

Johann Wolfgang Goethe–Universität
Frankfurt am Main

Fachbereich Physik
Institut für Theoretische Physik

Bachelorarbeit

Baryonische Zweikörperzerfälle im
erweiterten Linearen Sigma-Modell

Antje Peters

September 2012

Erstgutachter

Prof. Dr. Dirk H. Rischke

Institut für Theoretische Physik
Universität Frankfurt a. M.

Zweitgutachter

Dr. Francesco Giacosa

Institut für Theoretische Physik
Universität Frankfurt a. M.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes	4
1.1	Elementarteilchenphysik	4
1.2	Quantenchromodynamik	5
1.3	Symmetrien	5
2	Theorie des Zerfallsprozesses	8
2.1	Skalare Felder	8
2.2	Fermionische Felder	11
2.3	Die S-Matrix	12
3	Zerfall des chiralen Partners des Nukleons in ein Nukleon und ein skalares Teilchen	16
3.1	Das Lineare Sigma-Modell	16
3.2	Vorstellung des erweiterten Linearen Sigma-Modells	17
3.3	Zerfallsrechnung	18
3.3.1	Beteiligte Teilchen	18
3.3.2	Die S-Matrix	22
3.3.3	Werte einsetzen	28
4	„Glueballs“ und das PANDA-Experiment	30
4.1	PANDA	30
4.2	Zerfall des pseudoskalaren Glueballs in zwei Nukleonen	31
4.2.1	Beteiligte Teilchen	31
4.2.2	Die S-Matrix	32
4.2.3	Werte einsetzen	36
5	Zusammenfassung und Ausblick	37
	Dank	40
	Erklärung nach § 30 (11) Ordnung für den BA- und MA-Studiengang	41

Diese Arbeit befasst sich mit der Theorie des Zweikörperzerfalls unter Beteiligung baryonischer Felder. Im Anschluss an eine Einführung in die grundlegenden Eigenschaften von Elementarteilchen und einige Anmerkungen zur Theorie des Zweikörperzerfalls wird das erweiterte Lineare Sigma-Modell vorgestellt. Es erfolgt die explizite Berechnung der Zerfallsbreite des Zerfalls des chiralen Partners des Nukleons in einen Tetraquark-Zustand und ein Nukleon. Außerdem wird das Verhältnis zweier beim Zerfall eines pseudoskalaren Glueballs auftretenden Zerfallskanäle bestimmt. Letzteres ist im Zusammenhang mit dem PANDA-Experiment bei FAIR von Bedeutung.

1 Grundlegendes

Dieses Kapitel schafft einen Einblick in die Welt der Elementarteilchen. Außer auf den geschichtlichen Hintergrund wird auf die der physikalischen Beschreibung zugrunde liegenden Symmetrien eingegangen.

1.1 Elementarteilchenphysik

Die Geschichte der Elementarteilchenphysik gleicht einer Entdeckungsreise. Mit der Zeit kamen, mit zunehmender Genauigkeit der Messmethoden, immer mehr unterschiedliche Teilchen zum Vorschein. Strukturen konnten immer feiner aufgelöst werden. Bis in die späten Fünfzigerjahre war die Situation jedoch noch recht übersichtlich. Man kannte lediglich Leptonen und einzelne Hadronen [1]. Leptonen haben keine innere Struktur und gehen nicht in angeregte Zustände über. Experimente mit Neutrinos haben gezeigt, dass sich Leptonen in Paaren gruppieren: Nach zunehmender Masse geordnet sind dies das Elektron (0.5 MeV) und das Elektron-Neutrino, das Myon (100 MeV) und das Myon-Neutrino, das Tauon (1800 MeV) und das Tauon-Neutrino sowie deren Antiteilchen. Die Neutrinos sind nahezu masselos. In den Sechzigerjahren erlaubten verbesserte Protonen-Beschleuniger Einblicke in die Welt schwererer Teilchen (~ 2.8 GeV). Die Zeit der Hadronen-Spektroskopie brach an. Scheinbar unzählige neue Teilchen und angeregte Zustände wurden seitdem entdeckt. Um angesichts der großen Anzahl von Teilchen nicht die Übersicht zu verlieren, kann man sich eines praktischen Ordnungssystems bedienen: Im Rahmen der Gruppentheorie nutzt man Symmetrien, um die Teilchen gemäß ihrer Quantenzahlen in Multipletts anzuordnen. Doch weil auch dies mit der Zeit recht unübersichtlich zu werden drohte, erdachte man bald darauf ein grundlegendes Prinzip der Kategorisierung: 1964 postulierte Murray Gell-Mann das sogenannte Quark-Modell [2], wonach Hadronen aus kleineren Einheiten, den Quarks, zusammengesetzt sind. Mit Hilfe dieses Modells lassen sich Hadronen in sogenannte Flavour-Multipletts einordnen, wobei die sechs Quark-Sorten up, down, strange, charm, top und bottom Flavours genannt werden. Das Modell wurde allgemein anerkannt, als es wenig später die Existenz eines neuen Teilchens (des Ω^-) voraussagte, das tatsächlich gefunden wurde. Bald darauf konnte die Substruktur der Hadronen experimentell nachgewiesen werden. Quarks waren nicht mehr nur ein rein mathematischer Kunstgriff. Quarks haben die Eigenart, nicht als freie Teilchen beobachtbar zu sein. Dies nennt man Confinement. Sie sind der starken Wechselwirkung unterworfen. Ihre Austauschpartikel werden Gluonen genannt. Je nach Anzahl und Art der enthaltenen Quarks lassen sich Hadronen in zwei Gruppen ein-

teilen: Mesonen und Baryonen. Mesonen bestehen aus Quark-Antiquark-Paaren und besitzen ganzzahlige Spins, weshalb sie zu den Bosonen zählen. Baryonen setzen sich aus drei Quarks zusammen und gehören wegen ihres halbzahligen Spins zu den Fermionen. Anzumerken ist, dass die Existenz exotischer Hadronen wie Tetraquark- (aus zwei Quarks und zwei Antiquarks) oder Pentaquark-Zuständen (vier Quarks und ein Antiquark) nicht auszuschließen ist.

1.2 Quantenchromodynamik

Die theoretische Beschreibung des Verhaltens von Quarks und Gluonen unter Einfluss der starken Wechselwirkung erfolgt im Rahmen der Quantenchromodynamik (QCD). Diese Eichfeldtheorie ist nicht-abelsch, weshalb ihre Austauschteilchen, die Gluonen, nicht ungeladen sind, sondern Farbladung tragen. Dies bedeutet, dass die Elemente der zugrunde liegenden Gruppe $SU(3)$ im Allgemeinen nicht kommutieren. Farbladung bewirkt Selbstwechselwirkung zwischen den Gluonen. Sie ist der Grund dafür, dass die Kopplungsstärke zwischen den Gluonen und Quarks abnimmt, je näher sie einander kommen (je höher die Energie ist) und ins Unermessliche wächst, wenn sie sich voneinander zu trennen versuchen. Das erstgenannte Phänomen nennt sich asymptotische Freiheit, letzteres ist das oben erwähnte, bisher noch nicht mathematisch-rigoros bewiesene Confinement. Im folgenden Abschnitt erfolgt eine genauere und systematischere Betrachtung der Symmetrien, denen Quarks unterworfen sind.

1.3 Symmetrien

Wie eingangs erwähnt spielen für die formelle Beschreibung der Natur, vor allem der Natur der Elementarteilchen, Symmetrien eine zentrale Rolle. Eine Symmetrie ist die Invarianz einer Theorie unter Transformationen [3]. Eine Transformation, die die Wirkung invariant lässt, nennt man Symmetrietransformation. Zu diesen Transformationen gehören neben Koordinatentransformationen auch sogenannte interne Symmetrien. Diese werden im Folgenden näher betrachtet. Symmetrietransformationen verändern ein System augenscheinlich nicht. Man bemerkt also erst, dass eine Symmetrie vorliegt, wenn sie gebrochen wird. Symmetriebrechungen geben über die Eigenschaften von Elementarteilchen Aufschluss.

Fermionische Felder Ψ tragen drei verschiedene Arten von Indizes: $\Psi_{\alpha,i}^f$. $\alpha = 1, \dots, 4$ ist der Spinor-Index, auf den die Dirac-Matrizen wirken, $i = 1, \dots, 3$ der Farb- oder Colour-Index, auf den die Gell-Mann-Matrizen wirken und f der Flavour-Index, der sich i.A. auf die leichten Quarkflavours $f = u, d, s$ beschränkt [4]. Für fermionische Felder spielen die folgenden Symmetrien eine Rolle: $SU(3)_c$ -Farbrotation, $U(1)_V$ - und $U(1)_A$ -Transformation, die sich auf die gemeinsame Phase aller Baryonen beziehen, $SU(N_f)_V$ -Flavoursymmetrie und $SU(N_f)_A$ -Symmetrie zur Beschreibung der gegensätzlichen Rotation links- und rechtshändiger Quarks. Anders als die Colour-Symmetrie, die als lokale Eichsymmetrie exakt ist, ist die

$SU(3)$ -Flavoursymmetrie nur näherungsweise ungebrochen. Sie beruht auf der Annahme der Gleichheit aller Quarkmassen. Dass die Quarkmassen gegenüber der Nukleonenmasse verschwindend klein sind ($m_u = 2.3 \pm 0.7$ MeV, $m_d = 4.8 \pm 0.7$ MeV und $m_s = 95 \pm 5$ MeV [5]), rechtfertigt die Annahme. Nun lassen sich zwei einfache Fälle unterscheiden: Falls alle Quarkmassen gleich sind, (also $m_u = m_d = m_s = m \neq 0$), ist die $SU(3)$ -Flavoursymmetrie exakt erfüllt. Im Spezialfall, dass alle Quarkmassen gleich Null sind, spricht man von chiraler Symmetrie, gleichbedeutend mit $SU(3)_V \times SU(3)_A$ -Invarianz. Im Gegensatz zum Fall der Flavour-Symmetrie $SU(3)$ ist mit der axialen Symmetrie $SU(3)_A$ aber keine Gruppe assoziiert [6]. Aus diesem Grund definiert man die links- und rechtshändigen Komponenten der Fermionenfelder, die sich unter $SU(3)$ transformieren:

$$\Psi_{R,L} = P_{R,L} \Psi = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \Psi \quad (1.1)$$

Im Falle masseloser Fermionen entkoppeln links- und rechtshändige Felder und jede Lagrangedichte lässt sich als Summe eines links- und eines rechtshändigen Anteils schreiben. Axiale Rotationen lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\Psi \rightarrow \exp(i\alpha\gamma_5 + i\alpha^a \lambda^a \gamma_5) \Psi \quad (1.2)$$

Dabei ist a der Index der Gell-Mann-Matrizen der $SU(3)$ und α ist Parameter der $U(1)$ -Rotation. Die folgende Eigenschaft der chiralen Rotation ist ebenso wichtig wie zunächst paradox erscheinend: Die Matrix γ_5 in der Rotation sorgt dafür, dass chirale Rotationen unter räumlicher Spiegelung ihr Vorzeichen ändern. Solche Rotationen mischen Zustände mit unterschiedlicher Parität. Gleichzeitig vertauscht aber der Paritätsoperator mit dem Hamilton-Operator, da Paritätstransformationen Symmetrietransformationen sind. Chirale Rotationen können somit lediglich Zustände mit demselben Energiezustand mischen. Aufgelöst wird dieser scheinbare Widerspruch dadurch, dass jeder QCD-Zustand einen Partner gleicher Masse, aber gegensätzlicher Parität besitzt. Allerdings wurden solche in der Masse entarteten chiralen Partner nicht beobachtet. Trotz näherungsweiser Exaktheit der chiralen Symmetrie scheint sie für die Natur nicht zuzutreffen. Die Lösung des Paradoxons ist die spontane Brechung der chiralen Symmetrie. Um dies zu erklären, ist es wichtig zu wissen, dass die Invarianz der Wirkung unter einer Transformation nicht bedeuten muss, dass der Grundzustand des betrachteten Systems ebenfalls invariant unter der Transformation ist. Die Situation lässt sich durch die Geschichte von Buridans Esel veranschaulichen [7]. Ein Esel, der sich in der Mitte zwischen zwei gleich großen Heuhaufen befindetet, hat keinen Grund, einen der beiden Haufen vorzuziehen und kann sich folglich nicht entscheiden, von welchem er zuerst fressen soll. Der Philosoph Buridan unterstellte, dass der Esel somit trotz unmittelbarer Nähe zur Nahrung verhungern würde. In Wirklichkeit ist die Situation jedoch so instabil, dass schon die geringste Bewegung in Richtung eines Heuhaufen den Esel befähigen würde, die Symmetrie zu brechen. Ein physikalisches Beispiel dafür ist, dass auch unter Annahme exakter Rotationsinvarianz der Grundzustand der

1 Grundlegendes

meisten Spinsysteme ein ferromagnetischer Zustand (alle Spins zeigen in dieselbe Richtung) und somit nicht symmetrisch ist. Der Ordnungsparameter des Systems ist in diesem Fall die Magnetisierung, also die Ausrichtung der Spins. Im Falle der chiralen Symmetrie ist der Ordnungsparameter das Quark-Kondensat, das durch den Vakuumerwartungswert $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ quantifiziert wird. Im Falle der exakten chiralen Symmetrie sollte dieser Wert gleich Null sein, da sich die Änderungen der links- und rechtshändigen Felder unter Rotation im Mittel gegenseitig aufheben. In Wirklichkeit beträgt der Vakuumerwartungswert des Quarkkondensats:

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \approx - (240\text{MeV})^3 \quad (1.3)$$

schließlich ist die chirale Symmetrie nicht exakt erfüllt. Das Goldstone-Theorem besagt, dass jede spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie in mehr als zwei Dimensionen masselose Teilchen, sogenannte Goldstone-Bosonen, hervorbringt. Die acht als Goldstone-Bosonen identifizierten pseudoskalaren Mesonen π, K, η wären im chiralen Limit alle masselos. Sie beweisen die spontane Brechung der chiralen Symmetrie und erklären die erheblichen Massenunterschiede der chiralen Partner.

