



Bachelorarbeit

Mischung von skalaren Feldern in Ein-Schleifen-Ordnung

Sabrina Hempel

22.09.2014

Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main
Fachbereich Physik
Institut für Theoretische Physik

Erstgutachter

Dr. Francesco Giacosa
Institut für Theoretische Physik
Goethe-Universität Frankfurt a. M.

Zweitgutachter

Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Institut für Theoretische Physik
Goethe-Universität Frankfurt a. M.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Ziel der Bachelorarbeit | 1 |
| 1.2 | Konvention und Notation | 1 |
| 2 | Klassische Feldtheorie | 3 |
| 2.1 | Der Lagrange-Formalismus | 3 |
| 2.2 | Der Hamilton-Formalismus | 4 |
| 2.3 | Die Klein-Gordon-Gleichung | 5 |
| 3 | Kanonische Quantisierung | 6 |
| 3.1 | Die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung | 6 |
| 3.2 | Kanonische Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes | 7 |
| 4 | Funktionalintegral-Formulierung der Quantenfeldtheorie | 9 |
| 4.1 | Der skalare Feynman-Propagator | 10 |
| 5 | Wechselwirkende Feldtheorie | 12 |
| 5.1 | Wechselwirkungsbild | 12 |
| 5.2 | Die Streumatrix | 13 |
| 6 | Lineare Mischung zweier Felder | 15 |
| 7 | Berechnung der Zerfallsbreite | 17 |
| 7.1 | Zerfall von S_1 und S_2 in $\varphi\varphi$ ($f = 0$) | 17 |
| 7.2 | Zerfall der physikalischen Felder P_1 und P_2 in $\varphi\varphi$ ($f \neq 0$) | 22 |
| 8 | Ein-Schleifen-Ordnung | 24 |
| 8.1 | Ein Zerfallskanal | 25 |
| 8.1.1 | Herleitung des Propagators | 25 |
| 8.1.2 | Die Selbstenergie | 26 |
| 8.1.3 | Definition der Masse | 29 |
| 8.2 | Zwei Zerfallskanäle | 33 |
| 8.2.1 | Herleitung des Propagators | 33 |
| 8.2.2 | Die Spektralfunktion | 34 |
| 9 | Zusammenfassung und Ausblick | 35 |
| | Literatur | 38 |

1 Einleitung

1.1 Ziel der Bachelorarbeit

Viele Rechnungen der Quantenfeldtheorie werden in niedrigster Ordnung durchgeführt. Diese ist zugleich die einfachste und führende Ordnung der Störungstheorie und wird Baumgraphen-Niveau (oder auf Englisch 'tree-level') genannt. Bei diesen Rechnungen, beispielsweise bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten und Zerfallsbreiten, ist der dominante Teil durch das Baumgraphen-Niveau gegeben. Die Ein-Schleifen-Ordnung ist die nächsthöhere Ordnung und entspricht einer Quantenkorrektur.

In dieser Arbeit werde ich mich mit der Mischung von Feldern befassen, das heißt mit Feldern, die miteinander wechselwirken. Dafür werde ich meine Berechnungen nicht nur auf Baumgraphen-Niveau durchführen, sondern werde zur Ein-Schleifen-Ordnung übergehen. Ich betrachte ausschließlich skalare Felder, welche keinen Spin und keine Ladung tragen. Skalare Felder sind technisch einfacher zu behandeln, das beschriebene Phänomen gilt jedoch allgemein und kann für alle Spins auftreten. Ich beziehe mich nicht auf ein bestimmtes physikalisches System, sondern bleibe so allgemein wie möglich. Lediglich am Ende der Arbeit werde ich Schätzungen für skalare Mesonen präsentieren.

In den ersten Kapiteln werde ich eine kurze Einführung in die Quantenfeldtheorie geben, die die wichtigsten Bausteine, die für diese Arbeit nötig sind, enthält. In Kapitel 6 geht es um eine lineare Mischung von zwei Feldern, wobei sich herausstellen wird, dass sich der Mischungsterm durch eine Drehung der Felder eliminieren lässt. Danach werde ich mich mit einem Teilchenzerfall befassen und die Zerfallsbreite bestimmen.

Das letzte Kapitel bildet den wichtigsten Teil der Arbeit. Ich werde den Propagator in Ein-Schleifen-Ordnung berechnen, sowohl für den Fall, dass ein Zerfallskanal vorhanden ist, als auch für den Fall, dass zwei Teilchen in den selben Kanal zerfallen. Dabei wird der Effekt der Quantenmischung in Ein-Schleifen-Ordnung gezeigt. Zuletzt werde ich eine Zusammenfassung und einen Ausblick geben.

1.2 Konvention und Notation

In dieser Arbeit werden natürliche Einheiten verwendet. Das heißt, dass das Plancksche Wirkungsquantum \hbar und die Lichtgeschwindigkeit c gleich Eins gesetzt werden und dimensionslos sind:

$$\hbar = c = 1 . \tag{1.1}$$

Daraus folgt, dass die Masse, die inverse Zeit und die inverse Länge alle die Einheit Energie besitzen.

Während ich 3-Vektoren durch einen Vektorpfeil kennzeichne:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

werde ich 4-Vektoren zur Unterscheidung als Großbuchstaben darstellen:

$$X = X^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Um von einem kontravarianten 4-Spaltenvektor X^μ zu einem kovarianten 4-Zeilenvektor X_μ überzugehen, verwendet man den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$:

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu = (t, -\vec{x}). \quad (1.4)$$

Der metrische Tensor im Minkowski-Raum lautet:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Der kovariante 4-Gradient ist die Ableitung nach einem kontravarianten 4-Ortsvektor:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right). \quad (1.6)$$

Der D'Alembert Operator \square ist wie folgt definiert:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2. \quad (1.7)$$

2 Klassische Feldtheorie

2.1 Der Lagrange-Formalismus¹

Um den Lagrange-Formalismus für Felder zu erhalten, verallgemeinert man den klassischen Lagrange-Formalismus auf ein kontinuierliches System. Dafür verwendet man statt der generalisierten Koordinate $q_x(t)$ die Feldgröße $\phi(X)$. Dabei nimmt der Positionsindex x des Massenpunktes q_x kontinuierliche Werte an und man kann ihn durch die Ortskoordinate \vec{x} ersetzen:

$$q_x(t) \longrightarrow \phi(t, \vec{x}) = \phi(X) . \quad (2.1)$$

Für die Lagrange-Funktion L eines solchen Systems gilt in drei Dimensionen:

$$L = \int_V d^3 \vec{x} \mathcal{L} \quad (2.2)$$

Dabei ist V das Volumen des betrachteten Systems und \mathcal{L} die Lagrange-Dichte. Diese hängt im Allgemeinen nicht nur von ϕ ab, sondern kann sowohl von den zeitlichen und räumlichen Ableitungen von ϕ , als auch von der Zeit und vom Ort selber abhängen:

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(X), \partial_\mu \phi(X); X)$. $\phi(X)$ ist hierbei die generalisierte Koordinate und $\partial_\mu \phi(X)$ die generalisierte Geschwindigkeit.

Die Freiheitsgrade des Systems, ϕ und $\partial_\mu \phi$, hängen von der Raum-Zeit X ab und können daher an jedem Raum-Zeit-Punkt einen anderen Wert annehmen. Aus dieser Überlegung folgt, dass das System unendlich viele Freiheitsgrade hat.

Um die Bewegungsgleichung des Feldes $\phi(X)$ aus der Lagrange-Dichte abzuleiten, führe ich die Wirkung $S[\phi(X)]$ des Systems ein. Sie ist wie folgt definiert:

$$S[\phi(X)] = \int_{V_4} d^4 X \mathcal{L} . \quad (2.3)$$

Dabei ist $V_4 = T \cdot V$ das vier-dimensionale Raum-Zeit-Volumen.

Das Hamiltonische Prinzip des klassischen Lagrange-Formalismus besagt, dass ein klassisches Teilchen die Trajektorie durchläuft, an der die Wirkung ein Extremum hat. Analog gilt das auch für Felder:

$$\delta S[\phi(x)] = 0 . \quad (2.4)$$

Aus dieser Bedingung kann man nun die Bewegungsgleichung für das Feld ϕ herleiten, die sogenannte Euler-Lagrange-Gleichung [3, S.83 f.].

$$0 = \delta S = \int_{V_4} d^4 X \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right\} \quad (2.5)$$

¹Quellen: [1], [2], [3]

Hierbei wurde ausgenutzt, dass der Ort und die Zeit als Integrationsvariablen nicht von der Variation betroffen sind ($\delta X = 0$). Des Weiteren wird auch das Feld $\phi(X)$ auf der Oberfläche ∂V_4 des Volumens V_4 nicht variiert, d.h. $\delta\phi(X)|_{\partial V_4} = 0$.

Der zweite Term kann wie folgt umgeschrieben werden, wobei im ersten Schritt $\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$ ausgenutzt und im zweiten Schritt die Kettenregel benutzt wird:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\delta\phi \quad (2.6)$$

Setzt man den umgeformten Term wieder in Gleichung (2.5) ein, kann man den letzten Term mit Hilfe des Gauß'schen Satzes umformen und somit zeigen, dass dieser verschwindet, da $\delta\phi(X)|_{\partial V_4} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{V_4} d^4X \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\delta\phi + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] \right\} \\ &= \int_{V_4} d^4X \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] \right\} \delta\phi + \underbrace{\int_{\partial V_4} d\sigma_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi}_{=0} \\ &= \int_{V_4} d^4X \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] \right\} \delta\phi \end{aligned} \quad (2.7)$$

Damit das Integral über das gesamte Raum-Zeit-Volumen verschwindet, muss der Ausdruck in der geschweiften Klammer Null sein:

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} . \quad (2.8)$$

Gleichung (2.8) ist die Euler-Lagrange-Gleichung für das Feld ϕ .

2.2 Der Hamilton-Formalismus²

Analog zum konjugierten Impuls eines diskreten Systems, $p = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t q)}$, kann auch in einem kontinuierlichen System ein kanonisch konjugiertes Feld $\pi(X)$ definiert werden:

$$\pi(X) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi(X))} . \quad (2.9)$$

Die Hamilton-Funktion H ist dann wie folgt definiert:

$$H = \int_V d^3\vec{x} [\pi(X)\partial_0\phi(X) - \mathcal{L}] = \int_V d^3\vec{x} \mathcal{H} . \quad (2.10)$$

Dabei ist \mathcal{H} die Hamilton-Dichte.

²Quelle: [4, S. 16]

2.3 Die Klein-Gordon-Gleichung

Die freie Lagrange-Dichte für neutrale skalare Felder, also Felder, die keine Ladung und keinen Spin haben, lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.11)$$

Indem man diese Lagrange-Dichte in die Euler-Lagrange-Gleichung aus (2.8) einsetzt, kann man die Bewegungsgleichung für neutrale skalare Felder herleiten.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi \\ &= (\square + m^2) \phi \end{aligned} \quad (2.13)$$

Das ist die Klein-Gordon-Gleichung, wobei m die Masse des Feldes ist.

Nun kann man noch das kanonisch konjugierte Feld $\pi(X)$ und die Hamilton-Dichte \mathcal{H} des Klein-Gordon-Feldes berechnen:

$$\begin{aligned} \pi(X) &= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \phi)} \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \\ &= \partial_0 \phi(X), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \partial_0 \phi - \left(\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

3 Kanonische Quantisierung³

Das Ziel dieses Kapitels ist es, von einem Ein-Teilchen-System in ein Vielteilchen-System überzugehen. Dafür führt man die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ein. Diese Methode wird kanonische Quantisierung genannt.

3.1 Die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung

Bevor ich die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des Klein-Gordon-Feldes einführe, möchte ich zuerst die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung (2.13) finden.

Die Fourier-Darstellung des Feldes $\phi(X)$ lautet:

$$\phi(X) = \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(K) e^{-iK \cdot X}. \quad (3.1)$$

$\phi(X)$ soll eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung sein:

$$0 = (\square + m^2) \phi = \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(K) (-K^2 + m^2) e^{-iK \cdot X}. \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow K^2 \equiv k_0^2 - \vec{k}^2 = m^2 \quad \Leftrightarrow \quad k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (3.3)$$

Hierbei ist $k_0 = E_k$ die Energie der entsprechenden ebenen Welle. Gleichung (3.3) ist also die relativistische Energie-Impuls-Beziehung, auch Dispersionsrelation genannt. Daraus folgt, dass man die Fourier-Form des Feldes $\phi(X)$ wie folgt schreiben kann:

$$\tilde{\phi}(K) = a_+(\vec{k}) \frac{2\pi}{2E_k} \delta(k_0 - E_k) + a_-(\vec{k}) \frac{2\pi}{2E_k} \delta(k_0 + E_k). \quad (3.4)$$

Eingesetzt in Gleichung (3.1), erhält man die allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung:

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \left[a_+(\vec{k}) \frac{2\pi}{2E_k} \delta(k_0 - E_k) + a_-(\vec{k}) \frac{2\pi}{2E_k} \delta(k_0 + E_k) \right] e^{-iK \cdot X} \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \left[a_+(\vec{k}) e^{-iK \cdot X} + a_-(\vec{k}) e^{+iK \cdot X} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt das k_0 -Integral ausgeführt und im zweiten Term \vec{k} durch $(-\vec{k})$ substituiert.

