Johann Wolfgang Goethe - Universität
Frankfurt am Main

Fachbereich Physik

Institut für Theoretische Physik

Bachelorarbeit

Quantenfeldtheoretische Beschreibung von (Pseudo-)Tensormesonen

Autor:
Adrian Königstein

Betreuer:
Priv. Doz. Dr. Francesco Giacosa
Institut für Theoretische Physik
Goethe Universität Frankfurt
Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Institut für Theoretische Physik
Goethe Universität Frankfurt

Frankfurt am Main 23. Oktober 2014

Danksagung

Da die Anfertigung dieser Bachelorarbeit ohne die Unterstützung durch Andere unmöglich gewesen wäre, möchte ich mich herzlich bei jenen Menschen bedanken. Ein ganz besonderer Dank gilt Dr. Francesco Giacosa, welcher durch seine sehr gute Betreuung, seine zahlreichen Mails und Treffen, sowie die vielen Diskussionen und Anregungen maßgeblich zu der Arbeit in ihrer jetzigen Form beigetragen hat.
Des Weiteren bedanke ich mich bei Prof. Dr. Dirk H. Rischke für die tolle Einführung in die Quantenfeldtheorie, die Vergabe dieser Arbeit und die vielen Gespräche, beziehungsweise Antworten auf meine zahlreichen Fragen.
Außerdem will ich an dieser Stelle Dr. Joachim Reinhardt Dank sagen, ohne dessen exzellentes Buch “Feldquantisierung“ ich viele Ideen, die in dieser Arbeit behandelt sind, nicht gehabt hätte und für die Beantwortung von Fragen. An dieser Stelle sei auch Herr Shekhter für seine guten Materialhinweise gedankt.
Ein weiterer Dank gilt allen anderen Personen, die mich in dieser Arbeit unterstützt haben, so zum Beispiel die Mitglieder der Chiral Group und meiner Freundin Marion Seiche.
Zum Schluss will ich mich noch bei meiner Mutter Gabriele Königstein bedanken, die in orthographischen Fragen immer der richtige Ansprechpartner für mich ist.

Vorwort

In jedem Lehrbuch der Quantenfeldtheorie, sowie in jeder Einführung in dieses unüberschaubar große Themengebiet der Physik werden die Bewegungsgleichungen, und Lösungen dieser, für Teilchen ohne Spin (Klein-Gordon-Theorie), Spin-$\frac{1}{2}$ (Dirac-Theorie), Spin-1 (Proca-/Maxwell-/Young-Mills-Theorie) und in selten Fällen für Spin-$\frac{3}{2}$ (Rarita-Schwinge-Theorie) ausführlichst besprochen und bis in die kleinsten Details diskutiert. Häufig werden diese Theorien im Zusammenhang mit den Symmetrien der Natur erläutert, wobei eine strikte Herleitung aus der fundamentalsten Symmetrie-Gruppe, sprich der Poincaré-Gruppe, in den seltensten Fällen erfolgt. Was jedoch so gut wie nie Erwähnung findet, und wenn, dann häufig dem Leser zur Erprobung seiner Fähigkeiten überlassen wird, ist die prinzipielle Möglichkeit, auch Teilchen höheren Spins durch Bewegungsgleichungen zu beschreiben, Lagrangedichten für diese aufzustellen, und daraus die Eigenschaften der jeweiligen Systeme zu folgern.
Um hierüber mehr zu erfahren, ist, nach meiner eigenen Erfahrung, einiges an Recherchearbeit nötig, wobei das Material häufig sehr unübersichtlich und selten als einheitliche Theorie präsentiert ist, ganz abgesehen von den verschiedensten notationellen Problemen, die sich ergeben.
Als ich mich für eine Bachelorarbeit auf dem Gebiet der Quantenfeldtheorie und spezieller Hadronen-Physik entschied, hatte ich von alledem nur einen sehr vagen Eindruck. Meine Entscheidung, mich mit den Zerfallsbreiten von Pseudo-Tensormesonen zu beschäftigen, war dementsprechend mehr auf "Gut Glück", als in vollem Bewusstsein, worin meine Arbeit münden würde. Im Nachhinein bin ich sehr froh mich für tensorartige Teilchen entschieden zu haben, da ich mir so auf einem relativ neuen Gebiet eine gute Übersicht über den aktuellen Stand verschaffen konnte und ggf. selbst zu einer Weiterentwicklung beitragen kann.
Der Leser wird schon durch den Titel und nach diesem Vorwort nicht mehr überrascht sein, dass ich mich zunächst einmal von Grund auf mit der Theorie für ein Teilchen mit Spin-2 beschäftigen werde und der Fokus nicht, wie ursprünglich gedacht, auf der Wechselwirkung von Mesonen und deren theoretische Beschreibung liegen wird. Diese Arbeit soll vielmehr ein Versuch sein die theoretischen Ansätze, welche es auf dem Gebiet bereits gibt, auf eine gemeinsame Ebene zu bringen und miteinander, auch durch eine einheitliche Notation, zu verknüpfen, um vielleicht so dem interessierten Leser ein schlüssiges Bild vom Potential und den Möglichkeiten der Theorie von Spin-2 Teilchen zu überzeugen. Zudem war es mir wichtig die Theorie so aufzuziehen, dass auch für angehende Physiker, welche sich bisher nur mit den etablierten oben genannten Theorien auseinandergesetzt haben, die Analogien zwischen diesen und der hier präsentierten Theorie offensichtlich werden. So werde ich mit einer Einführung und Wiederholung der klassischen Feldtheorie beginnen und in ihrem Rahmen die Konsequenzen (Erhaltungssätze) kontinuierlicher Symmetrien der Natur erläutern. Anschließend sollen diese Konzepte auf den klassischen speziellen Fall des Spin-2-/Tensor-Feldes übertragen werden und spezielle Aspekte erläutert werden. Die Beurteilung, in wie weit es mir gelingt die Bewegungsgleichungen zu motivieren, sei dem Leser selbst überlassen. Im dritten großen Teil werde ich einen Versuch wagen, das Spin-2-Feld kanonisch zu quantisieren, die Kommutatorrelationen herzuleiten/aus Analogien zu postulieren und in Form der quan-

tisierten Erhaltungsgrößen zur Anwendung zu bringen. Der vierte Teil wird einen Einblick in mögliche Anwendungsgebiete geben und im Speziellen die einzelnen Möglichkeiten, Mesonen durch diese Theorie zu beschreiben, aufzeigen. Abschließend wird sich der letzte Teil damit befassen, die Konzepte auf Zerfälle von Mesonen zu übertragen und auf ihre experimentelle Rechtfertigung zu prüfen.

Ich wünsche viel Spaß beim Lesen meiner ersten wissenschaftlichen Arbeit.

Notationen

Einheitensystem

In der Hochenergiephysik ist es üblich in den "Natürlichen" Einheiten zu rechnen. Diese sind dadurch definiert, dass die fundamentalen Konstanten auf den Wert "1" gesetzt werden[1]:

$$\hbar = c = k_B = 1 \ .$$

Als Konsequenz erhält man, dass z.B. Masse und Energie die gleiche Einheit haben. Weitere wichtige Relationen sind: Einheit der Zeit entspricht Einheit der Länge und Einheit der Energie ist gleich Einheit der inversen Länge.

