observablen besteht darin, dass noch weitere Unstetigkeiten auftreten. Das Kondensat beispielsweise geht nicht in langem Bogen zurück auf Null, wie im Falle $g = 0$, sondern ist das letzte Stück komplex, um dann bei $t_0 = 105.8$ MeV zu verschwinden, das α -Kondensat geht auf den Wert $\alpha_0 = 0.018$ GeV und steigt dann quadratisch an. Die Masse M_H wird zu M_χ und bleibt schließlich wie bereits beschrieben konstant. Ein komplexer Anteil zeigt sich nicht nur bei dem ϕ -Kondensat, sondern auch bei sämtlichen Vakuumsgrößen. Der Bereich mit komplexen Anteil wird mit wachsendem g größer und verschwindet im Limes $g \rightarrow 0$. M_S , M_π und ϕ -Kondensat springen auf Null.

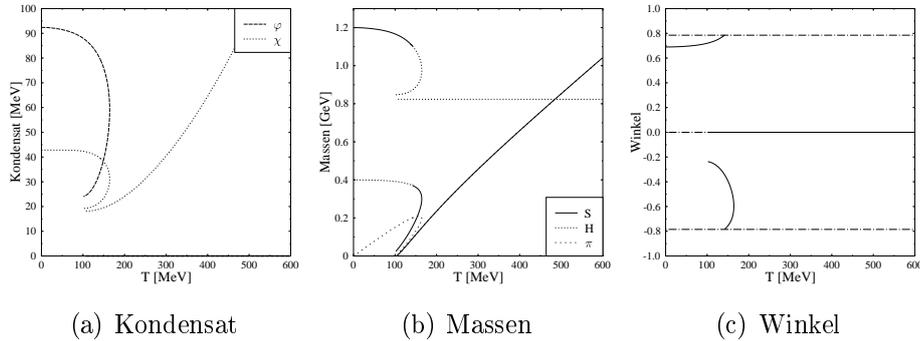


Abbildung 3.22: Chiraler Limes: $M_S = 1.2$ GeV, $M_H = 0.4$ GeV und $g = 3.4$ GeV.

3.6 Zerfallsbreiten

Allgemein zeigen die direkten Zerfälle eine enorm hohe Symmetrie. Doch zunächst zu den Zerfällen im Einzelnen.

Wie bereits anhand der Formeln zu erkennen ist, sind die Zerfälle proportional zu $\cos^2 \theta$ bzw. $\sin^2 \theta$. Die Zerfallsbreiten für die verschiedenen Massen unterscheiden sich nur in ihrem Vorfaktor. Der Zerfall $H \rightarrow \pi\pi$ (Abbildung 3.23) ist proportional zu $\sin^2 \theta$. Für eine kleine oder nicht vorhandene Mischung, entsprechend einer kleinen oder nicht vorhandenen Kopplung, geht die Zerfallsbreite gegen Null. Denn für $g \rightarrow 0$ besteht H vollständig aus Tetraquark χ , und ist nicht weiter an den chiral invarianten Term $(\varphi^2 + \pi^2)$ gekoppelt, es kann somit auch nicht in Pionen zerfallen. Für eine größere Mischung, also bei stärkerer Kopplung, steigt die Zerfallsbreite auf $\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi, max}$. Das Modell erlaubt nur einen maximalen Mischwinkel von $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$, was einer maximalen Kopplung entspricht. In diesem Fall besteht H aus gleichen Teilen Quarkonium φ und Tetraquark χ . Dennoch ist die Formel auch für größere Winkel definiert und für größere Mischungen geht der Zerfall in den $(S \rightarrow \pi\pi)$ -Zerfall über, mit einer Masse M_H ($\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi}(\theta, M) = \Gamma_{S \rightarrow \pi\pi}(\theta \pm \frac{\pi}{2}, M)$, $M_S = M_H = M$). Je größer die Masse M_H , desto größer die maximale Zerfallsbreite.

Der Zerfall $S \rightarrow \pi\pi$ (Abbildung 3.24) hat sein Maximum bei einer minimalen Mischung und somit einer kleinen Kopplung g . In einem solchen Fall besteht S ausschließlich aus Quarkonium φ . Bei Erhöhen der Kopplung sinkt die Zerfallsbreite und erreicht ihr Minimum für $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$, hier ist die Kopplung maximal. Die Zerfallsbreite ist an diesem Punkt auf die Hälfte abgefallen.

Die Erkenntnis, dass $\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi}(\theta, M) = \Gamma_{S \rightarrow \pi\pi}(\theta \pm \frac{\pi}{2}, M)$ ist, unter der Bedingung, dass $M_S = M_H = M$, lässt sich mithilfe der Abbildung 3.25 darstellen. Der dunkelgraue Bereich gibt den Zerfall $S \rightarrow \pi\pi$ wieder, und der hellgraue den Zerfall $H \rightarrow \pi\pi$. Bei expliziter Symmetriebrechung starten die Kurven bei einer Masse $M \geq 2M_\pi$. Die Fläche wird genau in der Mitte getrennt. An diesem Punkt beträgt die Mischung 50 Prozent. H und S sind hier also zu gleichen Teilen aus χ und φ aufgebaut. Die untere Begrenzung der hellgrauen Fläche ($\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi}$) ist gleich der Abszisse. Hier beträgt die Mischung $\theta = 0$ und somit auch die Kopplung $g = 0$. Das Feld H besteht ausschließlich aus Tetraquark χ . Bei erhöhter Kopplung steigen Mischung und Zerfallsbreite, bis die Mischung maximal wird und sich die maximale Zerfallsbreite für $H \rightarrow \pi\pi$ ergibt. Bewegt man sich weiter in Richtung größerer Zerfallsbreiten, so gelangt man in den dunkelgrauen Bereich und erhält den $(S \rightarrow \pi\pi)$ -Zerfall, welcher durch $\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi}$ beschrieben wird. Bei Reduzieren der Kopplung und somit auch der Mischung steigt die Zerfallsbreite weiter und erreicht letztlich für $g = 0$ und $\theta = 0$ ihren maximalen Wert. Der chirale Limes unterscheidet sich hiervon dadurch, dass dort keine Beschränkung auf

