

Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main
Fachbereich Physik
Institut für Theoretische Physik

Bachelorarbeit

Phänomenologie des angeregten Vektor-Meson Nonets

Christian Reisinger

23. Februar 2014

Erstgutachter

Dr. Francesco Giacosa
Institut für Theoretische Physik
Universität Frankfurt a.M.

Zweitgutachter

Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Institut für Theoretische Physik
Universität Frankfurt a.M.

Notation

Einheitensystem

In dieser Arbeit werden durchgehend die natürlichen Einheiten

$$\hbar = c = k_B = 1 \quad (0.1)$$

verwendet.

Konventionen der speziellen Relativitätstheorie, Metrik

In dieser Arbeit wird stets die Einsteinsche Summenkonvention verwendet. Dabei laufen griechische Indizes über 0,1,2,3 und römische Indizes über die räumlichen Komponenten 1,2,3. Die in dieser Arbeit verwendete Konvention für die Minkowski-Metrik lautet

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (0.2)$$

Die ko- und kontravarianten 4-Vektoren sind definiert als

$$x^\mu = (t, \vec{r})^T, \quad x_\mu = (t, -\vec{r}) \quad (0.3)$$

mit den dreidimensionalen räumlichen Vektoren \vec{r} .

Kommutatoren

Die Notation für Kommutatoren und Anti-Kommutatoren in dieser Arbeit lautet

$$\begin{aligned} [A, B] &= A B - B A \\ \{A, B\} &= A B + B A \end{aligned} \quad (0.4)$$

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Klassische Feldtheorie	7
2.1	Lagrange-Formalismus	7
2.2	Hamilton-Formalismus	8
3	Dynamik von Quantensystemen	10
3.1	Schrödinger-Bild und Zeitentwicklungsoperator	10
3.2	Heisenberg-Bild	13
3.3	Wechselwirkungsbild	14
4	Feldquantisierung	16
4.1	Klein-Gordon-Feld	16
4.1.1	Lösung der Klein-Gordon-Gleichung	16
4.1.2	Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes	17
4.2	Proca-Feld	19
4.2.1	Lösung der Proca-Gleichung	19
4.2.2	Quantisierung des Proca-Feldes	21
5	Berechnung von Zerfallsbreiten	23
5.1	Streumatrix	23
5.2	Zerfallsrate für die 3-Teilchen Streuung	24
5.3	Übergangsamplitude im Wechselwirkungsbild	26
5.4	Wick'sches Theorem	27
5.5	Berechnung der Übergangsamplitude	29
6	Effektive Theorie	31
6.1	Symmetrien	32
6.1.1	Lorentz Symmetrie	33
6.1.2	Parität	34
6.1.3	Ladungskonjugation	35
6.1.4	Chirale und Flavor-Symmetrie	36
6.2	Zerfallsbreiten	37
6.2.1	Berechnung der Zerfallsbreite $\Gamma_{V_E \rightarrow PP}$	38
6.2.2	Berechnung der Zerfallsbreite $\Gamma_{V_E \rightarrow VP}$	39
6.3	Kopplung an Photonen	40
6.4	Fixierung der Kopplungskonstanten	41
6.4.1	Bestimmung der Kopplungskonstanten für den Zerfall $V_E \rightarrow VP$	41
6.4.2	Bestimmung der Kopplungskonstanten für den Zerfall $V_E \rightarrow PP$	43
6.5	Vergleich mit experimentellen Daten	46
6.5.1	Mischung von η_N und η_S	47
6.5.2	Zerfälle $V_E \rightarrow \gamma P$	47
6.5.3	Weitere im Modell enthaltene Zerfälle	48

1 Einleitung

Die starke Wechselwirkung, eine der fundamentalen Kräfte der Natur, wird in der Theorie durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben. Sie beschreibt die Wechselwirkung zwischen Quarks, den heute als elementar angenommenen Bausteinen der Materie, und Gluonen, den zur starken Wechselwirkung gehörigen Eichbosonen. Die Theorie der QCD lässt sich mit Hilfe des Eichprinzips für die $SU(3)$ -Farbsymmetrie aus der Dirac-Lagrangedichte konstruieren. Somit ist die QCD eine lokale $SU(3)$ -Eichtheorie, welche auf Grund ihres nicht-abelschen Charakters, im Gegensatz zur $U(1)$ -Eichtheorie der Quantenelektrodynamik, zur Selbstwechselwirkung zwischen den Vermittlern der starken Kraft, den Gluonen, führt. Diese tragen im Gegensatz zu Photonen, ebenso wie Quarks, selbst die sogenannte Farb-Ladung und wechselwirken in dreier- und vierer- Gluonvertizes untereinander. Ein weiterer Effekt der QCD ist das sogenannte Confinement, welches dafür sorgt, dass in der Natur nur farbneutrale Zustände, also durch Kombination aller 3 Farben (Baryonen) oder Farbe und Anti-Farbe (Mesonen), vorkommen.

Die QCD ermöglicht es insbesondere Größen wie Massen und Zerfallsbreiten von Hadronen zu berechnen, wozu mehrere Verfahren existieren. Zum einen lassen sich in höheren Energiebereichen perturbative Rechnungen durchführen, dabei werden Rechnungen in Potenzen der Kopplungskonstanten durchgeführt, man erhält dabei eine physikalisch anschauliche Sortierung in Form von Diagrammen, die virtuelle Wechselwirkungen bzw. Austausch von Teilchen für den jeweils betrachteten Prozess Ordnung für Ordnung beschreiben.

Ein weiterer Zugang zur QCD ist die Diskretisierung der Raumzeit und die darauf folgende numerische Berechnung, die sogenannte Gitter-QCD. Diese benötigt sehr hohe Rechenleistungen, ermöglicht allerdings sehr genaue Rechnungen, insbesondere für die Bestimmung von Massen. Zerfallsbreiten lassen sich mit Gitter-QCD allerdings schwierig berechnen.

Besonders schwierig im Rahmen der QCD ist die korrekte Beschreibung von Hadronen, also gebundenen Zuständen aus Quark-Antiquark (Mesonen) oder 3 (Anti-)Quarks (Baryonen). Um dies zu bewerkstelligen führt man effektive Modelle ein, die die Hadronen als elementare Teilchen auffassen. Wichtig dabei ist, dass die Symmetrien der QCD nicht verletzt werden dürfen. In dieser Arbeit soll ein solches effektives Modell spezielle für angeregte Vektor-Mesonen untersucht werden. Wir führen perturbative Rechnungen durch, dabei ist es oft schwierig festzustellen, welche der unendlich vielen Beiträge besonders wichtig sind und möglichst nicht vernachlässigt werden sollten. Eine Betrachtung der Beiträge dritter Ordnung fand parallel zu dieser Arbeit in [J.S14] statt, es wurde gezeigt, dass ein Beitrag dritter Ordnung in einem Beispielmmodell nur zu kleinen Korrekturen zum Beitrag erster Ordnung führt. Wir beschränken uns deswegen in dieser Arbeit auf den Beitrag erster Ordnung.

Mesonen lassen sich anhand ihrer Quantenzahlen in Pseudoskalare-, Vektor-, Pseudovektor- und Axialvektor-Mesonen unterteilen. In den Arbeiten [L.O12] und [F.D12] wurden bereits erfolgreich Modelle für Pseudo- und Axial-Vektor-Mesonen untersucht. Es wurden speziell die Zustände mit den Quantenzahlen $n^{2s+1}l_J = 1^1P_1$ und $n^{2s+1}l_J = 1^3P_1$ untersucht. Dabei werden die Quantenzahlen Parität und Ladungskonjugation durch Spin s

und Drehimpuls l festgelegt. Wir wollen in dieser Arbeit ein Modell für die angeregten Vektormeson-Zustände betrachten, diese entsprechen dem Zustand $n^{2s+1}l_J = 2^3S_1$, also einem Zustand mit angeregter Radial-Quantenzahl $n = 2$, die z.B. von der Beschreibung des Wasserstoff-Atoms bekannt ist, d.h. die zugehörige Wellenfunktion hat genau einen Knotenpunkt. Wir nehmen dabei an, dass sich die Beschreibung der angeregten Zustände nicht wesentlich von den nicht-angeregten Zuständen unterscheidet. In [D.P11] wurden für den 3 Flavor-Fall Meson-Nonets mit der Annahme, dass es sich um Quark-Antiquark-Zustände handelt, konstruiert. Wir verwenden diese weiter und überprüfen, ob diese Beschreibung mit experimentellen Daten vergleichbare Ergebnisse liefert. In den Kapiteln 2 bis 4 wird zunächst der Formalismus rekapituliert, worauf in Kapitel 5 beispielhaft eine Zerfallsbreite berechnet wird, um bei der Diskussion des Modells mit Hilfe dieser ein Vergleich mit dem Experiment zu ermöglichen. Kapitel 6 führt schließlich das Modell ein, dabei wird zunächst gezeigt, dass die Symmetrien der QCD erfüllt sind. Im Folgenden werden dann die Zerfallsbreiten unterschiedlicher im Modell enthaltener Zerfallskanäle berechnet, um zunächst die Kopplungskonstanten des Modells zu fixieren und dann weitere Ergebnisse mit dem Experiment zu vergleichen. Letztendlich wird in Anlehnung an [FG14] noch die Kopplung der angeregten Vektor-Mesonen and Photonen und Pseudoskalar-Mesonen eingeführt.

2 Klassische Feldtheorie

2.1 Lagrange-Formalismus

In der klassischen Mechanik für Vielteilchen-Systeme werden Massenpunkte x_j in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben ($x_j = x_j(t)$), wobei j ein Index ist, der angibt um welchen Massenpunkt es sich handelt. Zur Beschreibung solcher System wird der Lagrange-Formalismus verwendet. Die **Lagrangefunktion** L hängt dabei von den generalisierten Koordinaten \vec{q} , Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}$, und der Zeit t ab:

$$L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t). \quad (2.1)$$

In der Feldtheorie ist man nun an Feldern ϕ interessiert, dies sind Größen die an jedem Raumzeitpunkt definiert sind. Es werden beim Übergang von Vielteilchen-Mechanik zur Feldtheorie folgende Ersetzungen vorgenommen:

$$\begin{aligned} q_j(t) &\rightarrow \phi(t, \vec{r}), \\ \dot{q}_j(t) &\rightarrow \dot{\phi}(t, \vec{r}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Der diskrete Index j wird durch die Ortsabhängigkeit ersetzt, die als kontinuierlicher Index zu verstehen ist. Das Feld ϕ selbst beibehaltet nun die (unendlich vielen) Freiheitsgrade, analog zu den q_j , die in der Vielteilchen-Mechanik die (endlich vielen) Freiheitsgrade beinhalten.

Die Lagrangefunktion zerfällt beim Übergang zur Feldtheorie in Beiträge pro Längeneinheit. Dies wird durch eine **Lagrange-Dichte** \mathcal{L} realisiert, die von dem Feld ϕ und dessen Raumzeit-Ableitungen $\partial_\mu \phi$ abhängt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.3)$$

Da die physikalischen Gesetze an jedem Ort gleich sind, erhält man die Lagrange-Funktion, indem man die Lagrange-Dichte über das Volumen des Systems integriert:

$$L = \int d^3\vec{r} \mathcal{L}. \quad (2.4)$$

Um die Bewegungsgleichungen des Systems zu erhalten, wendet man, wie in der Vielteilchen-Mechanik auch, das **Hamiltonsche Prinzip** an, welches besagt, dass die gesuchten Bewegungsgleichungen die **Wirkung** S extremieren. Damit gilt

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L} \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.5)$$

wobei über das gesamte Raumzeit-Volumen Ω des Systems integriert wird. Da wir die Bewegungsgleichung des Feldes bestimmen wollen, müssen das Feld ϕ und dessen Raumzeit-Ableitungen $\partial_\mu \phi$ variiert werden. Die Raumzeitkoordinaten X und das Feld $\phi(X)$ auf

dem Rand des Raumzeitvolumens $X \in \partial\Omega$ werden dabei konstant gehalten:

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^4x \delta\mathcal{L} = \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) \right) \\
&= \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \right) \\
&= \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \underbrace{\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi}_{=0} \Big|_{\partial\Omega}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Im 2. Schritt wurde verwendet, dass x_μ nicht variiert wird und deswegen Variation δ und partielle Ableitung vertauschen. Im 3. Schritt wurde partiell integriert. Der Oberflächenterm im letzten Schritt verschwindet, da das Feld auf dem Rand von Ω nicht variiert wird, also $\delta\phi|_{\partial\Omega} = 0$. Für beliebige Variation $\delta\phi$ ist diese Gleichung erfüllt wenn

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}. \tag{2.7}$$

Gleichung (2.7) ist die **Euler-Lagrange-Gleichung** für Felder. Liegen mehrere Felder ϕ_i vor, so gilt (2.7) für jedes Feld:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}. \tag{2.8}$$

Es ist noch anzumerken, dass die bisherigen Betrachtungen auch im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie korrekt sind, wie schon durch die kovariante Schreibweise angedeutet. Voraussetzung dafür ist die Forminvarianz der Bewegungsgleichungen unter Lorentz-Transformationen. Da sich diese mit Hilfe des hamiltonschen Prinzips aus der Wirkung S wie gezeigt ableiten lassen, genügt es, wenn die Wirkung invariant unter Lorentz-Transformationen LT ist:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \xrightarrow{LT} \int d^4x' \mathcal{L}' = \int d^4x |\det\Lambda| \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L} = S. \tag{2.9}$$

Dabei wurde verwendet, dass $x' = \Lambda x$ und $\det\Lambda = \pm 1$. Außerdem wurde vorausgesetzt, dass \mathcal{L} invariant unter Lorentz-Transformationen ist, dies ist also bei Konstruktion von \mathcal{L} zu prüfen.

2.2 Hamilton-Formalismus

Für spätere Zwecke wird hier noch der Hamilton-Formalismus aufgeführt. In der klassischen Mechanik ist die **Hamilton-Funktion** eine einfache Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L, \tag{2.10}$$

mit dem kanonisch konjugierten Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.11)$$

In der Feldtheorie lässt sich analog die **Hamilton-Dichte** als Legendre-Transformation der Lagrange-Dichte definieren:

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad (2.12)$$

mit der kanonisch konjugierten Impuls-Dichte

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (2.13)$$

Die Hamilton-Funktion ergibt sich dann durch Integration der Hamilton-Dichte über den gesamten Raum:

$$H = \int d^3\vec{r} \mathcal{H}. \quad (2.14)$$

3 Dynamik von Quantensystemen

Um im späteren Verlauf Wechselwirkungen zwischen quantisierten Feldern betrachten zu können, ist es notwendig die Zeitentwicklung dieser beschreiben zu können. Es gibt dabei unterschiedliche Möglichkeiten die Zeitentwicklung auf quantenmechanische Zustände oder Operatoren zu verteilen. In der Quantenfeldtheorie ist die Verwendung des sogenannten Wechselwirkungsbildes üblich, welche das Ziel dieses Kapitels darstellt. Dazu werden zunächst das Schrödinger- und das Heisenberg- Bild diskutiert. Als Quelle für dieses Kapitel dienen insbesondere [D.R11], [W.N09] und [MD95].

3.1 Schrödinger-Bild und Zeitentwicklungsoperator

Im Schrödinger-Bild wird den quantenmechanischen Zuständen jegliche Zeitabhängigkeit zugeordnet, Operatoren bleiben dabei zeitunabhängig. Dazu wird der **Zeitentwicklungs-Operator** $U(t, t_0)$ eingeführt:

$$|\psi_S(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi_S(t_0)\rangle. \quad (3.1)$$

Wir lassen im Folgenden den Index S für Schrödinger-Bild Zustände und Operatoren weg: $|\psi_S(t)\rangle \equiv |\psi(t)\rangle$, $O_S \equiv O$. Für diesen lassen sich einige Eigenschaften angeben. Zunächst muss die Norm eines Zustandes zeitlich konstant und identisch 1 sein:

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = \mathbb{1} \quad (3.2)$$

D.h. der Zeitentwicklungs-Operator ist unitär:

$$U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0). \quad (3.3)$$

Weiter darf sich ein Zustand nicht ändern, wenn er von einer Zeit t zur gleichen Zeit t entwickelt wird, damit gilt

$$U(t, t) = \mathbb{1}. \quad (3.4)$$

Außerdem gilt für sukzessive Zeitentwicklung offensichtlich

$$U(t, t_1)U(t_1, t_0) = U(t, t_0). \quad (3.5)$$

Eine Entwicklung rückwärts in der Zeit stellt das Inverse der Entwicklung vorwärts in der Zeit dar, was auch die Kombination von (3.4) und (3.5) für $t_0 = t$ zeigt:

$$U(t, t_0) = U^{-1}(t_0, t). \quad (3.6)$$

Um den Zeitentwicklungs-Operator genauer zu bestimmen, betrachten die Taylor-Entwicklung einer infinitesimalen Zeittranslation:

$$U(t + dt, t) = \mathbb{1} + \left(\frac{\partial}{\partial t'} U(t', t) \right)_{t'=t} dt =: \mathbb{1} - iH(t)dt. \quad (3.7)$$

Dabei wurden Terme in quadratischer Ordnung von dt vernachlässigt und der unbekannte Operator H definiert. Wir betrachten nun die Zeitableitung eines quantenmechanischen Zustandes:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = i \frac{|\psi(t+dt)\rangle - |\psi(t)\rangle}{dt} = i \frac{U(t+dt, t) - \mathbb{1}}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle. \quad (3.8)$$

Man kann nun eine Ähnlichkeit mit der **zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung**

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H \psi(\vec{r}, t) \quad (3.9)$$

erkennen. Wir multiplizieren (3.8) mit einem Ortszustand $\langle \vec{r} |$:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{r} | \psi(t) \rangle = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \int d^3 \vec{x} \langle \vec{r} | H | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \psi(t) \rangle = H' \psi(\vec{r}, t). \quad (3.10)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der zeitabhängigen Schrödingergleichung (3.9), d.h. H' ist gerade der Hamilton-Operator in Ortsdarstellung. Damit muss auch der zuvor unbekannte Operator H in (3.8) der Hamilton-Operator sein, denn dann gilt

$$H' = \langle \vec{r} | H | \vec{x} \rangle = \left(\frac{-\Delta_{\vec{r}}}{2m} + V(\vec{r}, t) \right) \delta(\vec{r} - \vec{x}). \quad (3.11)$$

Wir wenden nun die Schrödinger-Gleichung (3.8) auf die Definitions-Gleichung des Zeitentwicklungsoperators (3.1) an:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle = H(t) U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (3.12)$$

Also erfüllt der Zeitentwicklungsoperator die Bewegungsgleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0). \quad (3.13)$$

Diese Gleichung lässt sich unter Beachtung der Randbedingung (3.4) integrieren:

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) U(t_1, t_0). \quad (3.14)$$

Man kann nun iterativ den Ausdruck $U(t_1, t_0)$ wieder durch die rechte rechte Seite mit der Ersetzung $t \rightarrow t_1$ ausdrücken. Wiederholt man dies unendlich oft erhält man die sogenannte von Neumann-Reihe:

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) \dots H(t_n). \quad (3.15)$$

Dabei muss beachtet werden, dass wegen (3.14) die Hamilton-Operatoren nach der Zeit geordnet sind, $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq t_0$. Die Zeitordnung muss beibehalten werden, da Hamilton-Operatoren zu unterschiedlichen Zeiten im Allgemeinen nicht vertauschen.