Metrik

In dieser Bachelorarbeit wird die Metrik stets wie folgt gewählt:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

In der gesamten Arbeit gilt Einsteinsche-Summenkonvention. Summiert wird hier über römische und griechische Indizes. Erstere stehen für die Komponenten räumlicher Drei-Vektoren und letztere für die Komponenten von Vier-Vektoren der Minkowski-Raumzeit. Falls die Indizes anders verwendet werden, wird darauf hingewiesen. Nicht indizierte Buchstaben können sowohl Skalare als auch Vier-Vektoren sein, was jedoch aus dem Kontext klar wird. Drei-Vektoren sind wie üblich durch den Vektorpfeil gekennzeichnet.
Später wird auch die vollständige Kontraktion wichtig werden. Aus Gründen der Übersicht wird $T = T_\mu{}^\mu$ geschrieben.
Vier-Vektoren hängen mit Drei-Vektoren durch nachstehende Relation zusammen:

$$\begin{aligned} x^\mu &= (t, \vec{x})^T \ , \\ x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\vec{x}) \ . \end{aligned}$$

Des Weiteren definiert man den/die Vier-Gradient/Vier-Divergenz sowie den d'Alembert-Operator als:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \ , \\ \partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)^T \ , \\ \Box &= \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \ . \end{aligned}$$

[1]Die Herleitung hierfür und viele weitere Grundlagen, auf welchen diese Arbeit beruht, findet man in [19].

Pauli-/Dirac-Matrizen

Die Pauli-Matrizen sind wie gewohnt definiert durch:

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Zudem werden später die sogenannten Dirac-, oder auch Gamma-Matrizen benötigt. Hier sei die Standarddarstellung gewählt:

$$\gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \ ,$$

$$\gamma^i = -(\gamma^i)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\gamma^5 = (\gamma^5)^\dagger = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \ .$$

An dieser Stelle lohnt es sich auch einige nützliche Relationen der Dirac-Matrizen anzugeben:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+ = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g_{\mu\nu}\mathbb{1} \ ,$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\}_+ = \gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0 \ ,$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \ .$$

Fouriertransformation und Deltafunktion

Eine immer wieder zur Verwirrung führende Kleinigkeit in der Quantenfeldtheorie ist die Verteilung der 2π-Faktoren über gegebenen Formeln. Um hier zumindest erste Fehler zu vermeiden, definiere ich die Fouriertransformation dadurch, dass die Hälfte der 2π-Faktoren der Hin- und die andere Hälfte der Rücktransformation zugerechnet wird:

$$f(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{\sqrt{2\pi}^4} \tilde{f}(k) e^{-ikx} \ ,$$

$$\tilde{f}(k) = \int \frac{\mathrm{d}^4x}{\sqrt{2\pi}^4} f(x) e^{ikx} \ .$$

Hiermit lässt sich die Deltafunktion, welche hier von zwei Orten abhängen soll, durch ihre Fouriertransformierte ausdrücken:

$$\begin{aligned} \delta^4(x - x') &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{\sqrt{2\pi}^4} \int \frac{\mathrm{d}^4k'}{\sqrt{2\pi}^4} \delta^4(k - k') e^{-ikx} e^{+ik'x'} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \ . \end{aligned}$$

Inhaltsverzeichnis

1. Lagrangeformalismus für klassische Felder

Die Arbeit des theoretischen Physikers lässt sich in wenigen Worten überspitzt zusammenfassen. Er versucht Gleichungen aufzustellen und zu lösen, welche die Objekte unseres Universums beschreiben.
In der Punktmechanik wird dies realisiert, indem man alle Objekte einzeln in Gleichungen erfasst, und anschließend dieses hoch komplexe Gleichungssystem zu lösen versucht. Geht jedoch die Anzahl der Teilchen gegen Unendlich, bzw. sind diese fest/dicht aneinander gekoppelt, so lassen sie sich als kontinuierliches System beschreiben (z.B. ein Trommelfell, oder ein Behälter mit Wasser). Um dies zu realisieren, lässt man, wie bereits gesagt, die Anzahl der Teilchen gegen Unendlich gehen und gleichzeitig die Masse derselben, sowie deren Abstände gegen Null laufen. Aus diskreten Indizes für die einzelnen Partikel wird ein kontinuierlicher Parameter und aus den einzelnen Positionen der Teilchen wird eine stetige Funktion.

1.1. Euler-Lagrange-Gleichung

Dieser und der folgende Abschnitt sind weitestgehend aus der Vorlesung über Quantenfeldtheorie von Herrn Rischke [19, S.22 ff] und dem Buch über den "Erweiterten Hamilton-Lagrange-Formalismus" von Herrn Struckmeier [18] übernommen und sollen, zusammen mit dem Abschnitt über das Noether-Theorem und Erhaltungssätze, als Einstieg in diese Arbeit dienen. Um die Bewegungsgleichung eines kontinuierlichen Systems, im Folgenden nur noch Feld $\phi(x)$, herzuleiten, bedient man sich des hamiltonischen Prinzips, oder auch dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Man definiert sich hierzu eine sog. Lagrangedichte $\mathcal{L}$, welche vom Feld $\phi(x)$ (oder auch mehreren Feldern $\phi_I(x)$), der Vier-Divergenz des Feldes $\partial_\mu \phi(x)$ (der Felder) und ggf. der Raumzeit x selbst abhängen kann[1][2]. Die Einheit der Lagrangedichte ist eine Energiedichte, demnach Energie pro Raumzeitvolumen. Die Wirkung $\mathcal{S}$ ist wiederum definiert als das Integral der Lagrangedichte über die komplette Raumzeit:

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(\phi_I, \partial_\mu \phi_I, x) \; \mathrm{d}^4 x \; . \tag{1.1}$$

Nun fordert man, dass die Variation der Wirkung verschwindet:

$$\delta \mathcal{S} \stackrel{!}{=} 0 \; . \tag{1.2}$$

Dies bedeutet, dass bei statischer Raumzeit $\delta x_\mu = 0$ unter infinitesimaler Variation der Felder $\phi_I(x) + \delta\phi_I(x)$ obige Forderung (1.2) erfüllt ist. Dabei ist zu beachten, dass das Feld an den

[1] Wie man an dieser Stelle bereits sieht, wird diese direkt relativistisch kovariant formuliert. Man fordert zudem, dass die Lagrangedichte ein sog. Lorentzskalar ist, jedoch dazu später mehr.

[2] Zudem sei hier noch einmal angemerkt, dass es sich in der Notation $\phi_I(x)$ stets um Komponenten beliebig vieler Felder, von beliebigen Charakter handelt. "I" läuft hier von "1 bis N", wobei N die Anzahl aller Komponenten aller Felder ist. So könnte $\phi_I(x)$ zum Beispiel für die Komponente eines Spinors, jedoch auch für den Eintrag eines Lorentz-Vektors stehen.