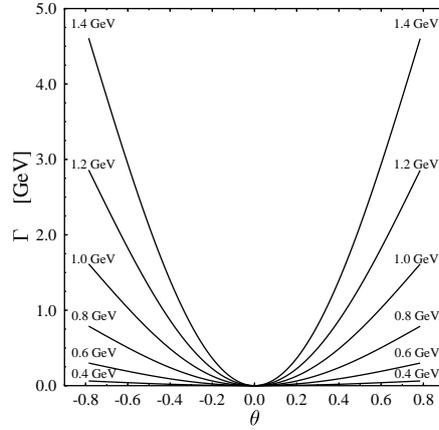


Abbildung 3.23: Winkelabhängigkeit der direkten Zerfallsbreite $\Gamma_{H \rightarrow \pi\pi}$ für verschiedene Massen M_H (0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2 und 1.4 GeV). Wird die Mischung zwischen χ und φ größer, ergeben sich größere Zerfallsbreiten.

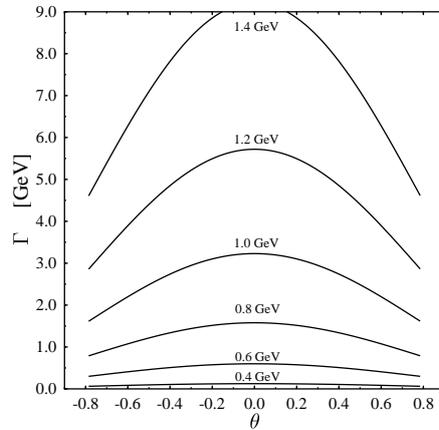
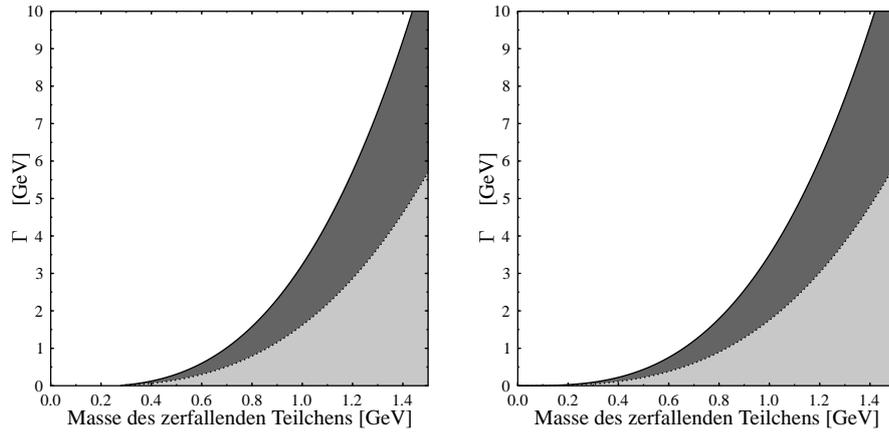


Abbildung 3.24: Winkelabhängigkeit der direkten Zerfallsbreite $\Gamma_{S \rightarrow \pi\pi}$ für verschiedene Massen M_S (0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2 und 1.4 GeV). Für eine größere Mischung zwischen χ und φ nimmt die Zerfallsbreite ab.

die Massen $M > 2M_\pi$ vorliegt. Sobald $M_S \neq 0$ oder $M_H \neq 0$ sind, können sie in Pionen zerfallen. In der Amplitude entfällt ferner der Beitrag von M_π , wodurch größere Zerfallsbreiten möglich werden. Das quantitative Verhalten ist jedoch identisch zum Fall $\epsilon \neq 0$.



(a) $\epsilon \neq 0$, nur Zerfälle für $M > 2M_\pi$. (b) Chiraler Limes, auch Zerfälle für $M < 2M_\pi$.

Abbildung 3.25: Die Gesamtheit der Zerfallsbreiten der direkten Zerfälle für kleine bis große Massen M_S bzw. M_H . Die hellgraue Fläche zeigt die möglichen Zerfallsbreiten für den Zerfall $H \rightarrow \pi\pi$, die dunkelgraue die möglichen Zerfallsbreiten für den Zerfall $S \rightarrow \pi\pi$.

Gemäß den Ausführungen der Particle Data Group sollte bei einer Masse von 0.4 GeV und 1.2 GeV die Zerfallsbreite für $f_0(600)$ zwischen 0.5 GeV und 1.0 GeV liegen. In Abbildung 3.26 wurden diese Grenzen eingetragen. Es zeigt sich, dass beide Ordnungsmöglichkeiten $M_S < M_H$ und $M_S > M_H$ jeweils einen Bereich für sich in Anspruch nehmen, der im Einklang steht mit den Angaben der Particle Data Group. Beschreibt S die leichte Resonanz, so kommen lediglich Massen $0.57 \text{ GeV} < M_S < 0.86 \text{ GeV}$ mit einer geringen Mischung am unteren Ende und einer starken Mischung am oberen Ende des Intervalls in Frage. Massen im mittleren Bereich des Intervalls können durch Veränderung des Mischverhältnisses die gewünschten Zerfallsbreiten erreichen. Wird H der Resonanz $f_0(600)$ zugeordnet, können ab einer Masse $M_S = 0.7 \text{ GeV}$ die gewünschten Zerfallsbreiten erreicht werden.