Das neutrale skalare Feld ist reell, d.h. $\phi(X) = \phi^*(X)$. Daraus folgt:

$$a_+^*(\vec{k}) = a_-(\vec{k}) := a^*(\vec{k}), \quad a_-^*(\vec{k}) = a_+(\vec{k}) := a(\vec{k}) \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow \phi(X) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \left[a(\vec{k}) e^{-iK \cdot X} + a^*(\vec{k}) e^{+iK \cdot X} \right] \quad (3.7)$$

³Quellen: [1], [3]

3.2 Kanonische Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes

Das Feld $\phi(X)$ wird quantisiert, indem man $a(\vec{k})$ und $a^*(\vec{k})$ operatorwertig macht. $\phi(X)$ wird dann auch zu einem Operator:

$$\hat{\phi}(X) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \left[\hat{a}(\vec{k}) e^{-iK \cdot X} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{+iK \cdot X} \right]. \quad (3.8)$$

$\hat{a}(\vec{k})$ ist der Vernichtungs- und $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ der Erzeugungsoperator.

In der Quantenmechanik erfüllen der Ortsoperator \hat{x}_i und der Impulsoperator \hat{p}_i eines Teilchens folgende Vertauschungsrelationen:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j]_- = i\delta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j]_- = [\hat{p}_i, \hat{p}_j]_- = 0, \quad i, j = x, y, z. \quad (3.9)$$

Um die Vertauschungsrelationen besser von gewöhnlichen eckigen Klammern unterscheiden zu können, kennzeichne ich sie mit einem Minuszeichen: $[\dots, \dots]_-$.

Erweitert man die quantenmechanischen Vertauschungsrelationen für den Ort und den Impuls auf ein kontinuierliches System, ergeben sich folgende Vertauschungsrelationen für das Feld $\hat{\phi}(X)$ und das kanonisch konjugierte Feld $\hat{\pi}(X)$:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')]_- &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [\hat{\phi}(X), \hat{\phi}(X')]_- &= [\hat{\pi}(X), \hat{\pi}(X')]_- = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hierbei handelt es sich um Gleichzeit-Vertauschungsrelationen.

Mit Gleichung (3.10) lassen sich nun auch die Vertauschungsrelationen für den Erzeugungs- und Vernichtungsoperator herleiten.⁴

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')]_- &= (2\pi)^3 2E_k \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \\ [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')]_- &= [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')]_- = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nun kann man noch den Hamilton-Operator berechnen und durch die Erzeuger- und Vernichtoperatoren ausdrücken. Dafür setzt man Gleichung (3.8) in Gleichung (2.10) ein. Nach einigen Rechenschritten ergibt sich der Hamilton-Operator zu:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \left(2\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + (2\pi)^3 2E_k \delta^{(3)}(0) \right) \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} E_k \left(\hat{N}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Hierbei ist $\hat{N}(\vec{k})$ der Teilchenzahloperator, der die Teilchen in Zuständen mit Impuls \vec{k} zählt und wie folgt definiert ist:

$$\hat{N}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 2E_k \delta^{(3)}(0)} \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}). \quad (3.13)$$

⁴Eine Herleitung findet man beispielsweise im Buch vom Herrn Ryder [3].

Der Vorfaktor des Hamilton-Operators $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$ ist das unendliche Volumen des Systems. Die Nullpunktsenergie des Systems ist der Vakuumerwartungswert des Hamilton-Operators:

$$H_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{E_k}{2}. \quad (3.14)$$

4 Funktionalintegral-Formulierung der Quantenfeldtheorie

In diesem Kapitel erweitere ich die Pfadintegral-Formulierung der Quantenmechanik auf ein kontinuierliches System und erhalte dadurch die Funktionalintegral-Formulierung der Quantenfeldtheorie. Dabei beschränke ich mich auf neutrale skalare Felder. Ich leite die Formeln hier nicht her, sondern stelle nur die Analogie zur Quantenmechanik dar. Eine explizite Herleitung der quantenmechanischen Pfadintegral-Formulierung und der Formeln, die hier aufgezeigt werden, findet man beispielsweise im Skript von Herrn Prof. Rischke [1] oder im Buch von Herrn Ryder [3].

Bis jetzt habe ich in Analogie zur Quantenmechanik, statt der Koordinate $\vec{q}_x(t)$ und dem Impuls $\vec{p}(t)$, mit dem Feld $\phi(X)$ und dem kanonisch konjugierten Feld $\pi(X)$ gerechnet. Nun führe ich eine weitere Analogie ein: Die Ortsraum-Zustände $|\vec{x}(t)\rangle$ der Quantenmechanik werden zu Feld-Zuständen $|\phi(X)\rangle = |\phi, t\rangle$. Diese sind Eigenzustände des Feldoperators [1]:

$$\hat{\phi}(X) |\phi, t\rangle = \phi(X) |\phi, t\rangle . \quad (4.1)$$

Die quantenmechanische Übergangsamplitude $\langle q', t' | q, t \rangle$ ist eine Superposition von allen möglichen Pfaden, die ein Teilchen nehmen kann, um vom Punkt q am Zeitpunkt t zum Punkt q' am Zeitpunkt t' zu propagieren. Deshalb wird die Übergangsamplitude auch Propagator genannt [5].

Die Übergangsamplitude für neutrale skalare Felder lautet:

$$\langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi(t, \vec{x}) \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3 \vec{x} \mathcal{L}(\phi, \partial_0 \phi, t, \vec{x}) \right\} . \quad (4.2)$$

Dabei ist das Integral über $\mathcal{D}\phi(t, \vec{x})$ wie folgt auszuwerten:

$$\mathcal{D}\phi(t, \vec{x}) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \prod_{j=1}^N \prod_{\vec{x}} d\phi_j(X) . \quad (4.3)$$

Dabei ist $\phi_j(X)$, $\pi_j(X)$ das Feld und das kanonisch konjugierte Feld zum Zeitpunkt t_j : $\phi_j(X) = \phi(t_j, \vec{x})$, $\pi_j(X) = \pi(t_j, \vec{x})$. Das Zeitintervall $(t_f - t_i)$ ist in N Zwischenzeiten eingeteilt, die einen Abstand von τ haben. Während N gegen Unendlich geschickt wird, läuft τ gegen Null, damit das Zeitintervall konstant bleibt.

Der Vakuum-Erwartungswert des zeitgeordneten Produkts von Feld-Operatoren, die sogenannte n -Punkt-Korrelationsfunktion, sieht wie folgt aus:

$$\langle 0 | \hat{T} [\hat{\phi}(X_1) \dots \hat{\phi}(X_n)] | 0 \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(X_1) \dots \phi(X_n) \exp \left\{ i \int d^4 X \mathcal{L}(\phi, \partial_0 \phi, X) \right\} \quad (4.4)$$

Um mehr über die dynamischen Eigenschaften eines Systems zu erfahren, führt man eine externe Störung ein und berechnet den Einfluss auf die Übergangsamplitude. Die Störung wird durch eine externe Quelle $J(X)$ beschrieben. Diese muss in der Lagrange-Dichte vorkommen, um die Bewegungsgleichungen des Systems zu beeinflussen [5].

Der Propagator mit einer Quelle $J(X)$ hat folgende Form:

$$\langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle_J = \mathcal{N} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \mathcal{D}\phi(t, \vec{x}) \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3 \vec{x} [\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, t, \vec{x}) + J(t, \vec{x})\phi(t, \vec{x})] \right\}. \quad (4.5)$$

Für die Vakuum-Übergansamplitude gilt dann:

$$\langle 0|0 \rangle_J \propto \int \mathcal{D}\phi(X) \exp \left\{ i \int d^4 X [\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, X) + J(X)\phi(X)] \right\} \equiv Z[J(X)] \quad (4.6)$$

$Z[J(X)]$ ist das erzeugende Funktional für n -Punkt-Korrelationsfunktionen: Durch n -faches funktionales Ableiten von $Z[J(X)]$, lässt sich die n -Punkt-Korrelationsfunktion erzeugen [1]. Für die 2-Punkt-Korrelationsfunktion gilt beispielsweise:

$$\langle 0 | \hat{T} [\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)] | 0 \rangle = (-i)^2 \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)} \Big|_{J=0}. \quad (4.7)$$

4.1 Der skalare Feynman-Propagator⁵

Das erzeugende Funktional für neutrale skalare Felder lautet:

$$Z[J(X)] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4 X \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right] \right\} \quad (4.8)$$

Beim Integral über $\mathcal{D}\phi$ handelt es sich um ein verschobenes Gauß-Integral, demnach kann man es analytisch berechnen. Dafür führe ich zuerst folgende Umformung durch:

$$Z[J(X)] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4 X d^4 Y \phi(X) A(X, Y) \phi(Y) + i \int d^4 X J(X) \phi(X) \right\} \quad (4.9)$$

mit

$$A(X, Y) = -i(\square_X + m^2)\delta^{(4)}(X - Y). \quad (4.10)$$

Gleichung (4.9) hat allerdings immer noch nicht die Form eines Gauß-Integrals (z.B. ist das Argument der Exponential-Funktion von (4.9) imaginär). Um dieses Problem zu lösen, muss man Gleichung (4.9) analytisch in die Euklidische Raum-Zeit fortsetzen. Dann kann man das Gauß-Integral ausführen. Das Ergebnis ist:

$$Z[J(X)] = \mathcal{N}'(\det \Delta)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4 X d^4 Y J(X) \Delta(X - Y) J(Y) \right\}. \quad (4.11)$$

Dabei ist

$$i\Delta(X - Y) = A^{-1}(X, Y). \quad (4.12)$$

⁵Quelle: [1]

$A^{-1}(X, Y)$ ist die Greens-Funktion der Klein-Gordon-Gleichung, denn nach Gleichung (4.10) gilt:

$$\delta^{(4)}(X - Y) = i(\square_X + m^2)A^{-1}(X, Y) . \quad (4.13)$$

Gleichung (4.13) ist für folgendes $A^{-1}(X, Y)$ erfüllt:

$$A^{-1}(X, Y) = i \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} e^{-iK(X-Y)} \frac{1}{K^2 - m^2} . \quad (4.14)$$

Die Fourier-Transformierte von $\Delta(X - Y)$ lautet also:

$$\tilde{\Delta}(K) = \frac{1}{K^2 - m^2} \quad (4.15)$$

$\tilde{\Delta}(K)$ hat zwei Pole auf der reellen k_0 -Achse. Um diese in die komplexe Ebene zu verschieben, wird die Feynman-Vorschrift gewählt:

$$\tilde{\Delta}(K) = \frac{1}{K^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (4.16)$$

$\Delta_F(X - Y)$ ist der sogenannte Feynman-Propagator:

$$\Delta_F(X - Y) = \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} e^{-iK(X-Y)} \frac{1}{K^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (4.17)$$

Berechnet man die 2-Punkt-Korrelationsfunktion durch funktionales Ableiten von $Z[J]$, erhält man, dass die 2-Punkt-Korrelationsfunktion identisch mit dem Feynman-Propagator ist:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{T} [\hat{\phi}(X) \hat{\phi}(Y)] | 0 \rangle &= (-i)^2 \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X) \delta J(Y)} \right|_{J=0} \\ &= i \Delta_F(X - Y) \end{aligned} \quad (4.18)$$

5 Wechselwirkende Feldtheorie⁶

Bis jetzt habe ich nur die wechselwirkungsfreie Feldtheorie betrachtet. Nun befasse ich mich mit wechselwirkenden Feldern, die wichtig für die Beschreibung von Streuungen und Zerfällen sind. Die Lagrange-Dichte wird aufgeteilt in einen freien Term \mathcal{L}_0 und in einen wechselwirkenden Term \mathcal{L}_{int} :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} . \quad (5.1)$$

Ebenso lässt sich auch die Hamilton-Funktion in einen freien und einen wechselwirkenden Term aufteilen:

$$H = H_0 + H_{\text{int}} . \quad (5.2)$$

Ich beschränke mich auf die Fälle, in denen der Wechselwirkungsterm der Lagrange-Dichte keine Ableitungen der Felder enthält. Daraus folgt zum Einen, dass das kanonisch konjugierte Feld für die freie und die wechselwirkende Lagrange-Dichte identisch ist und zum Anderen, dass der Wechselwirkungsterm der Hamilton-Funktion derart ausgedrückt werden kann:

$$H_{\text{int}} = \int_V d^3 \vec{x} \mathcal{H}_{\text{int}} = - \int_V d^3 \vec{x} \mathcal{L}_{\text{int}} . \quad (5.3)$$

5.1 Wechselwirkungsbild⁷

Im Heisenberg-Bild sind die Zustände zeitunabhängig. Die Zeitabhängigkeit wird von den Operatoren getragen.