Rändern nicht variiert wird, $\delta\phi_I|_{\partial R} = 0$. Man benötigt hierzu außerdem die Variation der Vier-Divergenz des Feldes, welche sich wie folgt berechnen lässt:

$$\phi_I(x) \to \Phi_I(x) = \phi_I(x) + \delta\phi_I(x) \ , \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \Phi_I(x)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \phi_I(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta\phi_I(x) \ ,$$

$$\begin{aligned} \delta\frac{\partial \phi_I(x)}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial \Phi_I(x)}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \phi_I(x)}{\partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta\phi_I(x) \ . \end{aligned}$$

Jetzt lässt sich die Variation durchführen:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \delta\mathcal{S} \\ &= \delta\int \mathcal{L}(\phi_I, \partial_\mu\phi_I, x)\ \mathrm{d}^4x \\ &= \int \delta\mathcal{L}(\phi_I, \partial_\mu\phi_I, x)\ \mathrm{d}^4x \\ &= \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I}\delta\phi_I + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_I)}\delta(\partial_\nu\phi_I)\right)\ \mathrm{d}^4x \\ &= \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I}\delta\phi_I + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_I)}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta\phi_I\right)\ \mathrm{d}^4x \\ &= \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I}\delta\phi_I\ \mathrm{d}^4x + \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_I)}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta\phi_I\ \mathrm{d}^4x \\ &= \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I}\delta\phi_I\ \mathrm{d}^4x + \int \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_I)}\delta\phi_I\right)\ \mathrm{d}^4x \\ &\quad - \int \delta\phi_I\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_I)}\right)\ \mathrm{d}^4x \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_I)}\delta\phi_I\right)\bigg|_{\partial R} + \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I}\delta\phi_I\ \mathrm{d}^4x \\ &\quad - \int \delta\phi_I\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_I)}\right)\ \mathrm{d}^4x \\ &= \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_I)}\right)\right)\delta\phi_I\ \mathrm{d}^4x \ . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Da alle Felder unabhängig variiert werden, muss der Integrand verschwinden. Das Resultat bezeichnet man als Euler-Lagrange-Gleichung für Felder und stellt deren Bewegungsgleichungen dar:

$$0 = \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_I)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I} \ . \tag{1.5}$$

Lagrangedichten beinhalten demnach die gesamte Information des physikalischen Systems. Sie liefern nicht nur die Bewegungsgleichungen, sondern z.B. auch die Symmetrien.

1.2. Nicht-Eindeutigkeit durch Oberflächenterme

Im Folgenden wird gezeigt werden, dass Lagrangedichten nicht eindeutig sind. Sie sind nur bis auf einen Oberflächenterm genau bestimmt. Was dies heißt, kann man folgender Rechnung entnehmen. Man definiert sich hierzu eine Funktion $f^\mu(\phi_I(x), x)$. Eine gegebene Lagrangedichte $\mathcal{L}$ soll um die Divergenz dieser Funktion zu einer neuen Lagrangedichte $\mathcal{L}'$ ergänzt werden:

$$\mathcal{L}'(\phi_I, \partial\phi_I, x) = \mathcal{L}(\phi_I, \partial\phi_I, x) + \frac{\partial f^\mu(\phi_I(x), x)}{\partial x^\mu} \ . \tag{1.6}$$

Nun wird gezeigt, dass dies die Bewegungsgleichung (die Physik des Systems) nicht ändert:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\nu\phi_I)} - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\phi_I} \qquad (1.7)\\
&= \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_I)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I} + \partial_\nu \frac{\partial(\partial_\mu f^\mu)}{\partial(\partial_\nu\phi_I)} - \frac{\partial(\partial_\mu f^\mu)}{\partial\phi_I}\\
&= \partial_\nu \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu\phi_I)} \left(\frac{\partial f^\mu}{\partial\phi_I}\partial_\mu\phi_I + \left.\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\mu}\right|_{expl} \right) - \frac{\partial}{\partial\phi_I} \left(\frac{\partial f^\mu}{\partial\phi_I}\partial_\mu\phi_I + \left.\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\mu}\right|_{expl} \right)\\
&= \partial_\nu \left(\frac{\partial f^\nu}{\partial\phi_I} \right) - \frac{\partial^2 f^\mu}{\partial\phi_I\partial\phi_I}\partial_\mu\phi_I - \frac{\partial}{\partial\phi_I} \left.\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\mu}\right|_{expl}\\
&= \frac{\partial^2 f^\mu}{\partial\phi_I\partial\phi_I}\partial_\mu\phi_I + \frac{\partial}{\partial\phi_I} \left.\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\mu}\right|_{expl} - \frac{\partial^2 f^\mu}{\partial\phi_I\partial\phi_I}\partial_\mu\phi_I - \frac{\partial}{\partial\phi_I} \left.\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\mu}\right|_{expl}\\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

1.3. Das Theorem von Emmy Noether

Das Noether-Theorem ist eines der fundamentalsten Theoreme der Physik (und für mich eines der faszinierendsten Dinge im Allgemeinen). Aus diesem Grund soll es hier auch diskutiert werden. Zudem bietet es eine Basis für weitere Überlegungen, welche in dieser Arbeit geführt werden, jedoch auch die Grundlage für Diskussionen, welche sich an diese Arbeit anschließen können. Die Version, welche hier vorgestellt wird, ist ein Zusammenschnitt aus dem Buch Feldquantisierung von Herrn Reinhardt und Herrn Greiner [10, S.46-50] und der Vorlesung Quantenfeldtheorie von Herrn Rischke [19, S.24-33].

Das Noether-Theorem besagt:
Zu jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation gehört ein Erhaltungssatz für eine physikalische Größe, die sich aus der Lagrangedichte bestimmen lässt.

Als Ausgangspunkt betrachtet man infinitesimale Transformationen der Koordinaten. Es ist ausreichend infinitesimale Betrachtungen zu machen, da sich kontinuierliche Transformationen aus unendlich vielen Infinitesimalen zusammensetzen lassen:

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \ . \tag{1.8}$$

Die Änderung des Feldes und der Lagrangedichte sei folgendermaßen gegeben, wobei δ für eine infinitesimale Änderung steht:

$$\phi_I'(x') = \phi_I(x) + \delta\phi_I(x) \ , \tag{1.9}$$

$$\mathcal{L}'\left(\phi'(x'), \partial_\mu'\phi'(x'), x'\right) = \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu\phi(x), x\right) + \delta\mathcal{L}\left(x\right) \ . \tag{1.10}$$

Aus Platzgründen wird im Folgenden nur die x- und x'-Abhängigkeit berücksichtigt.
Außerdem definiert man sich eine weitere Variation, die jedoch die Koordinatentransformation nicht berücksichtigt:

$$\tilde{\delta}\phi_I(x) = \phi_I'(x) - \phi_I(x) \ . \tag{1.11}$$

Diese hängt mit Ersterer zusammen. Man benutzt zum Einen die Taylorentwicklung von $\phi_I'(x')$ um x und ersetzt später in nullter Ordnung $\phi_I'(x)$ durch $\phi_I(x)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}\phi_I(x) &= \phi_I'(x) - \phi_I'(x') + \phi_I'(x') - \phi_I(x) \\ &= \delta\phi_I(x) - \left(\phi_I'(x') - \phi_I'(x)\right) \\ &= \delta\phi_I(x) - \left(\phi_I'(x) + \frac{\partial\phi_I'(x)}{\partial x_\mu}\left(x_\mu' - x_\mu\right) + O\left(x^2\right) - \phi_I'(x)\right) \\ &= \delta\phi_I(x) - \frac{\partial\phi_I(x)}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \ .\end{aligned} \tag{1.12}$$

Analog stellt man auch die Relationen für die Lagrangedichte auf:

$$\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) \tag{1.13}$$

$$\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) = \delta\mathcal{L}(x) - \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \ . \tag{1.14}$$

Später wird auch die Vertauschbarkeit der Ableitungen und der verschiedenen Variationen benötigt. Dies soll daher hier schon betrachtet werden.
Man sieht sofort an (1.11), dass dies erfüllt ist:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\tilde{\delta}\phi_I(x) = \tilde{\delta}\left(\frac{\partial\phi_I(x)}{\partial x_\mu}\right) \ . \tag{1.15}$$