Anders liegt der Fall für $f_0(1370)$. Die Masse beträgt zwischen 1.2 GeV und 1.5 GeV, wofür Zerfallsbreiten von 0.3 GeV bis 0.5 GeV angegeben werden. Dieses Fenster kann nur über einen $H \rightarrow \pi\pi$ Zerfall erreicht werden. Für $S \rightarrow \pi\pi$ liegen die Werte nicht nur wenige MeV entfernt, sondern mehrere GeV.

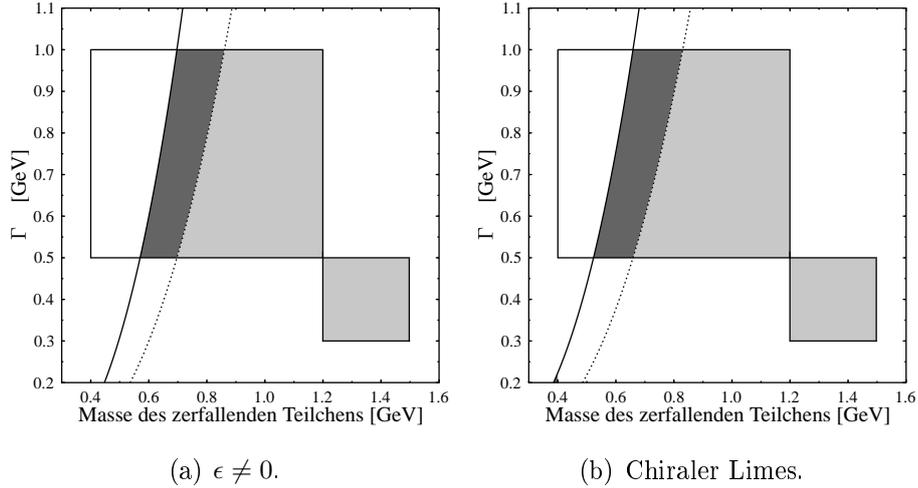


Abbildung 3.26: Die Ausführungen der Particle Data Group lassen für die $f_0(600)$ -Resonanz die Zuordnung $M_S < M_H$ und $M_S > M_H$ zu. Für die $f_0(1370)$ -Resonanz besteht nur die Ordnungsmöglichkeit $M_S < M_H$. Die Zerfallsbreite der Resonanz $f_0(600)$ wird mit einem Bereich zwischen 0.5 GeV und 1.0 GeV angegeben, die Masse beträgt zwischen 0.4 GeV und 1.2 GeV. Die Masse der Resonanz $f_0(1370)$ liegt zwischen 1.2 GeV und 1.5 GeV, die Zerfallsbreiten zwischen 0.3 GeV und 0.5 GeV. Die hellgraue Fläche zeigt die möglichen Zerfallsbreiten für den Zerfall $H \rightarrow \pi\pi$, die dunkelgraue Fläche die möglichen Zerfallsbreiten für den Zerfall $S \rightarrow \pi\pi$.

Die Überlegung aus den vorhergehenden Abschnitten kann auch auf den Fall des chiralen Limes angewendet werden, wobei hier sämtliche Werte für die Massen um ungefähr 50 MeV kleiner sind.

Im Hinblick auf die Zerfälle wird ein Szenario bevorzugt, in dem es sich bei der leichten $f_0(600)$ -Resonanz um einen S -Zustand handelt und bei der $f_0(1370)$ -Resonanz um einen H -Zustand. Die Zerfälle können jedoch nur in begrenztem Maße zur Parameteranpassung Verwendung finden. Das Modell erlaubt es nicht, die Zerfälle präzise zu berechnen, da hierfür diverse weitere

Teilchen und Phänomene einbezogen werden müssten, wie die Kopplung an das ρ -Meson, das optische Theorem sowie die Crossing-Symmetrien. Ungeachtet der Einfachheit des Modells zeigt sich, dass sich durch die Hinzunahme eines stark gekoppelten Tetraquarkzustandes die Zerfallsbreite der $f_0(600)$ -Resonanz dem in der Literatur erwarteten Wert annähert.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das Lineare Sigma-Modell um den leichtesten Tetraquarkzustand erweitert. Mittels des CJT-Formalismus in einer Hartree-Fock-Näherung wurde das Verhalten der verschiedenen Observablen bei nicht-verschwindender Temperatur beleuchtet. Der Einfluss dieses weiteren skalaren Zustandes auf den chiralen Phasenübergang und die kritische Temperatur wurden ausführlich diskutiert. Auch wurden die Auswirkungen auf die Zerfallsbreiten betrachtet.

Beim verwendeten Tetraquarkzustand handelt es sich um ein skalares Feld, das die gleichen Quantenzahlen wie das skalare Quarkonium und das Vakuum besitzt. Beide skalare Zustände bilden jeweils ein Kondensat und mischen miteinander. Je nach Zuordnung vergrößert oder verringert sich die Mischung mit steigender Temperatur. Ordnet man der Resonanz $f_0(600)$ den Zustand mit dem größten Tetraquarkanteil zu und der Resonanz $f_0(1370)$ den Zustand mit dem größten Quarkoniumanteil, so vergrößert sich einerseits die Mischung mit steigender Temperatur, und andererseits kann es vor dem chiralen Phasenübergang bei einer Temperatur $T_{s,1}$ zu einem Wechsel in der Massenzuordnung kommen. Der Zustand, der größtenteils aus Quarkonium besteht, übernimmt die Rolle der leichten Resonanz, während jener, der zum größten Teil aus Tetraquark besteht, die der schweren Resonanz übernimmt. Nach dem chiralen Phasenübergang kommt es - unabhängig von der Zuordnung - zu einer Entmischung der Zustände sowie zu einer Entartung in den Massen zwischen den Pionen und der leichteren skalaren Resonanz. Der Zustand mit dem größeren Quarkoniumanteil wird zu einem fast reinen Quarkoniumzustand und jener mit dem größeren Tetraquarkanteil zu einem fast reinen Tetraquarkzustand. Damit liegt eine Entartung zwischen den Pionen

und dem skalaren Quarkonium vor.