In dem betrachteten Fall hat der Hamilton-Operator jedoch einen zeitunabhängigen Teil \hat{H}_0 und einen wechselwirkenden Teil \hat{H}_{int} , der zeitabhängig ist:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}(t) . \quad (5.4)$$

Für die Beschreibung dieser Theorie ist das Wechselwirkungsbild zweckmäßig.

Sei $\phi(X) = \phi(t, \vec{x})$ ein Feld im Heisenberg-Bild und $\phi_I(X) = \phi_I(t, \vec{x})$ ein Feld im Wechselwirkungsbild. Die Transformation zwischen den beiden Feldern lautet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \phi(X) &= e^{i\hat{H}(t-t_0)} e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \phi_I(X) e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \\ &\equiv \hat{U}^\dagger(t, t_0) \phi_I(X) \hat{U}(t, t_0) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dabei ist $\hat{U}(t, t_0)$ der Zeitentwicklungsoperator:

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (5.6)$$

⁶Quellen: [6], [1], [7]

⁷Quellen: [4], [8]

Da der Zeitentwicklungsoperator und somit die Transformation unitär sind, erfüllen die wechselwirkenden Felder die gleichen Vertauschungsrelationen und die gleichen Bewegungsgleichungen wie die freien Felder. Es können also alle Gleichungen des freien Falles benutzt werden.

Wie man leicht zeigen kann, ist der Zeitentwicklungsoperator eine spezielle Lösung der Schrödinger-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) &= e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} (\hat{H} - \hat{H}_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \\
 &= \underbrace{e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}_{\text{int}} e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}}_{\hat{H}_{I,\text{int}}(t)} e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \\
 &= \hat{H}_{I,\text{int}}(t) \hat{U}(t, t_0),
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei $\hat{H}_{I,\text{int}}(t)$ die wechselwirkende Hamilton-Funktion im Wechselwirkungsbild ist. Löst man diese Differentialgleichung, erhält man folgenden Ausdruck für den Zeitentwicklungsoperator⁸:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_{I,\text{int}}(t') \right]. \tag{5.8}$$

Dabei steht \hat{T} für den Zeitordnungsoperator.

5.2 Die Streumatrix⁹

Die Streumatrix ist die Übergangsamplitude eines gegebenen Anfangszustandes $|i\rangle$ in einen bestimmten Endzustand $|f\rangle$, die miteinander wechselwirken. Die Streumatrix beschreibt also Streu- oder Zerfallsprozesse von Teilchen.

Ich betrachte den Anfangszustand $|i\rangle_{\text{in}}$ und den Endzustand $|f\rangle_{\text{out}}$. Dabei ist $|i\rangle_{\text{in}}$ der Zustand vor der Wechselwirkung zum Zeitpunkt $t = -\infty$, bei dem die Teilchen noch unendlich weit voneinander entfernt sind. Zu einem bestimmten Zeitpunkt nähern sich die Teilchen und wechselwirken miteinander. $|f\rangle_{\text{out}}$ beschreibt den Zustand lange nach der Wechselwirkung zum Zeitpunkt $t = +\infty$. Die Teilchen sind nun wieder weit voneinander entfernt. Der folgende Ausdruck steht für das Streumatrixelement S_{fi} :

$$S_{fi} = {}_{\text{out}} \langle f | i \rangle_{\text{in}}. \tag{5.9}$$

Die Zustände $|i\rangle_{\text{in}}$ und $|f\rangle_{\text{out}}$ sind allerdings in verschiedenen Fock-Räumen definiert. Um die Streumatrix ausrechnen zu können, muss man erst den Zusammenhang zwischen den beiden Zuständen finden. Die Transformation ist durch einen unitären Operator \hat{S} gegeben:

$$\begin{aligned}
 |i\rangle_{\text{in}} = \hat{S} |i\rangle_{\text{out}} &\Leftrightarrow |i\rangle_{\text{out}} = \hat{S}^\dagger |i\rangle_{\text{in}} \\
 |f\rangle_{\text{in}} = \hat{S} |f\rangle_{\text{out}} &\Leftrightarrow |f\rangle_{\text{out}} = \hat{S}^\dagger |f\rangle_{\text{in}}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

⁸Eine Herleitung dieser Lösung findet man beispielsweise in [4, S. 84].

⁹Quellen: [6], [1], [2]

Damit ergibt sich für das Streumatrixelement:

$$S_{fi} =_{\text{in}} \langle f | \hat{S} | i \rangle_{\text{in}} =_{\text{out}} \langle f | \hat{S} | i \rangle_{\text{out}} \equiv \langle f | \hat{S} | i \rangle . \quad (5.11)$$

Der S-Operator ist durch den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0)$ gegeben:

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \hat{U}(t, t_0) = \hat{T} \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}_{I,\text{int}} \right] . \quad (5.12)$$

6 Lineare Mischung zweier Felder¹⁰

Ich betrachte die folgende Lagrange-Dichte mit den skalaren Feldern S_1 und S_2 :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu S_1 \partial^\mu S_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu S_2 \partial^\mu S_2 - \frac{1}{2} M_1^2 S_1^2 - \frac{1}{2} M_2^2 S_2^2 - f S_1 S_2 \quad (6.1)$$

Hierbei ist f der Mischungs-Parameter der beiden Felder. Ist $f \neq 0$, bedeutet das, dass die Wellenfunktionen der Felder S_1 und S_2 nicht orthogonal zueinander sind.

Im Folgenden werde ich zeigen, dass man durch eine $SO(2)$ -Rotation der Felder S_1 und S_2 die physikalischen Felder P_1 und P_2 bestimmen kann, welche orthogonal zueinander sind. Hierzu definiere ich den Vektor φ und die Matrix Ω :

$$\varphi = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} M_1^2 & f \\ f & M_2^2 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Die Lagrange-Dichte aus Gleichung (6.1) kann nun wie folgt umgeschrieben werden:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^T) (\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} \varphi^T \Omega \varphi. \quad (6.3)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Gleichungen (6.1) und (6.3) übereinstimmen.

Um die physikalischen Felder ohne Mischung zu erhalten, muss man nun die Matrix Ω diagonalisieren:

$$D \Omega D^T = \begin{pmatrix} M_1'^2 & 0 \\ 0 & M_2'^2 \end{pmatrix} \equiv \Omega'. \quad (6.4)$$

Dabei sind M_1' und M_2' die Eigenwerte von Ω und zugleich die Massen der physikalischen Felder P_1 und P_2 . Um die Relation zwischen M_1' , M_2' und M_1 , M_2 zu erhalten, löse ich das Eigenwertproblem:

$$\begin{aligned} \det(\Omega - \lambda \mathbb{1}) &= 0 \\ \Rightarrow (M_1^2 - \lambda)(M_2^2 - \lambda) - f^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Man erhält für die Massen der Felder P_1 und P_2 :

$$\begin{aligned} M_1' &= \frac{1}{2} \left[M_1^2 + M_2^2 + \sqrt{(M_1^2 + M_2^2)^2 + 4(f^2 - M_1^2 M_2^2)} \right], \\ M_2' &= \frac{1}{2} \left[M_1^2 + M_2^2 - \sqrt{(M_1^2 + M_2^2)^2 + 4(f^2 - M_1^2 M_2^2)} \right]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Wie bereits erwähnt, lässt sich Ω durch eine $SO(2)$ -Rotation diagonalisieren. Die Matrix D hat also folgende Form:

$$D = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

¹⁰Quellen: [9], [7]

Dabei ist ϑ der Mischungswinkel der Felder. Multipliziert man die Matrix mit den Feldern S_1 und S_2 , erhält man die physikalischen Felder:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \varphi' = D\varphi. \quad (6.8)$$

Setzt man nun φ' und Ω' in die Lagrange-Dichte von (6.3) ein, so sieht man, dass kein Mischungsterm in der Lagrange-Dichte vorkommt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi'^T)(\partial^\mu \varphi') - \frac{1}{2}\varphi'^T \Omega' \varphi' \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu P_1 \partial^\mu P_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu P_2 \partial^\mu P_2 - \frac{1}{2}M_1'^2 P_1^2 - \frac{1}{2}M_2'^2 P_2^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

7 Berechnung der Zerfallsbreite

In der experimentellen Kern- und Teilchenphysik werden viele Daten aus Streuexperimenten gewonnen. Die Messung des Wirkungsquerschnittes ist dabei von entscheidender Bedeutung. Bei Zerfällen instabiler Teilchen wird die Information durch Zerfallsbreiten ausgedrückt. Beispielsweise lässt sich aus der Zerfallsbreite Γ die mittlere Lebensdauer τ eines Teilchens bestimmen: $\tau = \frac{1}{\Gamma}$. In der theoretischen Physik ist es möglich, diese Größen zu berechnen. Sie bilden die Schnittstelle zwischen der Theorie und dem Experiment [10]. In diesem Kapitel beschäftige ich mich mit der Berechnung von Zerfallsbreiten.

7.1 Zerfall von S_1 und S_2 in $\varphi\varphi$ ($f = 0$)

In diesem Kapitel betrachte ich ein System mit drei skalaren Feldern S_1 , S_2 und φ . Die Felder S_1 und S_2 wechselwirken nicht miteinander, beide Felder wechselwirken jedoch mit φ^2 . Die Felder S_1 und S_2 zerfallen also in $\varphi\varphi$. Die Lagrange-Dichte sieht wie folgt aus:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu S_1 \partial^\mu S_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu S_2 \partial^\mu S_2 - \frac{1}{2}M_1^2 S_1^2 - \frac{1}{2}M_2^2 S_2^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 + g_1 S_1 \varphi^2 + g_2 S_2 \varphi^2 \quad (7.1)$$

Dabei ist g_1 die Kopplungskonstante des Feldes S_1 an φ^2 und g_2 die Kopplungskonstante des Feldes S_2 an φ^2 . Die Kopplungskonstante legt die Stärke der Wechselwirkung fest. Wie bereits erwähnt, nehme ich an, dass der Mischungsparameter für die Felder S_1 und S_2 Null ist, d.h. dass die beiden Felder nicht mischen.

Damit die Zerfälle kinematisch möglich sind, müssen die Massen von S_1 und S_2 größer als die doppelte Masse von φ sein: $M_1 > 2m$, $M_2 > 2m$. Vorerst befasse ich mich nur mit dem Zerfall von S_1 in $\varphi\varphi$.

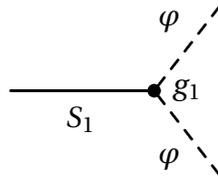


Abbildung 7.1: Zerfall von S_1 in $\varphi\varphi$ mit der Kopplungskonstante g_1

Um die Zerfallsbreite zu bestimmen, werde ich zunächst die Streumatrix berechnen, die nach Kapitel 5.2 der Beschreibung von Zerfällen dient. Da es sich bei den Feldern S_1 und φ um neutrale skalare Felder handelt, haben sie die gleiche Form wie in Gleichung (3.8). Um mir später die Rechnung zu vereinfachen, teile ich die Felder in zwei Teile auf:

$$\begin{aligned} \hat{S}_1(X) &= \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \hat{a}_{\vec{k}_1} e^{-iK_1 \cdot X} + \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger e^{+iK_1 \cdot X} \equiv \hat{S}_1^{(+)} + \hat{S}_1^{(-)} \\ \hat{\varphi}(X) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \hat{c}_{\vec{p}} e^{-iP \cdot X} + \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger e^{+iP \cdot X} \equiv \hat{\varphi}^{(+)} + \hat{\varphi}^{(-)} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Dabei ist $\hat{a}_{\vec{k}_1} / \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger$ der Vernichtungs-, bzw. Erzeugungsoperator des Feldes \hat{S}_1 und $\hat{c}_{\vec{p}} / \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger$ der Vernichtungs-, bzw. Erzeugungsoperator des Feldes $\hat{\phi}$.