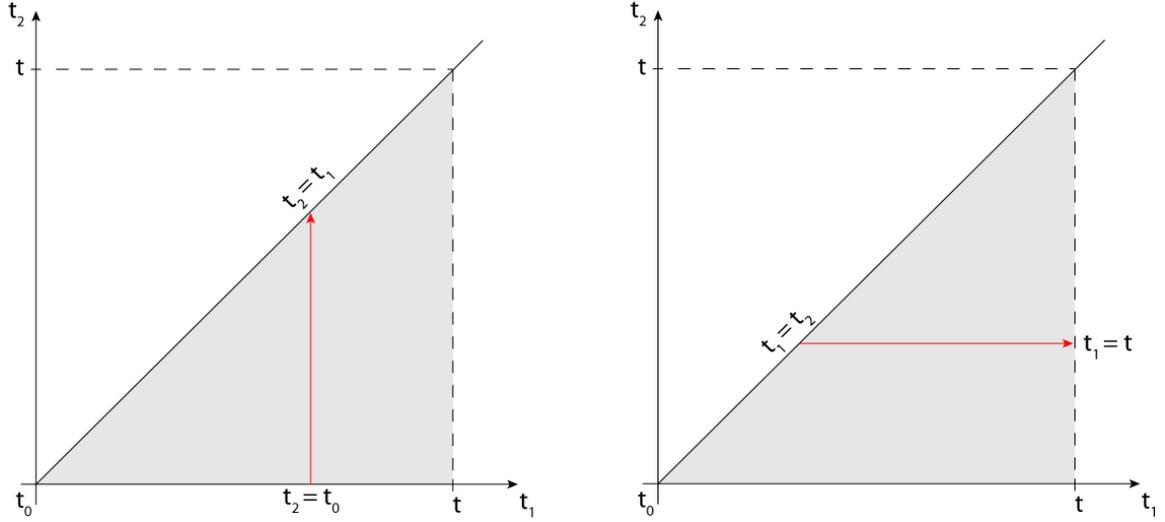


Abbildung 1: Integrationsreihenfolge zur von Neumann-Reihe

Wir betrachten nun den $n = 2$ Term der Summe in der von Neumann-Reihe. In Abb 1 veranschaulicht die graue Fläche das Integrationsvolumen dieses Terms. Das linke Bild stellt den ursprünglichen Ausdruck dar. Die Variable t_1 wird von $t_1 = t_0$ bis $t_1 = t$ integriert, dabei wird für jeden Wert von t_1 jeweils t_2 von $t_2 = t_0$ bis zur Gerade $t_2 = t_1$ integriert. Das rechte Bild zeigt eine dazu äquivalente Integrationsreihenfolge, es wird t_2 von $t_2 = t_0$ bis $t_2 = t$ integriert, wobei für jeden Wert von t_2 jeweils t_1 von der Gerade $t_1 = t_2$ bis $t_1 = t$ integriert wird. Man kann diesen Term damit wie folgt umschreiben:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 H(t_1)H(t_2). \quad (3.16)$$

Man kann außerdem die Integrationsvariablen umbenennen, wir nehmen die Ersetzung $t_1 \leftrightarrow t_2$ vor:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H(t_2)H(t_1). \quad (3.17)$$

Addiert man nun die rechte Seite von (3.17) zur linken Seite, erhält man

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H(t_2)H(t_1) \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 \left[H(t_1)H(t_2)\Theta(t_1 - t_2) + H(t_2)H(t_1)\Theta(t_2 - t_1) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Im letzten Schritt wurde die Stufenfunktion Θ eingeführt, um die Integralgrenzen zu verschieben, denn wegen $t_0 \leq t_1 \leq t$ ist

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt_2 \Theta(t_1 - t_2) &= \int_{t_0}^{t_1} dt_2, \\ \int_{t_0}^t dt_2 \Theta(t_2 - t_1) &= \int_{t_1}^t dt_2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Um in (3.18) den Ausdruck in Klammern zu vereinfachen, führen wir den **Zeitordnungsoperator** T ein:

$$T \{A(t_1)B(t_2)\} = \begin{cases} A(t_1)B(t_2), & t_1 > t_2 \\ B(t_2)A(t_1), & t_1 < t_2 \end{cases}. \quad (3.20)$$

Damit lautet der $n = 2$ Term der von Neumann-Reihe

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2) = \frac{1}{2}T \left\{ \left(\int_{t_0}^t dt' H(t') \right)^2 \right\}. \quad (3.21)$$

Diese Umformung lässt sich auch auf den n -ten Term der von Neumann Reihe anwenden, dabei muss analog zum Rechenweg in (3.18) jede Reihenfolge der n Hamilton-Operatoren beachtet werden. Es gibt $n!$ Möglichkeiten die Hamilton-Operatoren zu sortieren. Fasst man die umgeformten Terme lässt sich der Zeitentwicklungsoperator schreiben als

$$U(t, t_0) = T \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int_{t_0}^t dt' H(t') \right)^n \right\} = T \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H(t') \right). \quad (3.22)$$

Liegt als Spezialfall ein abgeschlossenes System vor, ist der Hamilton-Operator nicht explizit zeitabhängig $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ und das Integral kann direkt ausgeführt werden:

$$U(t, t_0) = \exp(-i H(t - t_0)). \quad (3.23)$$

3.2 Heisenberg-Bild

Im Heisenberg-Bild sind im Gegensatz zum Schrödinger-Bild die quantenmechanischen Zustände zeitunabhängig, und die Operatoren zeitabhängig. Wir identifizieren den zeitunabhängigen Heisenberg-Zustand $|\psi_H\rangle$ mit dem Schrödinger-Zustand zur einer festen Zeit t_0 :

$$|\psi_H\rangle = |\psi(t_0)\rangle = U(t_0, t)|\psi(t)\rangle, \quad (3.24)$$

wobei im letzten Schritt die Definition des Zeitentwicklungsoperators (3.1) benutzt wurde. Die Umkehrung ist offensichtlich

$$U(t, t_0)|\psi_H\rangle = |\psi(t)\rangle. \quad (3.25)$$

Um die Zeitentwicklung von Operatoren zu definieren, verwenden wir, dass Erwartungswerte in allen Zeitentwicklungs-Bildern gleich sein müssen:

$$\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi_H | U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0) | \psi_H \rangle. \quad (3.26)$$

Wir identifizieren den zeitabhängigen Heisenberg-Operator

$$A_H(t) = U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0). \quad (3.27)$$

Nun können wir die Bewegungsgleichung der Operatoren ableiten, dabei nehmen wir an, dass der Operator A nicht explizit von der Zeit abhängt ($\frac{\partial A}{\partial t} = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{dA_H(t)}{dt} &= \frac{\partial U^\dagger(t, t_0)}{\partial t} A U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) A \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} \\ &= i U^\dagger(t, t_0) H A U(t, t_0) - i U^\dagger(t, t_0) A H U(t, t_0) \\ &= i U^\dagger(t, t_0) [H, A] U(t, t_0). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Außerdem gilt für Kommutatoren unter unitären Transformationen U :

$$U^\dagger [A, B] U = (U^\dagger A U)(U^\dagger B U) - (U^\dagger B U)(U^\dagger A U) = [A_H, B_H]. \quad (3.29)$$

mit transformierten Operatoren $A_H = U^\dagger A U$ und $B_H = U^\dagger B U$. Die Bewegungsgleichung für Heisenberg-Operatoren lautet damit

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = i [H_H, A_H(t)]. \quad (3.30)$$

Für abgeschlossene Systeme vertauscht der Zeitentwicklungsoperator (3.23) mit dem Hamilton-Operator $[H, U] = 0$ und es deswegen gilt in diesem Fall $H_H \equiv H$.

3.3 Wechselwirkungsbild

Das Wechselwirkungsbild, auch Dirac-Bild genannt, vereinigt das Schrödinger- und Heisenberg-Bild, die Zeitabhängigkeit wird hier sowohl den Zuständen als auch den Operatoren zugewiesen. Das Wechselwirkungsbild ist besonders für Hamilton-Operatoren der Art

$$H = H_0 + H_1 \quad (3.31)$$

geeignet. Dabei ist H_0 der wechselwirkungsfreie und H_1 der wechselwirkende Anteil des Hamilton-Operators. Die Idee ist den Operatoren eine Zeitentwicklung zuzuordnen, die nur von H_0 verursacht wird, während sich die Zustände nur unter dem Einfluss von H_1 in der Zeit entwickeln. Auch im Wechselwirkungsbild soll bei einer festen Zeit t_0 der Zustand mit denen der anderen Bilder übereinstimmen:

$$|\psi_D(t_0)\rangle = |\psi(t_0)\rangle, \quad (3.32)$$

wobei der Index D für Dirac, also Größen im Wechselwirkungsbild, steht. Die Zustände sollen sich wie erwähnt nur unter dem Einfluss von H_1 entwickeln, d.h. wir müssen einen neuen Zeitentwicklungsoperator U_D im Wechselwirkungsbild definieren:

$$|\psi_D(t)\rangle = U_D(t, t') |\psi_D(t')\rangle = U_0(t_0, t) |\psi(t)\rangle. \quad (3.33)$$

Im zweiten Schritt haben wir die Zeitentwicklung des Zustandes im Wechselwirkungsbild definiert. U_0 ist dabei der Zeitentwicklungsoperator des wechselwirkungsfreien Anteils des Hamilton-Operators. Er nimmt damit die Form

$$U_0(t, t') = \exp(-i H_0(t - t')) \quad (3.34)$$

an. Die Zeitabhängigkeit der Operatoren erhalten wir, wenn wir ihren Erwartungswert berechnen:

$$\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi_D(t) | U_0^\dagger(t, t_0) A U_0(t, t_0) | \psi_D(t) \rangle. \quad (3.35)$$

Wir identifizieren den Operator im Wechselwirkungsbild:

$$A_D(t) = U_0^\dagger(t, t_0) A U_0(t, t_0). \quad (3.36)$$

Damit nimmt die Bewegungsgleichung der Operatoren $A_D(t)$ die Form der heisenberg-schen Bewegungsgleichung (3.30) an, wobei statt dem vollen Hamilton-Operator nur der wechselwirkungsfreie Anteil H_0 eingeht. Damit lässt sich die Bewegungsgleichung für Zustände ableiten:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} | \psi_D(t) \rangle &= \left[-H_0 U_0(t_0, t) + U_0(t_0, t) H \right] | \psi(t) \rangle \\ &= \left[U_0(t_0, t) H_1(t) \right] U_0^\dagger(t_0, t) | \psi_D(t) \rangle \\ &= H_{1,D}(t) | \psi_D(t) \rangle, \end{aligned} \quad (3.37)$$

wobei im ersten Schritt die explizite Darstellung von U_0 und die Schrödinger-Gleichung für den Schrödinger-Zustand $|\psi(t)\rangle$ verwendet wurden. Diese Bewegungsgleichung ähnelt der Schrödinger-Gleichung für Schrödinger-Zustände, es geht lediglich statt des vollen Hamilton-Operators nur der wechselwirkende Anteil ein. Zuletzt können wir noch den Zeitentwicklungsoperator U_D im Wechselwirkungsbild angeben. Zunächst kann die Bewegungsgleichung für U_D völlig analog zum Schrödinger-Bild (siehe (3.12)) berechnet werden. Es geht wieder statt dem vollen Hamilton-Operator nur der wechselwirkende Anteil ein. Die Lösung der Bewegungsgleichung verläuft damit ebenfalls analog. Der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild lautet

$$U_D(t, t_0) = T \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_{1,D}(t') \right). \quad (3.38)$$

Das Wechselwirkungsbild erlaubt uns bei der Formulierung der Quantenfeldtheorie nun die Verwendung von Feldoperatoren, die sich wie wechselwirkungsfreie Feldoperatoren entwickeln. Für diese können wir die aus der Theorie des quantenmechanischen harmonischen Oszillators bekannten Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren verwenden.

4 Feldquantisierung

In diesem Kapitel werden die für die spätere Behandlung von Skalar- und Vektor-Mesonen benötigten Felder untersucht und quantisiert. Wir gehen dabei von der Lagrange-Dichte aus, die das jeweilige Feld beschreibt, leiten die Bewegungsgleichung ab, und lösen diese. Im Anschluss betrachten wir die kanonische Quantisierung der Felder, d.h. auf Operator-Ebene. Zunächst gehen wir nur vom freien Fall aus, die Wechselwirkungen werden später miteinbezogen. Als Quellen für dieses Kapitel dienten [M.W12], [F.D12] und [MD95].

4.1 Klein-Gordon-Feld

4.1.1 Lösung der Klein-Gordon-Gleichung

Für ein freies, reelles, skalares Feld ϕ , welches Teilchen mit Masse m beschreibt, lautet die Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (4.1)$$

Da ϕ ein Skalar ist und alle Lorentz-Indizes kontrahiert sind, ist \mathcal{L} wie erforderlich ein Lorentz-Skalar.

Die Bewegungsgleichung lässt sich mit (2.7) finden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial \phi} &= -m^2 \phi = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\alpha \phi) (\partial^\alpha \phi) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \left(\eta^\mu{}_\alpha (\partial^\alpha \phi) + \eta^{\mu\alpha} (\partial_\alpha \phi) \right) = \square \phi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Damit ist die Bewegungsgleichung, die sog. **Klein-Gordon-Gleichung**:

$$(\square + m^2) \phi = 0, \quad (4.3)$$

mit dem d'Alembert-Operator $\square = \partial_\mu \partial^\mu$.

Die Klein-Gordon-Gleichung (4.3) ist eine Wellen-Gleichung und lässt sich mit einem Ebene-Wellen-Ansatz lösen:

$$\phi(X) = \exp(ip^\mu x_\mu). \quad (4.4)$$

Einsetzen in (4.3) ergibt

$$(-p^\mu p_\mu + m^2) \phi(X) = (\vec{p}^2 - p_0^2 + m^2) = 0, \quad (4.5)$$

mit den Lösungen

$$p_0 = \pm E_{\vec{p}} := \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (4.6)$$

Dies ist die bekannte relativistische Energie-Impuls-Beziehung. Die Energien mit positivem Vorzeichen entsprechen Teilchen, Energien mit negativem Vorzeichen entsprechen

Anteilchen. Die allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist damit eine Superposition von Ebenen-Wellen der Form (4.4) mit unterschiedlichen Impulsen, wobei jeweils (4.6) erfüllt sein muss:

$$\begin{aligned}\phi(X) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \left[a_{\vec{p}} \exp\left(-i(E_{\vec{p}} t - \vec{p} \cdot \vec{x})\right) + b'_{\vec{p}} \exp\left(i(E_{\vec{p}} t + \vec{p} \cdot \vec{x})\right) \right] \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \left[a_{\vec{p}} \exp(-i\bar{p}^\mu x_\mu) + b_{\vec{p}} \exp(i\bar{p}^\mu x_\mu) \right].\end{aligned}\quad (4.7)$$

Dabei sind $a_{\vec{p}}$ und $b_{\vec{p}}$ beliebige, vom 3-Impuls \vec{p} abhängige Amplituden, wobei im 2. Term \vec{p} durch $-\vec{p}$ ersetzt wurde, also $b'_{-\vec{p}} = b_{\vec{p}}$. Weiter ist $\bar{p}^\mu = (E_{\vec{p}}, \vec{p})^T$; man sagt, der Impuls liegt auf der Massenschale. Der Vorfaktor $\frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}$ ist reine Konvention (er könnte auch in die Amplituden gezogen werden) und wird oft so gewählt, da diese Wahl das Integrationsmaß Lorentz-invariant lässt. Ausserdem gilt für reelle Felder $\phi = \phi^*$:

$$a_{\vec{p}}^* = b_{\vec{p}}. \quad (4.8)$$

4.1.2 Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes

Um eine quantisierte Version des Klein-Gordon-Feld im Rahmen des kanonischen Formalismus zu erhalten, muss das feldtheoretische Analogon der aus der Quantenmechanik bekannten Vertauschungsrelation $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ erfüllt sein. Aus Abschnitt 1 lässt sich folgern, dass

$$\left[\hat{\phi}(\vec{r}_1), \hat{\pi}(\vec{r}_2) \right] = i \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (4.9)$$

die richtige feldtheoretische Vertauschungsrelation ist. Dabei ist π die kanonisch konjugierte Impuls-Dichte (2.13). Die Vertauschungsrelation ist immer zu gleichen Zeiten zu verstehen, die Zeitabhängigkeit wurde abkürzend weggelassen. Es ist erforderlich dem Klein-Gordon-Feld (4.7) Operatorcharakter zu verleihen. Dazu ersetzen wir die Amplituden $a_{\vec{p}}$ und $b_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}^*$ durch die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ und $\hat{a}_{\vec{p}}$:

$$\hat{\phi}(X) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \exp(i\bar{p}^\mu x_\mu) + \hat{a}_{\vec{p}} \exp(-i\bar{p}^\mu x_\mu) \right]. \quad (4.10)$$

Die kanonisch konjugierte Impuls-Dichte lautet dann nach (2.13):

$$\hat{\pi}(X) = \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial \dot{\hat{\phi}}} = \dot{\hat{\phi}} = \int \frac{d^3\vec{p} i}{2(2\pi)^3} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \exp(i\bar{p}^\mu x_\mu) - \hat{a}_{\vec{p}} \exp(-i\bar{p}^\mu x_\mu) \right]. \quad (4.11)$$

Im Folgenden werden Operator-Dächer weggelassen.