2 Theorie des Zerfallsprozesses

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Prinzipien der Quantenfeldtheorie eingeführt. Es wird die Form skalarer und fermionischer Felder als Lösungen der Klein-Gordon- und der Dirac-Gleichung angegeben. Zur quantitativen Beschreibung des Zerfallsprozesses wird die S-Matrix betrachtet. Die Herleitungen sind an die Quellen [11, 12, 13] angelehnt. Es werden natürliche Einheiten verwendet: $\hbar = c = 1$. Der metrische Tensor hat die Form $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

2.1 Skalare Felder

Felder können durch ihr Transformationsverhalten klassifiziert werden. Skalare Felder verhalten sich unter Lorentz-Transformationen wie folgt:

$$\Phi'(X') = \Phi(X) \quad \text{mit} \quad X'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x^\nu \quad (2.1)$$

Aus der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^2) \quad (2.2)$$

lässt sich mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichung für skalare Felder, die sogenannte Klein-Gordon-Gleichung (KGG), ableiten:

$$(\square + m^2) \Phi(X) = 0 \quad (2.3)$$

Die KGG ist eine Bewegungsgleichung für Teilchen mit Spin 0. Sie beschreibt freie Teilchen. Eine Lösung ist die ebene Welle:

$$\Phi(X) = e^{-iP \cdot X} \quad \text{mit} \quad P \cdot X = P_\mu X^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} \quad (2.4)$$

Einsetzen in (2.3) liefert die Energie-Impuls-Beziehung:

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (2.5)$$

Offenbar gibt es zwei Lösungen. Die Energie kann nicht nur positive Werte annehmen, sondern auch negative, was zunächst unphysikalisch erscheint. Zu erklären ist dies durch die Deutung der negativen Energie-Werte als Lösung der KGG für Antiteilchen. Diese besitzen dieselbe Masse wie Teilchen, aber entgegengesetzte Ladung. Bei der Betrachtung der KGG findet man noch ein weiteres Problem, das

sich nicht so einfach aus der Welt schaffen lässt: Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte für skalare Felder lautet:

$$\vec{j} = -i\Phi^*\nabla\Phi + i\Phi\nabla\Phi^* \quad (2.6)$$

Weiterhin muss zwischen der Wahrscheinlichkeitsdichte ρ und der Wahrscheinlichkeitsstromdichte der Zusammenhang

$$\partial_t\rho + \nabla\vec{j} = 0 \quad (2.7)$$

bestehen, da die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zu finden, eine Erhaltungsgröße ist. Setzt man (2.6) in (2.7) ein und verwendet (2.3), um einen Zusammenhang zwischen der zweiten Ableitung nach dem Ort und der zweiten Ableitung nach der Zeit herzustellen, stößt man auf die folgende Bedingung für die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\rho = i(\Phi^*\partial_t\Phi - \Phi\partial_t\Phi^*) \quad (2.8)$$

Setzt man nun die Lösung für freie Teilchen (2.4) ein, erhält man

$$\rho = 2E \quad (2.9)$$

Allerdings kann E auch negative Werte annehmen. Da eine negative Wahrscheinlichkeitsdichte nicht definiert ist, kann ρ nicht ohne Weiteres als solche betrachtet werden.

Um Erzeugung und Vernichtung von Teilchen beschreiben zu können, ist es notwendig, das skalare Feld Φ zu quantisieren. Das Verfahren funktioniert ähnlich wie die kanonische Quantisierung in der Quantenmechanik. Im Zuge dessen werden Ort und Impuls nicht mehr als Funktionen, sondern als Operatoren aufgefasst, die die Vertauschungsrelation

$$[x, p] = i \quad (2.10)$$

erfüllen. Die Quantisierung eines klassischen Feldes nennt man in Anlehnung daran *Zweite Quantisierung*. In diesem Fall behalten Ort und Impuls ihre Eigenschaften als Funktionen, aber Felder $\Phi(X)$ und deren konjugierte Impulse $\pi(X)$ erhalten Operatoreigenschaften. Diese sind folgendermaßen zu verstehen: Die Zustände, in denen sich ein System befinden kann, sind (wie in der Quantenmechanik) Quantenzustände. Allerdings sind es in diesem Fall Zustände des Feldes. Wirken nun Feldoperatoren auf diese Zustände, werden Teilchen erzeugt oder vernichtet. Aufgrund dieser Überlegung und mit Hilfe der freien Lösung (2.4) ist es nun möglich, die allgemeine Lösung der KGG anzugeben. Dazu wird die Wellenzahl k mit $E \rightarrow k_0 = \omega_k = E_k$ und $\vec{p} \rightarrow \vec{k}$ eingesetzt. Unter Verwendung von $\vec{k} = \frac{2\pi\vec{n}}{L}$ und dem Übergang

$$\sum_{\vec{n}} = \sum_{n_x, n_y, n_z} \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \sum_{k_x, k_y, k_z} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \frac{L^3}{(2\pi)^3} \quad \text{mit } V = L^3 \quad (2.11)$$

wird das Gesamtfeld nach den Normalmoden des freien Feldes entwickelt:

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\Phi(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} + \Phi^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} \right) \quad (2.12)$$

Nun wird das zu jeder Mode gehörige Feld durch die skalaren Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ersetzt: $\Phi(\vec{k}) \rightarrow a_{\vec{k}}$, $\Phi^*(\vec{k}) \rightarrow a_{\vec{k}}^\dagger$. Es ergibt sich:

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} \right) \quad (2.13)$$

Der zugehörige konjugierte Impuls lautet

$$\pi(X) = \partial_0 \Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{-i\omega_k}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} \right) \quad (2.14)$$

Aus den Vertauschungsrelationen für das kanonische Feld

$$[\pi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{x}', t)] = -i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.15)$$

$$[\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = 0 \quad (2.16)$$

$$[\Phi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{x}', t)] = 0 \quad (2.17)$$

lassen sich die Vertauschungsrelationen

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (2.18)$$

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = 0 \quad (2.19)$$

$$[a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad (2.20)$$

für die skalaren Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gewinnen. Bisher wurden nur reelle Felder betrachtet. Zur Beschreibung komplexer skalarer Felder führt man die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren für Antiteilchen ein: $c_{\vec{k}}$ und $c_{\vec{k}}^\dagger$. Komplexe Felder beschreiben Teilchen mit Ladung q und Antiteilchen mit Ladung $-q$. Summiert man nun über diejenigen Teilchen-Anteile des Gesamtfeldes, die zu positivem ω_k gehören und über diejenigen Antiteilchen-Anteile, die zu negativem ω_k gehören, erhält man die Gesamt-Lösung für komplexe skalare Felder und deren hermitesch-konjugierte Pendant:

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} + c_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} \right) \quad (2.21)$$

$$\Phi^\dagger(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} + c_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} \right) \quad (2.22)$$

2.2 Fermionische Felder

Zur Beschreibung freier Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ leitet man aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \quad (2.23)$$

die Dirac-Gleichung ab:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0 \quad (2.24)$$

Ψ ist hierbei ein 4-Spinor:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

γ_μ steht für die Dirac-Matrizen. Sie lauten explizit (in Dirac-Darstellung):

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

oder unter Verwendung der Pauli-Matrizen:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Die sogenannte fünfte Dirac-Matrix ist:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Bei der Quantisierung fermionischer Felder ist das Pauli-Prinzip zu berücksichtigen, das besagt, dass sich zwei Fermionen niemals zur selben Zeit im selben Quantenzustand befinden können. Aus diesem Grund erhalten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren einen weiteren Index, den Spin-Index. Mit (2.4) und unter Verwendung der 4-Spinoren $u(\vec{p}, s)$ und $v(\vec{p}, s)$, lässt sich das fermionische Feld als Fourier-Reihe entwickeln:

$$\Psi(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(b_{\vec{p},s} u(\vec{p}, s) e^{-iP \cdot X} + d_{\vec{p},s}^\dagger v(\vec{p}, s) e^{iP \cdot X} \right) \quad (2.33)$$

Die Vertauschungsrelationen für die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren lauten:

$$\{b_{\vec{p},s}, b_{\vec{q},r}^\dagger\} = \delta_{\vec{p}\vec{q}} \delta_{rs} \quad (2.34)$$

$$\{d_{\vec{p},s}, d_{\vec{q},r}^\dagger\} = \delta_{\vec{p}\vec{q}} \delta_{rs} \quad (2.35)$$

$$\{d_{\vec{p},s}, d_{\vec{q},r}\} = \{b_{\vec{p},s}, b_{\vec{q},r}\} = 0 \quad (2.36)$$

$$\{d_{\vec{p},s}, b_{\vec{q},r}^\dagger\} = \{d_{\vec{p},s}, b_{\vec{q},r}\} = 0 \quad (2.37)$$

Das Dirac-adjungierte Feld hat die Form:

$$\bar{\Psi}(X) \equiv \Psi^\dagger \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(d_{\vec{p},s} \bar{v}(\vec{p}, s) e^{-iP \cdot X} + b_{\vec{p},s}^\dagger \bar{u}(\vec{p}, s) e^{iP \cdot X} \right) \quad (2.38)$$

2.3 Die S-Matrix

In diesem Abschnitt soll hergeleitet werden, wie sich Wechselwirkungen zwischen Teilchen, etwa Zweikörper-Zerfälle, formell beschreiben lassen. Die betrachteten Teilchen werden durch die Felder $\phi(X)$ beschrieben. Ein Teilchenzerfall lässt sich in drei Abschnitte gliedern: Den Eingangszustand ϕ_{in} , währenddessen das noch nicht zerfallene Ausgangsteilchen frei vorliegt, den Zerfallsprozess, während welchem es zu Wechselwirkungen kommt, sowie den Endzustand ϕ_{out} , in welchem die Zerfallsprodukte, ohne miteinander zu wechselwirken, vorliegen. Die Dauer des mittleren Abschnitts ist gegenüber den anderen Abschnitten extrem gering. Für die Wechselwirkungsdauer Δt gilt somit:

$$-\infty \ll \Delta t \ll +\infty$$

Im asymptotischen Limes $t \rightarrow \pm\infty$ lassen sich die Felder durch den Operator für freie Teilchen beschreiben:

$$\phi(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left(a_{\vec{k}} e^{-iK \cdot X} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{iK \cdot X} \right) \quad (2.39)$$

Ganz und gar einwandfrei ist diese Annahme freilich nicht. Da wir einen Zerfall betrachten, kann das Ausgangsteilchen (beziehungsweise der Zustand ϕ_{in}) nicht stabil sein. Ein instabiles Teilchen kann sich aber nicht unendlich lange Zeit in demselben Zustand befinden. Somit ergibt die Betrachtung des Teilchens vor unendlich langer Zeit, also im asymptotischen Limes, keinen Sinn. Zur detaillierteren Betrachtung dieses Themas wird auf die Diskussion in Kapitel 4 der Quelle [11] verwiesen. Im Folgenden wird der Übersichtlichkeit halber das Argument X der Operatoren unterdrückt. Die freien Anfangs- und Endzustände sind Fock-Zustände, also Zustände im Fock-Raum, einem Hilbert-Raum, der durch Eigenzustände des Teilchenzahloperators $n = a^\dagger a$ aufgespannt wird. Die werden mit Hilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus dem Vakuum gebildet:

$$|i\rangle = a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \quad (2.40)$$

und

$$|f\rangle = a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger |0\rangle \quad (2.41)$$

Nun soll das Übergangselement zwischen Anfangs- und Endzustand, kurz die S-Matrix, abgeleitet werden: Im Wechselwirkungsbild haben Felder die folgende Form:

$$\phi_{WW}(\vec{x}, t) = e^{iH_0 t} \phi_S e^{-iH_0 t} \quad (2.42)$$

Dabei ist H_0 der freie Anteil der Hamilton-Funktion $H = H_0 + H_{WW}$ und ϕ_S der zeitunabhängige Feldoperator im Schrödinger-Bild. Im Heisenberg-Bild, in dem die Zustände, nicht aber die Operatoren, eine Zeitabhängigkeit besitzen, erscheinen die Feldoperatoren so:

$$\phi_H(\vec{x}, t) = e^{iHt} \phi_S e^{-iHt} \quad (2.43)$$

Lange vor oder nach einer Wechselwirkung ($H_{WW} = 0$) sind die Operatoren im Wechselwirkungs- und im Heisenberg-Bild wegen $H = H_0$ gleich:

$$\phi_H = \phi_{WW} \quad \text{für } t \rightarrow \pm\infty \quad (2.44)$$

Durch das Einfügen zweier Einsen kann man den Zusammenhang zwischen den beiden Bildern für beliebige Zeiten erkennen:

$$\phi_H = e^{iHt} e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} \phi_S e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iHt} = e^{iHt} e^{-iH_0 t} \phi_{WW} e^{iH_0 t} e^{-iHt} \equiv U^{-1}(t) \phi_{WW} U(t) \quad (2.45)$$

Wobei wir den unitären Zeitentwicklungs-Operator $U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}$ identifizieren.