Für die am Anfang definierte Änderung des Feldes (1.9) gilt dies nicht ohne Weiteres. Man benötigt für die Rechnung, dass $\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu} = g^\mu_\nu + \frac{\partial \delta x_\nu}{\partial x_\mu}$ gilt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\phi_I(x) &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi'_I(x') - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi_I(x) \\
&= \left(\frac{\partial \phi'_I(x')}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial \phi_I(x)}{\partial x_\mu}\right) + \frac{\partial \phi'_I(x')}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi'_I(x')}{\partial x'_\mu} \\
&= \delta\left(\frac{\partial \phi_I(x)}{\partial x_\mu}\right) + \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial \phi'_I(x')}{\partial x'_\nu} - \frac{\partial \phi'_I(x')}{\partial x'_\mu} \\
&= \delta\left(\frac{\partial \phi_I(x)}{\partial x_\mu}\right) + \frac{\partial \phi'_I(x')}{\partial x'_\nu}\frac{\partial \delta x_\nu}{\partial x_\mu} \\
&= \delta\left(\frac{\partial \phi_I(x)}{\partial x_\mu}\right) + \frac{\partial \phi_I(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial \delta x_\nu}{\partial x_\mu}\ .
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Der nächste Schritt ist nun der Entscheidende. Man fordert, dass die Transformationen (1.8) und (1.9) das Wirkungsintegral invariant lassen:

$$0 \stackrel{!}{=} \delta\mathcal{S} = \int \mathcal{L}'(x')\ \mathrm{d}^4x' - \int \mathcal{L}(x)\ \mathrm{d}^4x\ . \tag{1.17}$$

Dies gilt es nun zu berechnen. Dafür ist es notwendig zu wissen, wie sich die Funktionaldeterminante verhält. Diese Rechnung wird hier vorgeführt. Benötigt wird lediglich, dass $\ln(\det(A)) = tr(\ln(A))$ gilt, sowie die Reihendarstellung des Logarithmus in nullter Ordnung $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ ist. Außerdem werden Terme höherer Ordnung vernachlässigt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^4x' &= \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu}\right| \mathrm{d}^4x \\
&= |g^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu|\, \mathrm{d}^4x \\
&= \det\left(g^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu\right) \mathrm{d}^4x \\
&= \exp\left(\ln\left(\det\left(g^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu\right)\right)\right) \mathrm{d}^4x \\
&= \exp\left(tr\left(\ln\left(g^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu\right)\right)\right) \mathrm{d}^4x \\
&= \exp\left(\partial_\mu \delta x^\mu\right) \mathrm{d}^4x \\
&= \left(1 + \partial_\mu \delta x^\mu\right) \mathrm{d}^4x\ .
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Unter erneuter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung im zweiten Schritt der nächsten Rechnung erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{=} &\int \delta\mathcal{L}(x)\ \mathrm{d}^4x + \int \delta\mathcal{L}(x)\partial_\mu\delta x^\mu\ \mathrm{d}^4x \\
&+ \int \mathcal{L}(x)\ \mathrm{d}^4x + \int \mathcal{L}(x)\partial_\mu\delta x^\mu\ \mathrm{d}^4x - \int \mathcal{L}(x)\ \mathrm{d}^4x \\
=& \int \delta\mathcal{L}(x)\ \mathrm{d}^4x + \int \mathcal{L}(x)\partial_\mu\delta x^\mu\ \mathrm{d}^4x \\
=& \int \left(\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\right)\ \mathrm{d}^4x + \int \mathcal{L}(x)\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu}\ \mathrm{d}^4x \\
=& \int \left(\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\mathcal{L}(x)\delta x^\mu\right)\right)\ \mathrm{d}^4x\ .
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Als nächstes muss man die Variation der Lagrangedichte in der letzten Zeile ausführen und in Ausdruck (1.19) einsetzen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) =& \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi_I}\tilde{\delta}\phi_I(x) + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left(\partial^\mu\phi_I\right)}\tilde{\delta}\left(\frac{\partial\phi_I(x)}{\partial x_\mu}\right) \\
=& \left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi_I}\tilde{\delta}\phi_I(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi_I)}\right)\tilde{\delta}\phi_I(x)\right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left(\partial^\mu\phi_I\right)}\right)\tilde{\delta}\phi_I(x) + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left(\partial^\mu\phi_I\right)}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\tilde{\delta}\phi_I(x)\right) \\
=& \left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi_I} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi_I)}\right)\right]\tilde{\delta}\phi_I(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left(\partial^\mu\phi_I\right)}\tilde{\delta}\phi_I(x)\right]\ .
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Der letzte Schritt besteht darin, Gleichung (1.20) in Gleichung (1.19) einzusetzen. Da das Integrationsvolumen beliebig ist, fordert man, dass der Integrand verschwindet:

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi_I} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi_I)}\right)\right]\tilde{\delta}\phi_I(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left(\partial^\mu\phi_I\right)}\tilde{\delta}\phi_I(x) + \mathcal{L}(x)\delta x^\mu\right] = 0\ . \tag{1.21}$$

Man sieht sofort die Euler-Lagrange-Gleichung im ersten Term der Gleichung und kann diesen demnach vernachlässigen, da er für sich bereits null ergibt. Zusammen mit (1.12) erhält man schließlich eine Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left(\partial^\mu\phi_I\right)}\left(\delta\phi_I(x) - \frac{\partial\phi_I}{\partial x_\nu}\delta x_\nu\right) + \mathcal{L}(x)\delta x_\mu\right] = 0\ . \tag{1.22}$$

Dies lässt sich noch einmal schöner zusammenfassen zu:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}f_\mu(x) = 0\ . \tag{1.23}$$

Man bezeichnet das so definierte Vektorfeld als erhaltenen Noether-Strom:

$$f_\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left(\partial^\mu\phi_I\right)}\delta\phi_I(x) - \left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left(\partial^\mu\phi_I\right)}\frac{\partial\phi_I}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}(x)\right)\delta x^\nu\ . \tag{1.24}$$

Man kann schon jetzt den Klammerterm im Noether-Strom mit dem Energie-Impuls-Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ identifizieren:

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\partial^\mu \phi_I\right)} \frac{\partial \phi_I}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x) \ . \tag{1.25}$$

Der Noether-Strom lässt sich dann knapp zusammenfassen zu:

$$f_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\partial^\mu \phi_I\right)} \delta\phi_I(x) - \Theta_{\mu\nu} \delta x^\nu \ . \tag{1.26}$$

Kontinuitätsgleichungen sind an sich schon Erhaltungssätze, jedoch in differentieller Form und hier raum- und zeitabhängig. Führt man eine Volumenintegration über Gleichung (1.23) durch, so kann man die erhaltene Größe herleiten:

$$0 = \int \frac{\partial}{\partial x_\mu} f_\mu(x) \ \mathrm{d}^3 x \tag{1.27}$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial x_0} f_0(x) \ \mathrm{d}^3 x - \int \vec{\nabla} \vec{f}(x) \ \mathrm{d}^3 x$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_0} \int f_0(x) \mathrm{d}^3 x - \oint \vec{f}(x) \mathrm{d}\vec{A} \ . \tag{1.28}$$

Da der Strom im Unendlichen verschwinden soll, fällt das Oberflächenintegral weg und übrig bleibt die zeitliche Erhaltungsgröße G des Noether-Theorems:

$$G := \int f_0(x) \mathrm{d}^3 x \ . \tag{1.29}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0 \tag{1.30}$$

1.4. Symmetrien und Erhaltungssätze

In diesem Abschnitt soll das Ergebnis des Noether-Theorems explizit auf zwei Fälle angewandt werden. Die Resultate werden einem aus der klassischen Punktmechanik bekannt vorkommen. Zudem werden sie später in dieser Arbeit benötigt. Auch dieser Abschnitt stammt noch aus dem Buch “Feldquantisierung“ [10, S.50 ff].