Der Einfluss des Tetraquarks auf den chiralen Phasenübergang erlaubt viele unterschiedliche Varianten der chiralen Restauration. Es wurde gezeigt, dass eine starke Mischung einen Einfluss auf die Ordnung des Phasenübergangs haben kann. Je nach Zuordnung der Felder zu den Resonanzen wird durch die Kopplung g ein Phasenübergang erster Ordnung zu einem crossover-Phasenübergang oder umgekehrt. Wird der Resonanz $f_0(1370)$ das größtenteils aus skalarem Quarkonium bestehende Mischfeld zugeordnet, geht ein Phasenübergang mit steigender Kopplung in Richtung eines weiche- ren Phasenübergangs erster Ordnung, und in einigen Fällen verändert sich das Verhalten eines Phasenübergangs erster Ordnung zu einem crossover- Phasenübergang. Im umgekehrten Fall, wenn also das Feld mit dem größten Quarkoniumanteil der leichten $f_0(600)$ -Resonanz zugeordnet wird, ist es mög- lich, einen Phasenübergang erster Ordnung zu erhalten.

Gitterrechnungen bei nichtverschwindender Temperatur verlangen einen crossover-Phasenübergang bei einer Temperatur von $T_c \sim 175$ MeV, und sol- che im Bereich der Vakuumphysik erfordern einen schweren chiralen Partner für die Pionen. Hinzu kommen die in Kapitel 1 genannten Gründe, weshalb der skalare Quarkoniumzustand eine hohe Masse benötigt. Das hier vorge- stellte Modell lässt einen crossover-Phasenübergang zu für Massen des chi- ralen Partners der Pionen über $M_{q\bar{q}} \gtrsim 0.948$ GeV - eine Grenze, die beim Linearen Sigma-Modell ohne Tetraquarkerweiterung besteht. Ein weiteres Resultat der vorliegenden Studie ist die Abhängigkeit der kritischen Tempe- ratur T_c von der Stärke der Mischung der skalaren Felder. In beiden Fällen der Massenzuordnung ist es möglich, die kritische Temperatur zu verringern. Dazu muss die Mischung sehr groß sein.

Beide Eigenschaften, die Ordnung des Phasenübergangs und die kritische Temperatur, lassen sich durch eine starke Kopplung des Tetraquarks an das Quarkonium in Einklang mit den Ergebnissen von Gitterrechnungen bringen.

Das Modell ist einfach gewählt; es enthält zwar alle notwendigen Frei- heitsgrade für eine Studie bei $T \neq 0$, doch die Resultate im Bereich der Zerfallsbreiten sind kritisch zu betrachten. Es zeigt sich, dass mit steigender Kopplung die Zerfallsbreite des Zustandes mit der größten Tetraquarkbeimi- schung größer wird, während sich die Zerfallsbreite des Zustandes mit der größten Quarkoniumbeimischung verringert.

Die gefundenen Resultate sind sehr vielversprechend. Sie zeigen, dass der Tetraquarkzustand eine wichtige Rolle beim chiralen Phasenübergang spielt und viele Probleme in den Modellen für Massen unter 1.8 GeV lösen kann. In

zukünftigen Untersuchungen sollte das Modell um die notwendigen Freiheitsgrade erweitert werden, um so qualitative Ergebnisse zu den noch austehenden Fragen zu erhalten. Zur genauen Beschreibung von Zerfällen, muss das Modell um die Vektor- und Axialvektor-Mesonen ergänzt werden. Auch ist eine Betrachtung der Zerfällen bei nichtverschwindender Temperatur sinnvoll, da es durch den Zuordnungswechsel der Massen zu interessanten Phänomenen kommen könnte. Weitere Untersuchungen sollten sich mit dem Verhalten des Tetraquarkkondensats beschäftigen. Hier stellt sich die Frage, inwieweit das Verhalten durch höhere Ordnungen in den Tetraquarkfeldern verändert wird, und ob es sich hierbei um ein physikalisch relevantes Phänomen handeln könnte. Eine Betrachtung des Problems in large- N_c könnte zur Bestätigung der in der vorliegenden Arbeit gefundenen Resultate dienen. Auf der technischen Seite kann das Renormierungsschema weiter verbessert werden. Eine Erweiterung auf drei Quarkfamilien wäre erstrebenswert, da es in diesem Fall ein Nonet von Quarkoniumzuständen sowie ein Nonet von Tetraquarkzuständen gibt, und durch die Hinzunahme des skalaren Glueballs fast alle bekannten Resonanzen unter 1.8 GeV ihren Platz in einem solchen Modell finden könnten. Schließlich sollte überprüft werden, inwiefern das verwendete Modell aus dem NJL-Modell herleitbar ist.

Anhang A

Transformationseigenschaften von Quarkoniumzuständen

Die Symmetrieeigenschaften einer Resonanz lassen mehrere Rückschlüsse auf die Wellenfunktion des Zustands zu. Für Quarkoniumzustände bestehen folgende Relationen:

$$P = (-1)^{L+1}, \quad (\text{A.1})$$

$$C = (-1)^{L+S}, \quad (\text{A.2})$$

$$J = L + S, \quad (\text{A.3})$$

$$G = (-1)^{L+S+I}. \quad (\text{A.4})$$

Dabei ist P die Parität des Zustands, L der Bahndrehimpuls, C die Ladungskonjugation, S stellt den Spin dar, J den gesamten Drehimpuls, I den Isospin und G die G -Parität. Die G -Parität wird über die Ladungskonjugation C , gefolgt von einer Rotation im Isospin-Raum um die y -Achse definiert:

$$G = C e^{i\pi I_y} = (-1)^I C = (-1)^{L+S+I}. \quad (\text{A.5})$$

Für einen skalaren Quarkoniumzustand lauten die Größen wie folgt:

$$I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{++}). \quad (\text{A.6})$$

Somit ergibt sich sofort

$$L = 1, 3, 5, \dots, \quad (\text{A.7})$$

$$S = 1. \quad (\text{A.8})$$

Der skalare Quarkoniumzustand besitzt mindestens ein p -Orbital.