Oder anders ausgedrückt:

$$\phi_{WW} = U(t) \phi_H U^{-1}(t) \quad (2.46)$$

beziehungsweise unter Berücksichtigung der vorherigen Überlegungen für Eingangs- und Ausgangsteilchen:

$$\phi_{in} = U(\infty) \phi_{out} U^\dagger(\infty) \quad (2.47)$$

Für den S-Matrix-Operator, der Anfangs- und Endzustand in Beziehung setzt, gilt:

$$|i\rangle = S|f\rangle \quad (2.48)$$

$$|f\rangle = S^\dagger|i\rangle \quad (2.49)$$

$$\phi_{in} = S\phi_{out}S^\dagger \quad (2.50)$$

Damit identifiziert man die S-Matrix als nichts anderes als:

$$S = \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) \quad (2.51)$$

Die Gestalt des Operators $U(t)$ ermittelt man mit Hilfe von dessen Bewegungsgleichung. Wie man durch Einsetzen erkennen kann, löst $U(t)$ nämlich:

$$\frac{d}{dt}U(t) = H_{WW}(t)U(t) \quad \text{mit} \quad H_{WW}(t) = e^{iH_0t}H_{WW}e^{-iH_0t}$$

Die Lösung ermittelt man durch Integration unter Berücksichtigung der Zeitordnung zu:

$$U(t) = T \left\{ e^{-i \int_{-\infty}^t H_{WW}(t') dt'} \right\}$$

wobei T der Zeitordnungsoperator ist.

Die S-Matrix hat also die Gestalt:

$$S = T \left\{ e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} H_{WW}(t') dt'} \right\}$$

Beachtet man den Vorzeichenwechsel beim Umschreiben dieses Ausdrucks für die Lagrange-Funktion, erhält man:

$$S = T \left\{ e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} L_{WW}(t') dt'} \right\} = T \left\{ e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4X \mathcal{L}_{WW}} \right\}$$

Eine Taylorentwicklung des Ausdrucks liefert

$$S \simeq 1 + i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4X \mathcal{L}_{WW}$$

Der erste Term der Summe lässt den Zustand, auf den er wirkt, unverändert. Er liefert keine für den Zerfall relevanten Informationen. Der für den Zerfall relevante Teil der S-Matrix lautet also:

$$S_{WW} = i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4X \mathcal{L}_{WW}$$

Der Übersichtlichkeit halber wird S_{WW} im Folgenden einfach S genannt und es werden die Integralgrenzen unterdrückt. Das gesuchte Übergangselement lautet damit

$$S_{fi} = \langle f|i \int d^4X \mathcal{L}_{WW}|i\rangle \quad (2.52)$$

Ob es von Null verschieden ist, ob der Zerfall also stattfinden kann oder nicht, hängt von \mathcal{L} ab. Das Quadrat der Übergangsamplitude ist die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Prozesses. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls proportional zum S-Matrix-Quadrat. Aufgrund dessen können im folgenden Kapitel quantitative Aussagen über die Zerfallsbreiten, also die Zerfallswahrscheinlichkeiten pro Zeit, verschiedener Zerfallsprozesse gemacht werden. Der Vollständigkeit halber ist zu erwähnen, dass sich auf demselben Wege nicht nur Zweikörperzerfälle (ein Teilchen zerfällt in zwei andere), sondern auch Zweikörper-Streuprozesse (zwei Teilchen im Eingangskanal) quantifizieren lassen.

3 Zerfall des chiralen Partners des Nukleons in ein Nukleon und ein skalares Teilchen

In diesem Kapitel wird das den Zerfallsrechnungen zugrunde liegende Modell vorgestellt. Es werden zwei Zerfallsbreiten berechnet. Außerdem wird der Bezug zum PANDA-Experiment hergestellt.

3.1 Das Lineare Sigma-Modell

Ein paar Worte vorab zur theoretischen Beschreibung einer spontanen Symmetriebrechung. Im Rahmen des Linearen Sigma-Modells, einer effektiven Theorie der Starken Wechselwirkung, betrachtet man die folgende Lagrangedichte. Sie enthalte N reelle skalare Felder Φ^i :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\Phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\Phi^i)^2]^2 \quad (3.1)$$

Für reelles μ findet spontane Symmetriebrechung statt. Die Lagrangedichte ist invariant unter $O(N)$ -Rotationen, die beschrieben werden durch:

$$\vec{\phi} \mapsto R\vec{\phi}, \quad R \in O(N), \quad R^T R = R R^T = 1 \quad (3.2)$$

Sei $(\Phi_0^i)^2$ der Satz von Feldern, der den Potenzialterm $V(\Phi^i) = -\frac{1}{2}\mu^2(\Phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}[(\Phi^i)^2]^2$ minimiert, dann ist (bei reellem μ):

$$(\Phi_0^i)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad (3.3)$$

Die Bedingung (3.3) gibt nur den Betrag, nicht die Richtung von Φ_0^i vor. Wählt man zum Beispiel die Richtung des n -ten Einheitsvektors, erhält man:

$$\Phi_0^i = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (3.4)$$

Die Felder lassen sich dann darstellen als:

$$\Phi^i(X) = (\pi^k(X), \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \sigma(X)) \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (3.5)$$

$\pi(X)$ ist ein masseloses, $\sigma(X)$ ein massives Feld. Damit lässt sich die Lagrangedichte schreiben als:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}(\pi^k)^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}(\pi^k)^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}[(\pi^k)^2]^2 \quad (3.6)$$

Die Lagrangedichte ist $O(N - 1)$ -Rotationsinvariant, also invariant unter Drehung der Felder $\pi(X)$ um sich selbst. Stellt man sich das Potenzial geformt wie ein mexikanischer Hut vor (Abb. 3.1), entspricht dies einer Oszillation der Felder in tangentialer Richtung. Kurz gesagt: Hinter der wohlgerneht immer noch bestehenden, aber spontan gebrochenen $O(N)$ -Symmetrie kommt eine $O(N - 1)$ -Symmetrie zum Vorschein. Das Lineare Sigma-Modell lässt sich auf Axial-Vektormesonen erweitern. Details dazu finden sich in der Literatur [8, 9].

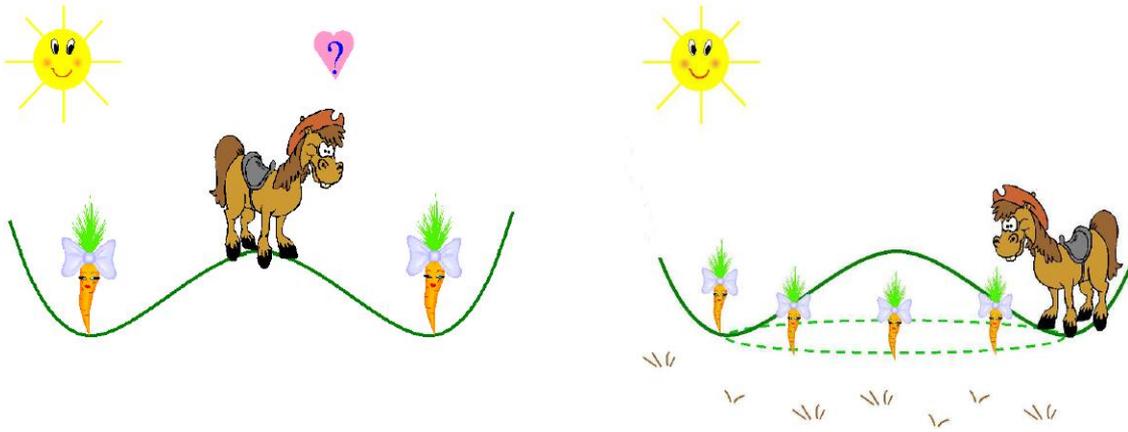


Abbildung 3.1: Das Pony kann spontan entscheiden, welche Möhre es zuerst verspeisen soll. Alle Möhren sind von seiner Position auf der Hügelkuppe gleich weit entfernt. Hat es eine der Möhren erreicht, kann es ohne Weiteres auch zu den übrigen gelangen. [10]

3.2 Vorstellung des erweiterten Linearen Sigma-Modells

Das erweiterte Lineare Sigma-Modell beantwortet die Frage, ob es eine nukleonische Lagrangedichte gibt, die chiral invariant ist und gleichzeitig sowohl Felder mit positiver als auch solche mit negativer Parität beschreibt (Nukleonen erhalten per Konvention positive Parität). Die chirale Invarianz erlaubt einen Term proportional zu m_0 , also zu einem Massenterm, der nicht auf das Quark-Kondensat zurückgeht: $\mathcal{L}_{m_0} = m_0 (\bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1 - \bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2)$. Die chirale Transformation der Felder ist gegeben durch:

$$\Psi_{1L} \rightarrow U_L \Psi_{1L} \quad \Psi_{2L} \rightarrow U_R \Psi_{2L} \quad (3.7)$$

$$\Psi_{1R} \rightarrow U_R \Psi_{1R} \quad \Psi_{2R} \rightarrow U_L \Psi_{2R} \quad (3.8)$$

Diese Konfiguration wird Mirror-Assignment genannt. Die Spinoren Ψ_1 und Ψ_2 werden mit den physikalischen Feldern N und N^* auf folgende Weise verbunden:

$$\begin{pmatrix} N \\ N^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2 \cosh \delta}} \begin{pmatrix} e^{\frac{\delta}{2}} & \gamma_5 e^{-\frac{\delta}{2}} \\ \gamma_5 e^{-\frac{\delta}{2}} & -e^{\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \cosh \delta = \frac{m_N + m_{N^*}}{2m_0} \quad (3.9)$$

Um herauszufinden, ob auf Basis dieses Modells physikalisch sinnvolle, also mit dem Experiment vereinbare Ergebnisse produziert werden können, sollen im Folgenden Zweikörperzerfälle untersucht werden.

3.3 Zerfallsrechnung

3.3.1 Beteiligte Teilchen

Zunächst soll der Zerfall des chiralen Partners des Nukleons N^* in ein Nukleon N und einen Tetraquark-Zustand, das skalare Teilchen χ , betrachtet werden [14]. χ wird mit der Resonanz $f_0(600)$ identifiziert. Für N^* gibt es zwei Kandidaten: den leichtesten Zustand mit passender Quantenzahl ($J^P = \frac{1}{2}^-$) $N(1535)$ und den nächstschwereren $N(1650)$ [15]. Die beteiligten Fermionen werden durch die Spinoren Ψ_1 und Ψ_2 dargestellt. Ψ_1 hat positive Parität und Ψ_2 negative. Der Wechselwirkungsterm ist

$$\mathcal{L}_{int} = a\chi (\bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1 - \bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2) \quad (3.10)$$

mit a als dimensionsloser Kopplungskonstante. Die Masse des skalaren Teilchens χ ist M , die Massen der Fermionen sind m_N und m_{N^*} . Die Dimensionslosigkeit von a lässt sich durch die folgende Überlegung einsehen: Wenn natürliche Einheiten verwendet werden, also $\hbar = c = 1$ gilt, ist die Wirkung $S = \int \mathcal{L} d^4 X$ dimensionslos. Die Lagrangedichte \mathcal{L} hat somit die Einheit $[Masse]^4$, denn die Einheit einer Raum-Zeit-Komponente ist gerade die inverse Masse. Skalare Felder besitzen die Einheit $[Masse]$, fermionische Felder die Einheit $[Masse]^{\frac{3}{2}}$. Eine Dimensionsanalyse des betrachteten Wechselwirkungsterms ergibt:

$$[a] = \frac{[\mathcal{L}]}{[\bar{\Psi}][\Psi][\chi]} = \frac{[Masse]^4}{[Masse]^{\frac{3}{2}} [Masse]^{\frac{3}{2}} [Masse]} = 1$$

Nun soll das Transformationsverhalten der Lagrangedichte untersucht werden. Da a reell ist, genügt es, den Teil in Klammern zu betrachten.