Vorerst befasse ich mich nur mit dem Zerfall von S_1 in $\varphi\varphi$. Der Anfangszustand $|i\rangle$ wird durch den Erzeugungsoperator des Teilchens S_1 beschrieben, welcher auf das Vakuum $|0\rangle$ wirkt:

$$|i\rangle = N \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger |0\rangle . \quad (7.3)$$

Die Normierungskonstante N ergibt sich unter Verwendung von (3.10) und $\hat{a}_{\vec{k}_1} |0\rangle = 0$ aus der Normierung des Anfangszustandes:

$$\begin{aligned} \langle i|i\rangle &= |N|^2 \langle 0|\hat{a}_{\vec{k}_1} \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger |0\rangle = |N|^2 \langle 0| \left[\hat{a}_{\vec{k}_1}, \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger \right]_- + \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_1} |0\rangle \\ &= |N|^2 (2\pi)^3 2E_{k_1} \delta^{(3)}(0) = |N|^2 2E_{k_1} \int d^3\vec{x} e^{i\vec{k}_1\vec{x}} \Big|_{\vec{k}_1=0} = |N|^2 2E_{k_1} V \\ &\stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow N &= \frac{1}{\sqrt{2E_{k_1} V}} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Der Endzustand $|f\rangle$ des Zerfalls kann wie folgt dargestellt werden, wobei die Berechnung der Normierungskonstante analog verläuft:

$$|f\rangle = \sqrt{2V^2 2E_{p_1} 2E_{p_2}} \hat{c}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle . \quad (7.5)$$

Um die Matrix S_{fi} ausrechnen zu können, benötigt man nun noch den zur Streumatrix gehörenden Operator \hat{S} . Um Verwechslungen zu vermeiden, sei angemerkt, dass dieser Operator stets ohne Index verwendet wird, während die Feldoperatoren \hat{S}_1 und \hat{S}_2 einen Index tragen. Um den Operator \hat{S} zu bestimmen, nutze ich aus, dass ich die Zerfallsbreite nur in erster Ordnung, also auf Baumgraphen-Niveau, bestimmen will. Entwickelt man die Exponentialfunktion aus Gleichung (5.12) bis zur ersten Ordnung, erhält man:

$$\hat{S} = 1 - i \int d^4 X \hat{T} \mathcal{H}_{\text{int}} \quad (7.6)$$

Dabei ist nur der zweite Term von Interesse, da der erste Term den Fall ohne Wechselwirkung beschreibt:

$$\hat{S}^{(1)} = -i \int d^4 X \hat{T} \mathcal{H}_{\text{int}} . \quad (7.7)$$

Aus Gleichung (5.3) folgt für den hier relevanten Teil von Gleichung (7.1):

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}} = -g_1 \hat{S}_1 \hat{\phi} \hat{\phi} \quad (7.8)$$

$$\Rightarrow \hat{S}^{(1)} = i g_1 \int d^4 X \hat{T} \{ \hat{S}_1 \hat{\phi} \hat{\phi} \} \quad (7.9)$$

Das zeitgeordnete Produkt der Operatoren kann man mit Hilfe des Wickschen Theorems auflösen [5]:

$$\begin{aligned} \hat{T} \{ \hat{S}_1 \hat{\phi} \hat{\phi} \} &= \hat{S}_1 \hat{\phi} \hat{\phi} : + : \hat{S}_1 \hat{\phi} \hat{\phi} : + : \hat{S}_1 \hat{\phi} \hat{\phi} : + : \hat{S}_1 \hat{\phi} \hat{\phi} : \\ &= \hat{S}_1 \hat{\phi} \hat{\phi} : + : \hat{S}_1 \hat{\phi} \hat{\phi} : \end{aligned} \quad (7.10)$$

In der ersten Zeile habe ich das Wicksche Theorem angewendet. Dabei bedeuten die Doppelpunkte, dass man die Produkte normalordnen muss. Das heißt, dass die Erzeuger immer links von den Vernichtern stehen. Die eckigen Klammern unterhalb der Operatoren sind Kontraktionen. Eine Kontraktion von zwei beliebigen Operatoren $\hat{\phi}_A$ und $\hat{\phi}_B$ ist wie folgt definiert:

$$\hat{\phi}_A \hat{\phi}_B = \langle 0 | \hat{T} [\hat{\phi}_A \hat{\phi}_B] | 0 \rangle \quad (7.11)$$

Die Kontraktion von \hat{S}_1 und $\hat{\phi}$ verschwindet, da die Erzeuger und Vernichter von \hat{S}_1 und $\hat{\phi}$ vertauschen und daher immer ein Vernichter nach rechts oder ein Erzeuger nach links auf das Vakuum wirken kann. Daher sind der zweite und der dritte Term in der ersten Zeile Null. Die Kontraktion von $\hat{\phi}\hat{\phi}$ verschwindet zwar nicht, aber setzt man den letzten Term in die Streumatrix ein, kann wieder ein Vernichter (bzw. Erzeuger) auf das Vakuum wirken und der Term wird ebenfalls Null. Also bleibt nur noch der erste Term übrig, welchen ich wie folgt auflöse:

$$\begin{aligned} : \hat{S}_1 \hat{\phi} \hat{\phi} : &= : \left[\hat{S}_1^{(+)} + \hat{S}_1^{(-)} \right] \left[\hat{\phi}^{(+)} + \hat{\phi}^{(-)} \right] \left[\hat{\phi}^{(+)} + \hat{\phi}^{(-)} \right] : \\ &= : \left[\hat{S}_1^{(+)} \hat{\phi}^{(+)} \hat{\phi}^{(+)} + \hat{S}_1^{(+)} \hat{\phi}^{(+)} \hat{\phi}^{(-)} + \hat{S}_1^{(+)} \hat{\phi}^{(-)} \hat{\phi}^{(+)} + \hat{S}_1^{(+)} \hat{\phi}^{(-)} \hat{\phi}^{(-)} \right. \\ &\quad \left. + \hat{S}_1^{(-)} \hat{\phi}^{(+)} \hat{\phi}^{(+)} + \hat{S}_1^{(-)} \hat{\phi}^{(+)} \hat{\phi}^{(-)} + \hat{S}_1^{(-)} \hat{\phi}^{(-)} \hat{\phi}^{(+)} + \hat{S}_1^{(-)} \hat{\phi}^{(-)} \hat{\phi}^{(-)} \right] : \quad (7.12) \\ &= \hat{S}_1^{(+)} \hat{\phi}^{(+)} \hat{\phi}^{(+)} + \hat{\phi}^{(-)} \hat{S}_1^{(+)} \hat{\phi}^{(+)} + \hat{\phi}^{(-)} \hat{S}_1^{(+)} \hat{\phi}^{(+)} + \hat{\phi}^{(-)} \hat{\phi}^{(-)} \hat{S}_1^{(+)} \\ &\quad + \hat{S}_1^{(-)} \hat{\phi}^{(+)} \hat{\phi}^{(+)} + \hat{S}_1^{(-)} \hat{\phi}^{(-)} \hat{\phi}^{(+)} + \hat{S}_1^{(-)} \hat{\phi}^{(-)} \hat{\phi}^{(+)} + \hat{S}_1^{(-)} \hat{\phi}^{(-)} \hat{\phi}^{(-)} \end{aligned}$$

In der ersten Zeile habe ich die Aufspaltung der Feldoperatoren verwendet. Danach habe ich die eckigen Klammern ausmultipliziert und normalgeordnet. Eingesetzt in die Streumatrix, bleibt auch hier nur ein nichtverschwindender Term: $\hat{\phi}^{(-)} \hat{\phi}^{(-)} \hat{S}_1^{(+)}$. Alle anderen werden aus dem gleichen Grund wie zuvor verschwinden.

Nun setze ich alle bisherigen Ergebnisse in die Streumatrix ein:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{1}{\sqrt{2V^3}} \frac{1}{\sqrt{2E_{k_1} 2E_{p_1} 2E_{p_2}}} \langle 0 | \hat{c}_{\vec{p}_1} \hat{c}_{\vec{p}_2} \hat{\phi}^{(-)} \hat{\phi}^{(-)} \hat{S}_1^{(+)} \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \frac{i g_1}{\sqrt{2V^3}} \frac{1}{\sqrt{2E_{k_1} 2E_{p_1} 2E_{p_2}}} \int d^4 X \frac{d^3 \vec{k}'_1}{(2\pi)^3 2E_{k'_1}} \frac{d^3 \vec{p}'_1}{(2\pi)^3 2E_{p'_1}} \frac{d^3 \vec{p}'_2}{(2\pi)^3 2E_{p'_2}} e^{i(P'_1 + P'_2 - K'_1) \cdot X} \quad (7.13) \\ &\quad \times \langle 0 | \hat{c}_{\vec{p}_1} \hat{c}_{\vec{p}_2} \hat{c}_{\vec{p}'_1}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}'_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'_1} \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned}$$

Auf die Operatoren im Vakuumserwartungswert kann man die Vertauschungsrelationen der

Erzeuger und Vernichter anwenden. Dadurch erhält man mehrere Delta-Distributionen:

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \hat{c}_{\vec{p}_1} \hat{c}_{\vec{p}_2} \hat{c}_{\vec{p}'_1}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}'_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'_1} \hat{a}_{\vec{k}'_1}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \hat{c}_{\vec{p}_1} \left(\left[\hat{c}_{\vec{p}_2}, \hat{c}_{\vec{p}'_1}^\dagger \right]_- + \hat{c}_{\vec{p}'_1}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}_2} \right) \hat{c}_{\vec{p}'_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'_1} \hat{a}_{\vec{k}'_1}^\dagger | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^3 2E_{p'_1} \delta^{(3)}(\vec{p}_2 - \vec{p}'_1) \langle 0 | \hat{c}_{\vec{p}_1} \hat{c}_{\vec{p}'_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'_1} \hat{a}_{\vec{k}'_1}^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{c}_{\vec{p}_1} \hat{c}_{\vec{p}'_1}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}_2} \hat{c}_{\vec{p}'_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'_1} \hat{a}_{\vec{k}'_1}^\dagger | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^3 2E_{p'_1} (2\pi)^3 2E_{p'_2} (2\pi)^3 2E_{k'_1} \\
&\quad \times \left[\delta^{(3)}(\vec{p}_2 - \vec{p}'_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}'_2) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) + \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_2 - \vec{p}'_2) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \right]
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Verwendet man den soeben berechneten Vakuumerwartungswert in der Streumatrix, brechen auf Grund der Delta-Distributionen die Integrale über \vec{k}'_1 , \vec{p}'_1 und \vec{p}'_2 zusammen und die Streumatrix vereinfacht sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \frac{ig_1}{\sqrt{2V^3}} \frac{1}{\sqrt{2E_{k_1} 2E_{p_1} 2E_{p_2}}} \int d^4X d^3\vec{k}'_1 d^3\vec{p}'_1 d^3\vec{p}'_2 e^{i(P'_1 + P'_2 - K_1) \cdot X} \\
&\quad \times \left[\delta^{(3)}(\vec{p}_2 - \vec{p}'_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}'_2) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) + \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_2 - \vec{p}'_2) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \right] \\
&= \frac{2ig_1}{\sqrt{2V^3}} \frac{1}{\sqrt{2E_{k_1} 2E_{p_1} 2E_{p_2}}} \int d^4X e^{i(P_1 + P_2 - K_1) \cdot X} \\
&= \frac{2ig_1}{\sqrt{2V^3}} \frac{1}{\sqrt{2E_{k_1} 2E_{p_1} 2E_{p_2}}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_1 + P_2 - K_1)
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Im zweiten Schritt, wurde das Integral über die Raum-Zeit X ausgeführt, welches eine vierdimensionale Delta-Distribution ergibt. Diese Delta-Distribution sorgt für die Energie-Impuls-Erhaltung. An jedem Vertex ist die Summe der ein- und auslaufenden Vierer-Impulse Null, also erhalten: $P_1 + P_2 - K_1 = 0$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $|i\rangle$ in einen Zustand $|f\rangle$ zerfällt, ist gegeben durch das Betragsquadrat der Streumatrix:

$$\begin{aligned}
|S_{fi}|^2 &= \frac{|2ig_1|^2}{2V^3} \frac{1}{2E_{k_1} 2E_{p_1} 2E_{p_2}} \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_1 + P_2 - K_1) \right]^2 \\
&= \frac{|2ig_1|^2}{2V^3} \frac{1}{2E_{k_1} 2E_{p_1} 2E_{p_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_1 + P_2 - K_1) V t
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Hierbei habe ich von folgender Ersetzung Gebrauch gemacht [11]:

$$\left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_2 + P_1 - K_1) \right]^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_1 + P_2 - K_1) V t . \tag{7.17}$$

Die differentielle Zerfallsbreite ist folgendermaßen definiert:

$$d\Gamma = \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{|S_{fi}|^2}{t} V^2 . \tag{7.18}$$