Anhang B

Bestimmung der kritischen Temperatur

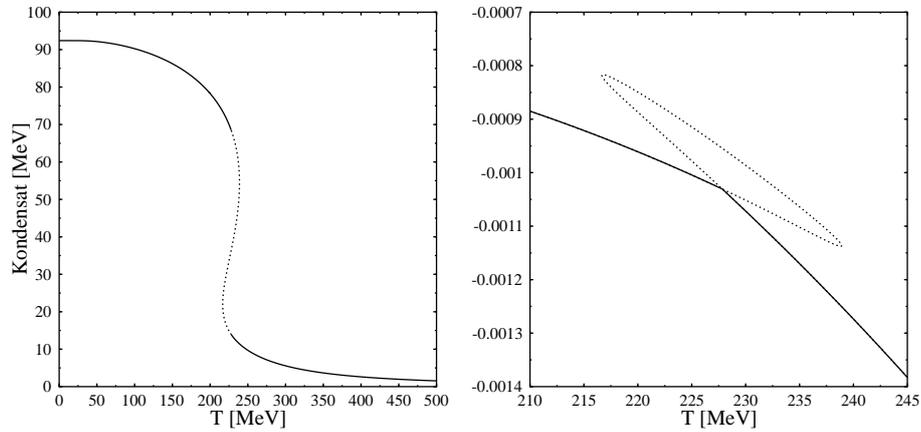
Der CJT-Formalismus liefert sämtliche Extrema des Kondensats ϕ im effektiven Potential. Das physikalische Verhalten eines Kondensats entspricht dem des absoluten Minimums des effektiven Potentials. Somit ist für jede Temperatur im effektiven Potential zu überprüfen, inwiefern es sich um ein Maximum, ein lokales Minimum oder das absolute Minimum handelt. Das Potential ist so definiert, dass das absolute Minimum bei positivem ϕ liegt. Besitzt das Potential keine explizite Symmetriebrechung, so sind die Extrema achsensymmetrisch.

Im Falle eines crossover-Phasenübergangs gibt es für $\phi > 0$ nur ein Minimum, welches per Definition des effektiven Potentials automatisch das absolute Minimum ist. In diesem Fall wird die kritische Temperatur T_c über eine Änderung der Krümmungsrichtung des Kondensats bei nichtverschwindender Temperatur bestimmt.

$$\lim_{\substack{T \rightarrow T_c \\ T < T_c}} \text{sign} \left(\frac{\partial^2 \phi(T)}{\delta^2 T} \right) \neq \lim_{\substack{T \rightarrow T_c \\ T > T_c}} \text{sign} \left(\frac{\partial^2 \phi(T)}{\delta^2 T} \right). \quad (\text{B.1})$$

Für einen Phasenübergang erster Ordnung findet man für $\phi > 0$ im Bereich des Phasenübergangs drei Extrema (Abbildung B.1), zwei Minima sowie ein Maximum. Die kritische Temperatur T_c ist als die Temperatur definiert, an der aus dem absoluten Minimum ein lokales wird, wie auch umgekehrt. Zur ihrer Bestimmung muss zu jeder Temperatur das Potential an den Extrema errechnet werden. Bei einem Phasenübergang erster Ordnung kommt

es daher für den Ordnungsparameter zu einer Unstetigkeit. Berechnet man jedoch den Druck $V[\varphi, \mathcal{G}] = -p$, zeigt sich, dass dieser stetig verläuft.



(a) Verlauf des Kondensats bei nicht-verschwindender Temperatur.

(b) Verhalten der Extrema im Bereich des Phasenübergangs. Das effektive Potential am Minimum ist bis auf ein Vorzeichen identisch mit dem Druck.

Abbildung B.1: Sketch eines Phasenübergangs erster Ordnung. Die durchgezogene Linie entspricht dem absoluten Minimum und somit dem physikalischen Verlauf, die gepunktete Linie den übrigen Extrema.

Anhang C

Chirale Invarianz der Terme $\varphi^2 + \vec{\pi}^2$ und χ

Die Terme $\varphi^2 + \vec{\pi}^2$ und χ sind chiral invariant. Im verwendeten Modell werden nur die u- und d-Quarks betrachtet. Die chirale Invarianz von $\varphi^2 + \vec{\pi}^2$ folgt direkt aus der Isomorphie von $SU(2)_L \times SU(2)_R$ und $O(4)$

$$\varphi^2 + \vec{\pi}^2 = \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi) \quad (\text{C.1})$$

mit $\Phi = \varphi\tau_0 + i\tau_i\pi_i$ (τ_0 ist die Identität und τ_i sind die drei Pauli-Matrizen).

Das Tetraquark χ ist aus zwei Diquarkzuständen zusammengesetzt. Hierbei handelt es sich um das Diquark ρ sowie das dazugehörige Antidiquark ρ^\dagger . Das Diquark ρ hat die Form:

$$\rho = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}q_i^t(C\gamma^5)q_j. \quad (\text{C.2})$$

Auch hier beschränkt sich die Betrachtung auf zwei Quarkfamilien: $q_1 = u$ und $q_2 = d$. Bei C handelt es sich um die Ladungskonjugation in der Form $Cq_iC = -i(\bar{q}_i\gamma_0\gamma_2)^T$. Unter chiraler Transformation teilt sich das Diquark

wie folgt auf:

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{2} \epsilon_{ij} q_i^t (C\gamma^5) q_j \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (q_{i,R}^t + q_{i,L}^t) (C\gamma^5) (q_{j,R} + q_{j,L}) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (q_i^t P_R + q_i^t P_L) (C\gamma^5) (P_R q_j + P_L q_j) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ij} q_i^t P_R (C\gamma^5) P_R q_j + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} q_i^t P_L (C\gamma^5) P_L q_j \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ij} q_{i,R}^t (C\gamma^5) q_{j,R} + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} q_{i,L}^t (C\gamma^5) q_{j,L}. \tag{C.3}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle wurden die Relationen $[P_R, C\gamma^5] = 0$ und $[P_L, C\gamma^5] = 0$ verwendet.