\mathcal{L}_{int} ist **hermitesch**:

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1 - \bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2)^\dagger &= \Psi_1^\dagger \gamma_5^\dagger \bar{\Psi}_2^\dagger - \Psi_2^\dagger \gamma_5^\dagger \bar{\Psi}_1^\dagger \\ &= \Psi_1^\dagger \gamma_5 (\Psi_2^\dagger \gamma^0)^\dagger - \Psi_2^\dagger \gamma_5 (\Psi_1^\dagger \gamma^0)^\dagger \\ &= -\Psi_1^\dagger \gamma^0 \gamma_5 \Psi_2 + \Psi_2^\dagger \gamma^0 \gamma_5 \Psi_1 \\ &= \bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1 - \bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

3 Zerfall des chiralen Partners des Nukleons in ein Nukleon und ein skalares Teilchen

Hierbei wurde die Hermitezität von γ_5 und γ^0 sowie $\{\gamma_5, \gamma^0\} = 0$ verwendet.
 \mathcal{L}_{int} ist **paritätsinvariant**: Die Paritätstransformation der Spinoren lautet:

$$\Psi_1 \rightarrow \gamma^0 \Psi_1 \quad (3.12)$$

$$\Psi_2 \rightarrow -\gamma^0 \Psi_2 \quad (3.13)$$

Damit folgt für den ersten Term in der Klammer:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1 &\rightarrow (-\gamma^0 \Psi_2)^T \gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 \Psi_1 \\ &= \Psi_2^\dagger \gamma^0 \gamma_5 \Psi_1 \\ &= \bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Analog zeigt man die Invarianz des zweiten Terms.

\mathcal{L}_{int} ist **chiral-invariant**: Um dies zu zeigen, bringt man die relevanten Terme auf die Form:

$$\bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1 = -\bar{\Psi}_{2R} \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{2L} \Psi_{1R} \quad (3.15)$$

$$\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2 = -\bar{\Psi}_{1L} \Psi_{2R} + \bar{\Psi}_{1R} \Psi_{2L} \quad (3.16)$$

Diese Terme sind nämlich, wie man durch Einsetzen sofort sieht, unter der in den Gleichungen (3.7) und (3.8) angegebenen Transformation invariant. Mit der Ersetzung $\Psi = P_R \Psi + P_L \Psi = \Psi_R + \Psi_L$, wobei $P_{R,L}$ durch Gleichung (1.1) gegeben ist, findet man für den ersten Term der Klammer:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1 &= (\bar{\Psi}_{2R} + \bar{\Psi}_{2L}) \gamma_5 (\Psi_{1R} + \Psi_{1L}) \\ &= \bar{\Psi}_{2R} \gamma_5 \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R} \gamma_5 \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{2L} \gamma_5 \Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2L} \gamma_5 \Psi_{1L} \\ &= \bar{\Psi}_{2R} \gamma_5 \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{2L} \gamma_5 \Psi_{1R} \\ &= \bar{\Psi}_{2R} (2P_L - \mathbf{1}) \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{2L} (2P_L + \mathbf{1}) \Psi_{1R} \\ &= -\bar{\Psi}_{2R} \Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{2L} \Psi_{1R} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die letzten drei Umformungen vollzieht man am besten durch Rückwärtseinsetzen nach. Analoges Vorgehen bringt auch den zweiten Term der Klammer in die oben angegebene Form. Damit ist die chirale Invarianz der Lagrangedichte gezeigt.

3 Zerfall des chiralen Partners des Nukleons in ein Nukleon und ein skalares Teilchen

\mathcal{L}_{int} ist **invariant unter Ladungskonjugation**:

Die Spinoren weisen das folgende Transformationsverhalten auf (man beachte das Vorzeichen bei Ψ_2):

$$\Psi_1 \rightarrow i\gamma^2\Psi_1^* \quad (3.18)$$

$$\Psi_2 \rightarrow -i\gamma^2\Psi_2^* \quad (3.19)$$

Für den ersten Term in der Klammer findet man, dass er in den zweiten Term mit anderem Vorzeichen übergeht:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_2\gamma_5\Psi_1 &= \Psi_2^\dagger\gamma^0\gamma_5\Psi_1 \rightarrow (-i\gamma^2\Psi_2^\dagger)^\dagger\gamma^0\gamma_5(i\gamma^2\Psi_1^*) \\ &= i\Psi_2^T(-\gamma^2)\gamma^0\gamma_5i\gamma^2\Psi_1^* \\ &= \Psi_2^T\gamma^2\gamma^0\gamma_5\gamma^2\Psi_1^* \\ &= \Psi_2^T\gamma^0(\gamma^2)^2\gamma_5\Psi_1^* \\ &= -\Psi_2^T\gamma^0\gamma_5\Psi_1^* \\ &= \Psi_2^T\gamma_5^T\gamma^{0T}(\Psi_1^\dagger)^T \\ &= -\Psi_1^\dagger\gamma^0\gamma_5\Psi_2 \\ &= -\bar{\Psi}_1\gamma_5\Psi_2 \end{aligned}$$

Analoges Verhalten zeigt auch der zweite Term: $\bar{\Psi}_1\gamma_5\Psi_2 \rightarrow -\bar{\Psi}_2\gamma_5\Psi_1$. Insgesamt ist die Lagrangedichte deshalb invariant unter Ladungskonjugation.

Die beteiligten physikalischen Felder N und N^* sind mit den Spinoren Ψ_1 und Ψ_2 entsprechend Gleichung (3.9) auf folgende Weise verknüpft:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\cosh\delta}} \left(Ne^{\frac{\delta}{2}} + \gamma_5 N^* e^{-\frac{\delta}{2}} \right) \quad (3.20)$$

sowie

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\cosh\delta}} \left(\gamma_5 N e^{-\frac{\delta}{2}} - N^* e^{\frac{\delta}{2}} \right) \quad (3.21)$$

beziehungsweise

$$\bar{\Psi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\cosh\delta}} \left(\bar{N} e^{\frac{\delta}{2}} - \bar{N}^* \gamma_5 e^{-\frac{\delta}{2}} \right) \quad (3.22)$$

sowie

$$\bar{\Psi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\cosh\delta}} \left(-\bar{N} \gamma_5 e^{-\frac{\delta}{2}} - \bar{N}^* e^{\frac{\delta}{2}} \right) \quad (3.23)$$

Somit ergibt sich für die Lagrangedichte die Form:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= a\chi \frac{1}{2 \cosh \delta} \left(-\bar{N}\gamma_5 e^{\frac{-\delta}{2}} - \bar{N}^* e^{\frac{\delta}{2}} \right) \gamma_5 \left(N e^{\frac{\delta}{2}} + \gamma_5 N^* e^{\frac{-\delta}{2}} \right) \\
&\quad - \left(\bar{N} e^{\frac{\delta}{2}} - \bar{N}^* \gamma_5 e^{\frac{-\delta}{2}} \right) \gamma_5 \left(\gamma_5 N e^{\frac{-\delta}{2}} - N^* e^{\frac{\delta}{2}} \right) \\
&= a\chi \frac{1}{2 \cosh \delta} \left(-\bar{N}\gamma_5\gamma_5 N - \bar{N}\gamma_5\gamma_5\gamma_5 N^* e^{-\delta} - \bar{N}^* \gamma_5 N e^{\delta} - \bar{N}^* \gamma_5\gamma_5 N^* \right. \\
&\quad \left. - \bar{N}\gamma_5\gamma_5 N + \bar{N}\gamma_5 N^* e^{\delta} + \bar{N}^* \gamma_5\gamma_5\gamma_5 N e^{-\delta} - \bar{N}^* \gamma_5\gamma_5 N^* \right) \\
&= a\chi \frac{1}{2 \cosh \delta} \left(-2\bar{N}N - 2\bar{N}^* N^* + \bar{N}\gamma_5 N^* \left(e^{\delta} - e^{-\delta} \right) + \bar{N}^* \gamma_5 N \left(e^{-\delta} - e^{\delta} \right) \right) \\
&= -a\chi \frac{1}{\cosh \delta} \left(\bar{N}N + \sinh \delta \bar{N}^* \gamma_5 N - \sinh \delta \bar{N}\gamma_5 N^* + \bar{N}^* N^* \right) \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Wobei von den Beziehungen

$$\gamma_5^2 = 1 \tag{3.25}$$

und

$$\sinh \delta = \frac{1}{2} \left(e^{\delta} - e^{-\delta} \right) \tag{3.26}$$

Gebrauch gemacht wurde.

Weiter zu betrachten sind hierbei nur die mit γ_5 versehenen Terme, denn die übrigen beschreiben keine Zerfallsprozesse.

Zunächst soll der erste Term untersucht werden. Die Feldoperatoren haben die folgende Form:

$$\bar{N}^*(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},s} \sqrt{\frac{m_{N^*}}{E_p}} \left(\tilde{d}_{\vec{p},s} \bar{v}(\vec{p},s) e^{-iP \cdot X} + \tilde{b}_{\vec{p},s}^\dagger \bar{u}(\vec{p},s) e^{iP \cdot X} \right) \tag{3.27}$$

sowie

$$N(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}_1,r} \sqrt{\frac{m_N}{E_{k_1}}} \left(b_{\vec{k}_1,r} u(\vec{k}_1,r) e^{-iK_1 \cdot X} + d_{\vec{k}_1,r}^\dagger v(\vec{k}_1,r) e^{iK_1 \cdot X} \right) \tag{3.28}$$

und

$$\chi(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}_2} \frac{1}{\sqrt{2E_{k_2}}} \left(a_{\vec{k}_2} e^{-iK_2 \cdot X} + a_{\vec{k}_2}^\dagger e^{iK_2 \cdot X} \right) \tag{3.29}$$

Hierbei wurde sich der sogenannten skalaren Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren a_{k_2} und $a_{k_2}^\dagger$, sowie der fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $b_{\vec{k}_1,s}$, $b_{\vec{k}_2,s}^\dagger$, $d_{\vec{k}_2,s}$ und $d_{\vec{k}_1,s}^\dagger$ bedient. Für diese Operatoren gelten die wichtigen Relationen (2.34) und (2.18).

Alle anderen Kommutatoren und Antikommutatoren wie zum Beispiel $[a_{\vec{p}}, b_{\vec{q},s}^\dagger]$ verschwinden. Alle betrachteten Zerfälle sollen im Ruhesystem des Ausgangsteilchens ausgewertet werden. In diesem Fall ist sein Impuls \vec{p} folglich 0. Sein Viererimpulsvektor nimmt die einfache Form $P = (E_p, \vec{0})^T = (m_p, \vec{0})^T$ an. Die beim

Zerfall entstehenden Teilchen müssen aufgrund der Impulserhaltung entgegengesetzte, aber betragsgleiche Impulse \vec{k}_1 und $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1$ aufweisen. Ihre Viererimpulsvektoren lauten: $K_1 = (E_{k_1}, \vec{k}_1)^T$ und $K_2 = (E_{k_2}, \vec{k}_2)^T$, wobei $E_{k_i} = \sqrt{m_{k_i}^2 + \vec{k}_i^2}$.

3.3.2 Die S-Matrix

Bei der Untersuchung von Teilchenzerfällen geht es vor allem um die Frage, wie wahrscheinlich es ist, dass der asymptotische Zustand des Ausgangsteilchens vor dem Zerfall $|Anfang(\vec{p})\rangle$ nach dem Zerfall in den asymptotischen Zustand der Zerfallsprodukte $|Ende(\vec{k}_i)\rangle$ übergeht. Unter asymptotisch versteht man die Betrachtung der Zustände unendlich lange vor bzw. nach dem Zerfall. Für eine quantitative Analyse wird, wie oben erwähnt, die S-Matrix eingeführt. So lässt sich der Übergang auch schreiben als:

$$\langle Ende(\vec{k}_i) | Anfang(\vec{p}) \rangle = \langle out | S | in \rangle = S_{fi} \quad (3.30)$$

Anfangs- und Endzustand werden mit den skalaren und fermionischen Erzeugungsoperatoren unter Berücksichtigung der Baryonenzahlerhaltung geschrieben als:

$$|i\rangle = \tilde{b}_{\vec{p}, s'}^\dagger |0\rangle \quad (3.31)$$

und

$$|f\rangle = a_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_1, r'}^\dagger |0\rangle \quad (3.32)$$