Setzt man das Betragsquadrat der Streumatrix ein, erhält man für die Zerfallsbreite:

$$\begin{aligned}\Gamma_{S_1\varphi\varphi} &= \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{|S_{fi}|^2}{t} V^2 \\ &= \frac{|2ig_1|^2}{2} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}2E_{p_1}2E_{p_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_1 + P_2 - K_1)\end{aligned}\quad (7.19)$$

Für die weitere Rechnung verwende ich das Ruhesystem des Teilchens S_1 . Für die Energien und die Vierer-Impulse gelten dann:

$$E_{k_1} = M_1, \quad E_{p_1} = \sqrt{m^2 + \vec{p}_1^2}, \quad E_{p_2} = \sqrt{m^2 + \vec{p}_2^2}, \quad (7.20)$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} E_{p_1} \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} E_{p_2} \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

Mit diesen Relationen kann man die vierdimensionale Delta-Distribution in der Zerfallsbreite umschreiben. Das eine Impuls-Integral bricht zusammen und man findet heraus, dass die Impulse der auslaufenden Teilchen betragsmäßig identisch sind: $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$.

$$\begin{aligned}\Gamma_{S_1\varphi\varphi} &= \frac{|2ig_1|^2}{4M_1} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p_1}2E_{p_2}} (2\pi)^4 \underbrace{\delta^{(4)}(P_1 + P_2 - K_1)}_{\delta(E_{p_1}+E_{p_2}-M_1)\delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)} \\ &= \frac{|2ig_1|^2}{4M_1} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{p_1}^2} (2\pi) \delta(2E_{p_1} - M_1) \\ &= \frac{|2ig_1|^2}{4M_1} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4(m^2 + \vec{p}_1^2)} (2\pi) \delta\left(2\sqrt{m^2 + \vec{p}_1^2} - M_1\right)\end{aligned}\quad (7.22)$$

Die Delta-Distribution lässt sich nun auf folgende Weise umformen, wobei x_i die Nullstellen der Funktion g sind:

$$\begin{aligned}\delta(g(x)) &= \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \\ \Rightarrow \delta\left(2\sqrt{m^2 + \vec{p}_1^2} - M_1\right) &= \frac{M_1}{4\sqrt{M_1^2/4 - m^2}} \delta\left(|\vec{p}_1| - \sqrt{M_1^2/4 - m^2}\right)\end{aligned}\quad (7.23)$$

Setzt man diese Umformung ein, kann man in Kugelkoordinaten übergehen.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{S_1\varphi\varphi} &= \frac{|2ig_1|^2}{4M_1} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{M_1}{16(m^2 + \vec{p}_1^2)\sqrt{M_1^2/4 - m^2}} (2\pi) \delta\left(|\vec{p}_1| - \sqrt{M_1^2/4 - m^2}\right) \\
&= \frac{4\pi |2ig_1|^2}{(2\pi)^2 4M_1} \int_0^\infty dz \frac{M_1 z^2}{16(m^2 + z^2)\sqrt{M_1^2/4 - m^2}} \delta\left(z - \sqrt{M_1^2/4 - m^2}\right) \\
&= \frac{4\pi |2ig_1|^2}{(2\pi)^2 2} \frac{(M_1^2/4 - m^2)}{8M_1^2 \sqrt{M_1^2/4 - m^2}} \\
&= \frac{(2g_1)^2}{2} \frac{\sqrt{M_1^2/4 - m^2}}{8\pi M_1^2}
\end{aligned} \tag{7.24}$$

In der zweiten Zeile wurden die Integrale über $d\varphi$ und $d\theta$ schon ausgeführt und es bleibt nur noch das Integral über $dz = d|\vec{p}_1|$ zu lösen. Man erhält für die Zerfallsbreite des Zerfalls von S_1 in $\varphi\varphi$ folgendes Ergebnis:

$$\Gamma_{S_1\varphi\varphi} = \frac{(2g_1)^2}{2} \frac{\sqrt{M_1^2/4 - m^2}}{8\pi M_1^2} . \tag{7.25}$$

Dabei ist

$$\sqrt{M_1^2/4 - m^2} = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| \tag{7.26}$$

der Betrag des Dreier-Impulses der Ausgangsteilchen.

$(2g_1)^2$ ist das Betragsquadrat der Zerfallsamplitude: $|-i\mathcal{M}|^2 = (2g_1)^2$, wobei der Faktor 2 dadurch zustande kommt, dass S_1 in zwei gleiche Teilchen zerfällt.

Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist ein Symmetriefaktor (S_f). Da die beiden Ausgangsteilchen ununterscheidbar sind, braucht man den Faktor $\frac{1}{2}$, damit der Zerfall nicht doppelt gezählt wird.

Die allgemeine Formel für die Zerfallsbreite lautet also:

$$\Gamma = S_f |-i\mathcal{M}|^2 \frac{|\vec{p}|}{8\pi M^2} \tag{7.27}$$

Für den Zerfall von S_2 in $\varphi\varphi$ gilt ganz analog zur Gleichung (7.25):

$$\Gamma_{S_2\varphi\varphi} = \frac{(2g_2)^2}{2} \frac{\sqrt{M_2^2/4 - m^2}}{8\pi M_2^2} . \tag{7.28}$$

7.2 Zerfall der physikalischen Felder P_1 und P_2 in $\varphi\varphi$ ($f \neq 0$)

Im letzten Kapitel habe ich mich mit den Zerfällen von zwei skalaren Feldern S_1 und S_2 befasst. Dabei konnte ich die Zerfallsbreiten unabhängig voneinander bestimmen, da der Mi-

schungsparameter der beiden Felder Null war. Nun nehmen ich an, dass f nicht Null ist:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu S_1 \partial^\mu S_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu S_2 \partial^\mu S_2 - \frac{1}{2}M_1^2 S_1^2 - \frac{1}{2}M_2^2 S_2^2 - f S_1 S_2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 + g_1 S_1 \varphi^2 + g_2 S_2 \varphi^2 \quad (7.29)$$

Ist der Mischungsparameter der Felder S_1 und S_2 ungleich Null, so muss man zunächst zu den physikalischen Feldern P_1 und P_2 übergehen. Um die Zerfallsbreite der Zerfälle von P_1 in $\varphi\varphi$ und von P_2 in $\varphi\varphi$ berechnen zu können, setzt man die Felder S_1 und S_2 in Abhängigkeit von P_1 und P_2 in die Lagrange-Dichte ein. Aus Gleichung (6.8) folgt:

$$\begin{aligned} S_1 &= \cos \vartheta P_1 - \sin \vartheta P_2, \\ S_2 &= \sin \vartheta P_1 + \cos \vartheta P_2. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Eingesetzt in die Lagrange-Dichte erhält man die Kopplungskonstanten g'_1 und g'_2 der Wechselwirkung von P_1 und P_2 mit φ^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu P_1 \partial^\mu P_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu P_2 \partial^\mu P_2 - \frac{1}{2}M_1'^2 P_1^2 - \frac{1}{2}M_2'^2 P_2^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 \\ &\quad + g_1 (\cos \vartheta P_1 - \sin \vartheta P_2) \varphi^2 + g_2 (\sin \vartheta P_1 + \cos \vartheta P_2) \varphi^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu P_1 \partial^\mu P_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu P_2 \partial^\mu P_2 - \frac{1}{2}M_1'^2 P_1^2 - \frac{1}{2}M_2'^2 P_2^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 \\ &\quad + \underbrace{(g_1 \cos \vartheta + g_2 \sin \vartheta)}_{g'_1} P_1 \varphi^2 + \underbrace{(-g_1 \sin \vartheta + g_2 \cos \vartheta)}_{g'_2} P_2 \varphi^2 \end{aligned} \quad (7.31)$$

Mit den soeben bestimmten Kopplungskonstanten g'_1 und g'_2 lassen sich die Zerfallsbreiten $\Gamma_{P_1\varphi\varphi}$ und $\Gamma_{P_2\varphi\varphi}$ analog zur Gleichung (7.25) angeben:

$$\Gamma_{P_1\varphi\varphi} = \frac{(2g'_1)^2}{2} \frac{\sqrt{M_1'^2/4 - m^2}}{8\pi M_1'^2}, \quad \Gamma_{P_2\varphi\varphi} = \frac{(2g'_2)^2}{2} \frac{\sqrt{M_2'^2/4 - m^2}}{8\pi M_2'^2} \quad (7.32)$$

mit

$$g'_1 = g_1 \cos \vartheta + g_2 \sin \vartheta \quad \text{und} \quad g'_2 = -g_1 \sin \vartheta + g_2 \cos \vartheta. \quad (7.33)$$

Die Kopplungskonstanten g'_1 und g'_2 hängen jeweils von g_1 und g_2 ab. Es kann daher vorkommen, dass eine der beiden Kopplungskonstanten Null ist. Ist etwa $g_1 \sin \vartheta = g_2 \cos \vartheta$, so ist g'_2 Null, was ein Beispiel destruktiver Interferenz ist. Obwohl die Felder S_1 und S_2 beide mit φ^2 wechselwirken, verschwindet die Kopplung von P_2 , was bedeutet, dass P_2 in diesem Limes stabil ist. Solche Mischungseffekte treten in der hadronischen Physik auf.

8 Ein-Schleifen-Ordnung

Bisher habe ich alle Berechnungen in niedrigster nicht verschwindender Ordnung durchgeführt. Diese Ordnung wird Baumgraphen-Niveau genannt, da in den Diagrammen keine Schleifen auftreten. In allen Prozessen mit Beiträgen höherer Ordnung enthalten die Diagramme Schleifen [4]. Die, nach dem Baumgraphen-Niveau, nächsthöhere Ordnung in der Störungstheorie ist die Ein-Schleifen-Ordnung. Damit sind alle Prozesse gemeint, deren Diagramme eine oder mehrere ‘einfache’ Schleifen enthalten:

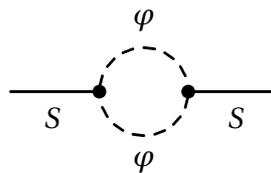


Abbildung 8.1: Ein-Schleifen-Diagramm, Zerfall von S über $\varphi\varphi$ in sich selbst

Die Schleife in Abbildung 8.1 bezeichnet man als Selbstenergie. Man kann sie ansehen als Zerfall eines Teilchens S in die Teilchen $\varphi\varphi$, welche dann wieder das Eingangsteilchen bilden. Das Teilchen S ‘zerfällt’ also in sich selbst (daher der Name Selbstenergie).

Die wiederum nächst höhere Ordnung der Störungstheorie enthält Zwei-Schleifen-Diagramme:

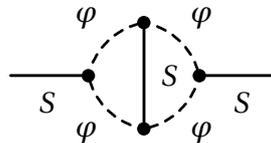


Abbildung 8.2: Zwei-Schleifen-Diagramm

In diesem Kapitel befasse ich mich mit der Ein-Schleifen-Ordnung. Ich werde zum Beispiel die Ein-Schleifen-Korrektur des Propagators berechnen. In Kapitel 8.1 werde ich mich dafür zuerst mit einer Lagrange-Dichte befassen, die einen Wechselwirkungsterm enthält, eine Wechselwirkung eines Feldes S mit φ^2 . In Kapitel 8.2 leite ich dann den Propagator her, wenn zwei Felder, S_1 und S_2 , beide mit dem gleichen Feld φ^2 wechselwirken. Das heißt, dass beide Teilchen in den selben Kanal zerfallen.

8.1 Ein Zerfallskanal

Zunächst betrachte ich die folgende Lagrange-Dichte mit einem skalaren Feld S und einer Wechselwirkung von S mit φ^2 :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S - \frac{1}{2} M_0^2 S^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + g S \varphi^2 \quad (8.1)$$

8.1.1 Herleitung des Propagators

Im Kapitel 4.1 habe ich den Feynman-Propagator für ein skalares Feld ohne Wechselwirkung eingeführt. Nun betrachte ich die Lagrange-Dichte aus Gleichung (8.1) mit dem Wechselwirkungsterm:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g S \varphi^2. \quad (8.2)$$

In diesem Kapitel werde ich den Wechselwirkungs-Propagator, den sogenannten vollen Propagator, für das Feld S herleiten. In der Ein-Schleifen-Ordnung beinhaltet der Propagator, zusätzlich zum freien Propagator, alle Terme, die eine Schleife enthalten. In der folgenden Rechnung ist dies dargestellt. Dabei steht die durchgezogene Linie für den freien Propagator des Feldes S , die gestrichelte Linie für φ und $\text{---}\times\text{---}$ steht für den vollen Propagator des Feldes S , der im folgenden als Δ_S bezeichnet wird.

$$\begin{aligned} \text{---}\times\text{---} &= \text{---} + \text{---}\text{---}\text{---} + \text{---}\text{---}\text{---}\text{---} \\ &+ \text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} + \dots \\ &= \text{---} + \text{---}\text{---}\text{---} \left(\text{---} + \text{---}\text{---}\text{---} + \dots \right) \\ &= \text{---} + \text{---}\text{---}\text{---}\times\text{---} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Hierbei handelt es sich um eine Bethe-Salpeter-Gleichung [12]. Mit Hilfe der Feynman-Regeln im Impulsraum kann man diese diagrammatische Schreibweise in Formeln übersetzen:

$$\begin{aligned} \text{---} &= \frac{i}{K^2 - M_0^2} \\ \text{---}\text{---}\text{---} &= -i\Sigma \\ \text{---}\text{---}\times\text{---} &= ig \end{aligned} \quad (8.4)$$

Hierbei ist Σ die Selbstenergie, welche im allgemeinen komplexwertig ist.