Um zu zeigen, dass χ invariant unter chiralen Transformationen ist, soll zunächst gezeigt werden, dass die beiden Terme invariant unter der $SU_R(2) \times SU_L(2)$ -Transformation sind. Da sich das Diquark in ein rechtshändiges und ein linkshändiges Diquark aufteilt, wird sich auch die $SU_R(2) \times SU_L(2)$ -Transformation aufteilen. Die $SU_R(2)$ -Transformation hat keinen Effekt auf den rechten Term, ebenso hat die $SU_L(2)$ -Transformation keinen Effekt auf den linken Term. Für die folgenden Schritte werden die Indizes L und R unterdrückt, da jeder der beiden Terme für sich invariant ist, und die Rechnung für beide analog verläuft. Die Transformation lautet:

$$q_j \rightarrow U_{jr} q_r \simeq (\delta_{jr} + \imath(\vec{\alpha}\vec{\tau})_{jr}) q_r, \tag{C.4}$$

$$q_i^t \rightarrow U_{ik} q_k^t \simeq (\delta_{ik} + \imath(\vec{\alpha}\vec{\tau})_{ik}) q_k^t. \tag{C.5}$$

Die Matrix U ist eine Darstellung der $SU(2)$ -Transformation. Wendet man diese Transformation auf ρ an, so zeigt sich, dass ρ invariant unter $SU(2)$ ist.

$$\rho = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} q_i^t (C\gamma^5) q_j \rightarrow \rho' = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} U_{ik} q_k^t (C\gamma^5) U_{jr} q_r,$$

$$\begin{aligned}
\rho' &= \frac{1}{2} \epsilon_{ij} U_{ik} q_k^t (C\gamma^5) U_{jr} q_r \\
&\simeq \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\delta_{ik} + \imath(\vec{\alpha}\vec{\tau})_{ik}) q_k^t (C\gamma^5) (\delta_{jr} + \imath(\vec{\alpha}\vec{\tau})_{jr}) q_r \\
&\simeq \frac{1}{2} \epsilon_{kr} q_k^t (C\gamma^5) q_r + \frac{1}{2} \epsilon_{kj} (\vec{\alpha}\vec{\tau})_{jr} q_k^t (C\gamma^5) q_r + \frac{1}{2} \epsilon_{ir} (\vec{\alpha}\vec{\tau})_{ik} q_k^t (C\gamma^5) q_r \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{kr} q_k^t (C\gamma^5) q_r + \frac{1}{2} \epsilon_{kj} (\vec{\alpha}\vec{\tau})_{jr} q_k^t (C\gamma^5) q_r - \frac{1}{2} \epsilon_{ri} (\vec{\alpha}\vec{\tau})_{ik} q_k^t (C\gamma^5) q_r \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{kr} q_k^t (C\gamma^5) q_r \\
&= \rho.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Da das Diquark invariant ist, müssen auch das Antidiquark sowie das Produkt aus beiden invariant sein. Der Tetraquarkzustand $\chi = \rho^\dagger \rho$ ist somit ebenfalls invariant. Das Diquark ist für sich alleine genommen nicht invariant unter der $U(1)$ -Transformation, aber das aus Diquark und Antidiquark zusammengesetzte Tetraquark ist invariant unter der $U(1)$ -Transformation.

Anhang D

Zerfallsbreiten

Zur Bestimmung der Zerfallsbreiten wird eine Toy-Lagrangedichte betrachtet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \zeta)^2 - \frac{1}{2}M_\eta^2 - \frac{1}{2}M_\zeta^2 + b\eta\zeta^2. \quad (\text{D.1})$$

Die Felder ζ und η können als Überlagerung ebener Wellen in einer Box der Kantenlänge L darstellt werden:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}=\frac{2\pi\vec{n}}{L}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} (a_{\vec{k}}^- e^{-iKX} + a_{\vec{k}}^+ e^{iKX}), \quad (\text{D.2})$$

mit $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + M_\eta^2}$. Bei $a_{\vec{k}}^+$ handelt es sich um den Erzeugungsoperator, bei $a_{\vec{k}}^-$ um den Vernichtungsoperator. Beide sind über folgende Bedingung definiert: $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^+] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$. Die Summe über \vec{k} ist eine diskrete Summe und geht über sämtliche Impulse. Es gilt $\vec{n} \in \mathbb{N}^3$ und die Beziehung $V = (2\pi/L)^3$.

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}=\frac{2\pi\vec{m}}{L}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (b_{\vec{p}}^- e^{-iPX} + b_{\vec{p}}^+ e^{iPX}). \quad (\text{D.3})$$

Hier stellt $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + M_\zeta^2}$. $b_{\vec{p}}^+$ stellt den Erzeugungsoperator dar, $b_{\vec{p}}^-$ den Vernichtungsoperator. Beide sind über die Bedingung $[b_{\vec{p}}, b_{\vec{p}'}^+] = \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$ definiert. Es gilt $\vec{m} \in \mathbb{N}^3$ und die Beziehung $V = (2\pi/L)^3$. Auch in diesem Fall ist die Summe über \vec{k} eine diskrete Summe und geht über sämtliche Impulse. Dabei gelten $\vec{m} \in \mathbb{N}^3$ und die Beziehung $V = (2\pi/L)^3$.