Durch Linearkombination können die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren berechnet werden:

$$\int d^3\vec{r} [E_{\vec{p}}\phi(\vec{r}, t) + i\pi(\vec{r}, t)] \exp(-i\vec{p}\cdot\vec{r}) = a_{\vec{p}}\exp(-iE_{\vec{p}}t), \quad (4.12)$$

$$\int d^3\vec{r} [E_{\vec{p}}\phi(\vec{r}, t) - i\pi(\vec{r}, t)] \exp(i\vec{p}\cdot\vec{r}) = a_{\vec{p}}^\dagger\exp(iE_{\vec{p}}t). \quad (4.13)$$

Unter Voraussetzung von (4.9) lässt sich damit die Vertauschungsrelation, die Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren erfüllen müssen, berechnen:

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}^\dagger] = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}}\delta(\vec{p} - \vec{k}). \quad (4.14)$$

Der Vorfaktor $(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}$ tritt dabei (im Gegensatz zum harmonischen Oszillator $[a, a^\dagger] = 1$) auf Grund der von uns gewählten Konvention für das Integrationsmaß im Klein-Gordon-Feld (4.10) auf, welche die Definition der Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren beeinflusst.

Der Feldoperator (4.10) ist ein zeitabhängiger Heisenberg-Operator, d.h. er muss die heisenbergsche Bewegungsgleichung (3.30) erfüllen. Dazu muss zunächst der Hamilton-Operator des Klein-Gordon-Feldes mithilfe von (2.12) und (2.14) berechnet werden:

$$H_{KG} = \int d^3\vec{r} \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right]. \quad (4.15)$$

Durch Einsetzen von (4.10) und (4.11) kann dieser durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausgedrückt werden:

$$H_{KG} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + E_{Vac}. \quad (4.16)$$

wobei $E_{Vac} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(0) \frac{E_{\vec{p}}}{2}$ eine unendliche Konstante ist, die als Vakuum-Energie interpretiert wird. Die Divergenz dieser Konstante stellt sich bei späteren Rechnungen als unproblematisch heraus. Nun kann überprüft werden, ob das Feld die heisenbergsche Bewegungsgleichung (3.30) erfüllt. Dazu reicht es aus, wenn die Ausdrücke auf der rechten Seite von (4.12) und (4.13) die heisenbergsche Bewegungsgleichung erfüllen, da diese Ausdrücke den gesamten Operatorcharakter und die gesamte Zeitabhängigkeit des Feldoperators (4.10) enthalten. Durch Einsetzen von (4.14) findet man

$$\begin{aligned} i[H, a_{\vec{p}}\exp(-iE_{\vec{p}}t)] &= i \int \frac{d^3\vec{k}}{2(2\pi)^3} [a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}] \exp(-iE_{\vec{p}}t) \\ &= -iE_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \exp(-iE_{\vec{p}}t) = \frac{d}{dt} a_{\vec{p}} \exp(-iE_{\vec{p}}t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

und analog

$$i[H, a_{\vec{p}}^\dagger\exp(iE_{\vec{p}}t)] = \frac{d}{dt} a_{\vec{p}}^\dagger\exp(iE_{\vec{p}}t). \quad (4.18)$$

Der Feldoperator (4.10) erfüllt damit die heisenbergsche Bewegungsgleichung.

4.2 Proca-Feld

4.2.1 Lösung der Proca-Gleichung

Das Proca-Feld beschreibt massive Vektorbosonen. Die Lagrangedichte masseloser Vektorbosonen, nämlich Photonen, ist uns bereits aus der Elektrodynamik bekannt. Im Fall massebehafteter Teilchen muss, ähnlich wie im Klein-Gordon Fall, noch ein in den Feldern quadratischer Masseterm hinzuaddiert werden. Die Lagrangedichte des freien Proca-Feldes für Vektorbosonen mit Masse m lautet damit

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu. \quad (4.19)$$

Mit dem aus der Elektrodynamik bekannten Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.20)$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich wieder mit (2.7) finden:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4} \partial_\mu [(\eta^{\rho\mu} \eta^{\sigma\nu} - \eta^{\sigma\mu} \eta^{\rho\nu}) F_{\rho\sigma} + F^{\rho\sigma} (\eta_\rho^\mu \eta_\sigma^\nu - \eta_\sigma^\mu \eta_\rho^\nu)] \\ &= -\frac{1}{4} \partial_\mu [F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}] = -\partial_\mu F^{\mu\nu} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial A_\nu} = \frac{m^2}{2} (\eta^{\mu\nu} A_\mu + A^\mu \eta_{\mu}^\nu) = m^2 A^\nu. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Damit lautet die Proca-Gleichung

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m^2 A^\nu = 0. \quad (4.22)$$

Anwenden der Divergenz auf (4.22) ∂_ν liefert

$$\square \partial_\nu A^\nu - \square \partial_\mu A^\mu + m^2 \partial_\nu A^\nu = m^2 \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (4.23)$$

Diese Zusatzbedingung ist wegen $m \neq 0$ identisch mit der Lorentzbedingung aus der Elektrodynamik:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.24)$$

Sie eliminiert einen der 4 Freiheitsgrade, so dass nur die für ein massives Vektorboson mit Spin 1 erforderlichen 3 Freiheitsgrade (Spineinstellungen -1, 0, +1) verbleiben. Anwenden von (4.24) auf (4.22) vereinfacht die Proca-Gleichung zu

$$(\square + m^2) A^\nu = 0, \quad (4.25)$$

das heißt jede Komponente von A^ν erfüllt separat die Klein-Gordon-Gleichung (4.3). Damit lässt sich sofort die Lösung der Proca-Gleichung angeben:

$$A^\nu(X) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_{\lambda, \vec{p}}^\nu \left[a_{\lambda, \vec{p}} \exp(i \vec{p}^\mu x_\mu) + b_{\lambda, \vec{p}} \exp(-i \vec{p}^\mu x_\mu) \right]. \quad (4.26)$$

Dabei wurde die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung (4.7) um die 4-Vektoren $\epsilon_{\lambda,\vec{p}}^\nu$ und die Vorfaktoren um einen Index λ erweitert. Dies ermöglicht, dass die räumlichen Komponenten des Feldes A^ν voneinander unabhängig gewählt werden können, um die erforderlichen 3 Freiheitsgrade zu gewährleisten. Die zeitliche Komponente wird dann durch die Zusatzbedingung (4.24) fixiert. Die Vektoren $\epsilon_{\lambda,\vec{p}}^\nu$ geben die Polarisation des massiven Vektorboson-Feldes an, man wählt diese deshalb als Orthonormalbasis, wobei zwei der Vektoren die transversalen Polarisationsfreiheitsgrade darstellen und senkrecht auf dem Impuls \vec{p} stehen, und einer den longitudinalen Polarisationsfreiheitsgrad darstellt und parallel zum Impuls steht. Wir wählen o.B.d.A den Impuls in z-Richtung, $\vec{p} = (0, 0, p)^T$:

$$\epsilon_{1,\vec{p}}^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_{2,\vec{p}}^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_{3,\vec{p}}^\mu = \begin{pmatrix} \epsilon_{3,\vec{p}}^0 \\ 0 \\ 0 \\ Np \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

wobei $\epsilon_{3,\vec{p}}^0$ und N mit (4.24) und der Normierungsbedingung

$$\epsilon_{\alpha,\vec{p}}^\mu (\epsilon_{\beta,\vec{p}})_\mu = -\delta_{\alpha\beta} \quad (4.28)$$

bestimmt werden müssen. Einsetzen von A^ν in (4.24) liefert

$$\epsilon_{\lambda,\vec{p}}^\mu \bar{p}_\mu = \epsilon_{\lambda,\vec{p}}^0 E_{\vec{p}} - \epsilon_{\lambda,\vec{p}}^i p^i = 0. \quad (4.29)$$

Für $\lambda = 1, 2$ ist diese Bedingung durch die Wahl (4.27) schon erfüllt, für $\lambda = 3$ lautet sie

$$\epsilon_{3,\vec{p}}^0 E_{\vec{p}} - Np^2 = 0. \quad (4.30)$$

Die Wahl

$$\epsilon_{3,\vec{p}}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{E_{\vec{p}}}{m} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

erfüllt (4.30) und die Normierungsbedingung, denn

$$\epsilon_{3,\vec{p}}^\mu (\epsilon_\mu)_{3,\vec{p}} = \frac{p^2 - E_{\vec{p}}^2}{m^2} = \frac{p^2 - m^2 - p^2}{m^2} = -1. \quad (4.32)$$

Damit lässt sich eine später benötigte Eigenschaft der Polarisationsvektoren berechnen:

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_{\lambda, \vec{p}}^\mu \epsilon_{\lambda, \vec{p}}^\nu &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \\
&+ \frac{1}{m^2} \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 & pE_{\vec{p}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ pE_{\vec{p}} & 0 & 0 & E_{\vec{p}}^2 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \\
&= -\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \begin{pmatrix} p^2 + m^2 & 0 & 0 & pE_{\vec{p}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ pE_{\vec{p}} & 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Dieses Resultat gilt auch für beliebige Ausrichtungen des Impulses, die Rechnung dazu soll an dieser Stelle jedoch nicht gezeigt werden.

Zuletzt sei noch erwähnt, dass die Lagrange-Dichte des Proca-Feldes (4.19) nicht invariant unter den aus der Elektrodynamik bekannten Eichtransformationen

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi \tag{4.34}$$

ist. Dabei ist $\chi = \chi(X)$ eine beliebige, hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion. Grund für die Brechung der Eichsymmetrie ist der im Gegensatz zur Elektrodynamik nicht verschwindende Massenterm. Ohne die Eichsymmetrie treten bei der folgenden Quantisierung des Proca-Feldes viele Probleme, die bei der Quantisierung von Eichfeldern auftreten, nicht auf.

4.2.2 Quantisierung des Proca-Feldes

Für die Quantisierung ist es erneut notwendig das Feld und die kanonisch konjugierte Impuls-Dichte zu Operatoren zu erheben und die zu (4.9) analoge Vertauschungsrelation zu fordern. Da, wie wir gesehen haben, die zeitliche Komponente des Proca-Feldes keinen Freiheitsgrad darstellt, ist es ausreichend, wenn die Vertauschungsrelation nur für die räumlichen Komponenten definiert ist. Genauer erkennt man dies, wenn man zunächst die kanonisch konjugierte Impulsdichte berechnet:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} \tag{4.35}$$

Die Rechnung verläuft analog zur Berechnung der Bewegungsgleichungen. Man erkennt, dass $\pi^0 \equiv 0$, d.h. die 0-Komponente der Impuls-Dichte tritt nicht in der Hamilton-Funktion auf. Damit ist die Forderung einer Vertauschungsrelation für π^0 nicht notwendig. Im Folgenden erheben wir zunächst analog zum Klein-Gordon Fall das Feld zum

Operator und zeigen dann, dass die geforderten Vertauschungsrelationen erfüllt sind. Der Feldoperator für das Proca-Feld lautet

$$A^\mu(X) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_{\lambda,\vec{p}}^\mu \left[a_{\lambda,\vec{p}}^\dagger \exp(i\vec{p}^\nu x_\nu) + a_{\lambda,\vec{p}} \exp(-i\vec{p}^\nu x_\nu) \right]. \quad (4.36)$$

Die räumlichen Komponenten der kanonisch konjugierten Impuls-Dichte sind:

$$\begin{aligned} \pi^i(X) = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i &= \int \frac{d^3\vec{p}}{2(2\pi)^3 E_{\vec{p}}} \sum_{\lambda=1}^3 (\epsilon_{\lambda,\vec{p}}^0 p^i - \epsilon_{\lambda,\vec{p}}^i E_{\vec{p}}) \\ &\times \left[a_{\lambda,\vec{p}}^\dagger \exp(i\vec{p}^\nu x_\nu) - a_{\lambda,\vec{p}} \exp(-i\vec{p}^\nu x_\nu) \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Für die Vertauschungsrelation der Erzeuger und Vernichter orientieren wir uns ebenfalls am Klein-Gordon Fall, wir fordern

$$\left[a_{\lambda,\vec{p}}, a_{\eta,\vec{k}}^\dagger \right] = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \delta_{\lambda\eta} \delta(\vec{p} - \vec{k}) \quad (4.38)$$

$$\left[a_{\lambda,\vec{p}}, a_{\eta,\vec{k}} \right] = \left[a_{\lambda,\vec{p}}^\dagger, a_{\eta,\vec{k}}^\dagger \right] = 0 \quad (4.39)$$

wobei das zusätzliche $\delta_{\lambda\eta}$ bewirkt, dass die Erzeuger und Vernichter für unterschiedliche Polarisierungen unabhängig voneinander sind, bzw. vertauschen. Nun lässt sich der zu (4.9) analoge Kommutator berechnen:

$$\begin{aligned} [A^i(\vec{r}_1, t), \pi^j(\vec{r}_2, t)] &= \int \frac{d^3\vec{p}}{2(2\pi)^3 E_{\vec{p}}} \int \frac{d^3\vec{k}}{2(2\pi)^3 E_{\vec{k}}} \sum_{\lambda,\eta=1}^3 \epsilon_{\lambda,\vec{p}}^i \left(\epsilon_{\eta,\vec{k}}^0 k^j - \epsilon_{\eta,\vec{k}}^j E_{\vec{k}} \right) \\ &\times \left(\left[a_{\lambda,\vec{p}}, a_{\eta,\vec{k}}^\dagger \right] \exp(i\vec{p} \cdot \vec{r}_1 - i\vec{k} \cdot \vec{r}_2) - \left[a_{\lambda,\vec{p}}^\dagger, a_{\eta,\vec{k}} \right] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - i\vec{p} \cdot \vec{r}_1) \right) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{2(2\pi)^3 E_{\vec{p}}} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_{\lambda,\vec{p}}^i \left(\epsilon_{\lambda,\vec{p}}^0 p^j - \epsilon_{\lambda,\vec{p}}^j E_{\vec{p}} \right) \\ &\times \left(\exp(i\vec{p}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) + \exp(i\vec{p}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) \right) \\ &= \frac{i}{E_{\vec{p}}} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \left[-\delta_{i1} \delta_{j1} E_{\vec{p}} - \delta_{i2} \delta_{j2} E_{\vec{p}} - \frac{\delta_{i3} E_{\vec{p}}}{m} \left(-\frac{\delta_{j3} p^2}{m} + \frac{\delta_{j3} E_{\vec{p}}^2}{m} \right) \right] \\ &= -i \delta_{ij} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \end{aligned} \quad (4.40)$$

wobei der Impuls in z-Richtung gelegt wurde $\vec{p} = (0, 0, p)^T$ und damit die Polarisationsvektoren (4.27) benutzt wurden. Es sei angemerkt, dass auch dieses Resultat für eine beliebige Wahl des Impulses \vec{p} gilt. Das zusätzliche Minuszeichen im Endergebnis ist in Übereinstimmung mit unserer Konvention für die Minkowski-Metrik $\eta_{ii} = -1$:

$$[A^i(\vec{r}_1, t), \pi^j(\vec{r}_2, t)] = i \eta^{ij} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (4.41)$$

Damit ist (4.41) die korrekte Vertauschungsrelation für das Proca-Feld. Es sei noch angemerkt, der Feldoperator (4.36) auch die heisenbergsche Bewegungsgleichung (3.30) erfüllt, der Beweis soll hier nicht gezeigt werden.

5 Berechnung von Zerfallsbreiten

In diesem Kapitel sollen die für diese Arbeit zentralen Größen betrachtet werden, die sogenannte Streumatrix und die auf einen Streuprozess bezogene Zerfallsrate bzw. Zerfallsbreite. Die Streumatrix ist ein Objekt, welches Übergänge zwischen Zuständen in der Quantenfeldtheorie beschreibt. In der Quantenfeldtheorie sind wir dabei, im Gegensatz zur klassischen Quantenmechanik, nicht mehr auf Streuprozesse beschränkt, bei denen die Art der Teilchen unveränderlich ist. Mithilfe der Streumatrix lassen sich dann mit den bekannten quantenmechanischen Methoden Übergangswahrscheinlichkeiten, und schließlich die für uns interessante Zerfallsbreite berechnen. Für dieses Kapitel wurden die Quellen [MD95], [M.W12] und [F.D12] verwendet.

5.1 Streumatrix

Zur Definition der Streumatrix präparieren zunächst zwei Zustände, einen initialen Zustand $|in, t_i\rangle$ und einen finalen Zustand $|fin, t_f\rangle$. Die Zustände sollen dabei zu der jeweils angegebenen Zeit t_i bzw. t_f Eigenzustände zur jeweils gleichen Menge von miteinander vertauschenden Operatoren sein, d.h. die Quantenzahlen der Zustände sind zur jeweils angegebenen Zeit eindeutig festgelegt. Die Quantenzahlen des Zustandes $|in, t_i\rangle$ können dabei unterschiedlich von den Quantenzahlen des Zustandes $|fin, t_f\rangle$ sein, d.h. beide Zustände können unterschiedliche Anzahl und Arten von Teilchen beschreiben. Die Zeitentwicklung dieser Zustände ist durch den Zeitentwicklungsoperator gegeben:

$$|in(t)\rangle = U(t, t_i)|in, t_i\rangle, \quad (5.1)$$

$$|fin(t)\rangle = U(t, t_f)|fin, t_f\rangle. \quad (5.2)$$

Interessant ist nun die Übergangsamplitude für den Übergang $|in, t_i\rangle \rightarrow |fin, t_f\rangle$:

$$\langle fin(t_f)|in(t_f)\rangle = \langle fin, t_f|U^\dagger(t_f, t_f)U(t_f, t_i)|in, t_i\rangle = \langle fin, t_f|U(t_f, t_i)|in, t_i\rangle. \quad (5.3)$$

Wir definieren nun die Streumatrix S , auch S-Matrix genannt:

$$S = \lim_{\substack{t_i \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow \infty}} U(t_f, t_i). \quad (5.4)$$

Die Elemente der S-Matrix sind damit durch

$$\langle fin|S|in\rangle = \lim_{\substack{t_i \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow \infty}} \langle fin, t_f|U(t_f, t_i)|in, t_i\rangle \quad (5.5)$$

gegeben. Dabei sind $|in\rangle$ und $|fin\rangle$ nun beliebige Zustände im Rahmen der Quantenfeldtheorie. Wären also alle S-Matrix Elemente bekannt, ließen sich alle denkbaren Streuprozesse der Theorie berechnen, wenn wir annehmen, dass für $t \rightarrow \pm\infty$ die Wechselwirkung ausgeschaltet ist und damit die ein- und auslaufenden Zustände $|in\rangle$ und $|fin\rangle$ asymptotische Zustände sind.