Gleichung (8.3) lautet also:

$$\begin{aligned}
\Delta_S &= \frac{i}{K^2 - M_0^2} + \frac{i}{K^2 - M_0^2} (\sqrt{2}ig)^2 (-i\Sigma) \Delta_S \\
&= \frac{i}{K^2 - M_0^2} - \frac{1}{K^2 - M_0^2} (\sqrt{2}g)^2 \Sigma \Delta_S \\
\Leftrightarrow \Delta_S \left[1 + \frac{(\sqrt{2}g)^2 \Sigma}{K^2 - M_0^2} \right] &= \frac{i}{K^2 - M_0^2} \\
\Delta_S \frac{K^2 - M_0^2 + (\sqrt{2}g)^2 \Sigma}{K^2 - M_0^2} &= \frac{i}{K^2 - M_0^2}
\end{aligned} \tag{8.5}$$

In der ersten Zeile muss im zweiten Term ein Symmetriefaktor von 2 berücksichtigt werden. Nach den Umformungen erhält man für den vollen Propagator des Feldes S folgendes Ergebnis:

$$\Delta_S = \frac{i}{K^2 - M_0^2 + (\sqrt{2}g)^2 \Sigma} . \tag{8.6}$$

Im folgenden werde ich zur Vereinfachung für den vollen Propagator Δ_S auch $\frac{i}{D}$ verwenden.

8.1.2 Die Selbstenergie¹¹

Zur Berechnung der Selbstenergie verwende ich die Feynman-Regeln:

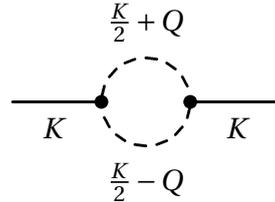


Abbildung 8.3: Selbstenergie Σ

$$\Sigma(\sqrt{K^2}) = -i \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[\left(\frac{K}{2} + Q \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right] \left[\left(\frac{K}{2} - Q \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right]} \tag{8.7}$$

Dieses Integral ist jedoch logarithmisch divergent. Um es endlich zu machen, wird eine Regularisierungsfunktion $f_\Lambda(Q)$ eingeführt. Diese hängt von einem Impuls-Cutoff Λ ab.

$$\Sigma(\sqrt{K^2}) = -i \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{f_\Lambda^2(Q)}{\left[\left(\frac{K}{2} + Q \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right] \left[\left(\frac{K}{2} - Q \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right]} \tag{8.8}$$

¹¹Quellen: [13], [14], [15]

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Regularisierungsfunktion zu wählen. Ich wähle einen scharfen Cutoff, wobei $f_\Lambda(Q)$ nur von dem Betrag des Dreier-Impulses $|\vec{q}|$ abhängt:

$$f_\Lambda(Q) = f_\Lambda(|\vec{q}|) = \Theta\left(\Lambda^2 - |\vec{q}|^2\right). \quad (8.9)$$

Für andere Ausdrücke von $f_\Lambda(Q)$ erhält man ähnliche Resultate [13]. Die Wahl (8.9) ist streng genommen nicht Lorentz-invariant, ich verwende jedoch das Ruhesystem des zerfallenden Teilchens:

$$K = \begin{pmatrix} M \\ \vec{0} \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Damit folgt für das Quadrat der Vierer-Impulse:

$$\left(\frac{K}{2} \pm Q\right)^2 = \left(\frac{M}{2} \pm q^0\right)^2 - |\vec{q}|^2. \quad (8.11)$$

Damit kann man das d^4K -Integral in seinen zeitlichen und seinen räumlichen Anteil aufteilen:

$$\begin{aligned} \Sigma\left(\sqrt{K^2} = M\right) = \\ -i \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} f_\Lambda^2(|\vec{q}|) \int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{1}{\left[\left(\frac{M}{2} + q^0\right)^2 - |\vec{q}|^2 - m^2 + i\epsilon\right] \left[\left(\frac{M}{2} - q^0\right)^2 - |\vec{q}|^2 - m^2 + i\epsilon\right]} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Das Integral über q^0 kann man mit Hilfe des Residuensatzes lösen. Man erhält folgende vier Pole für q^0 :

$$\begin{aligned} q_{1/2}^0 &= -\frac{M}{2} \pm \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2 - i\epsilon} = -\frac{M}{2} \pm \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} \mp i\epsilon \\ q_{3/4}^0 &= \frac{M}{2} \pm \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2 - i\epsilon} = \frac{M}{2} \pm \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} \mp i\epsilon \end{aligned} \quad (8.13)$$

Zwei der Pole (q_2^0 und q_4^0) liegen oberhalb der negativen reellen q^0 -Achse und die anderen beiden unterhalb der positiven reellen q^0 -Achse. Ich schließe die Kontur im Uhrzeigersinn in der unteren Ebene und muss daher nur die Pole q_1^0 und q_3^0 berücksichtigen. Die Residuen sind:

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\Sigma(M), q_1^0\right) &= \frac{1}{2M\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} \left(M - 2\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}\right)}, \\ \text{Res}\left(\Sigma(M), q_3^0\right) &= \frac{1}{2M\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} \left(M + 2\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}\right)}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Die Lösung des Integrals ist nun die Summe der Residuen multipliziert mit $(-2\pi i)$ (das Minuszeichen erhält man, wenn die Kontur im Uhrzeigersinn geschlossen wird):

$$-2\pi i \sum_j \text{Res}\left(\Sigma(M), q_j^0\right) = \frac{2\pi i}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} \left[4\left(|\vec{q}|^2 + m^2\right) - M^2\right]}. \quad (8.15)$$

Damit erhält man für die Selbstenergie:

$$\Sigma(M) = \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{f_\Lambda^2(|\vec{q}|)}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} [4(|\vec{q}|^2 + m^2) - M^2]}. \quad (8.16)$$

Nun gehe ich wieder in Kugelkoordinaten über und führe die Integration über die Winkel direkt aus:

$$\begin{aligned} \Sigma(M) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dz \frac{z^2 f_\Lambda^2(z)}{\sqrt{z^2 + m^2} [4(z^2 + m^2) - M^2]} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda dz \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + m^2} [4(z^2 + m^2) - M^2]}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Hierbei ist $z = |\vec{q}|$. In der zweiten Zeile habe ich die Regularisierungsfunktion aus Gleichung (8.9) eingesetzt. Das Integral lässt sich nun analytisch lösen. Da dies jedoch sehr kompliziert ist, gebe ich hier nur das Ergebnis an:

$$\Sigma(M) = -\frac{\sqrt{4m^2 - M^2}}{8\pi^2 M} \arctan\left(\frac{\Lambda M}{\sqrt{(\Lambda^2 + m^2)(4m^2 - M^2)}}\right) + \frac{1}{8\pi^2} \ln\left(\frac{m}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2}}\right). \quad (8.18)$$

In den zwei folgenden Abbildungen ist die Selbstenergie gegenüber der Masse M aufgetragen, wobei ich für die Masse m einen Wert von 0,5 GeV und für den Impuls-Cutoff Λ einen Wert von 1,5 GeV verwendet habe.

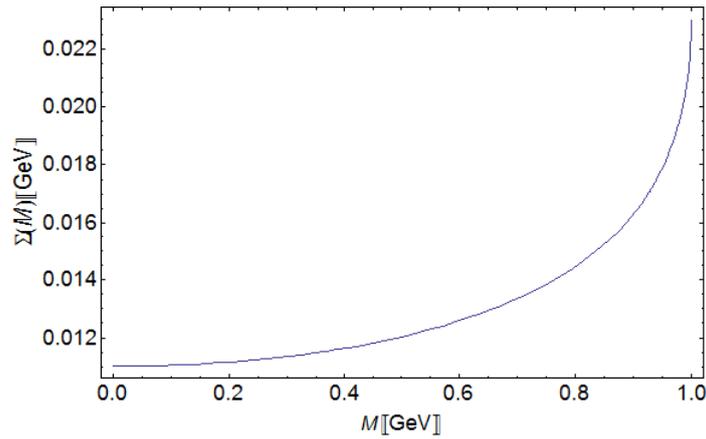


Abbildung 8.4: Die Selbstenergie $\Sigma(M)$ für $m = 0,5$ GeV, $\Lambda = 1,5$ GeV

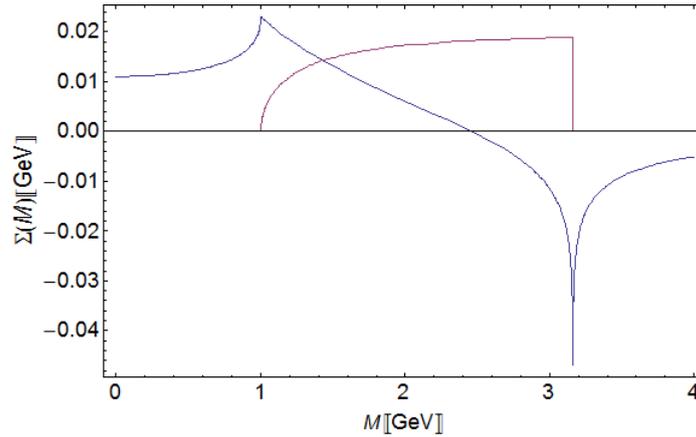


Abbildung 8.5: Der Realteil (blau) und der Imaginärteil (rot) der Selbstenergie $\Sigma(M)$ für $m = 0,5$ GeV, $\Lambda = 1,5$ GeV

Während in Abbildung 8.4 die Selbstenergie bis zu einer Masse M von 1 GeV geplottet wurde, wurde in Abbildung 8.5 der Realteil (blau) und der Imaginärteil (rot) der Selbstenergie bis zu einer Masse M von 4 GeV geplottet. Man erkennt dadurch, dass die Selbstenergie für Werte von $M < 2m$ rein reell ist, das heißt $\text{Im } \Sigma = 0$ für $M < 2m$. Oberhalb von $2m$ hat die Selbstenergie einen Real- und einen Imaginärteil. Bei einer Masse M von ungefähr 2Λ ist der Imaginärteil wieder Null und die Selbstenergie ist wieder rein reell. Dieser Grenzwert lässt sich wie folgt berechnen:

$$|\vec{q}| = \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} = \Lambda \quad (8.19)$$

$$\Rightarrow M = 2\sqrt{\Lambda^2 + m^2} \approx 2\Lambda .$$

Für den Imaginärteil der Selbstenergie gilt:

$$\text{Im}(\Sigma(M)) = \frac{\sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2}}{8\pi M} , \quad 2m < M \leq 2\sqrt{\Lambda^2 + m^2} . \quad (8.20)$$

Indem man Λ und M gegen Unendlich laufen lässt, könnte man diese Theorie renormieren. Im Bezug auf eine hadronische Theorie ist dies jedoch nicht erforderlich, da der Impuls-Cutoff einer solchen Theorie zwischen 1 und 2 GeV liegt.

8.1.3 Definition der Masse

Im letzten Kapitel habe ich die Masse von S als M_0 bezeichnet und nicht wie zuvor als M . Dies liegt daran, dass die Masse M_0 nicht die physikalische Masse des instabilen Teilchens S ist. Die Masse M_0 wird meistens als nackte Masse des Teilchens bezeichnet. Es gibt verschiedene Möglichkeiten die physikalische Masse M zu definieren.

Eine Möglichkeit ist es, die physikalische Masse als Realteil des Pols des vollen Propagators

zu definieren. Diese Masse wird Breit-Wigner-Masse genannt, weshalb ich sie im Folgenden als M_{BW} bezeichnen werde.

$$\left[K^2 - M_0^2 + g^2 \operatorname{Re} \left(\Sigma \left(\sqrt{K^2} \right) \right) \right]_{K^2=M_{BW}^2} = 0 \quad (8.21)$$

$$\Rightarrow M_{BW}^2 - M_0^2 + g^2 \operatorname{Re} (\Sigma (M_{BW})) = 0$$

Die physikalische Masse wäre dann im Vergleich zu M_0 verschoben und die Selbstenergie kann als Korrektur zur Masse angesehen werden. Da der Realteil der Selbstenergie im Allgemeinen positiv ist, führt die Korrektur zu kleineren Werten der Masse.