Die Zerfallsbreite ist wie folgt definiert:

$$\Gamma t = \int |\langle f | S | i \rangle|^2 \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3} V \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3} V. \quad (\text{D.4})$$

Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit, die Zerfallsprodukte nach einer Zeit t zu finden. Die Wahrscheinlichkeit $p(t)$, das Ausgangsprodukt zu finden, lautet entsprechend:

$$p(t) = 1 - \Gamma t. \quad (\text{D.5})$$

Diese Formel gilt jedoch nur für den Fall $t \ll \Gamma^{-1}$, da sich sonst negative Wahrscheinlichkeiten ergeben könnten. Sie muss aber zu jedem Zeitpunkt t für kleine Zeitspannen Δt gelten,

$$p(t + \Delta t) = p(t)(1 - \Gamma \Delta t). \quad (\text{D.6})$$

Geht man über zu infinitesimal kleinen Zeiten, ergibt sich

$$p(t) = e^{-\Gamma t} = e^{-t/\tau}, \quad (\text{D.7})$$

mit der Definition für die Lebensdauer $\tau = 1/\Gamma$. Das Resultat für die Lebensdauer ist modellunabhängig und gilt für alle Arten von Zerfällen.

Von Interesse sind lediglich die Zerfallsbreiten in erster Ordnung:

$$\langle f | S | i \rangle \approx \langle f | S^{(1)} | i \rangle. \quad (\text{D.8})$$

Dieser Erwartungswert lässt sich berechnen über: $\mathcal{L}_I = -\mathcal{H}_I = b\eta\zeta^2$. Er fließt folgendermaßen in $S^{(1)}$ ein

$$S^{(1)} = -i \int d^4 X T[\mathcal{H}_I]. \quad (\text{D.9})$$

Der Wechselwirkungsterm lässt den Zerfall $\eta \rightarrow \zeta\zeta$ zu. Dies bedeutet, dass die Zerfallsprodukte identisch sind. Der Ausgangszustand setzt sich folgendermaßen zusammen: $a_k^+ |0\rangle = |\vec{k}\rangle = |i\rangle$. Der Endzustand lautet $b_{\vec{p}_1}^+ b_{\vec{p}_2}^+ |0\rangle = 1/\sqrt{2}(|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle + |\vec{p}_2, \vec{p}_1\rangle) = |f\rangle$. Fasst man die oben ausgeführten Herleitungen zusammen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &\approx \langle f | i b \int d^4 X T[\eta\zeta^2] | i \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{V^3}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}} 2\omega_{\vec{p}_1} 2\omega_{\vec{p}_2}}} (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - K) (i2b). \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Darüber hinaus wird das Quadrat der Deltafunktion benötigt:

$$\begin{aligned}
[(2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - K)]^2 &= (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - K) (2\pi)^4 \delta^4(0) \\
&= (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - K) \int_V d^3x \int_0^t dt' \\
&= (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - K) Vt. \tag{D.11}
\end{aligned}$$

Das Integral über die Zeit reicht nicht von $-\infty$ bis ∞ , sondern von 0 bis t , da das Teilchen innerhalb einer endlichen Zeitspanne zerfallen soll. Durch das Zusammenfügen aller Zwischenergebnisse ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{t} \int \frac{1}{2} \frac{1}{V^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}} 2\omega_{\vec{p}_1} 2\omega_{\vec{p}_2}} (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - K) Vt |-i2b|^2 \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} V \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3} V \\
&= \int \frac{1}{2} \frac{d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^6} |-i\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4}{2\omega_{\vec{k}} 2\omega_{\vec{p}_1} 2\omega_{\vec{p}_2}} \delta^4(P_1 + P_2 - K). \tag{D.12}
\end{aligned}$$

Zur weiteren Berechnung muss das Schwerpunktsystem von η gewählt werden. Daraus folgt, dass der Gesamtimpuls verschwindet, $\vec{k} = 0$, und die neuen Teilchen mit entgegengesetztem Impuls auseinander fliegen $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$. Desweiteren führt die Wahl des Schwerpunktsystems zu $\omega_{\vec{k}} = M_\eta$ und $\omega_{\vec{p}_1} = \omega_{\vec{p}_2}$. Die Deltafunktion lässt sich umformen zu:

$$\begin{aligned}
\delta^4(P_1 + P_2 - K) &= \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \delta(M_\eta - 2\omega_{\vec{p}_1}) \\
&= \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \frac{M_\eta}{4|\vec{p}_1|} \delta\left(|\vec{p}_1| - \sqrt{\frac{M_\eta^2}{4} - M_\zeta^2}\right). \tag{D.13}
\end{aligned}$$

Mit diesen Überlegungen führt die Rechnung zu dem simplen Ergebnis:

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi M_\eta^2} |-i\mathcal{M}|^2 |\vec{p}| = \frac{1}{16\pi} \frac{\sqrt{\frac{M_\eta^2}{4} - M_\zeta^2}}{M_\eta^2} |-i2b|^2. \tag{D.14}$$

Literaturverzeichnis

- [1] Joseph I. Kapusta,
“Finite-temperature field theory,”
Cambridge University Press, Kapitel 8 (2000).
- [2] A. Zee,
“QUANTUM FIELD THEORY IN A NUTSHELL,”
Princeton University Press, Kapitel VII.3 (2003).
- [3] Michael E. Peskin und Daniel V. Schroeder,
“An Introduction to Quantum Field Theory,”
Westview Press, Kapitel 17 (1995).
- [4] G.’t Hooft,
“How instantons solve the $U(1)$ problem,”
Phys. Rep. **142**, 357 (1986).
- [5] C. Vafa und E. Witten,
“Restrictions on symmetry breaking in vector-like gauge theories,”
Nucl. Phys. B **234**, 173 (1984).
- [6] M. Gell-Mann und M. Levi,
“The Axial Vector Current in Beta Decay,”
Nuovo Cimento **16**, 705 (1960).
- [7] C. Amsler und N. A. Tornqvist,
“Mesons Beyond The Naive Quark Model,”
Phys. Rep. **389**, 61-117 (2004).
- [8] E. Klempt,
“Glueballs, Hybrids, Multiquarks. Experimental Facts Versus QCD In-