5.2 Zerfallsrate für die 3-Teilchen Streuung

Wir wollen nun die Zerfallsbreite einer 3-Teilchen Streuung berechnen. Ein Teilchen der Sorte A soll dabei in 2 Teilchen der Sorten B_1 und B_2 zerfallen. Wir gehen davon aus, dass $m_A > m_{B_1} + m_{B_2}$, d.h. der Zerfall kann stattfinden. Die Zerfallsbreite bzw. Zerfallsrate Γ hängt mit der Zerfallswahrscheinlichkeit W wie folgt zusammen:

$$\Gamma_{A \rightarrow B_1 B_2} = \frac{W_{A \rightarrow B_1 B_2}}{T}, \quad (5.6)$$

wobei T die betrachtete Zeitspanne ist. Sei $|A(\vec{p} = 0)\rangle$ der Anfangszustand und $|B_1(\vec{k}_1)B_2(\vec{k}_2)\rangle$ der Endzustand. Die Wahl $\vec{p} = 0$ vereinfacht die Rechnung etwas, die Zerfallsrate Γ ist allerdings ohnehin immer im Ruhesystem $\vec{p} = 0$ definiert. Die Zerfallswahrscheinlichkeit lässt sich nun aus der Übergangsamplitude berechnen:

$$W_{A \rightarrow B_1 B_2} = \sum_{\vec{k}_1} \sum_{\vec{k}_2} |\langle B_1(\vec{k}_1)B_2(\vec{k}_2) | S | A(0) \rangle|^2 \quad (5.7)$$

Wir summieren über die Impulse, da wir die Wahrscheinlichkeit, dass A in B_1 und B_2 zerfällt, wissen wollen und die Impulse der Ausgangsteilchen dabei nicht festgelegt sind. Wir können die unhandlichen Summen in Integrale umschreiben, da wir uns in einem unendlich ausgedehnten Raum befinden, in dem beliebige Impulse angenommen werden können:

$$\sum_{\vec{p}} = \frac{1}{\Delta p^3} \sum_{\vec{p}} \Delta p^3 = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{p}} \Delta p^3 \rightarrow V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \quad (5.8)$$

Damit ist die Zerfallswahrscheinlichkeit gegeben durch

$$W_{A \rightarrow B_1 B_2} = V^2 \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}_2}{(2\pi)^3} |\langle B_1(\vec{k}_1)B_2(\vec{k}_2) | S | A(0) \rangle|^2. \quad (5.9)$$

Wir müssen noch sicherstellen, dass die Normierung der Zustände korrekt ist, um Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen zu können. Zur Konstruktion der Zustände wollen wir später die in Kapitel 4 definierten Erzeuger und Vernichter verwenden. Wir betrachten die Norm eines so konstruierten Zustandes:

$$\begin{aligned} \langle A(\vec{p}) | A(\vec{p}) \rangle &= \langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = 2(2\pi)^3 E_{\vec{p}} \delta(0) \\ &= 2(2\pi)^3 E_{\vec{p}} \int \frac{d^3 \vec{r}}{(2\pi)^3} \exp(i0 \cdot \vec{r}) = 2E_{\vec{p}} V \neq 1. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Um die korrekte Normierung zu erhalten, müssen wir die Zustände also durch einen Faktor $\sqrt{2E_{\vec{p}}V}$ teilen. Die Zerfallswahrscheinlichkeit lautet dann

$$W_{A \rightarrow B_1 B_2} = \frac{1}{V} \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{2(2\pi)^3 E_{\vec{k}_1}^{(1)}} \int \frac{d^3 \vec{k}_2}{2(2\pi)^3 E_{\vec{k}_2}^{(2)}} \frac{1}{2m_A} |\langle B_1(\vec{k}_1)B_2(\vec{k}_2) | S | A(0) \rangle|^2. \quad (5.11)$$

Wegen $\vec{p} = 0$ hat sich der Faktor $E_{\vec{p}} = m_A$ vereinfacht. Die Indizes an den Energien geben an, welcher Teilchensorte diese zugeordnet sind bzw. welche Massen zu verwenden sind:

$$E_{\vec{p}}^{(j)} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_{B_j}^2}. \quad (5.12)$$

Das Übergangsmatrixelement kann nur von 0 verschieden sein, wenn der Zerfall physikalisch möglich ist, d.h. keine Erhaltungssätze verletzt. Es muss 4-Impulserhaltung gegeben sein. Wir ziehen die 4-Impuls erhaltende δ -Distribution aus dem Matrixelement:

$$\langle B_1(\vec{k}_1) B_2(\vec{k}_2) | S | A(0) \rangle = (2\pi)^4 \delta(p - k_1 - k_2) (-i\mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 B_2}), \quad (5.13)$$

und definieren damit das **invariante Matrixelement** $\mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 B_2}$. Beim weiteren Auswerten der Zerfallswahrscheinlichkeit tritt nun das Quadrat einer δ -Distribution auf. Wir verwenden zum Auswerten dieses Ausdrucks den sogenannten Fermi-Trick:

$$\begin{aligned} \delta(p - k_1 - k_2)^2 &= \delta(p - k_1 - k_2) \delta(0) = \delta(p - k_1 - k_2) \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} \exp(i0 \cdot x) \\ &= \delta(p - k_1 - k_2) \frac{VT}{(2\pi)^4} = \delta(m_A - E_{\vec{k}_1}^{(1)} - E_{\vec{k}_2}^{(2)}) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \frac{VT}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Im letzten Schritt haben wir wieder ausgenutzt, dass $\vec{p} = 0$. Wir können nun die Zerfallsbreite berechnen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{A \rightarrow B_1 B_2} &= (2\pi)^4 \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{2(2\pi)^3 E_{\vec{k}_1}^{(1)}} \int \frac{d^3 \vec{k}_2}{2(2\pi)^3 E_{\vec{k}_2}^{(2)}} \frac{|-i\mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 B_2}|^2}{2m_A} \delta(p - k_1 - k_2) \\ &= \frac{\pi}{2m_A} \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{2(2\pi)^3} \frac{|-i\mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 B_2}|^2}{E_{\vec{k}_1}^{(1)} E_{\vec{k}_1}^{(2)}} \delta(m_A - E_{\vec{k}_1}^{(1)} - E_{\vec{k}_1}^{(1)}) \\ &= \frac{1}{8\pi m_A} \int d|\vec{k}| \cdot |\vec{k}|^2 \frac{|-i\mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 B_2}|^2}{E_{\vec{k}}^{(1)} E_{\vec{k}}^{(2)}} \delta(m_A - E_{\vec{k}}^{(1)} - E_{\vec{k}}^{(1)}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Im letzten Schritt wurden sphärische Koordinaten eingeführt und über den Winkelanteil integriert. Dabei wurde verwendet, dass beim 3-Teilchen-Zerfall das invariante Matrixelement unabhängig von den Winkeln zwischen den Impulsen ist, da die Zerfallsprodukte im Ruhesystem mit $E_{\vec{p}} = m_A$ nach dem Zerfall immer entgegengesetzt gerichtete Impulse besitzen und damit jede mögliche Orientierung der Impulse der Zerfallsprodukte den gleichen Beitrag liefert. Die verbleibende δ -Distribution werten wir nach der Relation

$$\delta(f(x)) = \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|^{-1} \delta(x - x_0) \quad (5.16)$$

aus, wobei $f(x)$ eine Funktion mit einer einzigen Nullstelle x_0 ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \delta\left(m_A - \sqrt{\vec{k}^2 - m_{B_1}^2} - \sqrt{\vec{k}^2 - m_{B_2}^2}\right) &= \left[|\vec{k}| \left(\frac{1}{E_{\vec{k}}^{(1)}} + \frac{1}{E_{\vec{k}}^{(2)}}\right)\right]^{-1} \delta(|\vec{k}| - k_f) \\ &= \frac{1}{k_f} \frac{E_{\vec{k}}^{(1)} E_{\vec{k}}^{(2)}}{E_{\vec{k}}^{(1)} + E_{\vec{k}}^{(2)}} \delta(|\vec{k}| - k_f) = \frac{E_{\vec{k}}^{(1)} E_{\vec{k}}^{(2)}}{k_f m_A} \delta(|\vec{k}| - k_f). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Einsetzen in (5.15) ergibt

$$\Gamma_{A \rightarrow B_1 B_2} = \frac{k_f}{8\pi m_A^2} | -i\mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 B_2} |^2. \quad (5.18)$$

Zuletzt bleibt noch der Betrag k_f des Impulses der Zerfallsprodukte zu bestimmen. k_f ist gerade die Nullstelle der Funktion in der δ -Distribution (5.17). Wir kürzen ab $m_j = m_{B_j}$:

$$\begin{aligned} m_A - \sqrt{k_f^2 + m_1^2} - \sqrt{k_f^2 + m_2^2} &= 0 \\ \implies m_A^2 &= (k_f^2 + m_1^2) + (k_f^2 + m_2^2) + 2\sqrt{k_f^2 + m_1^2}\sqrt{k_f^2 + m_2^2} \\ \implies \frac{(m_A^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2k_f^2)^2}{4} &= \frac{(m_A^2 - m_1^2 - m_2^2)^2}{4} + k_f^4 - k_f^2(m_A^2 - m_1^2 - m_2^2) \\ &= k_f^4 + k_f^2(m_1^2 + m_2^2) + m_1^2 m_2^2 \\ \implies k_f^2 &= \frac{(m_A^2 - (m_1^2 + m_2^2))^2 - 4m_1^2 m_2^2}{4m_A^2} = \frac{m_A^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)}{4} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{4m_A^2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

5.3 Übergangsamplitude im Wechselwirkungsbild

Um die Berechnung der Zerfallsbreite abzuschließen, müssen wir noch die Übergangsamplitude bzw. das invariante Matrixelement bestimmen, dazu müssen wir zunächst die Zustände $|in\rangle = |A(\vec{p} = \vec{0})\rangle$ und $|fin\rangle = |B_1(\vec{k}_1)B_2(\vec{k}_2)\rangle$ konstruieren. Wir wollen dazu die bei der Quantisierung der Felder eingeführten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren verwenden. Diese sind allerdings analog zum quantenmechanischen harmonischen Oszillator nur für freie Theorien anwendbar, wie wir sie bei der Quantisierung des Klein-Gordon- und des Proca-Feldes vorausgesetzt haben. Mit Hilfe des Wechselwirkungsbildes können wir allerdings weiterhin Felder verwenden, die sich wie in der freien Theorie entwickeln.

Wir drücken zunächst das S-Matrix-Element im Wechselwirkungsbild mit (3.33) durch Schrödinger-Zustände aus:

$$\begin{aligned} S_{A \rightarrow B_1 B_2} &= \lim_{\substack{t_i \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow \infty}} \langle B_1(\vec{k}_1)B_2(\vec{k}_2) | U_D(t_f, t_i) | A(0) \rangle_D \\ &= \lim_{\substack{t_i \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow \infty}} \langle B_1(\vec{k}_1)B_2(\vec{k}_2) | U_0(t_f, t_0) U_D(t_f, t_i) U_0^\dagger(t_i, t_0) | A(0) \rangle. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dabei ist t_0 eine beliebige, feste Zeit, zu der die Zustände in allen Bildern identisch sind. Im nächsten Schritt nehmen wir nun an, dass die Wechselwirkung für $|t| \rightarrow \infty$ verschwindet. Die Anfangs- und End-Zustände, welche zu den Zeiten t_i bzw. t_f als Zustände mit gegebenen Quantenzahlen, d.h. als Eigenzustände der zugehörigen Operatoren, definiert sind, sind im dann Limes $t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow \infty$ gegeben durch

$$\begin{aligned} |A(0)\rangle &= (a_A)_0^\dagger |0\rangle \\ |B_1(\vec{k}_1)B_2(\vec{k}_2)\rangle &= (a_{B_1})_{\vec{k}_1}^\dagger (a_{B_2})_{\vec{k}_2}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Wobei $a_A^\dagger, a_{B_1}^\dagger, a_{B_2}^\dagger$ die jeweiligen Erzeugungs-Operatoren sind und $|0\rangle$ das Vakuum der wechselwirkungsfreien Theorie darstellt. Weiter sind diese Zustände auch Eigenzustände des freien Hamilton-Operators H_0 zur gleichen Energie E , da Energieerhaltung beim Übergang $A \rightarrow B_1 B_2$ gegeben sein muss. Anwenden des freien Zeitentwicklungs-Operators auf diese Zustände ergibt damit nur einen Phasenfaktor und wir erhalten

$$S_{A \rightarrow B_1 B_2} = \lim_{\substack{t_i \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow \infty}} e^{-iE(t_f - t_i)} \langle 0 | (a_{B_1})_{\vec{k}_1}^\dagger (a_{B_2})_{\vec{k}_2}^\dagger U_D(t_f, t_i) (a_A)_0^\dagger |0\rangle \quad (5.22)$$

Der Phasenfaktor fällt beim Bilden des Betrags-Quadrates zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit heraus, und kann damit auch weggelassen werden. Um das S-Matrix-Element vollständig durch Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren der freien Theorie ausdrücken zu können, müssen wir noch den Zeitentwicklungs-Operator im Wechselwirkungsbild durch freie Felder ausdrücken. Dieser ist im Wesentlichen durch den wechselwirkungs-Anteil des Hamilton-Operatoren im wechselwirkungsbild $H_{1,D}$ gegeben. Für die betrachteten Wechselwirkungen ist H_1 stets gegeben durch ganzzahlige Potenzen von Feldern:

$$H_1(t) \sim \int d^3\vec{r} \phi^n(\vec{r}, t). \quad (5.23)$$

Im Wechselwirkungsbild lautet dieser

$$H_{1,D}(t) = U_0^\dagger(t, t_0) H_1(t_0) U_0(t, t_0) \sim \int d^3\vec{r} \phi_0^n(\vec{r}, t), \quad (5.24)$$

mit $\phi_0(t) = U_0^\dagger(t, t_0) \phi(t_0) U_0(t, t_0)$, d.h. ϕ_0 entwickelt sich wie ein freies Feld, welches zur Zeit t_0 identisch zum wechselwirkenden Feld $\phi(t_0)$ ist. Wir können daher die in Kapitel 4 definierten Feldoperatoren verwenden um das S-Matrix-Element zu berechnen.

5.4 Wick'sches Theorem

Um die Berechnung der Zerfallsbreite abschließen zu können, müssen wir die im Zeitentwicklungsoperator U_D auftretenden zeitgeordneten Produkte auswerten. Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass dazu die freien Feldoperatoren aus Kapitel 4 verwen-

det werden können. Es ist zweckmäßig diese in 2 Teile aufzuspalten:

$$\begin{aligned}\phi(X) &= \phi^+(X) + \phi^-(X) \\ \phi^+(X) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{2(2\pi)^3 E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger \exp(ip^\mu x_\mu) \\ \phi^-(X) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{2(2\pi)^3 E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}} \exp(-ip^\mu x_\mu).\end{aligned}\tag{5.25}$$

Dabei ist p^μ der Impuls auf der Massenschale. Wir betrachten zunächst das zeitgeordnete Produkt von 2 Feldoperatoren für den Fall $x^0 > y^0$:

$$\begin{aligned}T\{\phi(X)\phi(Y)\} &= \phi^+(X)\phi^+(Y) + \phi^+(X)\phi^-(Y) + \phi^-(X)\phi^+(Y) + \phi^-(X)\phi^-(Y) \\ &=: \phi(X)\phi(Y): + [\phi^-(X), \phi^+(Y)].\end{aligned}\tag{5.26}$$

Dabei haben wir die so genannte **Normalordnung** definiert: Innerhalb der $: \quad :$ werden die Operatoren so sortiert, dass alle Erzeugungs-Operatoren a^\dagger links von allen Vernichtungs-Operatoren a stehen. Für der Fall $x^0 < y^0$ gilt analog

$$\begin{aligned}T\{\phi(X)\phi(Y)\} &= \phi^+(Y)\phi^+(X) + \phi^+(Y)\phi^-(X) + \phi^-(Y)\phi^+(X) + \phi^-(Y)\phi^-(X) \\ &=: \phi(X)\phi(Y): + [\phi^-(Y), \phi^+(X)].\end{aligned}\tag{5.27}$$

Wir definieren den so genannten **Feynman-Propagator** als

$$\Delta_F(X, Y) = \Theta(x^0 - y^0) [\phi^-(X), \phi^+(Y)] + \Theta(y^0 - x^0) [\phi^-(Y), \phi^+(X)].\tag{5.28}$$

Dieser hat den Stellenwert einer Zahl, da die auftretenden Kommutatoren im Wesentlichen Kommutatoren von a^\dagger und a , und damit Zahlen, sind. Zusammenfassend gilt also

$$T\{\phi(X)\phi(Y)\} =: \phi(X)\phi(Y): + \Delta_F(X, Y).\tag{5.29}$$

Man nennt $\Delta_F(X, Y)$ auch **Kontraktion** von $\phi(X)$ und $\phi(Y)$ und schreibt dies als

$$\Delta_F(X, Y) = \overline{\phi(X)\phi(Y)}.\tag{5.30}$$

Diese Überlegungen lassen sich auch auf zeitgeordnete Produkte von beliebig vielen Feldoperatoren verallgemeinern:

$$\begin{aligned}T\{\phi(X_1)\dots\phi(X_n)\} &= : \phi(X_1)\dots\phi(X_n): + \text{alle möglichen Kombinationen} \\ &\quad \text{von normalgeordneten Produkten} \\ &\quad \text{und Kontraktionen}\end{aligned}\tag{5.31}$$

Diese Relation wurde von Wick und Dyson bewiesen, und wird auch Wick'sches Theorem genannt, ein Beweis findet man z.B. in [MD95].