Die Spektralfunktion $d_S(x)$ ist definiert als Imaginärteil des vollen Propagators:

$$d_S(x) = -\frac{2x}{\pi} \operatorname{Im}(\Delta_S) . \quad (8.22)$$

Die Größe $d_S(x)dx$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Teilchen S eine Masse zwischen x und $x + dx$ hat [16]. Es handelt sich dabei also um die Massenverteilung von S . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen eine Masse zwischen Null und Unendlich hat, ist selbstverständlich Eins. Die Spektralfunktion ist demnach wie folgt normiert:

$$\int_0^{\infty} dx d_S(x) = 1 \quad (8.23)$$

In Abbildung 8.6 ist die Spektralfunktion $d_S(x)$ für folgende Werte geplottet: $g = 3 \text{ GeV}$, $m = 0,135 \text{ GeV}$, $\Lambda = 1,5 \text{ GeV}$, $M_0 = 1 \text{ GeV}$.

Dabei wurde für die Selbstenergie Gleichung (8.18) verwendet.

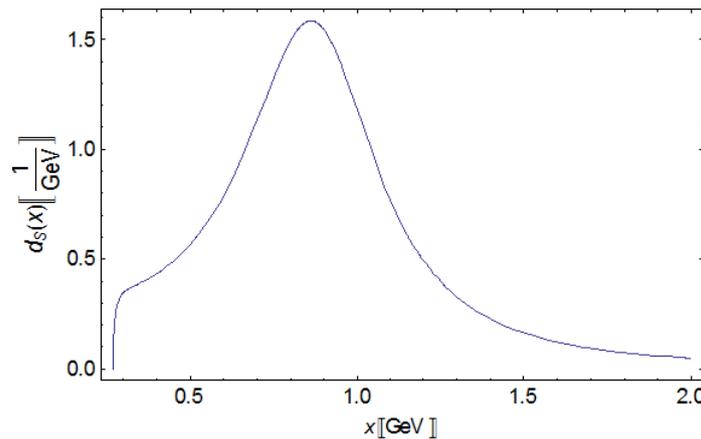


Abbildung 8.6: Die Spektralfunktion $d_S(x)$ für $g = 3 \text{ GeV}$, $M_0 = 1 \text{ GeV}$, $m = 0,135 \text{ GeV}$, $\Lambda = 1,5 \text{ GeV}$

Wie man sehr gut an dem Plot sieht, nimmt $d_S(x)$ nur für $x > 2m$ nicht-verschwindende Werte an.

Durch die Spektralfunktion ergeben sich zwei weitere Möglichkeiten, die physikalische Masse zu definieren. Die physikalische Masse kann einerseits als Mittelwert der Spektralfunktion festgelegt werden:

$$\bar{M} \equiv \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x d_S(x) . \quad (8.24)$$

Andererseits kann man die Masse auch als Maximum der Spektralfunktion definieren:

$$M = M_{Peak} .$$

In der Literatur findet man eine weitere Definition der Masse, die ich hier der Vollständigkeit halber ebenfalls aufführen werde. Ich zeige jedoch nur eine vereinfachte Diskussion des Problems und empfehle für mehr Informationen die Masterarbeit von Thomas Wolkanowski [13]. Der volle Propagator Δ_S ist auf einer Riemann-Fläche definiert. Der Pol des Propagators befindet sich auf der zweiten Ebene dieser Fläche. In der Källén-Lehmann-Darstellung gilt für den vollen Propagator im Impulsraum [4]:

$$\Delta_S \approx \frac{iZ}{K^2 - M^2 - iZ \text{Im}(\Sigma_{II})} . \quad (8.25)$$

Dabei ist M die physikalische Masse des Teilchens und Z eine Renormalisierungskonstante. Nach dem optischen Theorem gilt:

$$\Gamma = -\frac{Z}{M} \text{Im}(\Sigma_{II}) . \quad (8.26)$$

Daraus folgt für den Pol des vollen Propagators:

$$\sqrt{K_{Pol}^2} = M - i\frac{\Gamma}{2} \quad \Leftrightarrow \quad M = \sqrt{K_{Pol}^2} + i\frac{\Gamma}{2} \quad (8.27)$$

In der Literatur wird diese Definition der Masse häufig verwendet.

Die Spektralfunktion für verschiedene Werte der Kopplungskonstante

In der Abbildung 8.7 ist die Spektralfunktion für verschiedene Werte der Kopplungskonstante geplottet. Dafür habe ich für M_0 , m und Λ die gleichen Werte wie in Abbildung 8.6 eingesetzt: $M_0 = 1 \text{ GeV}$, $m = 0,135 \text{ GeV}$, $\Lambda = 1,5 \text{ GeV}$.

In der folgenden Abbildung entspricht der rote Graph einer Kopplungskonstanten von 2 GeV, der gelbe Graph einer Kopplungskonstanten von 2,5 GeV und der und blaue Graph einer Kopplungskonstanten von 3 GeV.

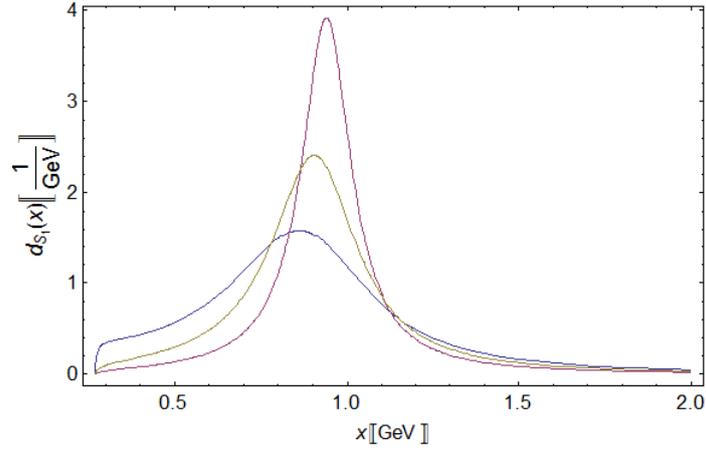


Abbildung 8.7: Die Spektralfunktion $d_S(x)$ für $M_0 = 1$ GeV, $m = 0,135$ GeV, $\Lambda = 1,5$ GeV, rot: $g = 2$ GeV, gelb: $g = 2,5$ GeV, blau: $g = 3$ GeV

Je kleiner die Kopplungskonstante ist, desto schärfer wird der Peak und desto näher liegt er bei der nackten Masse des Teilchens, also bei $x = 1$ GeV. Bei größeren Kopplungskonstanten wird die Spektralfunktion breiter und der Peak wird deutlich kleiner.

In der folgenden Tabelle sind die verschiedenen Massen, also die Breit-Wigner-Masse, der Mittelwert und das Maximum der Spektralfunktion für die unterschiedlichen Kopplungskonstanten berechnet und aufgelistet worden. Dabei erhält man Werte unterhalb der nackten Masse, die in einem Bereich um 0,9 GeV liegen.

| g [GeV] | M_{BW} [GeV] | \bar{M} [GeV] | M_{Peak} [GeV] |
|-----------|----------------|-----------------|------------------|
| 2 | 0,94 | 0,97 | 0,94 |
| 2,5 | 0,89 | 0,95 | 0,90 |
| 3 | 0,83 | 0,92 | 0,86 |

Tabelle 1: Die verschiedenen Massen für unterschiedliche Kopplungskonstanten

8.2 Zwei Zerfallskanäle

In diesem Kapitel befaße ich mich mit folgender Lagrange-Dichte, die die skalaren Felder S_1 , S_2 und φ und zwei Wechselwirkungsterme enthält:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu S_1)^2 - \frac{1}{2}M_{0,1}^2 S_1^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu S_2)^2 - \frac{1}{2}M_{0,2}^2 S_2^2 + g_1 S_1 \varphi^2 + g_2 S_2 \varphi^2 \quad (8.28)$$

8.2.1 Herleitung des Propagators

Ich möchte den Propagator G_1 für das Feld S_1 herleiten, wenn außer $g_1 S_1 \varphi^2$ eine zweite Wechselwirkung vorhanden ist: $\mathcal{L}_{\text{int}} = g_1 S_1 \varphi^2 + g_2 S_2 \varphi^2$. Die Herleitung verläuft ähnlich wie die Herleitung des vollen Propagators aus Kapitel 8.1.1. Man summiert wieder alle Terme in Ein-Schleifen-Ordnung auf, in denen das Teilchen S_1 propagiert. Allerdings muss man nun noch weitere Terme berücksichtigen, da zwischen der Propagation von S_1 auch das Teilchen S_2 propagieren kann.

$$\begin{aligned} \text{---} \bullet \text{---} &= \text{---}_{S_1} + \text{---}_{S_1} \text{---} \text{---}_{S_1} + \text{---}_{S_1} \text{---} \text{---}_{S_1} \text{---} \text{---}_{S_1} + \dots \\ &+ \text{---}_{S_1} \text{---} \text{---}_{S_2} \text{---} \text{---}_{S_1} + \text{---}_{S_1} \text{---} \text{---}_{S_1} \text{---} \text{---}_{S_2} \text{---} \text{---}_{S_1} + \dots \quad (8.29) \\ &= \text{---}_{S_1} \times \text{---} + \text{---}_{S_1} \times \text{---} \text{---}_{S_2} \text{---} \text{---}_{S_1} \text{---} \bullet \text{---} \end{aligned}$$

Hierbei steht $\text{---} \bullet \text{---}$ für den vollen Propagator G_1 . Ansonsten verwende ich die gleiche Notation wie in 8.1.1. Nun gehe ich wieder mit Hilfe der Feynman-Regeln (siehe Kapitel 8.1.1) in Formeln über, um die Gleichung nach G_1 aufzulösen. Im zweiten Term muss ein Symmetriefaktor von $4 = 2 \cdot 2$ berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{i}{D_1} + 4 \frac{i}{D_1} (i g_1) (-i \Sigma) (i g_2) \frac{i}{D_2} (i g_2) (-i \Sigma) (i g_1) G_1 \\ G_1 \left[1 - \frac{(2 g_1 g_2 \Sigma)^2}{D_1 D_2} \right] &= \frac{i}{D_1} \quad (8.30) \\ G_1 \left[\frac{D_1 D_2 - (2 g_1 g_2 \Sigma)^2}{D_1 D_2} \right] &= \frac{i}{D_1} \end{aligned}$$

Das Ergebnis für den vollen Propagator G_1 des Teilchens S_1 lautet:

$$G_1 = \frac{i D_2}{D_1 D_2 - (2 g_1 g_2 \Sigma)^2} \quad (8.31)$$

mit

$$D_1 = K^2 - M_{0,1}^2 + (\sqrt{2}g_1)^2 \Sigma \quad \text{und} \quad D_2 = K^2 - M_{0,2}^2 + (\sqrt{2}g_2)^2 \Sigma. \quad (8.32)$$

Analog kann man zeigen, dass für den Propagator G_2 des Teilchens S_2 gilt:

$$G_2 = \frac{iD_1}{D_1D_2 - (2g_1g_2\Sigma)^2}. \quad (8.33)$$

8.2.2 Die Spektralfunktion

Die Spektralfunktion für das Teilchen S_1 ist analog zur Gleichung (8.22) proportional zum Imaginärteil des Propagators G_1 :

$$d_{S_1} = -\frac{2x}{\pi} \text{Im}(G_1). \quad (8.34)$$

Auch Gleichung (8.34) ist normiert:

$$\int_0^{\infty} dx d_{S_1}(x) = 1. \quad (8.35)$$

In der nachstehenden Abbildung ist die Spektralfunktion $d_{S_1}(x)$ für verschiedene Werte der Kopplungskonstanten g_2 geplottet, während die Kopplungskonstante g_1 konstant auf 3 GeV gehalten wurde. Hierbei habe ich einen Impuls-Cutoff von 1,6 GeV und folgende Massen verwendet: $M_{0,1} = 1$ GeV, $M_{0,2} = 1,5$ GeV, $m = 0,135$ GeV.