3 Zerfall des chiralen Partners des Nukleons in ein Nukleon und ein skalares Teilchen

Die S-Matrix für $\mathcal{L}_{int} = a\chi \frac{\sinh \delta}{\cosh \delta} \bar{N}^* \gamma_5 N = a\chi \tanh \delta \bar{N}^* \gamma_5 N$ lautet:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle f|S|i\rangle = \langle f|i \int d^4X \mathcal{L}_{int}|i\rangle \\
&= \frac{a \tanh \delta \sqrt{m_N m_{N^*}}}{V^{\frac{3}{2}} \sqrt{2E_{k_2} E_p E_{k_1}}} \\
&\times \langle 0|a_{\vec{k}_2}^- b_{\vec{k}_1, r'}^- \int d^4X \\
&\times \sum_{\vec{k}_2} \left(a_{\vec{k}_2}^- e^{iK_2 \cdot X} + a_{\vec{k}_2}^{\dagger} e^{iK_2 \cdot X} \right) \\
&\times \sum_{\vec{p}, s} \left(\tilde{d}_{\vec{p}, s} \bar{v}(\vec{p}, s) e^{-iP \cdot X} + \tilde{b}_{\vec{p}, s}^{\dagger} \bar{u}(\vec{p}, s) e^{iP \cdot X} \right) \gamma_5 \\
&\times \sum_{\vec{k}_2, r} \left(b_{\vec{k}_1, r}^- u(\vec{k}_1, r) e^{-iK_1 \cdot X} + d_{\vec{k}_1, r}^{\dagger} v(\vec{k}_1, r) e^{iK_1 \cdot X} \right) \tilde{b}_{\vec{p}', s'}^{\dagger} |0\rangle \\
&\propto \langle 0|a_{\vec{k}_2}^- b_{\vec{k}_1, r'}^- a_{\vec{k}_2}^- \tilde{d}_{\vec{p}, s} b_{\vec{k}_1, r}^- \tilde{b}_{\vec{p}', s'}^{\dagger} e^{-i(K_2+P+K_1)X} \bar{v} \gamma_5 u \\
&+ a_{\vec{k}_2}^- b_{\vec{k}_1, r'}^- a_{\vec{k}_2}^{\dagger} \tilde{d}_{\vec{p}, s} b_{\vec{k}_1, r}^- \tilde{b}_{\vec{p}', s'}^{\dagger} e^{-i(-K_2+P+K_1)X} \bar{v} \gamma_5 u \\
&+ a_{\vec{k}_2}^- b_{\vec{k}_1, r'}^- a_{\vec{k}_2}^- \tilde{b}_{\vec{p}, s}^{\dagger} b_{\vec{k}_1, r}^- \tilde{b}_{\vec{p}', s'}^{\dagger} e^{-i(K_2-P+K_1)X} \bar{u} \gamma_5 u \\
&+ a_{\vec{k}_2}^- b_{\vec{k}_1, r'}^- a_{\vec{k}_2}^{\dagger} \tilde{b}_{\vec{p}, s}^{\dagger} b_{\vec{k}_1, r}^- \tilde{b}_{\vec{p}', s'}^{\dagger} e^{-i(-K_2-P+K_1)X} \bar{u} \gamma_5 u \\
&+ a_{\vec{k}_2}^- b_{\vec{k}_1, r'}^- a_{\vec{k}_2}^- \tilde{d}_{\vec{p}, s} d_{\vec{k}_1, r}^{\dagger} \tilde{b}_{\vec{p}', s'}^{\dagger} e^{-i(K_2+P-K_1)X} \bar{v} \gamma_5 v \\
&+ a_{\vec{k}_2}^- b_{\vec{k}_1, r'}^- a_{\vec{k}_2}^{\dagger} \tilde{d}_{\vec{p}, s} d_{\vec{k}_1, r}^{\dagger} \tilde{b}_{\vec{p}', s'}^{\dagger} e^{-i(-K_2+P-K_1)X} \bar{u} \gamma_5 v \\
&+ a_{\vec{k}_2}^- b_{\vec{k}_1, r'}^- a_{\vec{k}_2}^- \tilde{b}_{\vec{p}, s}^{\dagger} d_{\vec{k}_1, r}^{\dagger} \tilde{b}_{\vec{p}', s'}^{\dagger} e^{-i(K_2-P-K_1)X} \bar{u} \gamma_5 v \\
&+ a_{\vec{k}_2}^- b_{\vec{k}_1, r'}^- a_{\vec{k}_2}^{\dagger} \tilde{b}_{\vec{p}, s}^{\dagger} d_{\vec{k}_1, r}^{\dagger} \tilde{b}_{\vec{p}', s'}^{\dagger} e^{-i(-K_2-P-K_1)X} \bar{u} \gamma_5 v |0\rangle \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Formeln (2.34) und (2.18) sowie $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$ und $\langle 0|a_{\vec{p}}^{\dagger} = 0$ erkennt man, dass Erzeuger und Vernichter in allen Fällen derart auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ wirken, dass die S-Matrix verschwindet.

Nun wird die S-Matrix für $\mathcal{L}_{int} = a\chi \tanh \delta \bar{N} \gamma_5 N^*$ betrachtet. In diesem Fall lauten die fermionischen Felder:

$$\bar{N}(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}_1, s} \sqrt{\frac{m_N}{E_{k_1}}} \left(d_{\vec{k}_1, s}^- \bar{v}(\vec{k}_1, s) e^{-iK_1 \cdot X} + b_{\vec{k}_1, s}^{\dagger} \bar{u}(\vec{k}_1, s) e^{iK_1 \cdot X} \right) \tag{3.34}$$

und

$$N^*(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, s} \sqrt{\frac{m_{N^*}}{E_p}} \left(\tilde{b}_{\vec{p}, r} \tilde{u}(\vec{p}, r) e^{-iP \cdot X} + \tilde{d}_{\vec{p}, r}^{\dagger} v(\vec{p}, r) e^{iP \cdot X} \right) \tag{3.35}$$

Die S-Matrix lautet in diesem Fall:

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= \langle f|S|i\rangle = \langle f|i \int d^4X \mathcal{L}_{int}|i\rangle \\
 &= \frac{a \tanh \delta \sqrt{m_N m_{N^*}}}{V^{\frac{3}{2}} \sqrt{2E_{k_2} E_p E_{k_1}}} \langle 0|a_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_1, s'} \int d^4X \\
 &\times \sum_{\vec{k}_2} (a_{\vec{k}_2} e^{iK_2 \cdot X} + a_{\vec{k}_2}^\dagger e^{iK_2 \cdot X}) \\
 &\times \sum_{\vec{k}_1, s} (d_{\vec{k}_1, s} \bar{v}(\vec{k}_1, s) e^{-iK_1 \cdot X} + b_{\vec{k}_1, s}^\dagger \bar{u}(\vec{k}_1, s) e^{iK_1 \cdot X}) \gamma_5 \\
 &\times \sum_{\vec{p}, r} (\tilde{b}_{\vec{p}, r} \tilde{u}(\vec{p}, r) e^{-iP \cdot X} + \tilde{d}_{\vec{p}, r}^\dagger \tilde{v}(\vec{p}, r) e^{iP \cdot X}) \tilde{b}_{\vec{p}', r'}^\dagger |0\rangle \\
 &\propto \langle 0|a_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_1, s'} a_{\vec{k}_2}^\dagger d_{\vec{k}_1, s} \tilde{b}_{\vec{p}, r} \tilde{b}_{\vec{p}', r'}^\dagger e^{-i(K_2+P+K_1)X} \bar{v} \gamma_5 \tilde{u} \\
 &+ a_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_1, s'} a_{\vec{k}_2}^\dagger d_{\vec{k}_1, s} \tilde{b}_{\vec{p}, r} \tilde{b}_{\vec{p}', r'}^\dagger e^{-i(-K_2+P+K_1)X} \bar{v} \gamma_5 \tilde{u} \\
 &+ a_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_1, s'} a_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_1, s} \tilde{b}_{\vec{p}, r} \tilde{b}_{\vec{p}', r'}^\dagger e^{-i(K_2+P-K_1)X} \bar{u} \gamma_5 \tilde{u} \\
 &+ a_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_1, s'} a_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_1, s} \tilde{b}_{\vec{p}, r} \tilde{b}_{\vec{p}', r'}^\dagger e^{-i(-K_2+P-K_1)X} \bar{u} \gamma_5 \tilde{u} \\
 &+ a_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_1, s'} a_{\vec{k}_2}^\dagger d_{\vec{k}_1, s} \tilde{d}_{\vec{p}, r}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}', r'}^\dagger e^{-i(K_2-P+K_1)X} \bar{v} \gamma_5 \tilde{v} \\
 &+ a_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_1, s'} a_{\vec{k}_2}^\dagger d_{\vec{k}_1, s} \tilde{d}_{\vec{p}, r}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}', r'}^\dagger e^{-i(-K_2+P-K_1)X} \bar{v} \gamma_5 \tilde{v} \\
 &+ a_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_1, s'} a_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_1, s} \tilde{d}_{\vec{p}, r}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}', r'}^\dagger e^{-i(K_2-P-K_1)X} \bar{u} \gamma_5 \tilde{v} \\
 &+ a_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_1, s'} a_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_1, s} \tilde{d}_{\vec{p}, r}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}', r'}^\dagger e^{-i(-K_2-P-K_1)X} \bar{u} \gamma_5 \tilde{v} |0\rangle \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Alle Terme verschwinden, nur der folgende nicht:

$$\begin{aligned}
 \langle 0|a_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_1, s'} a_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_1, s} \tilde{b}_{\vec{p}, r} \tilde{b}_{\vec{p}', r'}^\dagger |0\rangle &= \langle 0|a_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_1, s'} a_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_1, s} (\delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{rr'} - \tilde{b}_{\vec{p}', r'}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}, r}) |0\rangle \\
 &= \langle 0|a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_2}^\dagger (\delta_{\vec{k}_1 \vec{k}_1} \delta_{ss'} - b_{\vec{k}_1, s}^\dagger b_{\vec{k}_1, s'}) \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{rr'} |0\rangle \\
 &= \langle 0|(\delta_{\vec{k}_2 \vec{k}_2} + a_{\vec{k}_2}^\dagger a_{\vec{k}_2}) \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{rr'} \delta_{\vec{k}_1 \vec{k}_1} \delta_{ss'} |0\rangle \\
 &= \delta_{\vec{k}_2 \vec{k}_2} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{rr'} \delta_{\vec{k}_1 \vec{k}_1} \delta_{ss'} \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung für die S-Matrix brechen alle Summen zusammen und es bleibt der Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= \frac{\sqrt{m_N m_{N^*}}}{V^{\frac{3}{2}} \sqrt{2E_{k_2} E_p E_{k_1}}} \int d^4X i\mathcal{M} e^{-i(P-K_1-K_2) \cdot X} \\
 &= \frac{\sqrt{m_N m_{N^*}}}{V^{\frac{3}{2}} \sqrt{2E_{k_2} E_p E_{k_1}}} i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta(K_1 + K_2 - P) \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

Der einfacheren Lesbarkeit halber wird der Index, der die Dimension der δ -Distribution angibt, unterdrückt, wobei

$$i\mathcal{M} \equiv ia \tanh \delta \bar{u}(\vec{p}, s) \gamma_5 \tilde{u}(\vec{k}_1, r) \quad (3.39)$$

gesetzt und die Integraldarstellung der δ -Distribution verwandt wurde. Die Zerfallswahrscheinlichkeit ist proportional zum Quadrat der S-Matrix:

$$S_{fi}^2 = \frac{m_N m_{N^*}}{V^3 2E_{k_2} E_p E_{k_1}} |i\mathcal{M}|^2 (2\pi)^8 [\delta(K_1 + K_2 - P)]^2 \quad (3.40)$$

Das Quadrat der δ -Distribution wird mit Hilfe des sogenannten Fermi-Tricks umgeschrieben:

$$\begin{aligned} (2\pi)^8 [\delta(K_1 + K_2 - P)]^2 &= (2\pi)^4 \delta(K_1 + K_2 - P) (2\pi)^4 \delta(K_1 + K_2 - P) \\ &= (2\pi)^4 \delta(K_1 + K_2 - P) \int d^4 X e^{-i(P-K_1-K_2)X} \\ &= (2\pi)^4 \delta(K_1 + K_2 - P) \int d^4 X \\ &= (2\pi)^4 \delta(K_1 + K_2 - P) \int d^3 x \int_0^t dt' \\ &= (2\pi)^4 \delta(K_1 + K_2 - P) V t \end{aligned} \quad (3.41)$$

Integration des S-Matrix-Quadrats über alle möglichen End-Impulse und Summation über alle möglichen Spineinstellungen liefert schließlich die Zerfallswahrscheinlichkeit:

$$P = \frac{m_N m_{N^*}}{V^3 2E_{k_2} E_p E_{k_1}} \frac{1}{2} \sum_{r,s} \int \frac{V d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{V d^3 k_2}{(2\pi)^3} |i\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta(K_1 + K_2 - P) V t \quad (3.42)$$

Damit lautet die Gleichung der Zerfallsbreite $\Gamma = \frac{P}{t}$:

$$\Gamma = \frac{m_N m_{N^*}}{2E_{k_2} E_p E_{k_1} 2\pi^2} \frac{1}{2} \sum_{r,s} \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 |i\mathcal{M}|^2 \delta(K_1 + K_2 - P) \quad (3.43)$$

Zum Lösen des Integrals ist Umschreiben der δ -Distribution notwendig:

$$\delta(K_1 + K_2 - P) = \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \delta(E_{k_1} + E_{k_2} - E_p) \quad (3.44)$$

Wegen der Erhaltung der Gesamtenergie gilt im Ruhesystem von N^* :

$$E_p = m_{N^*} = \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_N^2} + \sqrt{\vec{k}_2^2 + M^2} \quad (3.45)$$