5.5 Berechnung der Übergangsamplitude

Wir wollen nun als Beispiel die Übergangsamplitude der 3-Teilchen Streuung für Klein-Gordon-Felder berechnen. In dieser Arbeit sollen ausschließlich Beiträge zur Zerfallsbreite in erster Ordnung der Kopplungskonstanten berücksichtigt werden, man nennt dies auch "Baum-Niveau" oder "Tree-level". Wir betrachten weiterhin den Zerfall $A \rightarrow B_1 B_2$, wobei nun alle 3 Felder Klein-Gordon-Felder sein sollen. Die Lagrange-Dichte dieses Modells ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG,A} + \mathcal{L}_{KG,B_1} + \mathcal{L}_{KG,B_2} + g \phi_A \phi_{B_1} \phi_{B_2}, \quad (5.32)$$

mit der Klein-Gordon Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{KG,X} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_X)(\partial^\mu \phi_X) - \frac{1}{2}m_X^2 \phi_X^2. \quad (5.33)$$

Damit lautet der wechselwirkungs-Anteil der Hamilton-Dichte:

$$\mathcal{H}_1 = -g \phi_A \phi_{B_1} \phi_{B_2}. \quad (5.34)$$

Der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild lautet bis zur ersten Ordnung in der Kopplungskonstanten g :

$$U_D(t_f, t_i) = T \exp \left(-i \int d^4x (-g \phi_A \phi_{B_1} \phi_{B_2}) \right) = ig \int d^4x T \{ \phi_A \phi_{B_1} \phi_{B_2} \}. \quad (5.35)$$

Dabei sind, wie wir in Abschnitt 5.3 gesehen haben, für alle Felder die freien Klein-Gordon-Felder einzusetzen. Einsetzen in (5.22) ergibt

$$S_{A \rightarrow B_1 B_2} = ig \lim_{\substack{t_i \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow \infty}} \int d^4x \langle 0 | (a_{B_1})_{\vec{k}_1}^- (a_{B_2})_{\vec{k}_2}^- T \{ \phi_A(x) \phi_{B_1}(x) \phi_{B_2}(x) \} (a_A)_0^\dagger | 0 \rangle. \quad (5.36)$$

Die Felder im zeitgeordneten Produkt besitzen hier alle die gleiche Zeitkoordinate, wir könnten die Zeitordnung also weglassen, dennoch können wir das Wick'sche Theorem anwenden. Dabei bleibt nur der Term übrig, in dem für jedes Feld jeweils ein Erzeugungs- und ein Vernichtungs-Operator zwischen $\langle 0 |$ $| 0 \rangle$ auftreten. Speziell verschwinden damit alle Terme, in denen Kontraktionen der Felder auftreten:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | (a_{B_1})_{\vec{k}_1}^- (a_{B_2})_{\vec{k}_2}^- T \{ \phi_A(x) \phi_{B_1}(x) \phi_{B_2}(x) \} (a_A)_0^\dagger | 0 \rangle = \\ & \int \frac{d^3 \vec{p}}{2(2\pi)^3 E_{\vec{p}}^{(A)}} \int \frac{d^3 \vec{q}}{2(2\pi)^3 E_{\vec{q}}^{(B_1)}} \int \frac{d^3 \vec{v}}{2(2\pi)^3 E_{\vec{v}}^{(B_2)}} \exp(i(q^\mu + v^\mu - p^\mu) \cdot x_\mu) \\ & \langle 0 | (a_{B_1})_{\vec{k}_1}^- (a_{B_2})_{\vec{k}_2}^- (a_{B_1})_{\vec{q}}^\dagger (a_{B_2})_{\vec{v}}^\dagger (a_A)_{\vec{p}} (a_A)_0^\dagger | 0 \rangle \\ & = \exp \left(i(E_{\vec{k}_1}^{(B_1)} + E_{\vec{k}_2}^{(B_2)} - m_A)t - i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{r} \right) = \exp(i(k_1^\mu + k_2^\mu - p^\mu)x_\mu). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Im vorletzten Schritt wurde der Kommutator $[a, a^\dagger]$ für Klein-Gordon-Felder eingesetzt und über die daraus entstehenden δ -Distributionen integriert. Es war außerdem zu beachten, dass für die Felder alle Impulse auf der Massenschale liegen, d.h. auch die

Impulse k_1, k_2, p im Endergebnis liegen auf der Massenschale. Wegen $\vec{p} = 0$ gilt wieder $E_{\vec{p}}^{(A)} = m_A$. Führen wir nun die x-Integration in (5.36) aus, erhalten wir einen Faktor $(2\pi)^4 \delta(p - k_1 - k_2)$:

$$S_{A \rightarrow B_1 B_2} = (2\pi)^4 \delta(p - k_1 - k_2) (ig) \stackrel{!}{=} (2\pi)^4 \delta(p - k_1 - k_2) (-i \mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 B_2}). \quad (5.38)$$

Wir vergleichen mit der Definition (5.13) des invarianten Matrixelements und identifizieren

$$\mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 B_2} \equiv -g. \quad (5.39)$$

Der bisherige Rechenweg lässt sich auch für Felder anderer Art, wie z.B. Proca-Felder anwenden. Dabei entstehen durch die Exponential-Funktionen, bei Integration über die Raumzeit-Koordinaten der Felder im Zeitentwicklungsoperator, immer 4-Impuls erhaltende δ -Distributionen. Man kann damit oft direkt den Wert des invarianten Matrix-Elements angeben. Dieses beinhaltet die (Kopplungs-)Konstanten, die vor dem Term in der Lagrange-Dichte stehen, der für die betrachtete Wechselwirkung sorgt. Zudem beinhaltet es jegliche Faktoren bzw. Objekte, die (ausgenommen den 4-Impuls-Erhaltung erzeugenden Exponentialfunktionen) im den Feldoperatoren vor den Erzeugungs- bzw. Vernichtungs-Operatoren stehen. Diese sind für Klein-Gordon-Felder gerade 1, für Proca-Felder dagegen $\epsilon_{\lambda, \vec{p}}^\mu$. Im Proca-Fall geht also die Polarisation der Teilchen mit ein und das invariante Matrix-Element erhält zusätzliche Indizes, die die Polarisation angeben.

6 Effektive Theorie

In diesem Kapitel wurden speziell die Quellen [D.P11], [M.W12] und [F.D12] verwendet. Wir wollen nun eine effektive Theorie in der Quantenchromodynamik (QCD) betrachten, die zur Beschreibung von Mesonen, d.h. von gebundenen Quark-Antiquark Zuständen, geeignet ist. Wir beschränken uns dabei auf 3 Quark-Flavors und betrachten speziell die Kopplung von Vektor- und Pseudoskalar- Mesonen an ein weiteres Vektor- oder Pseudoskalar-Meson. Bei der Konstruktion des Modells muss beachtet werden, dass die Symmetrien der QCD erfüllt sind. Unter Beachtung dieser Symmetrien lassen sich unter anderem Pseudoskalare- und Vektor-Mesonen über ihre zugehörigen Quark-Ströme zu Nonets zusammenfassen. Die hier verwendeten Nonets sind der Arbeit [D.P11] von D. Parganlija entnommen, sie sind wie folgt definiert:

Pseudoskalar-Nonet:

$$P_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_k i \gamma_5 q_j \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\eta_N + \pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{\eta_N - \pi^0}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \eta_S \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Vektor-Nonets:

$$V_{jk}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_k \gamma^\mu q_j \quad V^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\omega_N^\mu + \rho^{0\mu}}{\sqrt{2}} & \rho^{+\mu} & K^{*+\mu} \\ \rho^{-\mu} & \frac{\omega_N^\mu - \rho^{0\mu}}{\sqrt{2}} & K^{*0\mu} \\ K^{*-\mu} & \bar{K}^{*0\mu} & \omega_S^\mu \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

$$V_E^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\omega_{N,E^\mu} + \rho_E^{0\mu}}{\sqrt{2}} & \rho_E^{+\mu} & K_E^{*+\mu} \\ \rho_E^{-\mu} & \frac{\omega_{N,E^\mu} - \rho_E^{0\mu}}{\sqrt{2}} & K_E^{*0\mu} \\ K_E^{*-\mu} & \bar{K}_E^{*0\mu} & \omega_{S,E^\mu} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Dabei sind q_i die Quark-Spinoren, wobei q_1, q_2, q_3 den Flavors Up, Down und Strange entsprechen. V_E ist das Nonet der angeregten (Index E für "excited") Vektor-Mesonen mit den Quantenzahlen $n^{2s+1}l_J = 2^3 S_1$ und $J^{PC} = 1^{--}$. Die Felder des nicht-angeregten Vektor-Nonets haben die Quantenzahlen $n^{2s+1}l_J = 1^3 S_1$. Die Quantenzahlen der Pseudoskalar-Felder sind $n^{2s+1}l_J = 1^1 S_0$ und $J^{PC} = 0^{-+}$. Die Felder in den Nonets sind alle in [Par12] zu finden.

π^0, π^\pm sind die leichtesten QCD Anregungen, die Pionen, mit der Masse $m_{\pi^\pm} = 139.57018 \pm 0.00035$ MeV.

K sind die bekannten Kaon-Felder mit der Masse $m_{K^\pm} = 891.66 \pm 0.26$ MeV. η_N und η_S sind unphysikalische Felder, die zu den physikalischen Feldern η und $\eta'(958)$ mischen.

Weitere Zuordnungen sind:

$$\begin{aligned}
\omega_N &= \omega(782) & \omega_S &= \phi(1020) \\
\omega_{N,E} &= \omega(1420) & \omega_{S,E} &= \phi(1680) \\
K^* &= K^*(892) & \rho &= \rho(770) \\
K_E^* &= K^*(1410) & \rho_E &= \rho(1450).
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Dabei sind genau genommen auch die Vektor-Felder ω_N, ω_S unphysikalische Felder, die zu ω und ϕ mischen. Allerdings ist die Mischung klein und wird daher in dieser Arbeit vernachlässigt.

6.1 Symmetrien

Die in der QCD enthaltenen fundamentalen Symmetrien sind die Lorentz- und die $SU(3)_{Farbe}$ -Symmetrie. Erstere muss in jeder fundamentalen Theorie enthalten sein, d.h. die Lagrangedichte der Theorie muss invariant unter Lorentz-Transformationen, also ein Lorentz-Skalar, sein. Die starke Wechselwirkung bzw. QCD lässt sich ausgehend von der Dirac-Lagrangedichte durch anwenden des Eichprinzips, d.h. Erweiterung der globalen auf lokale $SU(N)$ -Symmetrie, konstruieren. Dies ist gerade die $SU(3)_{Farbe}$ -Symmetrie der QCD. Die zugehörigen Eichbosonen heißen Gluonen, experimentelle Ergebnisse haben gezeigt das Quarks und Gluonen gerade 3 unterschiedliche Farbladungen tragen können. Da wir hier lediglich Mesonen, d.h. Farbneutrale Zustände (Farbe und Anti-Farbe) betrachten ist diese Symmetrie automatisch in der effektiven Theorie enthalten.

Wir geben nun zunächst die Lagrange-Dichte der Theorie an und zeigen dann im weiteren Verlauf, dass die Symmetrien der QCD erfüllt sind.

Der Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte des Modells lautet:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \tag{6.5}$$

$$\mathcal{L}_1 = ia \operatorname{Tr} \left[[\partial^\mu P, (V_E)_\mu] P \right] \tag{6.6}$$

$$\mathcal{L}_2 = b \operatorname{Tr} \left[\widetilde{V}_E^{\mu\nu} \{V_{\mu\nu}, P\} \right] = 2b \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{Tr} \left[(\partial_\alpha (V_E)_\beta) \{ (\partial_\mu V_\nu), P \} \right]. \tag{6.7}$$

Mit den Feldstärke-Tensoren der Vektor-Mesonen:

$$V^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu, \tag{6.8}$$

$$\widetilde{V}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} V_{\alpha\beta}. \tag{6.9}$$

Es sei angemerkt, dass Mischungsterme, die aufgrund unterschiedlicher Quark-Massen erforderlich sind, hier weggelassen wurden und im weiteren nicht betrachtet werden sollen.

6.1.1 Lorentz Symmetrie

Um das Transformationsverhalten der Nonets unter Lorentz-Transformationen (LT) zu überprüfen, muss zunächst das Transformations-Verhalten der Quark-Spinoren bekannt sein. Dieses lässt sich durch Forderung von Lorentz-Invarianz der Dirac-Gleichung finden. Man findet die im Spinor-Raum wirkende Transformation

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) \quad (6.10)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

wobei $\omega^{\mu\nu}$ die Parameter der Transformation enthält. Die Quark-Felder transformieren sich damit wie

$$q \xrightarrow{\text{LT}} S(\Lambda) q \quad \bar{q} \xrightarrow{\text{LT}} \bar{q} S^{-1}(\Lambda). \quad (6.11)$$

Damit lässt sich das Transformationsverhalten der Pseudoskalar-Mesonen untersuchen:

$$P_{jk} \xrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{q}_k S^{-1}(\Lambda) i\gamma_5 S(\Lambda) q_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{q}_k i\gamma_5 q_j = P_{jk}, \quad (6.12)$$

wobei benutzt wurde, dass aufgrund von (6.10) bei Vertauschen von S und γ_5 zwei Minuszeichen entstehen, da γ_μ und γ_5 antikommutieren. Es handelt sich also bei den definierten Pseudoskalar-Mesonen tatsächlich um Lorentz-Skalare.

Das Transformationsverhalten der Vektor-Mesonen ist

$$V_{jk}^\mu \xrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{q}_k S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) q_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda^\mu{}_\nu \bar{q}_k \gamma^\nu q_j = \Lambda^\mu{}_\nu V_{jk}^\nu, \quad (6.13)$$

wobei die Relation $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ benutzt wurde, die aus der Forderung der Invarianz der Dirac-Gleichung unter Lorentz-Transformation folgt. Die definierten Vektor-Mesonen transformieren sich somit wie erwartet wie 4-Vektoren unter Lorentz-Transformationen.

Es bleibt noch zu zeigen dass die Lagrangedichte des Modells (6.5) wie ein Lorentz-Skalar transformiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\xrightarrow{\text{LT}} ia \text{Tr} \left[[\partial'^\mu P', V_{E\mu}'] P' \right] + 2b \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left[(\partial'_\alpha V_{E\beta}') \{ (\partial'_\mu V'_\nu), P' \} \right] \\ &= ia \text{Tr} \left[[\Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu P, (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu V_{E\rho}] P \right] + 2b \epsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} \Lambda^\alpha{}_{\alpha'} \Lambda^\beta{}_{\beta'} \\ &\quad \text{Tr} \left[\left((\Lambda^{-1})^\rho{}_\alpha \partial_\rho (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\beta V_{E\sigma} \right) \left\{ \left((\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu \partial_\lambda (\Lambda^{-1})^\eta{}_\nu V_\eta \right), P \right\} \right] \\ &= ia \Lambda^\mu{}_\nu (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \text{Tr} \left[[\partial^\nu P, V_{E\rho}] P \right] + 2b \epsilon^{\lambda\eta\rho\sigma} \text{Tr} \left[(\partial_\rho V_{E\sigma}) \{ (\partial_\lambda V_\eta), P \} \right] \\ &= ia \text{Tr} \left[[\partial^\mu P, V_{E\mu}] P \right] + \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

6.1.2 Parität

Nach dem sogenannten CPT-Theorem ist die Lagrangedichte der QCD invariant unter CPT-Transformation. Dabei sind C, P und T die diskreten Transformationen Ladungskonjugation C, welche Materie und Antimaterie vertauscht; Paritätstransformation P bzw. Raumspiegelung $x \rightarrow -x$; und Zeitumkehr T $t \rightarrow -t$.

Unter Raumspiegelungen bzw. Paritätstransformationen P im Spinor-Raum gilt für die Quark-Felder

$$q(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} q'(t, \vec{x}) = \gamma^0 q(t, -\vec{x}) \quad \bar{q}(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \bar{q}'(t, \vec{x}) = \bar{q}(t, -\vec{x}) \gamma^0. \quad (6.15)$$

Für Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \partial^0 &\xrightarrow{P} \partial^0 \\ \partial^i &\xrightarrow{P} -\partial^i. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Damit gilt für die Pseudosklare

$$P_{jk}(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_k \gamma^0 i \gamma_5 \gamma^0 q_j = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_k i \gamma_5 q_j = -P_{jk}(t, -\vec{x}). \quad (6.17)$$

da γ^μ und γ_5 antivertauschen und $\gamma^0 \gamma^0 = 1$. Es findet ein Vorzeichenwechsel statt, daher die Bezeichnung 'Pseudo'.

Für Vektoren gilt

$$V_{jk}^\mu \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_k \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 q_j. \quad (6.18)$$

Wegen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ ist also

$$\begin{aligned} V_{jk}^0(t, \vec{x}) &\xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_k \gamma^0 q_j = V_{jk}^0(t, -\vec{x}), \\ V_{jk}^i(t, \vec{x}) &\xrightarrow{P} -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_k \gamma^i q_j = -V_{jk}^i(t, -\vec{x}). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Wir lassen im Folgenden die Argumente t, \vec{x} weg. Damit ist \mathcal{L}_1 invariant unter Paritätstransformationen, denn

$$\mathcal{L}_1 \xrightarrow{P} ia \operatorname{Tr} \left[\left([\partial^0(-P), (V_E)_0] + [(-\partial^i)(-P), (-(V_E)_i)] \right) (-P) \right] = \mathcal{L}_1. \quad (6.20)$$

Um das Transformationsverhalten von \mathcal{L}_2 zu untersuchen, betrachten wir zunächst das Transformationsverhalten der Feldstärketensoren (6.8) und (6.9):

$$\begin{aligned} V_{0i} &= -V_{i0} \xrightarrow{P} \partial_0(-V_i) - (-\partial_i)V_0 = V_{i0} = -V_{0i}, \\ V_{ij} &\xrightarrow{P} (-\partial_i)(-V_j) - (-\partial_j)(-V_i) = V_{ij}, \\ \tilde{V}^{i0} &= -\tilde{V}^{0i} = \frac{1}{2} \epsilon^{i0jk} V_{jk} \xrightarrow{P} \frac{1}{2} \epsilon^{i0jk} V_{jk} = \tilde{V}^{i0} = -\tilde{V}^{0i}, \\ \tilde{V}^{ij} &= 2 \epsilon^{ij0k} V_{0k} \xrightarrow{P} 2 \epsilon^{ij0k} (-V_{0k}) = -\tilde{V}^{ij}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Bei gleichen Indizes $\mu\nu$ tritt bei Paritätstransformation beim dualen Feldstärketensor $\widetilde{V}^{\mu\nu}$ immer umgekehrtes Vorzeichen auf wie bei $V_{\mu\nu}$. Die Kombination aus Feldstärketensor und dualen Feldstärketensor in \mathcal{L}_2 erhält bei Paritätstransformation also immer ein zusätzliches Minuszeichen. Somit gilt für \mathcal{L}_2 unter Paritätstransformation:

$$\mathcal{L}_2 \xrightarrow{P} -b \operatorname{Tr} \left[\widetilde{V}_E^{\mu\nu} \{V_{\mu\nu}, (-P)\} \right] = \mathcal{L}_2. \quad (6.22)$$

Damit ist die Lagrangedichte des Modells 6.5 auch unter Paritätstransformationen invariant.