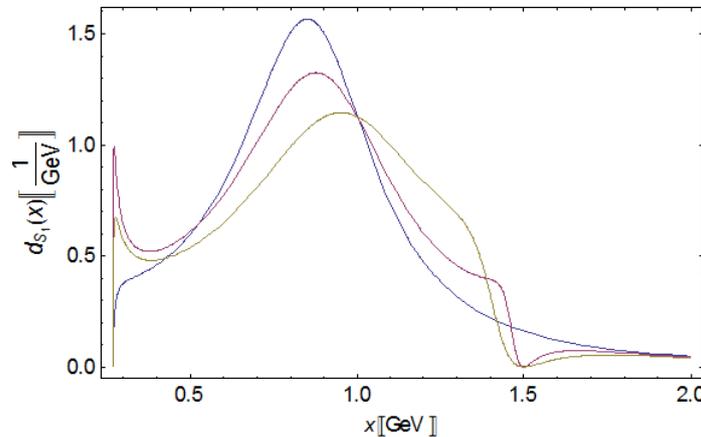


Abbildung 8.8: Die Spektralfunktion $d_{S_1}(x)$ für $M_{0,1} = 1$ GeV, $M_{0,2} = 1,6$ GeV, $m = 0,135$ GeV, $\Lambda = 1,5$ GeV, blau: $g_2 = 0$ GeV, rot: $g_2 = 2$ GeV, gelb: $g_2 = 3$ GeV

Ist die Kopplungskonstante g_2 Null (blauer Graph), so erhält man wie erwartet den gleichen Graphen wie in Abbildung 8.6. Für größere Werte von g_2 verschiebt sich die Spektralfunktion des Teilchens S_1 zu größeren Massen und wird breiter. Dabei handelt es sich um den Einfluss der Quantenmischung.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Bachelorarbeit war es, die Mischung von skalaren Feldern, sowohl auf Baumgraphen-Niveau als auch in der nächst höheren Ordnung, der Ein-Schleifen-Ordnung, zu untersuchen.

Ich habe herausgefunden, dass die lineare Mischung zweier Felder durch eine Drehung der Felder behoben werden kann. Dadurch erhält man die physikalischen Felder. Es handelt sich dabei also lediglich um eine nicht pragmatische Wahl des Koordinatensystems. Zerfallen diese beiden Felder in den selben Endzustand, muss man erst zu den physikalischen Feldern übergehen, um die Zerfallsbreite berechnen zu können. Dabei hat sich herausgestellt, dass die Mischung dazu führen kann, dass die Zerfallsamplitude von einem der Felder durch konstruktive Interferenz verschwindet.

Im letzten Kapitel habe ich den vollen Propagator in Ein-Schleifen-Ordnung hergeleitet und habe erfahren, dass der Unterschied zum freien Propagator durch einen zusätzlichen Beitrag im Nenner, der Selbstenergie, gegeben ist. Dadurch kann die Masse des Teilchens, die in der Lagrange-Dichte vorkommt, nicht mehr als physikalische Masse des instabilen Teilchens angesehen werden. Die physikalische Masse ist durch Quantenfluktuationen zu kleineren Werten verschoben.

Sind zwei Zerfallskanäle vorhanden, ist zu beachten, dass im vollen Propagator des einen Teilchens auch das zweite Teilchen propagieren kann. Der volle Propagator setzt sich dann aus beiden Kopplungskonstanten und Propagatoren zusammen. Dabei erhält man für den Grenzfall, dass eine Kopplungskonstante Null ist, den korrekten Propagator für das andere Teilchen.

Das folgende Beispiel zeigt einen Fall, bei dem man den hergeleiteten vollen Propagator verwenden muss und dient als Ausblick für weitere Untersuchungen zu diesem Thema. Angenommen man würde folgende Wechselwirkungen betrachten:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\Upsilon\nu S_1 + \alpha S_1\phi^2 + g_1 S_1\phi^2. \quad (9.1)$$

Dabei sind Υ , ν , S_1 , ϕ und φ der Einfachheit halber skalare Felder. Das beschriebene Phänomen ist jedoch auch für Teilchen mit Spin gültig. Diese Lagrange-Dichte beschreibt einen Zerfall von Υ in $\nu\phi\phi$: $\Upsilon \rightarrow \nu S_1 \rightarrow \nu\phi\phi$.

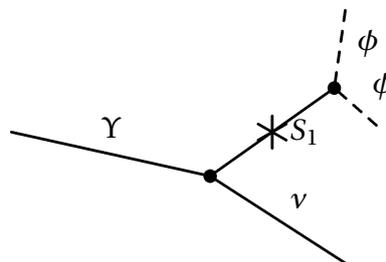


Abbildung 9.1: Feynman-Diagramm für den Zerfall von $\Upsilon \rightarrow \nu\phi\phi$ mit einer Propagation von S_1

Das Teilchen Υ zerfällt in ν und S_1 . Das Teilchen S_1 kann entweder direkt in $\phi\phi$ zerfallen oder es zerfällt in $\varphi\varphi$, welche wieder das Teilchen S_1 bilden, welches wieder zerfällt usw. Man erhält also zwischen den externen Linien den vollen Propagator $\Delta_{S_1} = \frac{i}{D_1}$ des Teilchens S_1 .

Nun ist in dem folgenden Fall eine weitere Wechselwirkung vorhanden:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\Upsilon\nu S_1 + \alpha S_1\phi^2 + g_1 S_1\phi^2 + g_2 S_2\phi^2 . \quad (9.2)$$

Wieder zerfällt Υ in $\nu\phi\phi$: $\Upsilon \rightarrow \nu\phi\phi$. Dieses Mal propagiert zwischen den Ein- und Ausgangsteilchen jedoch nicht nur das Teilchen S_1 , sondern auch das Teilchen S_2 , welches ebenfalls an ϕ^2 koppelt:

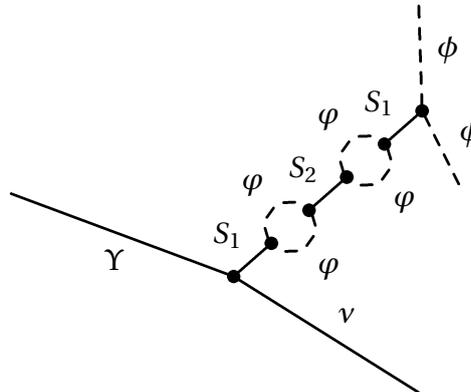


Abbildung 9.2: Feynman-Diagramm für den Zerfall von $\Upsilon \rightarrow \nu\phi\phi$ mit einer Propagation von S_1 und S_2

Dieser Vorgang kann sich immer wieder wiederholen, so dass man zwischen den externen Linien den vollen Propagator G_1 des Teilchens S_1 erhält:

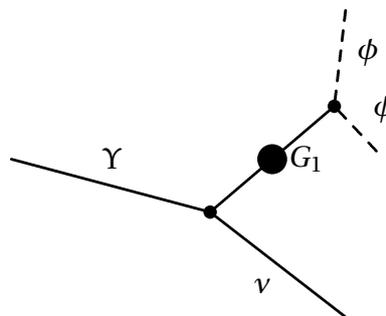


Abbildung 9.3: Feynman-Diagramm für den Zerfall von $\Upsilon \rightarrow \nu\phi\phi$ mit dem vollen Propagator G_1

Das, was ich in Kapitel 8.2 gezeigt habe, beeinflusst also die Resultate dieses Beispiels.

Für den Fall von zwei Zerfallskanälen ist noch eine interessante Eigenschaft beobachtbar. Die Wellenfunktionen verschiedener stationärer Zustände sind im Allgemeinen orthogonal zueinander. Dies ist für instabile Zustände allerdings nicht immer der Fall. Wenn zwei Zustände $|S_1\rangle$ und $|S_2\rangle$ den gleichen Zerfallskanal haben, so sind diese nicht orthogonal zueinander, das heißt

$$|\langle S_1|S_2\rangle| \neq 0 . \quad (9.3)$$

Der Wert von $|\langle S_1|S_2\rangle|$ liegt zwischen Null und Eins und ist gegeben durch:

$$|\langle S_1|S_2\rangle| = \sqrt{\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\frac{1}{4}(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 + Q^2}} \quad (9.4)$$

mit

$$Q = (M_2 - M_1) . \quad (9.5)$$

Im Grenzfall stabiler Teilchen wird Γ Null und somit auch $|\langle S_1 | S_2 \rangle|$ [17].

Um zu zeigen, dass der Wert von $|\langle S_1 | S_2 \rangle|$ nicht unbedeutend klein ist, werde ich ihn für einige Beispiele ausrechnen. Ich werde folgende Zerfallskanäle betrachten:

$$f_0(500) \rightarrow \pi^0 \pi^0: \quad M = 500 \text{ MeV}, \quad \Gamma = \frac{1}{3} \cdot 550 \text{ MeV} \approx 183,33 \text{ MeV}$$

$$f_0(980) \rightarrow \pi^0 \pi^0: \quad M = 990 \text{ MeV}, \quad \Gamma = \frac{1}{3} \cdot 70 \text{ MeV} \approx 23,33 \text{ MeV}$$

$$f_0(1370) \rightarrow \pi^0 \pi^0: \quad M = 1350 \text{ MeV}, \quad \Gamma = \frac{1}{3} \cdot 350 \text{ MeV} \approx 116,67 \text{ MeV}$$

$$f_0(1500) \rightarrow \pi^0 \pi^0: \quad M = 1505 \text{ MeV}, \quad \Gamma = \frac{1}{3} \cdot 38 \text{ MeV} \approx 12,68 \text{ MeV}$$

Die Werte der Massen und Zerfallsbreiten wurden dem ‘Particle Physics Booklet’ entnommen, wobei bei Unsicherheiten der Mittelwert errechnet wurde. Da sich die angegebene Zerfallsbreite aus drei möglichen Zerfällen zusammensetzt, nämlich aus dem Zerfall in $\pi^0 \pi^0$, $\pi^+ \pi^-$ und $\pi^- \pi^+$, habe ich ein Drittel des angegebenen Wertes verwendet, um die Zerfallsbreite für einen Zerfall zu erhalten. Es sei noch angemerkt, dass der Zerfall von $f_0(1370)$ in $\pi\pi$ nicht der dominante Zerfallskanal ist. Da allerdings kein Verzweigungsverhältnis bekannt ist, habe ich angenommen, dass der hier betrachtete Zerfall von $f_0(1370)$ in $\pi\pi$ dominant ist. Eingesetzt in (9.4) ergeben sich folgende Werte:

$$|\langle f_0(500) | f_0(980) \rangle| \approx 0,13$$

$$|\langle f_0(500) | f_0(1370) \rangle| \approx 0,17$$

$$|\langle f_0(980) | f_0(1370) \rangle| \approx 0,14$$

$$|\langle f_0(1370) | f_0(1500) \rangle| \approx 0,23$$

Tatsächlich erhält man nicht vernachlässigbare Werte, aus denen sich noch der genaue Winkel zwischen den Feldern bestimmen lässt. Als Weiterführung dieser Arbeit, kann man die Mischung dieser Felder noch genauer untersuchen.

Literatur

- [1] D. H. Rischke, *Quantenfeldtheorie*, Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2014
- [2] F. Divotgey, *Phänomenologie von Axialvektor-Mesonen und Mischungseffekte in Kaonfeldern* (Bachelorarbeit), Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2012
- [3] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* - 2nd edition, Cambridge University Press, 1996
- [4] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995
- [5] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, 1996
- [6] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory* - 2nd edition, John Wiley & Sons, Ltd., 2010
- [7] L. Olbrich, *Phänomenologie von Pseudovektormesonen und Mischungen mit Axialvektormesonen im kaonischen Sektor* (Bachelorarbeit), Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2012
- [8] F. Schwabl, *Quantenmechanik - Eine Einführung*, Springer, 2007
- [9] F. Giacosa, *Glueball phenomenology within a nonlocal approach* (Dissertation), Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 2005
- [10] C. Berger, *Elementarteilchenphysik*, Springer, 2006
- [11] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, Wiley-VCH, 2004
- [12] R. Alkofer, L. von Smekal, *The infrared behaviour of QCD Green's functions: Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states* (Artikel), Physics Reports Vol. 353, 2001
- [13] T. Wolkanowski, *Resonances and poles in the second Riemann sheet* (Masterarbeit), Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2013
- [14] F. Giacosa, G. Pagliara, *On the spectral functions of scalar mesons* (Artikel), Goethe-Universität Frankfurt am Main, Physical Review C76 (2007) 065204, 2007
- [15] J. Schneitzer, *Korrekturen 3. Ordnung zum $S\phi\phi$ Zerfall* (Bachelorarbeit), Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2014
- [16] F. Giacosa, *Non-exponential decay in quantum field theory and in quantum mechanics: the case of two (or more) decay channels* (Artikel), Foundations of Physics 42 (2012) 1262-1299, 2012
- [17] V. G. Baryshevskii, V. I. L. Yuboshitz, M. I. Podgoretskii, *Non orthogonal quasistationary states* (Artikel), Joint Institute of Nuclear Research, Journal of Experimental and Theoretical Physics Vol. 30 No. 1, 1968