1. Translationsinvarianz
Translationen in der Raumzeit können durch einen infinitesimalen Verschiebungsparameter ε^μ dargestellt werden. Die Invarianz unter solchen Transformationen ist extrem wichtig. Sie folgt aus der Homogenität der Raumzeit:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \ . \tag{1.31}$$

Man fordert, dass die Form der Felder unverändert bleiben soll, demnach $\delta\phi_I(x) = 0$:

$$\phi'_I(x') = \phi_I(x) \ . \tag{1.32}$$

Die differentielle Erhaltung des Noether-Stromes lautet konsequenterweise:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Theta_{\mu\nu}\right)\varepsilon^\nu = 0 \tag{1.33}$$

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0\ .$$

Die integralen Erhaltungsgößen sind in nachstehender Gleichung enthalten:

$$P^\nu = \int \Theta^{0\nu}(x)\mathrm{d}^3x = const.\ . \tag{1.34}$$

Betrachtet man räumliche und zeitliche Anteile des Vier-Vektors getrennt, so erhält man die Energie, bzw. die Hamilton-Funktion des Systems, sowie in den räumlichen Komponenten den Impuls des Feldes. Diese werden später für den Spin-2-Fall berechnet.

Energie/Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H &= \int \Theta^{00}(x)\mathrm{d}^3x \\ &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\phi_I\right)}\frac{\partial\phi_I(x)}{\partial x_0} - \mathcal{L}\right)\ \mathrm{d}^3x\ . \end{aligned} \tag{1.35}$$

Impuls:

$$\begin{aligned} P^i &= \int \Theta^{0i}(x)\mathrm{d}^3x \\ &= -\int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\phi_I\right)}\frac{\partial\phi_I(x)}{\partial x_i}\right)\ \mathrm{d}^3x\ . \end{aligned} \tag{1.36}$$

2. Lorentzinvarianz

Die Forderung nach Lorentzinvarianz ist die Forderung nach Isotropie der vierdimensionalen Raumzeit. In der nicht relativistischen Punktmechanik wurde sich nur auf die räumlichen Komponenten, sprich Drehungen um die drei Achsen beschränkt. Vierdimensional verallgemeinert kommen noch die Boost-Transformationen hinzu, welche räumliche und zeitliche Komponenten miteinander verknüpfen. Auch diese vierdimensionalen “Drehungen“ haben eine infinitesimale Darstellung:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta\omega^{\mu\nu}x_\nu\ . \tag{1.37}$$

Die Matrix $\delta\omega^{\mu\nu}$ besteht aus den vierdimensional verallgemeinerten, infinitesimalen Drehwinkeln. Die Antisymmetrie folgt aus der Invarianz der Länge des Vektors x^μ unter Transformationen:

$$\begin{aligned} x'^\mu x'_\mu &= \left(x^\mu + \delta\omega^{\mu\sigma}x_\sigma\right)\left(x_\mu + \delta\omega_{\mu\tau}x^\tau\right) \\ &= x_\mu x^\mu + \delta\omega^{\mu\sigma}x_\mu x_\sigma + \delta\omega_{\mu\tau}x^\tau x^\mu + O\left(x^2\right) \\ &= x_\mu x^\mu + 2x_\mu x_\nu \delta\omega^{\mu\nu} \\ &= x_\mu x^\mu + x_\mu x_\nu\left(\delta\omega^{\mu\nu} + \delta\omega^{\nu\mu}\right)\ . \end{aligned} \tag{1.38}$$

Offensichtlich ist jetzt:

$$\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu} \ . \tag{1.39}$$

Nun benötigt man das Transformationsverhalten der Wellenfunktion bzw. des Feldes. Man macht hierzu den Ansatz, dass das transformierte Feld linear von den Drehwinkeln abhängt:

$$\phi'_I(x') = \phi_I(x) + \frac{1}{2}\delta\omega_{\varepsilon\eta}\left(I^{\varepsilon\eta}\right)_{IJ}\phi_J(x) \ . \tag{1.40}$$

Wie schon zu Beginn der Bachelorarbeit erwähnt, transformieren sich die Felder als irreduzible Darstellung der Lorentzgruppe. Die $(I^{\varepsilon\eta})_{IJ}$ sind die zugehörigen Matrixdarstellungen der Generatoren zu den jeweiligen Transformationen. Sie beschreiben wie die einzelnen Elemente eines vielkomponentigen Feldes mischen. Auf Grund von (1.39) kann man die Generatoren antisymmetrisch ansetzen. Die Generatoren erfüllen die Algebra der Lorentzgruppe[3]. Sie lassen sich durch Koeffizientenvergleich mit dem tatsächlichen Transformationsverhalten des Feldes bestimmen.
Im Falle des skalaren Feldes weiß man, dass sich dieses wie folgt transformiert:

$$\phi'(x') = \phi(x) \ . \tag{1.41}$$

Vergleich man dies nun mit dem allgemeinen Ansatz, welcher für ein skalares Feld zu

$$\phi'(x') = \phi(x) + \frac{1}{2}\delta\omega_{\varepsilon\eta}(I^{\varepsilon\eta})\phi(x) \ . \tag{1.42}$$

wird, so sieht man, dass die Generatoren alle gleich null sind. Als zweites nicht triviales Beispiel soll das Transformationsverhalten des Vektorfeldes betrachtet werden. Es transformiert sich unter infinitesimalen Transformationen wie folgt:

$$A'_\mu(x') = A_\mu(x) + \delta\omega_{\mu\nu}A^\nu(x) \ . \tag{1.43}$$

Der allgemeine Ansatz mit Hilfe der Generatoren wird für das Vektorfeld zu:

$$A'_\mu(x') = A_\mu(x) + \frac{1}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}\left(I^{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu}A^\nu(x) \ . \tag{1.44}$$

Durch Koeffizientenvergleich und Ausnutzen der Antisymmetrie der Generatoren (in den Indizes α und β, was aus der Antisymmetrie von $\delta\omega_{\alpha\beta}$ folgt), erhält man für die Generatoren folgende Darstellung:

$$\left(I^{\alpha\beta}\right)^{\mu\nu} = g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} \tag{1.45}$$

Um zu sehen, dass dieses Verfahren tatsächlich auf alle Arten von Feldern angewandt werden kann sei hier noch das infinitesimale Transformationsverhalten für Spinoren

$$\psi'(x') = \psi(x) - \frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi(x) \tag{1.46}$$

mit

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \ , \tag{1.47}$$

[3]Siehe für weitere Details [10, S.52] oder [11, S.451-482].

sowie der Ansatz für Spinoren

$$\psi'(x') = \psi(x) + \frac{1}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}\left(I^{\alpha\beta}\right)\psi(x) \tag{1.48}$$

gegeben. Dies liefert auf die selbe Art folgende Generatoren:

$$I^{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\sigma^{\alpha\beta} \tag{1.49}$$

Die Generatoren für Tensor-Felder werden später in dieser Arbeit im Zusammenhang mit dem Spin hergeleitet (2.46).