- spired Concepts,”
 Phys. Rep. **454**, 1-202 (2007).
- [9] F.E. Close und N. A. Tornqvist,
 “Scalar mesons above and below 1 GeV,”
 J. Phys. G **28**, R249 (2002) .
- [10] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group],
 “Review of particle physics,”
 J. Phys. G **33**, 1 (2006).
- [11] Y. Chen *et al.*,
 “Glueball spectrum and matrix elements on anisotropic lattices,”
 Phys. Rev. D **73** 014516 (2006).
- [12] A. H. Fariborz, R. Jora and J. Schechter,
 “Toy model for two chiral nonets,”
 Phys. Rev. D **72** 034001 (2005);
 A. H. Fariborz,
 “Isosinglet scalar mesons below 2-GeV and the scalar glueball mass,”
 Int. J. Mod. Phys. A **19** 2095 (2004);
 M. Napsuciale and S. Rodriguez,
 “A chiral model for $\bar{q}q$ and $\bar{q}q\bar{q}q$ mesons,”
 Phys. Rev. D **70** 094043 (2004).
- [13] F. Giacosa,
 “Mixing of scalar tetraquark and quarkonia states in a chiral approach,”
 Phys. Rev. D **75** 054007 (2007).
- [14] Prelovsek *et al.*,
 “Scalar meson in dynamical and partially quenched two-flavor QCD:
 Lattice results and chiral loops,”
 Phys. Rev. D **70**, 094503 (2004);
 Burch *et al.*,
 “Spatially improved operators for excited hadrons on the lattice,”
 Phys. Rev. D **73**, 054502 (2006).
- [15] J. R. Pelaez,
 “On the nature of light scalar mesons from their large N_c behavior,”
 Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 102001;

- “Light scalars as tetraquarks or two-meson states from large N_c , and unitarized chiral perturbation theory,”
 Mod. Phys. Lett. A **19** (2004) 2879.
- [16] N. Mathur *et al.*,
 “Scalar mesons $a_0(1450)$ and $\sigma(600)$ from lattice QCD,”
 Phys. Rev. D **76** (2007) 114505.
- [17] R. L. Jaffe,
 “Multiquark hadrons. I. Phenomenology of $Q^2\bar{Q}^2$ mesons,”
 Phys. Rev. D **15**, 267 (1977).
- [18] R. L. Jaffe,
 “Exotica,”
 Phys. Rep. **409**, 1-45 (2005).
- [19] C. Amsler and F. E. Close,
 “Evidence for a a scalar glueball,”
 Phys. Lett. B **353**, 385 (1995);
 W. J. Lee and D. Weingarten,
 “Scalar quarkonium masses and mixing with the lightest scalar glueball,”
 Phys. Rev. D **61**, 014015 (1999);
 F. E. Close and A. Kirk,
 “Scalar glueball q anti- q mixing above 1-GeV and implications for lattice QCD,”
 Eur. Phys. J. C **21**, 531 (2001);
 F. Giacosa, T. Gutsche, V. E. Lyubovitskij and A. Faessler,
 “Scalar nonet quarkonia and the scalar glueball: mixing and decays in an effective chiral approach,”
 Phys. Rev. D **72**, 094006 (2005);
 F. Giacosa, T. Gutsche, V. E. Lyubovitskij and A. Faessler,
 “Scalar meson and glueball decays within a effective chiral approach,”
 Phys. Lett. B **622**, 277 (2005).
- [20] W. Nolting,
 “Grundkurs Theoretische Physik 6,”
 Springer 4. Auflage, Kapitel 3 (2002).

- [21] J. M. Cornwell, R. Jackiw und E. Tomboulis,
“Effective action for composite operators,”
Phys. Rev. D **10**, 2428 (1974).
- [22] R. Jackiw,
“Functional evaluation of the effective potential,”
Phys. Rev. D **9**, 1686 (1974).
- [23] Jonathan T. Lenaghan und Dirk H. Rischke,
“The O(N) model at finite temperature: Renormalization of the gap
aligns in Hartree and large-N approximation,”
J. Phys. G26, 431 (2000).
- [24] Teiji Kunihiro *et al.*,
“Scalar mesons in lattice QCD,”
Phys. Rev. D **70** 034504 (2004).
- [25] F. Karsch,
“Transition temperature in QCD with physical light and strange quark-
masses,”
arXiv:hep-ph/0701210.
- [26] Z. Fodor and S. D. Katz,
“Critical point of QCD at finite T and mu, lattice results for physical-
quark masses,”
J. High Energy Phys. **04** 050 (2004).
- [27] Jonathan T. Lenaghan, Dirk H. Rischke und J. Schaffner-Bielich,
“Chiral symmetry restoration at nonzero temperature in the $SU(3)_r \times$
 $SU(3)_l$ linear sigma model,”
Phys. Rev. D **62**, 085008 (2000).
- [28] D. Parganlija, F. Giacosa und Dirk H. Rischke,
“How Universal is the Coupling in the Sigma Model?,”
arXiv:0804.3949.
- [29] P. Ko und S. Rudaz,
“Phenomenology of scalar and vector mesons in the linear σ model,”
Phys. Rev. D **50** 6877 - 6894 (1994).

- [30] S. Gasiorowicz und D. A. Geffen,
“Effective Lagrangians and Field Algebras with Chiral Symmetry,”
Rev. Mod. Phys. **41** 531 (1969).
- [31] I. Caprini, G. Colangelo and H. Leutwyler,
“Mass and width of the lowest resonance in QCD,”
Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 132001.