Die δ -Distribution über die Impulse \vec{k}_2 ist direkt auszuführen. Übrig bleibt die Integration über $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 \equiv \vec{k}$. Damit lautet die δ -Distribution der Energien:

$$\delta(E_{k_1} + E_{k_2} - E_p) = \delta\left(\sqrt{k^2 + m_N^2} + \sqrt{k^2 + M^2} - m_{N^*}\right) \equiv \delta(f(k)) \quad (3.46)$$

3 Zerfall des chiralen Partners des Nukleons in ein Nukleon und ein skalares Teilchen

wobei $\vec{k}^2 \equiv k^2$ gesetzt wurde. Zur Auswertung von δ -Distributionen, die eine Funktion beinhalten, verwendet man:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_{0i})}{\left| \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_{0i}} \right|} \quad (3.47)$$

x_{0i} sind dabei die Nullstellen der Funktion. Im betrachteten Fall ergibt sich:

$$\delta(f(k)) = \frac{E_{k_1} E_{k_2}}{k(E_{k_1} + E_{k_2})} (\delta(k - k_f) + \delta(k + k_f)) \quad (3.48)$$

mit der Nullstelle k_f , die man aus der Rechnung

$$\begin{aligned} m_{N^*} &= \sqrt{k_f^2 + m_N^2} + \sqrt{k_f^2 + M^2} \\ \Leftrightarrow m_{N^*}^2 &= k_f^2 + m_N^2 + k_f^2 + M^2 + 2\sqrt{k_f^2 + m_N^2}\sqrt{k_f^2 + M^2} \\ \Leftrightarrow (m_{N^*}^2 - 2k_f^2 - m_N^2 - M^2)^2 &= 4(k_f^2 + M^2)(k_f^2 + m_N^2) \\ \Leftrightarrow m_{N^*}^4 + m_N^4 + M^4 - k_f^2(4m_{N^*}^2 - 4m_N^2 - 4M^2) - 2m_N^2 m_{N^*}^2 - 2m_{N^*}^2 M^2 \\ &= k_f^2(4M^2 + 4m_N^2) + 2M^2 m_N^2 \\ \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{m_{N^*}^4 + m_N^4 + M^4 - 2m_N^2 m_{N^*}^2 - 2m_{N^*}^2 M^2 - 2m_N^2 M^2}{4m_{N^*}^2}} &= k_f \end{aligned} \quad (3.49)$$

erhält. Damit ergibt sich die Zerfallsbreite zu

$$\Gamma = \frac{m_N m_{N^*}}{2E_{k_2} E_p E_{k_1} 2\pi^2} \frac{1}{2} \sum_{r,s} \int d^3k |i\mathcal{M}|^2 \frac{1}{k} \left(\frac{E_{k_1} E_{k_2}}{E_{k_1} + E_{k_2}} \right) (\delta(k - k_f) + \delta(k + k_f)) \quad (3.50)$$

Einige Werte lassen sich kürzen. Nun wird zu Kugelkoordinaten übergegangen. Da die k -Koordinate dabei keine negativen Werte annimmt, bleibt nur eine δ -Distribution auszuwerten:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{m_N m_{N^*}}{2E_p 2\pi^2} \frac{1}{2} \sum_{r,s} \int k^2 dk d\Omega |i\mathcal{M}|^2 \frac{1}{k} \left(\frac{\delta(k - k_f)}{E_{k_1} + E_{k_2}} \right) \\ &= \frac{4\pi m_N m_{N^*}}{2\pi^2 2m_{N^*}} \frac{1}{2} \sum_{r,s} |i\mathcal{M}|^2 \frac{k_f}{E_{k_1} + E_{k_2}} \\ &= \frac{m_N}{2\pi m_{N^*}} \frac{1}{2} \sum_{r,s} |i\mathcal{M}|^2 k_f \end{aligned} \quad (3.51)$$

Zur Berechnung der Amplitude $\frac{1}{2} \sum_{r,s} |i\mathcal{M}|^2$ bedient man sich der Zusammenhänge

$$\sum_s u_\alpha(\vec{k}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, s) = \left(\frac{\gamma^\mu K_\mu + m}{2m} \right)_{\alpha\beta} \quad (3.52)$$

3 Zerfall des chiralen Partners des Nukleons in ein Nukleon und ein skalares Teilchen

$$-\sum_s v_{\alpha\beta}(\vec{k}, s)\bar{v}_\beta(\vec{k}, s) = \left(\frac{-\gamma^\mu K_\mu + m}{2m_N}\right)_{\alpha\beta} \quad (3.53)$$

$$\text{Tr}[1] = 4 \quad (3.54)$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu P_\mu \gamma_5 \gamma_\mu K_\mu] = -4P \cdot K \quad (3.55)$$

$$\gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 = -\gamma_5 \quad (3.56)$$

und nutzt aus, dass Spuren über ungerade Anzahlen von Dirac-Matrizen verschwinden und dass die zyklische Vertauschung der Spur-Elemente an deren Wert nichts ändert. Unter Beachtung der Viererimpulserhaltung

$$\begin{aligned} P &= K_1 + K_2 \\ \Leftrightarrow P - K_1 &= K_2 \\ \Leftrightarrow P^2 + K_1^2 - 2P \cdot K_1 &= K_2^2 \\ \Leftrightarrow m_N^2 + m_{N^*}^2 - 2P \cdot K_1 &= M^2 \\ \Leftrightarrow \frac{m_N^2 + m_{N^*}^2 - M^2}{2} &= P \cdot K_1 \end{aligned} \quad (3.57)$$

berechnet man nun:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{r,s} |i\mathcal{M}|^2 &\propto \frac{1}{2} \sum_{r,s} \bar{u}(\vec{k}_1, s) \gamma_5 \tilde{u}(\vec{p}, r) \left[\bar{u}(\vec{k}_1, s) \gamma_5 \tilde{u}(\vec{p}, r) \right]^\dagger \\
&= \frac{1}{2} \sum_{r,s} \bar{u}(\vec{k}_1, s) \gamma_5 \tilde{u}(\vec{p}, r) \tilde{u}^\dagger(\vec{p}, r) \gamma_5 \gamma^0 u(\vec{k}_1, s) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{r,s} \bar{u}(\vec{k}_1, s) \gamma_5 \tilde{u}(\vec{p}, r) \tilde{u}^\dagger(\vec{p}, r) \gamma^0 \gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 u(\vec{k}_1, s) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{r,s} \bar{u}(\vec{k}_1, s) \gamma_5 \tilde{u}(\vec{p}, r) \bar{\tilde{u}}(\vec{p}, r) \gamma_5 u(\vec{k}_1, s) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{r,s} \bar{u}_\alpha(\vec{k}_1, s) (\gamma_5)_{\alpha\beta} \tilde{u}_\beta(\vec{p}, r) \bar{\tilde{u}}_\mu(\vec{p}, r) (\gamma_5)_{\mu\nu} u_\nu(\vec{k}_1, s) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_r (\gamma_5)_{\alpha\beta} \tilde{u}_\beta(\vec{p}, r) \bar{\tilde{u}}_\mu(\vec{p}, r) \sum_s (\gamma_5)_{\mu\nu} u_\nu(\vec{k}_1, s) \bar{u}_\alpha(\vec{k}_1, s) \\
&= -\frac{1}{2} (\gamma_5)_{\alpha\beta} \left(\frac{\gamma^\mu P_\mu + m_{N^*}}{2m_{N^*}} \right)_{\beta\mu} (\gamma_5)_{\mu\nu} \left(\frac{\gamma^\mu K_{1\mu} + m_N}{2m_N} \right)_{\nu\alpha} \\
&= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\frac{\gamma^\mu P_\mu + m_{N^*}}{2m_{N^*}} \right) \gamma_5 \left(\frac{\gamma^\mu K_{1\mu} + m_N}{2m_N} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{8m_N m_{N^*}} \text{Tr} \left[\gamma_5 \gamma^\mu P_\mu \gamma_5 \gamma^\mu K_{1\mu} + m_{N^*} \gamma_5 \gamma_5 \gamma^\mu K_{1\mu} + \gamma_5 \gamma^\mu P_\mu \gamma_5 m_N + \gamma_5 m_{N^*} \gamma_5 m_N \right] \\
&= -\frac{1}{8m_N m_{N^*}} \text{Tr} \left[\gamma_5 \gamma^\mu P_\mu \gamma_5 \gamma^\mu K_{1\mu} + m_{N^*} m_N 1 \right] \\
&= -\frac{1}{8m_N m_{N^*}} [-4P \cdot K_1 + 4m_{N^*} m_N] \\
&= \frac{m_{N^*}^2 + m_N^2 - M^2 - 2m_N m_{N^*}}{4m_N m_{N^*}} \\
&= \frac{(m_{N^*} + m_N)^2 - M^2}{4m_N m_{N^*}} \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Damit folgt unter Berücksichtigung der Vorfaktoren aus Gleichung (3.39) mit Gleichung (3.51) für die Zerfallsbreite:

$$\boxed{\Gamma_{N^* \rightarrow \chi \bar{N}} = \frac{a^2 \tanh^2 \delta}{8\pi m_{N^*}^2} ((m_{N^*} + m_N)^2 - M^2) k_f} \tag{3.59}$$

3.3.3 Werte einsetzen

Die verwendeten Größen haben die folgenden Werte [14, 15]:

- $m_0 = 460 \text{ MeV}$
- $m_{N^*} = 1535 \text{ MeV}$

3 Zerfall des chiralen Partners des Nukleons in ein Nukleon und ein skalares Teilchen

- $m_N = 938 \text{ MeV}$
- $M = 400 \text{ MeV}$
- $\cosh \delta = \frac{m_N + m_{N^*}}{2m_0} = 2.69$
- $a = \frac{m_0 M^2}{g Z^2 f_\pi^2} = 1.10$
- $\sinh \delta = 2.51$
- $Z = 1.67$
- $f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$
- $g = 2.8 \text{ GeV}$
- $k_f(1535) = 325 \text{ MeV}$
- $k_f(1650) = 456 \text{ MeV}$

Setzt man diese in die berechnete Formel ein, erhält man für die Zerfallsbreite:

$$\Gamma = 37.32 \text{ MeV} \quad (3.60)$$

Für den zweiten Kandidaten für den chiralen Partner des Nukleons, $N(1650)$, ergibt sich die Zerfallsbreite:

$$\Gamma = 45.91 \text{ MeV} \quad (3.61)$$

Die berechneten Zerfallsbreiten des zuerst betrachteten Zerfalls werden mit den im Particle Data Book [5] verzeichneten Werten verglichen. Für $N(1535)$ als skalarer Partner des Nukleons wird dort die Zerfallswahrscheinlichkeit von $N^* \rightarrow N\pi\pi$ zu 1 – 10% der Gesamtbreite von 125-150 MeV angegeben. Es wird dieser Zerfall betrachtet, da das beteiligte skalare Teilchen schnell und mit hoher Wahrscheinlichkeit in zwei Pionen zerfällt. In diesem Fall ist der berechnete Wert zu groß.

$N(1650)$ wird eine Breite 10 – 20% der Gesamtbreite von 120-180 MeV zugeordnet. Die berechneten Werte liegen in derselben Größenordnung. Das Modell liefert für $N(1650)$ zuverlässigere Werte als für $N(1535)$. Dies deutet darauf hin, dass es sich bei $N(1650)$ um den chiralen Partner des Nukleons handelt und nicht bei $N(1535)$.

4 „Glueballs“ und das PANDA-Experiment

4.1 PANDA

In naher Zukunft wird bei FAIR, der „Facility for Antiproton and Proton Research“ in Darmstadt das PANDA-Experiment aufgebaut [16]. PANDA steht für „Anti-Proton Annihilation at Darmstadt“.

Das Experiment wird sich mit dem Ursprung der Hadronen-Massen beschäftigen. Weniger als zwei Prozent davon geht auf die Masse der enthaltenen Quarks zurück, der Rest begründet sich durch deren Wechselwirkung untereinander und mit Gluonen. PANDA erforscht unter anderem die Eigenschaften sogenannter „Glueballs“, also Zuständen, die sich nur aus Gluonen zusammensetzen. Ihre Masse wird zwischen 1.5 und 5 GeV vermutet. PANDA wird in der Lage sein, auch den Bereich höherer Massen (über 2.5 GeV) zu untersuchen. Glueballs entstehen als Zwischenprodukt bei der Reaktion zwischen Antiprotonen und Protonen. Sie zeichnen sich durch zwei Eigenschaften aus: Sie sind Flavour-blind, da Gluonen an sämtliche Quark-Flavours gleich stark koppeln, und ihre Zerfallsbreite ist schmäler als die eines Quark-Antiquark-Zustands. Ein mutmaßlicher Glueball-Kandidat \tilde{G} ist ein Pseudoskalar mit der Masse 2.6 GeV. Die Kopplungskonstante der zu seinem Zerfall gehörigen Lagrangedichte kann experimentell bestimmt werden. Aus diesem Grunde wird im Folgenden das Verhältnis zwischen den Breiten verschiedener Zerfallskanäle berechnet.