Nach diesem Einschub sollte man jedoch nicht das Ziel aus den Augen verlieren: die Erhaltungsgröße. Jetzt ist es von Neuem ein Leichtes den Noether-Strom zu allgemeinen Lorentztransformationen aufzuschreiben und auch zu verstehen. Man findet:

$$f_\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu\phi_I\right)}\frac{1}{2}\delta\omega_{\varepsilon\eta}\left(I^{\varepsilon\eta}\right)_{IJ}\phi_J(x) - \Theta_{\mu\varepsilon}\delta\omega^{\varepsilon\eta}x_\eta \ . \tag{1.50}$$

Der letzte Term kann noch ein wenig umgeschrieben werden. Man verwendet nur den antisymmetrischen Anteil und erhält:

$$f_\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu\phi_I\right)}\frac{1}{2}\delta\omega_{\varepsilon\eta}\left(I^{\varepsilon\eta}\right)_{IJ}\phi_J(x) - \frac{1}{2}\delta\omega^{\varepsilon\eta}\left(\Theta_{\mu\varepsilon}x_\eta - \Theta_{\mu\eta}x_\varepsilon\right) \ . \tag{1.51}$$

Es ist sinnvoll im nächsten Schritt die infinitesimalen Drehwinkel, sowie einen Faktor $\frac{1}{2}$, auszuklammern. Die/der erhaltene Größe/Tensor lautet:

$$M_{\mu\varepsilon\eta}(x) = \Theta_{\mu\eta}x_\varepsilon - \Theta_{\mu\varepsilon}x_\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu\phi_I\right)}\left(I_{\varepsilon\eta}\right)_{IJ}\phi_J(x) \ . \tag{1.52}$$

Die integrale Erhaltungsgröße ist:

$$M_{\varepsilon\eta}(x) = \Theta_{0\eta}x_\varepsilon - \Theta_{0\varepsilon}x_\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0\phi_I\right)}\left(I_{\varepsilon\eta}\right)_{IJ}\phi_J(x) \ . \tag{1.53}$$

Dies ist eine Art vierdimensionaler Drehimpulstensor. Beschränkt man sich auf die räumlichen Komponenten, wird dies deutlich. Man kann dann eine Aufspaltung in einen Bahndrehimpuls L_{nl} und Spin-Anteil S_{nl} vornehmen. Die Kontraktion mit dem Levi-Civita-Tensor liefert schlussendlich die räumlichen Drei-Vektoren des Drehimpulses und Spins.

Drehimpuls:

$$\begin{aligned} L_{nl} &= \int \left(\Theta_{0l}x_n - \Theta_{0n}x_l\right)\ \mathrm{d}^3x \\ &= \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0\phi_I\right)}\left(\frac{\partial\phi_I(x)}{\partial x^l}x_n - \frac{\partial\phi_I(x)}{\partial x^n}x_l\right)\ \mathrm{d}^3x \ . \end{aligned} \tag{1.54}$$

Spin:

$$S_{nl} = \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0\phi_I\right)}\left(I_{nl}\right)_{IJ}\phi_J(x)\ \mathrm{d}^3x \ . \tag{1.55}$$

Allgemeine Kontraktion für Drehimpuls-Tensoren:

$$J^m = \frac{1}{2}\varepsilon_{mnl}M_{nl} \ . \tag{1.56}$$

Schon hier sieht man, dass nicht jedes Feld einen Spin tragen muss. So hat, da die zugehörigen Generatoren verschwinden und der Spin ausschließlich von diesen abhängt, das skalare Feld keinen Spin-Anteil. Der Drehimpulsanteil ist jedoch in jedem Fall vorhanden, da hier die Generatoren keine Rolle spielen, sondern der Impulsanteil des Energie-Impulstensor die zentrale Größe darstellt.

Alle bisherigen Betrachtungen waren rein klassische Feldtheorie. Die einzigen Voraussetzungen sind das Transformationsverhalten bzw. die Gruppenstruktur der Lorentzgruppe und das Prinzip der kleinsten Wirkung gewesen. Dennoch tritt bereits hier eine Größe auf, die man normalerweise im Bereich der Quantenmechanik verordnet, bzw. im Zusammenhang mit dieser zuerst entdeckt wurde: der Spin. Der Spin scheint, mir zumindest seit diesen Betrachtungen, schon eine klassische Größe zu sein, die ein innerer Freiheitsgrad eines kontinuierlichen Systems ist und sich allein aus dem Transformationsverhalten ergibt. Unsere Klassifizierung des Spins als intrinsischer Drehimpuls kommt hier erst durch die Betrachtung der Einheiten, sowie bei der Wechselwirkung mit Magnetfeldern, zustande. Dass es sich hier tatsächlich um den Spin handelt, kann man später gut an der kanonisch quantisierten Version mit Erzeugern und Vernichtern erkennen.

1.5. Alternative Herleitung des Energie-Impuls-Tensors

Wie man bereits im Abschnitt über das Noether-Theorem (1.3) gesehen hat, lässt sich der Energie-Impuls-Tensor aus dem Noether-Theorem herleiten. Man kann ihn jedoch auch durch totales Ableiten der Lagrangedichte erhalten. Dies wird unter anderem in Herr Struckmeiers Werk beschrieben [18].

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_I}\frac{\partial \phi_I}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_I)}\frac{\partial(\partial_\mu \phi_I)}{\partial x^\mu} + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right|_{expl} \ . \tag{1.57}$$

Dies lässt sich mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung (1.5) umschreiben:

$$\delta^\nu_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \phi_I}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi_I)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi_I)}\frac{\partial^2 \phi_I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right|_{expl} \ . \tag{1.58}$$

Wenn man nun geschickt umformt, erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_I)}\frac{\partial \phi_I}{\partial x^\nu} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}\right) + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right|_{expl} \\ &= \frac{\partial {\Theta_\nu}^\mu}{\partial x^\mu} + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right|_{expl} \ . \end{aligned} \tag{1.59}$$

Dabei wurde der Energie-Impuls-Tensor wie folgt definiert:

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_I)}\frac{\partial \phi_I}{\partial x^\nu} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \ . \tag{1.60}$$

Betrachtet man noch einmal Gleichung (1.59), so erkennt man, dass, falls das System nicht explizit raumzeitabhängig ist, es ein konservatives System ist. Es folgt dann Energie-Impuls-Erhaltung, bzw. der Energie-Impuls-Tensor ist eine erhaltene Größe.
Außerdem sollte an dieser Stelle erwähnt werden, dass man den Tensor symmetrisieren kann[4].

[4] Hierzu sei auf [10, S.55 ff] verwiesen.

2. Das klassische reelle Spin-2-Feld

2.1. Bewegungsgleichungen und Zwangsbedingungen

Die Frage, die man sich nach dem einführenden Kapitel über den allgemeinen Lagrangeformalismus (1) stellt, ist, wie man eine Lagrangedichte, welche ein Spin-2-Feld beschreibt, konstruiert. Will man dies von Grund auf richtig machen, so sollte man bei den fundamentalen Symmetriegruppen der Natur starten. In der relativistischen Quantenfeldtheorie ist dies die Poincaré-Gruppe. Diese besteht aus den beiden Untergruppen der vierdimensionalen orthogonalen Transformationen $O(4)$, bzw. der eigentlichen homogenen Lorentz-Gruppe L_p (man unterscheidet sie durch die Wahl der komplexen oder reellen "0"-Komponente des Vier-Vektors) und der vierdimensionalen Translations-Gruppe S. Allgemein sind Poincaré-Transformationen alle von der Form:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\nu} \ . \tag{2.1}$$

Wobei hier $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ die Transformationsmatrix der Lorentztransformation und a^{ν} eine Verschiebung in der Raumzeit darstellt. Diese Transformationen lassen sich auch infinitesimal betrachten[1]. Für eine Lorentztransformation findet man:

$$x'^{\mu} = (g^{\mu}_{\nu} + \delta\omega^{\mu}_{\nu}) x^{\nu} \ . \tag{2.2}$$

Und für eine infinitesimale Translation ergibt sich so:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu} \ . \tag{2.3}$$