6.1.3 Ladungskonjugation

Für das Transformationsverhalten der Quark-Felder unter Ladungskonjugation C im Spinor-Raum gilt

$$q \xrightarrow{C} C \bar{q}^T = -i \gamma^0 \gamma^2 \bar{q}^T \quad \bar{q} \xrightarrow{C} q^T C = -i q^T \gamma^0 \gamma^2. \quad (6.23)$$

Für Pseudoskalare gilt damit

$$\begin{aligned} P_{jk} &\xrightarrow{C} \frac{1}{\sqrt{2}} q_k^T C i \gamma_5 C \bar{q}_j^T = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_k^T i \gamma^0 \gamma^2 \gamma_5 \gamma^0 \gamma^2 \bar{q}_j^T = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_k^T i \gamma_5 \bar{q}_j^T \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} q_k^T i \gamma_5^T \bar{q}_j^T \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j i \gamma_5 q_k)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i \gamma_5 q_k = P_{kj}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

wobei die Relationen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ und $\gamma_5^T = \gamma_5$ benutzt wurden. Folgerungen aus ersterer sind $\gamma^0 \gamma^0 = 1$ und $\gamma^2 \gamma^2 = -1$. Das Transponieren bezieht sich immer auf die Spinor-Indizes, die Quark-Felder enthalten jedoch zusätzlich noch Erzeugungs- und Vernichtungs- Operatoren. Durch das Zusammenfassen des Transponierens im Schritt (*) vertauschen nur die Spinor-Anteile, die Operatoren müssen zusätzlich vertauscht werden, damit man die Quark-Felder insgesamt vertauschen kann. Der Vorzeichenwechsel im Schritt (*) entsteht also, da die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren antivertauschen. Im vorletzten Schritt wurde noch das Transponieren weggelassen, da in den runden Klammern die Spinor-Indizes vollständig kontrahiert sind und damit nur eine Zahl übrig bleibt. Für das Pseudoskalar-Nonet gilt damit $P \xrightarrow{C} P^T$.

Für das Vektor-Nonet gilt

$$V_{jk}^\mu \xrightarrow{C} \frac{1}{\sqrt{2}} q_k^T C \gamma^\mu C \bar{q}_j^T. \quad (6.25)$$

Wir betrachten den Ausdruck $C \gamma^\mu C$ getrennt für $\mu = 0$, $\mu = 2$ und $\mu = 1, 3$:

$$\begin{aligned} (-i \gamma^0 \gamma^2) \gamma^0 (-i \gamma^0 \gamma^2) &= -\gamma^0 \gamma^2 \gamma^2 = \gamma^0 = (\gamma^0)^T, \\ (-i \gamma^0 \gamma^2) \gamma^2 (-i \gamma^0 \gamma^2) &= \gamma^2 = (\gamma^2)^T, \\ (-i \gamma^0 \gamma^2) \gamma^{1,3} (-i \gamma^0 \gamma^2) &= -\gamma^{1,3} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 = -\gamma^{1,3} = (\gamma^{1,3})^T, \end{aligned} \quad (6.26)$$

wobei der jeweils letzte Schritt an der expliziten Dirac-Darstellung von γ^μ zu erkennen ist. Damit gilt $C\gamma^\mu C = (\gamma^\mu)^T$ und damit

$$V_{jk}^\mu \xrightarrow{C} \frac{1}{\sqrt{2}} q_k^T (\gamma^\mu)^T \bar{q}_j^T = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_k = -V_{kj}^\mu. \quad (6.27)$$

Oder $V^\mu \xrightarrow{C} -(V^\mu)^T$ für das Vektor-Nonet.

Damit ist die Lagrangedichte (6.5) auch unter Ladungskonjugation C invariant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\xrightarrow{C} ia \operatorname{Tr} \left[[\partial^\mu P^T, -V_{E\mu}^T] P^T \right] + 2b \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{Tr} \left[-(\partial_\alpha V_{E\beta})^T \{ -(\partial_\mu V_\nu)^T, P^T \} \right] \\ &= ia \operatorname{Tr} \left[[\partial^\mu P, V_{E\mu}]^T P^T \right] + 2b \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{Tr} \left[(\partial_\alpha V_{E\beta})^T \{ (\partial_\mu V_\nu), P \}^T \right] \\ &= ia \operatorname{Tr} \left[[\partial^\mu P, V_{E\mu}] P \right] + 2b \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{Tr} \left[(\partial_\alpha V_{E\beta}) \{ (\partial_\mu V_\nu), P \} \right] = \mathcal{L} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Dabei bewirkt im ersten Schritt das Herausziehen des Transponierens aus dem Kommutator ein Vorzeichenwechsel. Im zweiten Schritt wurde benutzt, dass unter der Spur das Transponieren weggelassen werden kann, und zyklisch vertauscht werden darf.

6.1.4 Chirale und Flavor-Symmetrie

Eine weitere Symmetrie des Modells ist die sogenannte chirale Symmetrie. In diesem Abschnitt haben wir uns insbesondere an [D.P11] und [M.W12] orientiert. Für verschwindende Quark-Massen wäre die chirale Symmetrie eine exakte Symmetrie der QCD, sie äussert sich in der Einkopplung der sogenannten rechts- und links-händigen Anteile der Quark-Felder. Man erkennt dies mithilfe der Operatoren

$$\mathcal{P}_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad \mathcal{P}_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}. \quad (6.29)$$

Diese erfüllen die Relationen

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{R,L}^2 &= \mathcal{P}_{R,L}, \\ \mathcal{P}_R \mathcal{P}_L &= \mathcal{P}_L \mathcal{P}_R = 0, \\ \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L &= 1, \end{aligned} \quad (6.30)$$

und sind damit Projektionsoperatoren auf die rechts- bzw. links-händigen Unterräume. Spaltet man die Quark-Felder in rechts- und links-händige Anteile auf:

$$q = (\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L)q = q_R + q_L, \quad (6.31)$$

so nimmt die Dirac-Lagrangedichte die Form

$$\mathcal{L}_D = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q)q = \bar{q}_L i\gamma^\mu \partial_\mu q_L + \bar{q}_R i\gamma^\mu \partial_\mu q_R - \bar{q}_L m_q q_R - \bar{q}_R m_q q_L \quad (6.32)$$

an. Für $m_q = 0$ ist damit die QCD-Lagrangedichte (Summe der Flavors $q = u, d, s, \dots$ und $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$) symmetrisch unter $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ Transformationen im Flavor-Raum, wobei N_f die Anzahl der Flavors im Modell ist. Diese Symmetrie nennt man

chirale Symmetrie. Die zugehörigen erhaltenen rechts- bzw. links-händigen Ströme haben indefinite Parität, weswegen man zu der zu $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ isomorphen Gruppe $U(N_f)_V \times U(N_f)_A$, der Vektor- und Axialvektor-Transformationen übergeht, deren erhaltene Ströme definite Parität haben. Weiterhin lassen sich die $U(N_f)$ -Anteile aufspalten in $U(N_f) = U(1) \times SU(N_f)$. Die $U(1)_V$ -Symmetrie sorgt für die Erhaltung der Ladung bzw. Netto-Quark-Zahl.

Die $SU(N_f)_A$ -Symmetrie ist nur für verschwindende Quark-Massen erfüllt. Für $N_f = 2$ ist sie approximativ erfüllt. Allerdings tritt bei kleinen Temperaturen spontane Symmetriebrechung der $SU(N_f)_A$ Symmetrie auf, welche nach dem Goldstone-Theorem das Auftreten der 3 approximativen Goldstone-Bosonen π^0, π^+, π^- erklärt [M.W12].

Die $U(1)_A$ -Symmetrie ist ebenfalls für verschwindende Quark-Massen erfüllt, allerdings ist sie auf Quantenebene durch die sogenannte chirale Anomalie gebrochen gebrochen. Dies führt zu den großen Massenunterschieden zwischen den η - und η' -Mesonen [M.W12] und der nicht-vernachlässigbaren Mischung der in unserem Modell enthaltenen unphysikalischen Felder η_N und η_S .

Nach spontaner Symmetriebrechung bleibt (bis auf $U(1)_V$) nur die $SU(N_f)_V$ -Symmetrie übrig, sie ist nur erfüllt, wenn alle Quark-Massen identisch sind. Dies ist die Flavor-Symmetrie der QCD, sie sorgt für die ähnlichen Massen innerhalb der Flavor-Multipletts. Für $N_f = 2$ (u und d) ist diese Symmetrie identisch zur Isospin-Symmetrie. In unserem Modell ist diese Symmetrie relativ gut erfüllt, da die Massenunterschiede der für $N_f = 3$ (u,d und s) enthaltenen Quarks im Vergleich zur hadronischen Massenskala ($\approx 1\text{GeV}$) sehr klein sind. In der Lagrangedichte unseres Modells (6.5) ist diese Symmetrie sogar exakt erfüllt, da die für die Brechung verantwortlichen Mischungsterme nicht enthalten sind. Die zugehörigen $SU(3)_V$ Transformationen lauten:

$$P \rightarrow UPU^\dagger, \quad V^\mu \rightarrow UV^\mu U^\dagger, \quad (6.33)$$

mit den $SU(3)$ Gruppenelementen U . Daraus folgt sofort auch

$$V^{\mu\nu} \rightarrow UV^{\mu\nu}U^\dagger. \quad (6.34)$$

Man sieht schnell die Symmetrie der Lagrangedichte unseres Modells:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &\rightarrow ia \text{Tr} \left[\left[\partial^\mu UPU^\dagger, U(V_E)_\mu U^\dagger \right] UPU^\dagger \right] = ia \text{Tr} \left[U \left[\partial^\mu P, (V_E)_\mu \right] U^\dagger UPU^\dagger \right] = \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}_2 &\rightarrow b \text{Tr} \left[U \widetilde{V}_E^{\mu\nu} U^\dagger \{ UV_{\mu\nu} U^\dagger, UPU^\dagger \} \right] = b \text{Tr} \left[U \widetilde{V}_E^{\mu\nu} U^\dagger U \{ V_{\mu\nu}, P \} U^\dagger \right] = \mathcal{L}_2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

6.2 Zerfallsbreiten

Es steht nun noch aus die Kopplungskonstanten der Theorie zu bestimmen um schließlich Vorhersagen bzw. Vergleiche weiterer Resultate des Modells mit experimentellen Daten machen zu können. Auch für die Bestimmung der Kopplungskonstanten benötigen wir den Ausdruck für die Zerfallsbreiten der in der Theorie enthaltenen Zerfallskanäle. Wir können diese dann an experimentell gut bestimmten Werten fixieren.

6.2.1 Berechnung der Zerfallsbreite $\Gamma_{V_E \rightarrow PP}$

Wir betrachten zunächst die Kopplung zweier Pseudoskalar-Mesonen an ein Vektor-Meson. Wir können auf analogem Weg wie in Abschnitt 5.5 direkt das invariante Matrixelement an \mathcal{L}_1 ablesen. Wie wir gesehen haben tragen skalare Felder nur einen Faktor 1 bei. Das Vektor-Feld dagegen trägt mit einem Faktor $\epsilon_{\lambda, \vec{p}}^\mu$ bei, wobei λ die Polarisationsrichtung und \vec{p} der Impuls des angeregten Vektor-Mesons ist. Weiter seien die Impulse der 2 Pseudoskalar-Mesonen k_1 und k_2 . Außerdem ist noch die Ableitung $\partial^\mu P$ in \mathcal{L}_1 zu beachten, diese wirkt auf den Exponential-Faktor in der freien Lösung des Klein-Gordon-Feldes und kann damit bis auf Faktoren vom Betrag 1 durch den Impuls k^μ auf der Massenschale ersetzt werden.

Das invariante Matrixelement in erster Ordnung lautet damit

$$|\mathcal{M}_\lambda| = \left| a (k_1)_\mu \epsilon_{\lambda, \vec{p}}^\mu \right|. \quad (6.36)$$

Die Zerfallsbreite ist dann durch den Ausdruck (5.18) gegeben. Allerdings ist an dieser Stelle keine Polarisation λ durch ein Experiment vorgegeben. Um dennoch ein sinnvolles Ergebnis zu erhalten, mitteln wir über die Polarisation. Dies ist in Einklang mit Experimenten die keine Polarisationsrichtung gesondert behandeln, da dann sämtliche Einstellungen identische Beiträge liefern. Da es 3 Einstellmöglichkeiten für die Polarisation gibt, gilt es also den folgenden Ausdruck zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{3} \sum_\lambda |\mathcal{M}_\lambda|^2 = \frac{a^2}{3} (k_1)_\mu (k_1)_\nu \sum_\lambda \epsilon_{\lambda, \vec{p}}^\mu \epsilon_{\lambda, \vec{p}}^\nu \\ &= \frac{a^2}{3} (k_1)_\mu (k_1)_\nu \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m_V^2} \right) \\ &= \frac{a^2}{3} \left(\frac{(k_1^\mu p_\mu)^2}{m_V^2} - m_1^2 \right) \end{aligned} \quad (6.37)$$

Dabei sind m_V die Masse des angeregten Vektor-Mesons und m_1, m_2 die Massen der Pseudoskalar-Mesonen mit Impuls k_1, k_2 , wobei die Pseudoskalar-Mesonen immer auslaufende Teilchen sein sollen. Wegen 4-Impuls-Erhaltung gilt außerdem

$$m_2^2 = (k_2)_\mu k_2^\mu = (p^\mu - k_1^\mu)(p_\mu - (k_1)_\mu) = m_V^2 + m_1^2 - 2k_1^\mu p_\mu. \quad (6.38)$$

Um den ersten Term umzuschreiben lösen wir auf:

$$k_1^\mu p_\mu = \frac{m_V^2 + m_1^2 - m_2^2}{2}. \quad (6.39)$$

Wir fassen zusammen und erhalten für das invariante Matrixelement:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{a^2}{12} \left(m_V^2 - 2(m_1^2 + m_2^2) + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{m_V^2} \right). \quad (6.40)$$

Einsetzen in die Zerfallsbreite (5.18) mit dem Impuls k_F aus (5.19) liefert für den Zerfall eines angeregten Vektor- in zwei Pseudoskalar-Mesonen:

$$\Gamma_{V_E \rightarrow P_1 P_2} = \frac{a^2}{192 \pi m_V^2} \left(m_V^2 - 2(m_1^2 + m_2^2) + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{m_V^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (6.41)$$

6.2.2 Berechnung der Zerfallsbreite $\Gamma_{V_E \rightarrow VP}$

Für die Kopplung zweier Vektor-Mesonen an ein Pseudoskalar-Meson lesen wir das invariante Matrixelement erster Ordnung an \mathcal{L}_2 ab.

$$|\mathcal{M}_{\lambda\sigma}| = \left| b \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha (\epsilon_{\lambda,\vec{p}})_\beta q_\mu (\epsilon_{\sigma,\vec{q}})_\nu \right| \quad (6.42)$$

Dabei besitze das einlaufende angeregte Vektormeson die Masse m_{V_E} und den Impuls p , und das auslaufende Vektormeson die Masse m_V und den Impuls q . Den Faktor 2 aus \mathcal{L}_2 haben wir vorest weggelassen. Wir mitteln wie im vorigen Abschnitt über die Polarisierungseinstellungen:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{3} \sum_{\lambda,\sigma} |\mathcal{M}_{\lambda\sigma}|^2 \\ &= \frac{b^2}{3} \sum_{\lambda,\sigma} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\rho\eta\gamma\delta} p_\alpha q_\mu p_\gamma q_\rho (\epsilon_{\lambda,\vec{p}})_\beta (\epsilon_{\lambda,\vec{p}})_\delta (\epsilon_{\sigma,\vec{q}})_\eta (\epsilon_{\sigma,\vec{q}})_\nu \\ &= \frac{b^2}{3} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\rho\eta\gamma\delta} p_\alpha p_\gamma q_\mu q_\rho \left(-\eta_{\beta\delta} + \frac{p_\beta p_\delta}{m_{V_E}^2} \right) \left(-\eta_{\eta\nu} + \frac{q_\eta q_\nu}{m_V^2} \right) \\ &= \frac{b^2}{3} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\rho\eta\gamma\delta} p_\alpha p_\gamma q_\mu q_\rho \left(\eta_{\beta\delta} \eta_{\eta\nu} - \eta_{\beta\delta} \frac{q_\eta q_\nu}{m_V^2} - \eta_{\eta\nu} \frac{p_\beta p_\delta}{m_{V_E}^2} - \frac{p_\beta p_\delta q_\eta q_\nu}{m_V^2 m_{V_E}^2} \right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Die Terme in der runden Klammer enthalten, multipliziert mit den vollständig antisymmetrischen ϵ -Tensoren, bis auf den ersten Term, alle einen antisymmetrischen und symmetrischen Anteil mit gleichen Indizes. z.B. ist im zweiten Term der ϵ -Tensor antisymmetrisch unter der Vertauschung $\mu \leftrightarrow \nu$, gleichzeitig sind die Faktoren q_μ und q_ν enthalten, welche symmetrisch unter dieser Vertauschung sind. Führt man die Summe über diese Indizes aus, so verschwindet also dieser Beitrag. Damit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{b^2}{3} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^\rho{}_\nu{}^\gamma{}_\beta p_\alpha p_\gamma q_\mu q_\rho. \quad (6.44)$$

Wir betrachten das Produkt der ϵ -Tensoren:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^\rho{}_\nu{}^\gamma{}_\beta &= \eta^{\rho\sigma} \eta^{\gamma\delta} \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \epsilon_{\sigma\delta\nu\beta} = -\eta^{\rho\sigma} \eta^{\gamma\delta} \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \epsilon^{\sigma\delta\nu\beta} \\ &= -2\eta^{\rho\sigma} \eta^{\gamma\delta} (\eta_\sigma^\mu \eta_\delta^\alpha - \eta_\delta^\mu \eta_\sigma^\alpha) = 2(\eta^{\rho\alpha} \eta^{\gamma\mu} - \eta^{\rho\mu} \eta^{\gamma\alpha}). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Dabei wurde im zweiten Schritt verwendet, dass die Einträge des ϵ -Tensors nur verschieden von 0 sind, wenn alle Indizes unterschiedlich sind, d.h. beim Hochziehen aller Indizes

entsteht insgesamt ein Minuszeichen, da genau 3 räumliche Indizes vorhanden sind. Im dritten Schritt wurde die Summe explizit ausgeführt. Für $\mu = \sigma, \alpha = \delta$ haben beide Faktoren die gleichen Indizes, es findet kein Vorzeichenwechsel statt. Für die Summe über ν, β bleiben nur 2 Indizes, d.h. es tragen $2 \cdot 1 = 2$ Terme bei. Für $\mu = \delta, \alpha = \sigma$ sind zwei der Indizes in einem der Faktoren vertauscht, was ein extra Minuszeichen liefert. Einsetzen in (6.44) liefert

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{2b^2}{3} \left((p^\mu q_\mu)^2 - p^\mu p_\mu q^\nu q_\nu \right). \quad (6.46)$$

Mit 4-Impulserhaltung folgt wie im vorigen Abschnitt

$$p^\mu q_\mu = \frac{m_{V_E}^2 + m_V^2 - m_P^2}{2}. \quad (6.47)$$

wobei m_P die Masse des Pseudoskalar-Mesons ist. Einsetzen und Umformen liefert

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{b^2}{6} m_{V_E}^2 \left(m_{V_E}^2 - 2(m_V^2 + m_P^2) + \frac{(m_V^2 - m_P^2)^2}{m_{V_E}^2} \right). \quad (6.48)$$

Schließlich lautet die Zerfallsbreite (5.18)

$$\Gamma_{V_E \rightarrow VP} = \frac{b^2}{96\pi} \left(m_{V_E}^2 - 2(m_V^2 + m_P^2) + \frac{(m_V^2 - m_P^2)^2}{m_{V_E}^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (6.49)$$

wobei der Faktor 2 in (6.5) nicht mitgenommen wurde. Beim Expandieren der Lagrangendichte in die einzelnen Wechselwirkungsterme und der Berechnung der Zerfallsbreiten ersetzen wir also b (nicht $2b$) durch sämtliche Vorfaktoren vor diesen Termen.