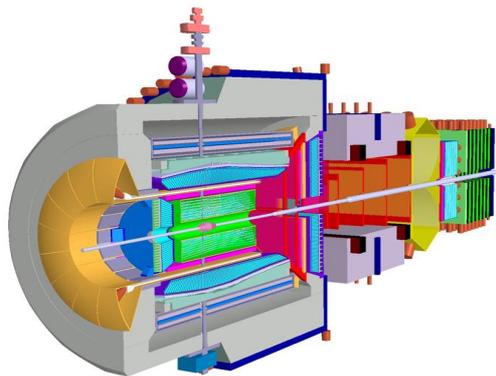


Abbildung 4.1: Skizze des PANDA-Detektors [17]

4.2 Zerfall des pseudoskalaren Glueballs in zwei Nukleonen

4.2.1 Beteiligte Teilchen

An dieser Stelle wird der Zerfall des pseudoskalaren Glueballs \tilde{G} in ein Nukleon und seinen chiralen Partner betrachtet. Der Wechselwirkungsterm lautet:

$$\mathcal{L}_{int} = ig\tilde{G}(\bar{\Psi}_2\Psi_1 - \bar{\Psi}_1\Psi_2) \quad (4.1)$$

Auch er soll hinsichtlich seiner Transformationseigenschaften untersucht werden. \mathcal{L}_{int} ist **hermitesch**:

$$\begin{aligned} [ig\tilde{G}(\bar{\Psi}_2\Psi_1 - \bar{\Psi}_1\Psi_2)]^\dagger &= -ig\tilde{G}(\Psi_2^\dagger\gamma^0\Psi_1 - \Psi_1^\dagger\gamma^0\Psi_2)^\dagger \\ &= -ig\tilde{G}(\Psi_1^\dagger\gamma^0\Psi_2 - \Psi_2^\dagger\gamma^0\Psi_1) \\ &= ig\tilde{G}(\bar{\Psi}_2\Psi_1 - \bar{\Psi}_1\Psi_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

\mathcal{L}_{int} ist **paritätsinvariant**. Da \tilde{G} ein Pseudoskalar ist, gilt: $\tilde{G} \rightarrow -\tilde{G}$:

$$\begin{aligned} ig\tilde{G}(\bar{\Psi}_2\Psi_1 - \bar{\Psi}_1\Psi_2) &\rightarrow -ig\tilde{G}(-\bar{\Psi}_2\Psi_1 + \bar{\Psi}_1\Psi_2) \\ &= ig\tilde{G}(\bar{\Psi}_2\Psi_1 - \bar{\Psi}_1\Psi_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

\mathcal{L}_{int} ist **chiral-invariant**:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_2\Psi_1 - \bar{\Psi}_1\Psi_2 &= (\bar{\Psi}_{2R} + \bar{\Psi}_{2L})(\Psi_{1R} + \Psi_{1L}) - (\bar{\Psi}_{1R} + \bar{\Psi}_{1L})(\Psi_{2R} + \Psi_{2L}) \\ &= \bar{\Psi}_{2R}\Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2R}\Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{2L}\Psi_{1R} + \bar{\Psi}_{2L}\Psi_{1L} \\ &\quad - \bar{\Psi}_{1R}\Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1R}\Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{1L}\Psi_{2R} - \bar{\Psi}_{1L}\Psi_{2L} \\ &= \bar{\Psi}_{2R}\Psi_{1L} + \bar{\Psi}_{2L}\Psi_{1R} - \bar{\Psi}_{1R}\Psi_{2L} - \bar{\Psi}_{1L}\Psi_{2R} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Unter Benutzung von Gleichungen (3.7) und (3.8) sieht man die chirale Invarianz des Terms. \mathcal{L}_{int} verhält sich **unter Ladungskonjugation** wie folgt: Für den ersten Term der Klammer gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_2\Psi_1 &\rightarrow (-i\gamma^2\Psi_2^*)^\dagger\gamma^0(i\gamma^2\Psi_1^*) \\ &= i\Psi_2^T(-\gamma^2)\gamma^0i\gamma^2(\Psi_1^\dagger)^T \\ &= \Psi_2^T\gamma^2\gamma^0\gamma^2(\Psi_1^\dagger)^T \\ &= \Psi_2^T\gamma^0(\Psi_1^\dagger)^T \\ &= \Psi_2^T\gamma^{0T}(\Psi_1^\dagger)^T \\ &= -\Psi_1^\dagger\gamma^0\Psi_2 \\ &= -\bar{\Psi}_1\Psi_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Wie im vorherigen Kapitel sieht man, dass der erste Term in den zweiten Term übergeht, wobei ein Vorzeichen dazukommt. Entsprechendes findet man für den

zweiten Term, womit insgesamt die Invarianz unter Ladungskonjugation gezeigt ist. Die physikalischen Felder sind durch die Felder (3.20) und (3.21) gegeben. Mit ihnen findet man für den Wechselwirkungsterm:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{int} &= g\tilde{G} \frac{1}{2 \cosh \delta} \left(-i\bar{N}\gamma_5 N - i\bar{N}^* N e^\delta - i\bar{N}N^* e^{-\delta} \right. \\
 &\quad \left. - i\bar{N}^* \gamma_5 N^* - i\bar{N}\gamma_5 N + i\bar{N}N^* e^\delta + i\bar{N}^* N e^{-\delta} - i\bar{N}^* \gamma_5 N^* \right) \\
 &= g\tilde{G} \frac{1}{2 \cosh \delta} \left(-2i\bar{N}\gamma_5 N + i\bar{N}N^* \left(e^\delta - e^{-\delta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + i\bar{N}^* N \left(e^{-\delta} - e^\delta \right) - 2i\bar{N}^* \gamma_5 N^* \right) \\
 &= \frac{-ig}{\cosh \delta} \tilde{G} \left(\bar{N}\gamma_5 N + \sinh \delta \bar{N}^* N - \sinh \delta \bar{N}N^* + \bar{N}^* \gamma_5 N^* \right) \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Der letzte Term in der Klammer trägt aus kinematischen Gründen nicht zur Zerfallsbreite bei. Im Folgenden soll das Verhältnis zwischen den Zerfallsbreiten der mittleren Terme und des ersten Terms betrachtet werden. Das entgegengesetzte Vorzeichen zwischen den mittleren Termen spielt keine Rolle, sodass nach der Relation:

$$Q = \frac{\Gamma_{\tilde{G} \rightarrow \bar{N}N}}{\Gamma_{\tilde{G} \rightarrow \bar{N}^* N + h.c.}} = \frac{\Gamma_{\tilde{G} \rightarrow \bar{N}N}}{2\Gamma_{\tilde{G} \rightarrow \bar{N}^* N}} \quad (4.7)$$

gesucht werden muss. Die beteiligten Felder lauten ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt:

$$\tilde{G}(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}} e^{-iP \cdot X} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{iP \cdot X} \right) \quad (4.8)$$

sowie

$$\bar{N}(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}_1, s} \sqrt{\frac{m_N}{E_{k_1}}} \left(d_{\vec{k}_1, s} \bar{v}(\vec{k}_1, s) e^{-iK_1 \cdot X} + b_{\vec{k}_1, s}^\dagger \bar{u}(\vec{k}_1, s) e^{iK_1 \cdot X} \right) \quad (4.9)$$

und

$$N(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}_2, r} \sqrt{\frac{m_N}{E_{k_2}}} \left(b_{\vec{k}_2, r} u(\vec{k}_2, r) e^{-iK_2 \cdot X} + d_{\vec{k}_2, r}^\dagger v(\vec{k}_2, r) e^{iK_2 \cdot X} \right) \quad (4.10)$$

Die Masse des pseudoskalaren Teilchens sei M . Die Felder für den chiralen Partner des Nukleons ergeben sich analog mit der Masse m_{N^*} .

4.2.2 Die S-Matrix

Anfangs- und Endzustand sind in allen Fällen durch

$$|i\rangle = a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \quad (4.11)$$

und

$$|f\rangle = b_{k_1^-, s'}^\dagger d_{k_2^-, r'}^\dagger |0\rangle \quad (4.12)$$

gegeben.

Zunächst wird $\mathcal{L}_1 = -\frac{ig}{\cosh \delta} \tilde{G} \bar{N} \gamma_5 N$ betrachtet.

Das Matrixelement lautet:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f|S|i\rangle = \langle f|i \int d^4 X \mathcal{L}_1 |i\rangle \\ &= \frac{-ig\sqrt{m_N^2}}{\cosh \delta V^{\frac{3}{2}} \sqrt{2E_{k_2} E_p E_{k_1}}} \langle 0|b_{k_1^-, s'}^\dagger d_{k_2^-, r'}^\dagger \int d^4 X \\ &\quad \times \sum_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}} e^{-iP \cdot X} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{iP \cdot X} \right) \\ &\quad \times \sum_{k_1, s} \left(d_{k_1, s}^- \bar{v}(\vec{k}_1, s) e^{-iK_1 \cdot X} + b_{k_1, s}^\dagger \bar{u}(\vec{k}_1, s) e^{iK_1 \cdot X} \right) \gamma_5 \\ &\quad \times \sum_{k_2, r} \left(b_{k_2, r}^- u(\vec{k}_2, r) e^{-iK_2 \cdot X} + d_{k_2, r}^\dagger v(\vec{k}_2, r) e^{iK_2 \cdot X} \right) a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \\ &\propto \langle 0|b_{k_1^-, s'}^\dagger d_{k_2^-, r'}^\dagger b_{k_1, s}^- d_{k_2, r}^\dagger a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i(P-K_2-K_1)X} \bar{u} \gamma_5 v |0\rangle \\ &\propto \langle 0|b_{k_1^-, s'}^\dagger d_{k_2^-, r'}^\dagger b_{k_1, s}^- d_{k_2, r}^\dagger \left(\delta_{\vec{p}\vec{p}'} + a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}} \right) |0\rangle \\ &= \langle 0| \left(\delta_{k_1 k_1}^- \delta_{s s'} - b_{k_1, s}^- b_{k_1^-, s'}^\dagger \right) d_{k_2^-, r'}^\dagger d_{k_2, r}^- \delta_{\vec{p}\vec{p}'} |0\rangle \\ &= \langle 0|\delta_{k_1 k_1}^- \delta_{s s'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \left(\delta_{k_2 k_2}^- \delta_{r r'} - d_{k_2^-, r'}^\dagger d_{k_2, r}^- \right) |0\rangle \\ &= \delta_{k_1 k_1}^- \delta_{s s'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{k_2 k_2}^- \delta_{r r'} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Insgesamt bleibt für den S-Matrix-Term:

$$S_{fi} = \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} \frac{m_N}{\sqrt{2E_{k_2} E_p E_{k_1}}} \int d^4 X i \mathcal{M} e^{-i(P-K_2-K_1)X} \quad (4.14)$$

wobei

$$i \mathcal{M} \equiv \frac{g}{\cosh \delta} \bar{u}(\vec{k}_1, s) \gamma_5 v(\vec{k}_2, r) \quad (4.15)$$

Nun kann analog zum vorhergehenden Abschnitt durch Quadrieren des S-Matrix-Terms unter Inanspruchnahme von Gleichung (3.41), Integration über alle möglichen Endimpulse und Summation über alle End-Spineinstellungen sowie Division durch t ein Ausdruck für die Zerfallsbreite berechnet werden. Man erhält:

$$\Gamma = \frac{m_N^2}{2} \sum_{r, s} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{|i \mathcal{M}|^2}{E_{k_2} E_{k_1} E_p} (2\pi)^4 \delta(P - K_1 + K_2) \quad (4.16)$$

Wiederum kann das Integral durch Umschreiben der δ -Distribution ausgewertet werden. Der Endimpuls ist diesmal:

$$k_f = \sqrt{\frac{M^2}{4} - m_N^2} \quad (4.17)$$

Damit erhält man:

$$\Gamma = \frac{m_N^2}{2\pi M^2} \sum_{r,s} |i\mathcal{M}|^2 k_f \quad (4.18)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (3.52) und (3.53) berechnet man analog zum vorhergehenden Kapitel:

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} |i\mathcal{M}|^2 &\propto \sum_{r,s} \bar{u}(\vec{k}_1, s) \gamma_5 v(\vec{k}_2, r) \left[\bar{u}(\vec{k}_1, s) \gamma_5 v(\vec{k}_2, r) \right]^\dagger \\ &= - \sum_r (\gamma_5)_{\alpha\beta} v_\beta(\vec{k}_2, r) \bar{v}_\mu(\vec{k}_2, r) \sum_s (\gamma_5)_{\mu\nu} u_\nu(\vec{k}_1, s) \bar{u}_\alpha(\vec{k}_1, s) \\ &= (\gamma_5)_{\alpha\beta} \left(\frac{-\gamma^\mu K_{2\mu} + m_N}{2m_N} \right)_{\beta\mu} (\gamma_5)_{\mu\nu} \left(\frac{\gamma^\mu K_{1\mu} + m_N}{2m_N} \right)_{\nu\alpha} \\ &= \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\frac{-\gamma^\mu K_{2\mu} + m_N}{2m_N} \right) \gamma_5 \left(\frac{\gamma^\mu K_{1\mu} + m_N}{2m_N} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4m_N^2} (4K_1 \cdot K_2 + 4m_N^2) \\ &= \frac{1}{m_N^2} \frac{M^2 - 2m_N^2 + 2m_N^2}{2} \\ &= \frac{M^2}{2m_N^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Wobei die Viererimpulserhaltung ausgenutzt wurde:

$$\begin{aligned} P^2 &= (K_1 + K_2)^2 = M^2 \\ &\Leftrightarrow 2m_N^2 + 2K_1 \cdot K_2 = M^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{M^2 - 2m_N^2}{2} = K_1 \cdot K_2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Unter Beachtung der Vorfaktoren aus (4.15) findet man:

$$\sum_{r,s} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{\cosh^2 \delta} \left(\frac{M^2}{2m_N^2} \right) \quad (4.21)$$

Dies eingesetzt in die Gleichung der Zerfallsbreite liefert:

$$\Gamma_{\tilde{G} \rightarrow \bar{N}N} = \frac{g^2}{4\pi \cosh^2 \delta} k_f \quad (4.22)$$

Als nächstes wird die Lagrangedichte $\mathcal{L}_2 = -\frac{i \sinh \delta g}{\cosh \delta} \tilde{G} \bar{N}^* N = -\tanh \delta g \tilde{G} \bar{N}^* N$ untersucht.

Für das Matrixelement ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= \langle f|S|i\rangle = \langle f|i \int d^4 X \mathcal{L}_2|i\rangle \\
 &= \frac{-ig \tanh \delta \sqrt{m_N m_{N^*}}}{V^{\frac{3}{2}} \sqrt{2E_{k_2} E_p E_{k_1}}} \langle 0|\tilde{b}_{\vec{k}_1, s'}, d_{\vec{k}_2, r'} \int d^4 X \\
 &\times \sum_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}} e^{-iP \cdot X} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{iP \cdot X} \right) \\
 &\times \sum_{\vec{k}_1, s} \left(\tilde{d}_{\vec{k}_1, s} \bar{v}(\vec{k}_1, s) e^{-iK_1 \cdot X} + \tilde{b}_{\vec{k}_1, s}^\dagger \bar{u}(\vec{k}_1, s) e^{iK_1 \cdot X} \right) \\
 &\times \sum_{\vec{k}_2, r} \left(b_{\vec{k}_2, r} u(\vec{k}_2, r) e^{-iK_2 \cdot X} + d_{\vec{k}_2, r}^\dagger v(\vec{k}_2, r) e^{iK_2 \cdot X} \right) a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \\
 &\propto \delta_{\vec{k}_1 \vec{k}_1'} \delta_{s s'} \delta_{\vec{p} \vec{p}'} \delta_{\vec{k}_2 \vec{k}_2'} \delta_{r r'} \bar{u} v e^{-i(P-K_1-K_2)X}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Wieder brechen alle Summen zusammen und es bleibt:

$$S_{fi} = \frac{\sqrt{m_N m_{N^*}}}{V^{\frac{3}{2}} \sqrt{2E_{k_2} E_p E_{k_1}}} \int d^4 X i\mathcal{M} e^{-i(P-K_2-K_1)X} \tag{4.24}$$

wobei

$$i\mathcal{M} \equiv g \tanh \delta \bar{u}(\vec{k}_1, s) v(\vec{k}_2, r) \tag{4.25}$$

Der Endimpuls lautet in diesem Fall:

$$\pm \sqrt{\frac{m_{N^*}^4 + m_N^4 + M^4 - 2m_N^2 m_{N^*}^2 - 2m_{N^*}^2 M^2 - 2m_N^2 M^2}{4M^2}} = k'_f \tag{4.26}$$

Man erhält:

$$\Gamma_{\tilde{G} \rightarrow \bar{N}^* N} = \frac{m_{N^*} m_N}{2\pi M^2} \sum_{r, s} |i\mathcal{M}|^2 k'_f \tag{4.27}$$

Unter Berücksichtigung der Viererimpulserhaltung mit

$$\begin{aligned}
 \sum_{r,s} |i\mathcal{M}|^2 &\propto \sum_{r,s} \bar{u}(\vec{k}_1, s) v(\vec{k}_2, r) \left[\bar{u}(\vec{k}_1, s) v(\vec{k}_2, r) \right]^\dagger \\
 &= - \left(\frac{\gamma^\mu K_{1\mu} + m_{N^*}}{2m_{N^*}} \right)_{\beta\alpha} \left(\frac{-\gamma^\mu K_{2\mu} + m_N}{2m_N} \right)_{\alpha\beta} \\
 &= -Tr \left[\left(\frac{\gamma^\mu K_{1\mu} + m_{N^*}}{2m_{N^*}} \right) \left(\frac{-\gamma^\mu K_{2\mu} + m_N}{2m_N} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4m_N m_{N^*}} (4K_1 \cdot K_2 - 4m_N m_{N^*}) \\
 &= \frac{1}{2m_N m_{N^*}} (M^2 - (m_N + m_{N^*})^2)
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

ergibt sich insgesamt für die Zerfallsbreite:

$$\Gamma_{\tilde{G} \rightarrow \bar{N}^* N} = \frac{g^2 \tanh^2 \delta}{4\pi M^2} (M^2 - (m_N + m_{N^*})^2) k'_f \tag{4.29}$$

4.2.3 Werte einsetzen

Unter Verwendung der Werte [18]

- $m_{N^*} = 1535 \text{ MeV}$
- $m_N = 938 \text{ MeV}$
- $M = 2.6 \text{ GeV}$
- $k_f = 900.0 \text{ MeV}$
- $k_{f'} = 390.6 \text{ MeV}$

lässt sich der gesuchte Quotient

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\Gamma_{\tilde{G} \rightarrow \bar{N} N}}{2\Gamma_{\tilde{G} \rightarrow \bar{N}^* N}} \\
 &= \frac{k_f M^2}{2 \sinh^2 \delta (M^2 - (m_N + m_{N^*})^2) k'_f} \\
 &= 1.94
 \end{aligned}$$

berechnen. Der für den zweiten Zerfall betrachtete Quotient kann erst verglichen werden, wenn die experimentellen Daten des PANDA-Projekts ausgewertet wurden. Dass die Rate größer als 1 ist, ist in jedem Fall sinnvoll, da der Zerfall des Glueballs in ein Nukleon und dessen chiralen Partner kinematisch an der Schwelle liegt. Der Zerfall des Glueballs in zwei Nukleonen ist in jedem Fall wahrscheinlicher. In Zukunft wird es aufgrund der experimentellen Resultate möglich sein, die Kopplungskonstante des Zerfalls zu bestimmen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zwei verschiedene Zerfallsprozesse behandelt. Zunächst wurde im Rahmen des erweiterten Linearen Sigma-Modells die Antwort auf die Frage gesucht, welches Teilchen als chiraler Partner des Nukleons in Frage kommt. Dazu wurde der Zerfall des chiralen Partners in ein Nukleon und ein skalares Teilchen betrachtet. Das skalare Teilchen wurde mit dem Tetraquark-Zustand $f_0(600)$ identifiziert. In Augenschein genommen wurden die Resonanzen $N(1535)$ und $N(1640)$. Aufgrund der berechneten Zerfallsbreiten erkannte man im Falle von $N(1650)$ eine größere Übereinstimmung mit den experimentellen Werten. Die Zerfallsbreite von 45.91 MeV liegt in der Größenordnung des im Particle Data Book verzeichneten Intervalls. Der Wert, den man bei Verwendung von $N(1535)$ als Ausgangsteilchen erhielt, ist allerdings gegenüber der Vorhersage zu groß.

Ein nächster Schritt im Studium dieses Sachverhalts stellt das erweiterte Misch-Szenario dar. Es beinhaltet nicht nur zwei, sondern vier Spinoren. Zwei davon beschreiben Nukleon-Resonanzen, zwei sind mögliche chirale Partner. Da die Zustände mischen, wird der chirale Partner nicht eindeutig durch ein, sondern durch zwei Resonanzen repräsentiert. Weiterhin steht die eingehende Betrachtung des Ursprungs von m_0 aus. Dazu muss außer der Wechselwirkung mit dem Tetraquark-Zustand auch die Wechselwirkung eines Glueballs mit den beteiligten Hadronen berücksichtigt werden. Dadurch erhält die Masse von m_0 einen Anteil, der aus dem Glueball-Kondensat stammt. Dies muss beim Rückschluss auf die Nukleonmasse beachtet werden.

Als nächstes wurde der Zerfall des pseudoskalaren Glueballs in zwei Nukleonen betrachtet. Da die Kopplungskonstante dieses Zerfalls noch nicht experimentell bestimmt wurde, wurde ein Verhältnis zwischen zwei Zerfallskanälen berechnet. Es zeigte sich, dass der Zerfall in zwei Nukleonen fast doppelt so wahrscheinlich ist wie der Zerfall in Nukleon und chiralen Partner, der an der Energieschwelle liegt. Die Berechnung wurde mit einem Teilchen der Masse 2.6 GeV als Glueball durchgeführt. Die Untersuchung derart schwerer Glueballs wird in naher Zukunft erstmalig im Rahmen des PANDA-Experiments der GSI möglich sein.

Zukünftige Studien sollten die Beteiligung des Glueballs an gemischten Zuständen berücksichtigen. Außerdem sollte ein möglicher skalarer Glueball in die Betrachtung miteinbezogen werden.

Literaturverzeichnis

- [1] D. Flamm, F. Schöberl: *Introduction to the Quark Model of Elementary Particles Volume 1: Quantum Numbers, Gauge Fields and Hadron Spectroscopy*, Gordon and Breach, Science Publishers New York London Paris (1982)
- [2] M. Gell-Mann: *A schematic model of baryons and mesons*, Physics Letters, Volume 8, Issue 3, Pages 214-215 (1964) (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031916364920013>)
- [3] D. H. Rischke: *Skript: Theoretische Physik VI: Quantenmechanik II*, Goethe Universität Frankfurt (2012)
- [4] E.V. Shuryak: *The QCD Vacuum, Hadrons and Superdense Matter*, 2nd ed., World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol. 71 (2004)
- [5] J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D86, 010001 (2012)
- [6] G. Ripka: *Quarks Bound By Chiral Fields*, Oxford Science Publications (1997)
- [7] H. Genz: *Buridans Esel und die Spontane Symmetriebrechung*, Physik in unserer Zeit, doi: 10.1002/piuz.19960270506 (1996)
- [8] D. Parganlija, F. Giacosa and D. H. Rischke, "Mesons and Global Chiral Invariance," Phys. Rev. D 82 (2010) 054024 [arXiv:1003.4934 [hep-ph]].
- [9] D. Parganlija: *Dissertation: Quarkonium Phenomenology in Vacuum*, Goethe Universität Frankfurt (2011)
- [10] A. Pich, "The Standard Model of Electroweak Interactions," [arXiv:1201.0537 [hep-ph]].
- [11] M. E. Peskin, D. V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company (1995)
- [12] O. Philipsen: *Skript: An Introduction to Quantum Field Theory*, Universität Münster, Rutherford Appelton Laboratory (2006)
- [13] U. Mosel: *Fields, Symmetries and Quarks*, Springer Verlag Berlin Heidelberg (1999)
- [14] S. Gallas, F. Giacosa and G. Pagliara, Nucl. Phys. A 872 (2011) 13 [arXiv:1105.5003 [hep-ph]].

Literaturverzeichnis

- [15] S. Gallas, F. Giacosa and D. H. Rischke, Phys. Rev. D 82 (2010) 014004 [arXiv:0907.5084 [hep-ph]].
- [16] M. F. M. Lutz *et al.* [PANDA Collaboration], “Physics Performance Report for PANDA: Strong Interaction Studies with Antiprotons,” arXiv:0903.3905 [hep-ex].
- [17] <http://www.fair-center.de/typo3temp/pics/ee7005a107.jpg>
- [18] W. .I. Eshraim, S. Janowski, A. Peters, K. Neuschwander and F. Giacosa, arXiv:1209.3976 [hep-ph].

Dank

Mein Dank geht an Professor Rischke und Dr. Giacosa für die gute und kompetente Betreuung meiner Bachelorarbeitsphase. Ich habe mich bei Fragen und Unsicherheiten nie allein gelassen gefühlt und konnte stets umgehend mit verständlichen Erklärungen und Ratschlägen rechnen. Außerdem danke ich Achim Heinz und Waila Eshraim für etliche Hinweise bezüglich der Zerfallsrechnungen und einige äußerst hilfreiche Tipps und Tricks.

Erklärung nach § 30 (11) Ordnung für den BA- und MA-Studiengang

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen oder aus anderen fremden Texten entnommen wurden, sind von mir als solche kenntlich gemacht worden. Ferner erkläre ich, dass die Arbeit nicht - auch nicht auszugsweise - für eine andere Prüfung verwendet wurde.

Frankfurt am Main, den