6.3 Kopplung an Photonen

Mit dem konstruierten Modell (6.5) lassen sich mit einer Modifikation auch Kopplungen an Photonen untersuchen, speziell die Kopplung von Vektor-Meson an Photon und Pseudoskalar-Meson für den Zerfall $V_E \rightarrow \gamma P$. Dies lässt sich im Wesentlichen durch die Ersetzung des Vektor-Nonets durch einen zum Photon-Feld proportionalen Anteil erzielen. Da das Photon-Feld ebenfalls Parität und Ladungskonjugation $P = -, C = -$ besitzt, sind die bisherigen Symmetriebetrachtungen auch für diesen Fall gültig und unser Modell muss nicht weiter modifiziert werden. In [FG14] wurde gezeigt, dass die notwendige Ersetzung

$$V_{\mu\nu} \rightarrow V_{\mu\nu} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{g_\rho} Q F_{\mu\nu}. \quad (6.50)$$

lautet. Die schon betrachtete Kopplung $V_E \rightarrow VP$ wird reproduziert, und wir erhalten lediglich eine modifizierte Kopplungskonstante für die Kopplung an Photonen. Dabei ist $\alpha \approx 1/137$ die Feinstrukturkonstante, $g_\rho = 6.1$ eine durch den Zerfall des ρ -Mesons fixierte Konstante und Q die Matrix, die die Ladungen der Quarks enthält:

$$Q = \text{diag} \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right). \quad (6.51)$$

Bei der Bestimmung der Zerfallsbreite für $V_E \rightarrow \gamma P$ summieren wir wie im Abschnitt 6.2.2 über die Polarisationsrichtungen des ausgehenden Photons, wobei die Polarisationsvektoren eine andere Vollständigkeitsrelation erfüllen wie die der Vektor-Felder. In [MD95, S. 159-160] wurde gezeigt, dass wir die Ersetzung

$$\sum_{\lambda} (\epsilon_{\lambda, \vec{p}}^*)_{\mu} (\epsilon_{\lambda, \vec{p}})_{\nu} \rightarrow -\eta_{\mu\nu} \quad (6.52)$$

vornehmen können. Wir erhalten auf analogem Wege wie in Abschnitt 6.2.2 für das invariante Matricelement:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{c^2}{3} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\rho\eta\gamma\delta} p_{\alpha} p_{\gamma} q_{\mu} q_{\rho} \left(\eta_{\beta\delta} \eta_{\eta\nu} - \eta_{\eta\nu} \frac{p_{\beta} p_{\delta}}{m_{V_E}^2} \right). \quad (6.53)$$

Der zweite Term fällt erneut wegen Symmetrie und Antisymmetrie heraus, sodass das invariante Matricelement für den Zerfall $V_E \rightarrow \gamma P$ den selben Ausdruck wie für den Zerfall $V_E \rightarrow VP$ liefert. In der Konstanten c sind dabei die Kopplungskonstante b und die modifizierenden Faktoren auf Grund der Ersetzung (6.50) enthalten. Wir setzen außerdem $m_{\gamma} = 0$ ein, und erhalten

$$\Gamma_{V_E \rightarrow \gamma P} = \frac{c^2}{96 \pi} \left(m_{V_E}^2 - 2m_P^2 + \frac{m_P^4}{m_{V_E}^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (6.54)$$

6.4 Fixierung der Kopplungskonstanten

Wir haben nun unser Modell auf die Symmetrien der QCD überprüft und die Ausdrücke für die Zerfallsbreiten der im Modell enthaltenen Zerfälle berechnet. Es bleibt offen die Kopplungskonstanten a und b zu bestimmen und anschließend zu überprüfen, ob sich für weitere Zerfallsbreiten Werte berechnen lassen, die mit Experimenten übereinstimmen. Zur Bestimmung der Kopplungskonstanten verwenden wir experimentell möglichst gut bestimmte Zerfallsbreiten.

6.4.1 Bestimmung der Kopplungskonstanten für den Zerfall $V_E \rightarrow VP$

In den experimentellen Daten der Particle Data Group [Par12] findet man für für das Vektor-Meson $\Phi(1680)$ einen einzigen dominanten Zerfallskanal $\Phi(1680) \rightarrow K\bar{K}^*(892) + \text{c.c.}$. Wir nehmen daher an, dass die Zerfallsbreite für diesen Zerfall der totalen Zerfallsbreite von $\Phi(1680)$ entspricht. Diese hat den Wert

$$\Gamma_{\Phi(1680)}^{\text{tot,exp}} = 150 \pm 50 \text{ MeV}. \quad (6.55)$$

Die Massen der relevanten Mesonen sind:

$$\begin{aligned} m_{\Phi(1680)} &= 1680 \pm 20 \text{ MeV}, \\ m_{K^0} &= 493.677 \pm 0.013 \text{ MeV}, \\ m_{K^{\pm}} &= 497.614 \pm 0.022 \text{ MeV}, \\ m_{K^*} &= 891.66 \pm 0.26 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

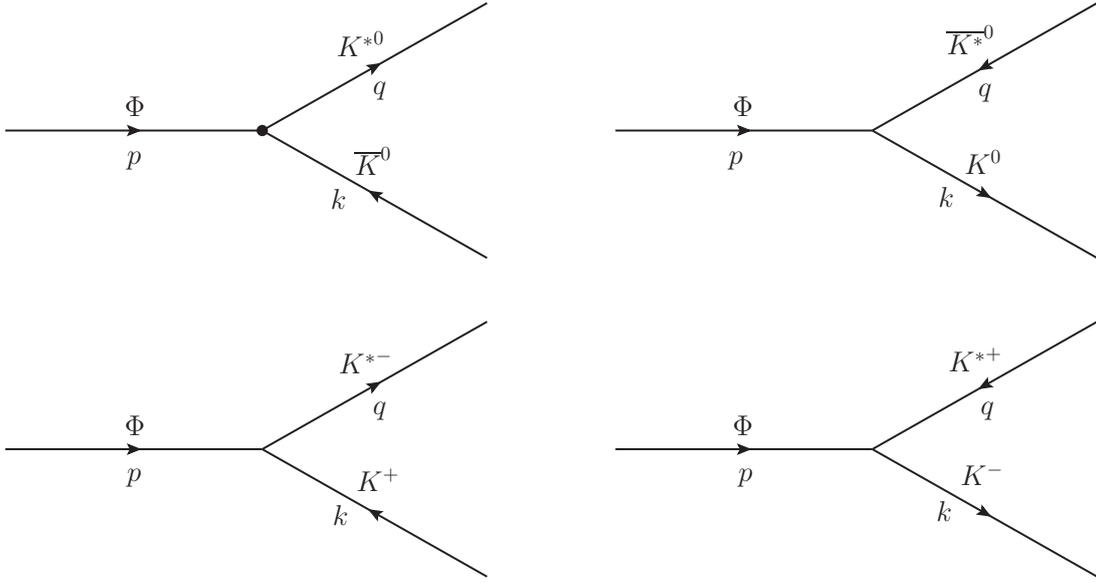


Abbildung 2: Feynman-Diagramme erster Ordnung für den Zerfall $\Phi(1680) \rightarrow K\bar{K}^*(892) + \text{c.c.}$

Wir können das unphysikalische Feld ω_S des Vektor-Meson-Nonets unseres Modells mit dem physikalischen Feld $\Phi(1680)$ identifizieren. Dabei vernachlässigen wir Mischungseffekte zwischen ω_S und ω_N zu Φ und ω aufgrund der chiralen Symmetriebrechung. Der Mischungswinkel dieser Felder ist allerdings vernachlässigbar klein, was unsere Identifikation gerechtfertigt. Wir expandieren \mathcal{L}_2 aus (6.5), die Terme die zur Zerfallsbreite für den Zerfall $\Phi(1680) \rightarrow K\bar{K}^*(892) + \text{c.c.}$ beitragen lauten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Phi \rightarrow K\bar{K}^* + \text{c.c.}} = \frac{b}{\sqrt{2}} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\alpha \Phi_\beta) & \left((\partial_\mu K_\nu^{*0}) \bar{K}^0 + (\partial_\mu \bar{K}_\nu^{*0}) K^0 \right. \\ & \left. + (\partial_\mu K_\nu^{*-}) K^+ + (\partial_\mu K_\nu^{*+}) K^- \right). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Wir müssen also zur Berechnung der Zerfallsbreite in erster Ordnung die Beiträge der 4 Diagramme in Abb. 2 summieren. Wir beachten, dass wir bei der Berechnung der Zerfallsbreite (6.49) für den Vorfaktor der Terme in \mathcal{L}_2 nur die Konstante b beachtet haben; somit nehmen wir die Ersetzung $b \rightarrow \frac{b}{\sqrt{2}}$ vor und setzen die Massen ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Phi \rightarrow K\bar{K}^* + \text{c.c.}} &= b^2 \left[2 \cdot (1.31 \pm 0.16) + 2 \cdot (1.28 \pm 0.16) \right] 10^6 \cdot \text{MeV}^3 \\ &= (5.18 \pm 0.64) \cdot 10^6 \cdot b^2 \text{MeV}^3 \stackrel{!}{=} \Gamma_{\Phi(1680)}^{\text{tot,exp}} = 150 \pm 50 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Damit erhalten wir die Kopplungskonstante

$$b = (5.38 \pm 0.96) \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{MeV}}. \quad (6.59)$$

6.4.2 Bestimmung der Kopplungskonstanten für den Zerfall $V_E \rightarrow PP$

Für diese Kopplung ist die Zerfallsbreite für den Zerfall $K^*(1410) \rightarrow K\pi$ gut bekannt, für das Verhältnis zur totalen Zerfallsbreite $\Gamma_{K^*(1410)}^{\text{tot}}$ findet man

$$\frac{\Gamma_{K^*(1410) \rightarrow K\pi}^{\text{exp}}}{\Gamma_{K^*(1410)}^{\text{tot,exp}}} = 6.6 \pm 1.3 \%. \quad (6.60)$$

Für die totale Zerfallsbreite findet man

$$\Gamma_{K^*(1410)}^{\text{tot,exp}} = 232 \pm 21 \text{ MeV}. \quad (6.61)$$

Damit ist die Zerfallsbreite für $K^*(1410) \rightarrow K\pi$:

$$\Gamma_{K^*(1410) \rightarrow K\pi}^{\text{exp}} = 15.3 \pm 4.4 \text{ MeV}. \quad (6.62)$$

Die Massen der beteiligten Mesonen sind [Par12]:

$$\begin{aligned} m_{K^*(1410)} &= 1414 \pm 15 \text{ MeV}, \\ m_{K^0} &= 493.677 \pm 0.013 \text{ MeV}, \\ m_{K^\pm} &= 497.614 \pm 0.022 \text{ MeV}, \\ m_{\pi^0} &= 134.9766 \pm 0.0006 \text{ MeV}, \\ m_{\pi^\pm} &= 139.57018 \pm 0.00035 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Die Terme in \mathcal{L}_1 aus (6.5), die zu diesem Zerfall beitragen lauten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K^* \rightarrow K\pi} &= i \frac{a}{4} \left[K_\mu^{*0} \left(\bar{K}^{0\mu} \pi^0 - \bar{K}^0 \pi^{0\mu} - \sqrt{2} K^{-\mu} \pi^+ + \sqrt{2} K^- \pi^{+\mu} \right) \right. \\ &\quad + \bar{K}_\mu^{*0} \left(K^0 \pi^{0\mu} - K^{0\mu} \pi^0 - \sqrt{2} K^+ \pi^{-\mu} + \sqrt{2} K^{+\mu} \pi^- \right) \\ &\quad + K_\mu^{*-} \left(K^{+\mu} \pi^0 - K^+ \pi^{0\mu} - \sqrt{2} K^0 \pi^{+\mu} + \sqrt{2} K^{0\mu} \pi^{+\mu} \right) \\ &\quad \left. + K_\mu^{*+} \left(K^- \pi^{0\mu} - K^{-\mu} \pi^0 - \sqrt{2} \bar{K}^{0\mu} \pi^- + \sqrt{2} \bar{K}^0 \pi^{-\mu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.64)$$

wobei wir für die Pseudoskalare K und π abkürzend $K^\mu = \partial^\mu K$, $\pi^\mu = \partial^\mu \pi$ geschrieben haben. Wir erhalten 8 Diagramme (vgl. Abb. 3), wobei jedes Diagramm mit 2 Termen beiträgt, in denen jeweils die Ableitung ∂^μ auf eines der Pseudoskalar-Felder wirkt. Nach (6.41) sind diese 2 Beiträge allerdings identisch. Zur Bestimmungen der Zerfallsbreite

mitteln wir über die Anfangszustände $K^{*0}, \overline{K}^{*0}, K^{*-}, K^{*+}$, einsetzen der Massen liefert schließlich

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{K^{*(1410)} \rightarrow K\pi} &= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{a^2}{16} \left[2 \cdot (1.52 \pm 0.098) + 2 \cdot 2 (1.51 \pm 0.098) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot (1.51 \pm 0.098) + 2 \cdot 2 (1.52 \pm 0.098) \right] \text{MeV} \\
 &= (0.568 \pm 0.037) \cdot a^2 \text{ MeV} \stackrel{!}{=} \Gamma_{K^{*(1410)} \rightarrow K\pi}^{\text{exp}} = 15.3 \pm 4.4 \text{ MeV}.
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

Wir erhalten die Kopplungskonstante

$$a = 5.19 \pm 0.77. \tag{6.66}$$

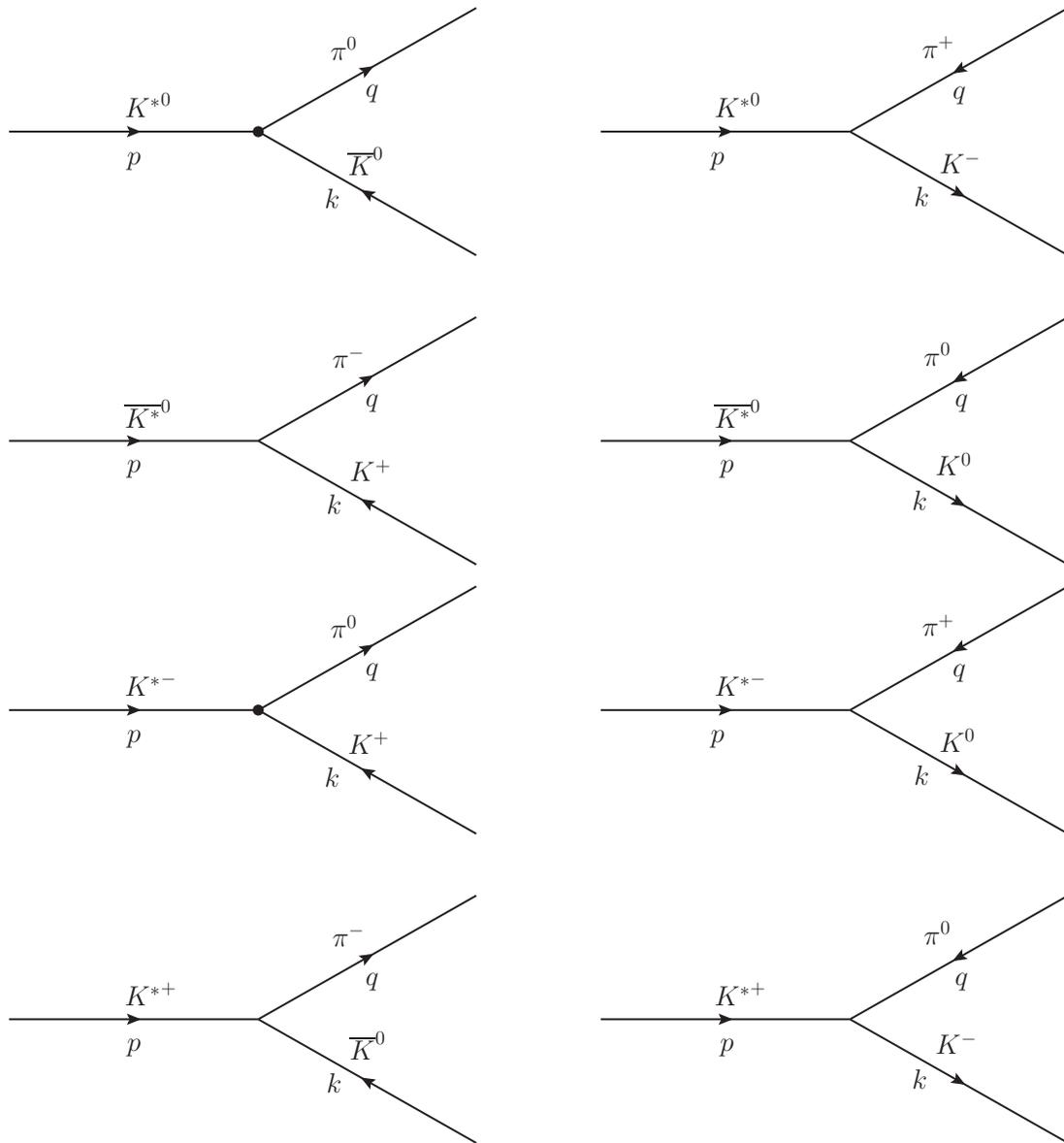


Abbildung 3: Feynman-Diagramme erster Ordnung für den Zerfall $K^*(1410) \rightarrow K\pi$

6.5 Vergleich mit experimentellen Daten

Da wir nun die Kopplungskonstanten des Modells fixiert haben, können wir weitere Zerfallsbreiten des Modells berechnen und mit experimentellen Daten vergleichen, um die Gültigkeit des Modells zu überprüfen. Für die Kopplung zweier Vektor-Mesonen und ein Pseudoskalar-Meson ist z.B. der Zerfall $K^*(1410) \rightarrow K\rho$ im Modell enthalten. Die Terme in der Lagrangedichte für diesen Zerfall lauten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K^* \rightarrow K\rho} = & \frac{b}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left[K_{\alpha\beta}^{*0} \left(\sqrt{2} \rho_{\mu\nu}^+ K^- - \rho_{\mu\nu}^0 \bar{K}^0 \right) + \bar{K}_{\alpha\beta}^{*0} \left(\sqrt{2} \rho_{\mu\nu}^- K^+ - \rho_{\mu\nu}^0 K^0 \right) \right. \\ & \left. + K_{\alpha\beta}^{*+} \left(\sqrt{2} \rho_{\mu\nu}^- \bar{K}^0 + \rho_{\mu\nu}^0 K^- \right) + K_{\alpha\beta}^{*-} \left(\sqrt{2} \rho_{\mu\nu}^+ K^0 + \rho_{\mu\nu}^0 K^+ \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Wir mitteln wie im vorigen Abschnitt über die Anfangszustände und setzen die Massen in den resultierenden Ausdruck ein. Wir erhalten

$$\Gamma_{K^*(1410) \rightarrow K\rho} = 17.2 \pm 6.8 \text{ MeV}. \quad (6.68)$$

wobei wir für die Masse von ρ , $m_\rho = 769 \pm 0.9 \text{ MeV}$ verwendet haben. Um mit den experimentellen Daten Vergleichen zu können bilden wir das Verhältnis

$$\frac{\Gamma_{K^*(1410) \rightarrow K\rho}}{\Gamma_{K^*(1410)}^{\text{tot,exp}}} = 0.074 \pm 0.030. \quad (6.69)$$

Als experimentellen Wert finden wir

$$\left(\frac{\Gamma_{K^*(1410) \rightarrow K\rho}}{\Gamma_{K^*(1410)}^{\text{tot}}} \right)^{\text{exp}} < 7\%. \quad (6.70)$$

Dieser Wert stimmt gut mit unserem Modell überein.

Für die Kopplung eines Vektor-Mesons an zwei Pseudoskalar-Mesonen vergleichen wir mit dem Zerfall $\Phi(1680) \rightarrow K\bar{K}$. Die zugehörigen Terme der Lagrangedichte lauten

$$\mathcal{L}_{\Phi(1680) \rightarrow K\bar{K}} = \frac{ia}{2\sqrt{2}} \Phi_\mu \left[(\partial^\mu K^0) \bar{K}^0 - (\partial^\mu \bar{K}^0) K^0 - (\partial^\mu K^-) K^+ + (\partial^\mu K^+) K^- \right]. \quad (6.71)$$

Wir setzen ein und erhalten

$$\Gamma_{\Phi(1680) \rightarrow K\bar{K}} = 19.7 \pm 6.1 \text{ MeV}. \quad (6.72)$$

In den experimentellen Daten finden wir das Verhältnis zum dominanten Zerfallskanal:

$$\left(\frac{\Gamma_{\Phi(1680) \rightarrow K\bar{K}}}{\Gamma_{\Phi(1680) \rightarrow K\bar{K}^*(892)+c.c}} \right)^{\text{exp}} = 0.07 \pm 0.01. \quad (6.73)$$

Wir nehmen wie bei der Bestimmung der Kopplungskonstanten b an, dass die Zerfallsbreite des dominanten Zerfallskanals der vollen Zerfallsbreite entspricht und berechnen mit (6.72):

$$\frac{\Gamma_{\Phi(1680) \rightarrow K\bar{K}}}{\Gamma_{\Phi(1680) \rightarrow K\bar{K}^*(892)+c.c}} = 0.131 \pm 0.060. \quad (6.74)$$

Auch dieser Wert stimmt gut mit dem Experiment überein.

6.5.1 Mischung von η_N und η_S

Die im Pseudoskalar-Nonet P auftauchenden Felder η_N und η_S mischen aufgrund der sogenannten chiralen Anomalie zu den physikalischen Feldern η und η' . Wir definieren den Mischungswinkel von η_N und η_S :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_N \\ \eta_S \end{pmatrix}. \quad (6.75)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \eta_N &= \cos \varphi \eta - \sin \varphi \eta', \\ \eta_S &= \sin \varphi \eta + \cos \varphi \eta'. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Wir können nun die Substitution (6.76) in die Lagrangedichte des Modells einsetzen um die richtigen Kopplungskonstanten für η und η' zu erhalten. Wir finden z.B. die für die Zerfälle $K^* \rightarrow K\eta$ und $K^* \rightarrow K\eta'$ relevanten Terme:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K^* \rightarrow K\eta} &= \frac{1}{4} \left[\bar{K}_\mu^{*0} ((\partial^\mu K^0) - K^0 \partial^\mu) - K_\mu^{*0} ((\partial^\mu \bar{K}^0) - \bar{K}^0 \partial^\mu) \right. \\ &\quad \left. + K_\mu^{*-} ((\partial^\mu K^+) - K^+ \partial^\mu) - K_\mu^{*+} ((\partial^\mu K^-) - K^- \partial^\mu) \right] \\ &\quad \cdot \left[(\cos \varphi - \sqrt{2} \sin \varphi) \eta - (\sin \varphi + \sqrt{2} \cos \varphi) \eta' \right]. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Da wir für den Zerfall des angeregten Vektormeson-Nonets in η oder η' keine gut bestimmten experimentellen Daten finden, nehmen wir an dieser Stelle den aus anderen Modellen bekannten Mischungswinkel von η_N und η_S als gegeben an, dieser lautet

$$\varphi = -40^\circ. \quad (6.78)$$

6.5.2 Zerfälle $V_E \rightarrow \gamma P$

Für die Zerfälle $V \rightarrow \gamma P$ führen wir die Ersetzung (6.50) in der Lagrangedichte \mathcal{L}_2 unseres Modells (6.5) durch. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V \rightarrow \gamma P} &= \frac{\sqrt{2} \alpha b}{3 g_\rho} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left[(\partial_\alpha \rho_\beta^0) \pi^0 + (\partial_\alpha \rho_\beta^+) \pi^- + (\partial_\alpha \rho_\beta^-) \pi^+ \right. \\ &\quad \left. + 3(\partial_\alpha \rho_\beta^0) \eta_N + (\partial_\alpha \omega_\beta) \eta_N + 3(\partial_\alpha \omega_\beta) \pi^0 - 2(\partial_\alpha \phi_\beta) \eta_S \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\alpha K_\beta^{*-}) K^+ + (\partial_\alpha K_\beta^{*+}) K^- - 2(\partial_\alpha \bar{K}_\beta^{*0}) K^0 - 2(\partial_\alpha K_\beta^{*0}) \bar{K}^0 \right] \partial_\mu A_\nu. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Mit dem Photon-Feld A_ν . Es sind damit die Zerfälle

$$\begin{aligned}
\rho &\rightarrow \gamma\pi, \\
\rho^0 &\rightarrow \gamma\eta, \\
\rho^0 &\rightarrow \gamma\eta', \\
\omega &\rightarrow \gamma\eta, \\
\omega &\rightarrow \gamma\eta', \\
\omega &\rightarrow \gamma\pi^0, \\
\phi &\rightarrow \gamma\eta, \\
\phi &\rightarrow \gamma\eta', \\
K^* &\rightarrow \gamma K.
\end{aligned} \tag{6.80}$$

im Modell enthalten.

6.5.3 Weitere im Modell enthaltene Zerfälle

Im Folgenden sind alle im Modell enthaltenen Zerfälle aufgelistet und dem experimentellen Wert gegenübergestellt. Der experimentelle Wert wurde dabei jeweils aus den Angaben der totalen Zerfallsbreite des jeweiligen Mesons und dem Verhältnis der partiellen Zerfallsbreite des jeweiligen Kanals zur totalen Zerfallsbreite bestimmt. Sämtliche Daten wurden [Par12] entnommen. Felder, in denen – angegeben ist sind dabei in [Par12] ohne experimentell bestimmte Werte aufgelistet. Freie Felder sind dagegen nicht in [Par12] gelistet.

$V_E \rightarrow PP$	$\Gamma^{\text{th}}[\text{MeV}]$	$\Gamma^{\text{exp}}[\text{MeV}]$
$K^*(1410) \rightarrow K\pi$	15.3 ± 4.4	15.3 ± 4.4
$\phi(1680) \rightarrow \bar{K}K$	19.7 ± 6.1	11 ± 5
$\rho(1450) \rightarrow \bar{K}K$	6.5 ± 2.2	–
$\rho(1450) \rightarrow \pi\pi$	31.0 ± 9.6	–
$\omega(1420) \rightarrow \bar{K}K$	5.9 ± 2.0	
$K^*(1410) \rightarrow K\eta$	3.4 ± 1.1	
$K^*(1410) \rightarrow K\eta'$	≈ 0	

$V_E \rightarrow VP$	$\Gamma^{\text{th}}[\text{MeV}]$	$\Gamma^{\text{exp}}[\text{MeV}]$
$\phi(1680) \rightarrow K\bar{K}^*$	150 ± 50	150 ± 50
$K^*(1410) \rightarrow K\rho$	17.2 ± 6.8	< 17
$K^*(1410) \rightarrow K\phi$	≈ 0	
$K^*(1410) \rightarrow K\omega$	5.0 ± 2.1	
$K^*(1410) \rightarrow K^*(892)\pi$	40 ± 15	$> 93 \pm 9$
$K^*(1410) \rightarrow K^*(892)\eta$	≈ 0	
$K^*(1410) \rightarrow K^*(892)\eta'$	≈ 0	
$\rho(1450) \rightarrow \omega\pi$	103 ± 39	84 ± 13
$\rho(1450) \rightarrow K^*(892)K$	8.9 ± 6.1	–
$\rho(1450) \rightarrow \rho(770)\eta$	14.4 ± 6.6	$< 16 \pm 3$
$\rho(1450) \rightarrow \rho(770)\eta'$	≈ 0	
$\omega(1420) \rightarrow \rho\pi$	280 ± 110	$120 - 182$
$\omega(1420) \rightarrow K^*(892)K$	2.9 ± 3.6	
$\omega(1420) \rightarrow \omega(782)\eta$	7.2 ± 4.1	
$\omega(1420) \rightarrow \omega(782)\eta'$	≈ 0	
$\phi(1680) \rightarrow \phi(1020)\eta$	22 ± 11	55 ± 19
$\phi(1680) \rightarrow \phi(1020)\eta'$	≈ 0	

Für die Zerfälle $V_E \rightarrow \gamma P$ sind keine hinreichend genauen experimentellen Daten vorhanden, es konnten daher nur Vorhersagen gemacht werden:

$V_E \rightarrow \gamma P$	$\Gamma^{\text{th}}[\text{keV}]$
$\rho(1450) \rightarrow \gamma\pi$	0.093 ± 0.034
$\rho^0(1450) \rightarrow \gamma\eta$	0.32 ± 0.12
$\rho^0(1450) \rightarrow \gamma\eta'$	0.067 ± 0.027
$\omega(1420) \rightarrow \gamma\eta$	0.032 ± 0.012
$\omega(1420) \rightarrow \gamma\eta'$	0.0060 ± 0.0025
$\omega(1420) \rightarrow \gamma\pi^0$	0.77 ± 0.28
$\phi(1680) \rightarrow \gamma\eta$	0.171 ± 0.062
$\phi(1680) \rightarrow \gamma\eta'$	0.105 ± 0.039
$K^*(1410) \rightarrow \gamma K$	0.145 ± 0.053

Angaben mit ≈ 0 deuten darauf hin, dass die Summe der Massen der Zerfallsprodukte nahe an, oder größer ist als die Masse des einlaufenden Teilchens.

Für den Zerfall des ρ -Mesons sind in [Par12] noch einige zusätzliche Werte zu finden (rechts), im Folgenden im Vergleich mit dem Modell (links).

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_{\rho \rightarrow \bar{K}K}}{\Gamma_{\rho \rightarrow \omega\pi}} &= 0.063 \pm 0.032 & \left(\frac{\Gamma_{\rho \rightarrow \bar{K}K}}{\Gamma_{\rho \rightarrow \omega\pi}} \right)^{\text{exp}} &< 0.08 \\
\frac{\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}}{\Gamma_{\rho \rightarrow \omega\pi}} &= 0.30 \pm 0.15 & \left(\frac{\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}}{\Gamma_{\rho \rightarrow \omega\pi}} \right)^{\text{exp}} &\approx 0.32 \\
\frac{\Gamma_{\rho \rightarrow \rho\eta}}{\Gamma_{\rho}^{\text{tot,exp}}} &= 0.033 \pm 0.016 & \left(\frac{\Gamma_{\rho \rightarrow \rho\eta}}{\Gamma_{\rho}^{\text{tot}}} \right)^{\text{exp}} &< 0.04 \\
\frac{\Gamma_{\rho \rightarrow \rho\eta}}{\Gamma_{\rho \rightarrow \omega\pi}} &= 0.140 \pm 0.084 & \left(\frac{\Gamma_{\rho \rightarrow \rho\eta}}{\Gamma_{\rho \rightarrow \omega\pi}} \right)^{\text{exp}} &\approx 0.24
\end{aligned} \tag{6.81}$$

Wir stellen fest, dass im Ganzen die Resultate unseres Modells gut mit dem Experiment übereinstimmen. Insbesondere sind die Zerfallsbreiten für Kanäle, die in [Par12] nicht aufgelistet sind bzw. noch nicht beobachtet sind, in unserem Modell vergleichsweise klein.

7 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war die Untersuchung eines effektiven Modells im Rahmen der QCD für 3 Quark-Flavors für den Zerfall von angeregten Vektor-Mesonen. Wir haben zunächst das Modell angesetzt und gezeigt, dass die Symmetrien der QCD im Modell enthalten sind. Für die Beschreibung der Vektor-Mesonen haben wir dabei die in [D.P11] konstruierten Meson-Nonets für Quark-Antiquark Ströme verwendet. Die Kopplungskonstanten des Modells wurden anhand der Zerfallskanäle $K^* \rightarrow K\pi$ und $\phi \rightarrow K\bar{K}^*$ und den in [Par12] aufgeführten experimentellen Daten festgelegt. Daraufhin wurden die im Modell enthaltenen Zerfallskanäle mit den fixierten Kopplungskonstanten berechnet. Wir haben festgestellt, dass diese in sehr guter Übereinstimmung mit weiteren experimentellen Daten in [Par12] liegen. Es ist somit in der Tat möglich die angeregten Vektor-Meson-Zustände mit den gleichen Mitteln wie die nicht-angeregten Zustände zu beschreiben, wobei der Unterschied in der Beschreibung letztendlich allein durch die größeren Massen der angeregten Zustände gegeben war.

In Anlehnung an [FG14] haben wir zudem die Kopplung von angeregten Vektor-Mesonen an Photonen und Pseudoskalar-Mesonen untersucht. Ein hinreichender Vergleich mit experimentellen Daten war auf Grund fehlender Daten leider nicht möglich. In Anbetracht des Erfolges des Modells lassen sich die Resultate für die $V_E \rightarrow \gamma P$ allerdings als Vorhersagen in betracht ziehen.

Literatur

- [D.P11] D.PARGANLIJA: *Quarkonium Phenomenology in Vacuum*, Johann Wolfgang Goethe-Universitaet, Diss., 2011
- [D.R11] D.RISCHKE: *Theoretische Physik IV: Quantenmechanik I*. 2011. – Vorlesungsskript
- [F.D12] F.DIVOTGEY: *Phaenomenologie von Axialvektor-Mesonen und Mischungseffekte in Kaon-Feldern*. 2012
- [F.G05] F.GIACOSA: *Glueball phenomenology within a nonlocal approach*, Eberhard-Karls-Universitaet, Diss., 2005
- [FG14] F.GIACOSA ; G.PAGLIARA: Decay of light scalar mesons into vector-photon and into pseudoscalar mesons / Institut fuer Theoretische Physik, JW Goethe-Universitaet. 2014. – Forschungsbericht. – arXiv:0905.3706
- [J.S14] J.SCHNEITZER: *Korrekturen 3. Ordnung zum $S \Phi \Phi$ Zerfall*. 2014
- [L.O12] L.OLBRICH: *Phaenomenologie der Pseudovektormesonen und Mischung mit Axialvektormesonen im kaonischen Sektor*. 2012
- [MD95] M.E.PESKIN ; D.V.SCHROEDER: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995
- [M.W12] M.WAGNER: *Einfuehrung in die Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik*. 2012. – Vorlesungsskript
- [Par12] PARTICLE DATAGROUP: *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*. American Physical Society, 2012
- [W.N09] W.NOLTING: *Grundkurs Theoretische Physik 5/1: Quantenmechanik - Grundlagen*. Springer, 2009