Man kann so die Erzeugenden/Generatoren der beiden Untergruppen gewinnen. Mittels der Generatoren lassen sich die endlichen Transformationen der Untergruppen durch unendlich viele infinitesimale Transformationen darstellen. Die Generatoren der Lorentzgruppe $I^{\mu\nu}$ und die Generatoren der Translations-Gruppe P^{μ} erfüllen eine Algebra, welche die Poincaré-Gruppe definiert[2]:

$$\left[I^{\alpha\beta}, I^{\gamma\delta}\right]_{-} = -g^{\alpha\gamma} I^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} I^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma} I^{\alpha\delta} - g^{\beta\delta} I^{\alpha\gamma} \ , \tag{2.4}$$

$$[P^{\mu}, P^{\nu}]_{-} = 0 \ , \tag{2.5}$$

$$[I^{\mu\nu}, P^{\sigma}]_{-} = P^{\mu} g^{\nu\sigma} - P^{\nu} g^{\mu\sigma} \ . \tag{2.6}$$

[1] An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Poincaré-Gruppe auch die Raum- bzw. Zeit-Spiegelung enthält. Diese Transformationen lassen sich nicht aus infinitesimalen Transformationen zusammensetzen. Sie sollen im folgenden Abschnitt vernachlässigt werden. Man wird jedoch sehen, dass sie später, im Rahmen des CPT-Theorems, im Kapitel über Multiplets von Tensormesonen (4) wichtig werden.

[2] Diese gruppentheoretischen Betrachtungen werden sehr ausführlich im Skript von Mulders [14, S.18-22] und im Skript von Herrn Snoek [1, S.109-118] zur Gruppentheorie in der Physik hergeleitet und Diskutiert. Dieser Abschnitt setzt sich weitestgehend aus diesen Schriften zusammen. Außerdem sind noch Betrachtungen aus dem letzten Kapitel des Buches von Herrn Greiner eingeflossen [11, S.451 ff].

Man sieht sehr schön, dass zwar Translationen in beliebige Raum-Zeit-Richtungen vertauschen, jedoch nicht Lorentztransformationen untereinander, oder Lorentztransformationen mit Translationen.
Bisher sind dies nur Gedanken zu dem der Theorie zu Grunde liegenden Raum, sprich der vierdimensionalen Raumzeit. Man fordert an dieser Stelle, dass fundamentale Theorien unserer Natur, unter obigen Transformationen, invariant sein sollten, sprich diese Symmetrien aufweisen müssen. Dies heißt, dass auch charakteristische physikalische Größen eines physikalischen Objektes (dies werden die Teilchen/Quanten/Felder sein) unter obigen Symmetrie-Operationen invariant sein müssen. Physikalische Größen sind stets Eigenwerte von Operatoren. Die Konsequenz ist, dass es Operatoren geben muss, welche invariant unter der Poincaré-Gruppe sind und demnach mit allen Generatoren der Gruppe vertauschen. In der Sprache der Gruppentheorie nennt man solche Objekte Casimir-Operatoren der Gruppe.
Im Fall der Poincaré-Gruppe gibt es zwei Casimir-Operatoren. Der Erste hat folgende Gestalt:

$$P^2 = P_\mu P^\mu \tag{2.7}$$

und misst das Quadrat des Vier-Impulses, des Zustandes, auf welchen er angewandt wird und somit die Masse des Teilchens für massive Teilchen.
Der zweite Casimir-Operator lässt sich schreiben als

$$W^2 = W_\mu W^\mu \ , \tag{2.8}$$

wobei hier W^μ der Pauli-Lubanski-Operator ist:

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu I_{\rho\sigma} \ . \tag{2.9}$$

Der Eigenwert dieses Operators im massiven Fall ist $-m^2 s(s+1)$, wobei $s \ \epsilon \ 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, ...$ ist. Man sieht so, dass der Operator den Spin misst, der Faktor m spielt hier keine Rolle. (Im masselosen Fall hat W_μ^2 den Eigenwert 0, und zur Messung des Spins ist es nötig auf die Bewegungsrichtung des Teilchens zu projizieren.)
Man sieht so, dass Teilchen durch die unter Poincaré-Transformationen invarianten Größen, Masse und Spins/Helizität, charakterisiert sind.

Nun folgt die schwierige Aufgabe, die Bewegungsgleichungen und Zwangsbedingungen für ein Spin-2-Feld aufzustellen. Die grundlegende Gleichung für massive Teilchen/Felder ist die Klein-Gordon-Gleichung. Sie lässt sich als erste Bewegungsgleichung noch sehr leicht motivieren, da sie schlicht die Eigenwertgleichung des ersten Casimir-Operators in der Ortsbasis ist:

$$P^2\phi(x) = m^2\phi(x) \ . \tag{2.10}$$

Der Translationsoperator/Impulsoperator lässt sich in der Ortsbasis durch Ableitungen ausdrücken $P_\mu = -i\partial_\mu$. Damit erhält man:

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \ . \tag{2.11}$$

Für die weiteren Zwangsbedingungen möchte ich ein wenig heuristisch argumentieren und für Details auf verschiedene Veröffentlichungen verweisen, da hier ein tieferes Verständnis von

Gruppen- und Darstellungstheorie erforderlich ist, welches ich selbst noch nicht in ausreichendem Maße besitze und nicht nötig ist, um sie zu verstehen.
Wenn man an die bekannten Theorien für massive Teilchen denkt, so kann man sich klarmachen, dass für jede mögliche Spin-Einstellung ein Freiheitsgrad in der Wellenfunktion existieren muss. Im Spin-0-Fall ist dies gerade einer, was dazu führt, dass man ein skalares Feld mit einem Freiheitsgrad zu seiner Beschreibung verwendet. Für Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen benötigt man, auf Grund der Spineinstellungen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ schon zwei Freiheitsgrade, was perfekt durch Spinoren erfüllt wird. Im Falle des massiven Spin-1-Teilchens müssen auf Grund der drei Einstellmöglichkeiten $+1$, 0 und -1 bereits Lorentz-Vektoren zur Beschreibung herangezogen werden. Der vierte überflüssige Freiheitsgrad wird durch die Lorentz-Bedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ eliminiert, welche sich auch gruppentheoretisch motivieren lässt, jedoch hierzu später mehr.
Nun ist es nur konsequent, die Einstellmöglichkeiten des Spins für Spin-2-Teilchen zu zählen ($+2$, $+1$, 0, -1, -2), was fünf ergibt. Da es sich um einen ganzzahligen Spin handelt, bleibt man, was man auch zeigen kann, bei einer Lorentz-Darstellung und verwendet keine Spinor-Darstellung. Da nun jedoch ein Lorentz-Index/Lorentz-Vektor nur vier Komponenten hat, benötigt man einen zusätzlichen Index und gelangt so zu einem Lorentz-Tensor vom Rang zwei. Dieser hat im Allgemeinen 16 unabhängige Komponenten, was jedoch eindeutig zu viel ist, da nur fünf benötigt werden. Glücklicherweise lässt sich die Anzahl reduzieren.
Zunächst muss man wissen, dass Rang-2-Tensoren $B_{\mu\nu}$ zerlegt werden können. Man kann sie aufspalten in einen symmetrischen $S_{\mu\nu}$ und einen antisymmetrischen $A_{\mu\nu}$ Anteil, sowie einen Teil, welcher nur die Spur T enthält:

$$B_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} T \ . \tag{2.12}$$

Man kann zeigen[3], dass diese Anteile separat unter einer Lorentztransformation transformieren, was entscheidend ist, wenn man sie einzeln diskutieren will. Da sich die Spur eines Lorentz-Tensors gerade wie ein Skalar transformiert und nur einen Freiheitsgrad besitzt, jedoch hier Spin-2-Teilchen beschrieben werden sollen, kann sie direkt ausgeschlossen werden. Es bleiben noch 15 unabhängige Komponenten. Aus der Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe weiß man auch, dass sich der antisymmetrische Anteil mit dem Spin-1-Teilchen identifizieren lässt. Dies kann man sich klar machen, indem man die Anzahl der unabhängigen Komponenten zählt. Man kommt schnell auf sechs. Wendet man nun jedoch auch hier die Lorentz-Bedingung an $\partial_\mu A^{\mu\nu} = 0$, welche vier Freiheitsgrade eliminiert, kommt man genau auf die gesuchten drei Freiheitsgrade des Spin-1-Feldes. Eine andere Möglichkeit dies einzusehen ist, sich den Feldstärketensor aus der Maxwell- oder Proca-Theorie anzuschauen, welcher auch als antisymmetrischer Tensor Spin-1-Felder beschreibt.
Es bleibt demnach noch der symmetrische Anteil des Tensorfeldes übrig, welcher immerhin noch neun Freiheitsgrade besitzt. Diese kann man allerdings auch von Neuem schnell durch die Lorentz-Bedingung auf fünf Freiheitsgrade reduzieren, welches die gewünschte Anzahl ist.
Man stellt demnach fest, dass ein Spin-2-Feld/Teilchen durch ein symmetrisches, spurfreies und divergenzfreies Tensorfeld $T^{\mu\nu}$, welches komponentenweise die Klein-Gordon-Gleichung

[3] Dies wurde von Khamse [5, S.31-32] getan.

erfüllt, beschrieben werden kann:

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = 0 \ , \tag{2.13}$$

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.14}$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.15}$$

$$(\Box + m^2) T^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.16}$$

Dies ist sicherlich keine saubere Herleitung der so genannten Fierz-Pauli-Gleichungen aus der Poincaré-Gruppe, jedoch habe ich dies selbst auch noch nie in einwandfreier Form gesehen oder vielleicht auch noch nicht verstanden. Dennoch will ich dem Leser die meines Erachtens besten Herleitungen nicht vorenthalten. So gibt es zum Beispiel einen sehr ausführlichen Übersichtsartikel von den Physikern Bekaert und Boulanger, welcher jedoch ohne ein solides Wissen über Gruppentheorie kaum zu verstehen ist, jedoch auch auf die Fierz-Pauli-Gleichungen kommt [2, S.35-37]. Zudem gibt es ein Verfahren zur Herleitung relativistischer Wellengleichungen, welches auf Bargmann und Wigner zurückgeht und im fünfzehnten Kapitel im Buch von Herrn Greiner erläutert wird [11, S.402-450]. Dieses Verfahren wird von Herrn Huang et al. aufgegriffen und auf Spin-2-Felder übertragen [24, S.63f]. Unter dem Stichwort Bargmann-Wigner-Gleichungen lassen sich noch mehr solcher Herleitungen finden. Eine weitere Herleitung findet man in einem Buch von Barut und Raczka [17, S.603f].

2.2. Die Lagrangedichte

In Abschnitt (2.1) wurden die Zwangsbedingungen, auch Fierz-Pauli-Gleichungen, motiviert. Der nächste Schritt besteht darin eine Lagrangedichte aufzustellen, welche alle Bedingungen liefert. Zudem sollte sich aus der Lagrangedichte auch direkt der Propagator ableiten lassen. Die Lagrangedichte, welche alle diese Forderungen erfüllt, sieht folgendermaßen aus und ist in einem Paper von Dalmazi [4, S.3] und auch in anderen Artikeln in ähnlicher Form erwähnt[4], jedoch stets in unterschiedlichen Notationen und verschiedenen Zusammenhängen.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &\frac{1}{2}\partial_\mu \left(\frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}\right)\right)\partial^\mu \left(\frac{1}{2}\left(T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}\right)\right) - \frac{1}{4}\partial_\mu T \partial^\mu T \\ &- \left(\partial_\mu \left(\frac{1}{2}\left(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}\right)\right) - \frac{1}{2}\partial_\nu T\right)^2 + \frac{m^2}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}\right)\right)^2 - T^2\right) \ . \end{aligned} \tag{2.17}$$

In dieser Form kann man schon die Symmetrie des Feldes erkennen. Um besser rechnen zu können, bietet es sich jedoch an die einzelnen Terme auszumultiplizieren und zusammenzufassen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &\frac{1}{4}\left(\partial_\mu T_{\alpha\beta}\partial^\mu T^{\alpha\beta} + \partial_\mu T_{\alpha\beta}\partial^\mu T^{\beta\alpha}\right) - \frac{1}{2}\partial_\mu T \partial^\mu T \\ &- \frac{1}{4}\left(\partial_\alpha T^{\alpha\beta}\partial^\mu T_{\mu\beta} + \partial_\alpha T^{\alpha\beta}\partial^\mu T_{\beta\mu} + \partial_\alpha T^{\beta\alpha}\partial^\mu T_{\mu\beta} + \partial_\alpha T^{\beta\alpha}\partial^\mu T_{\beta\mu}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\partial_\mu T^{\mu\nu}\partial_\nu T + \partial_\mu T^{\nu\mu}\partial_\nu T\right) \\ &- \frac{m^2}{4}\left(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} + T_{\mu\nu}T^{\nu\mu}\right) + \frac{m^2}{2}T^2 \ . \end{aligned} \tag{2.18}$$

[4] S. C. Bhargava und H. Watanabe haben schon 1966 einen Lagrangian für komplexe Spin-2-Felder aufgestellt [21, S.274], welche alle Zwangsbedingungen liefert und mehr als einen freien Parameter enthält. Später werde ich noch einmal auf diesen Artikel verweisen.

2.3. Ableitung der Zwangsbedingungen und Bewegungsgleichung

Um die Zwangsbedingungen und die Bewegungsgleichung des Feldes zu erhalten, muss man die Euler-Lagrange-Gleichung berechnen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_{\alpha\beta}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu T_{\alpha\beta})} = 0 \ . \tag{2.19}$$

Nach einer etwas längeren, jedoch einfachen Rechnung erhält man schließlich die volle Bewegungsgleichung für ein zunächst noch allgemeines Tensorfeld [5]:

$$\begin{aligned} 0 = &-\frac{1}{2}\left(\Box T_{\mu\nu} + \Box T_{\nu\mu}\right) + g_{\mu\nu}\Box T \\ &+ \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial^\alpha T_{\alpha\nu} + \partial_\mu\partial^\alpha T_{\nu\alpha} + \partial_\nu\partial^\alpha T_{\alpha\mu} + \partial_\nu\partial^\alpha T_{\mu\alpha}\right) \\ &- \left(\partial_\mu\partial_\nu T + g_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta T^{\alpha\beta}\right) \\ &- \frac{m^2}{2}\left(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}\right) + g_{\mu\nu} m^2 T \ . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Aus diesem Ausdruck können alle Zwangsbedingungen abgeleitet werden, was hier vorgeführt werden soll.
Da man, wie bereits gezeigt, Tensoren stets in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil zerlegen kann[6], werden wir Gleichung (2.20) zunächst für den antisymmetrischen Tensor betrachten. Man beachte, dass antisymmetrische Tensoren ohnehin spurfrei sind. Man nutzt an diesem Punkt $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$, und dass die Kontraktion zwischen einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Tensor verschwindet.

$$\begin{aligned} 0 = &-\frac{1}{2}\left(\Box T_{\mu\nu} - \Box T_{\mu\nu}\right) + g_{\mu\nu}\Box T \\ &+ \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial^\alpha T_{\alpha\nu} - \partial_\mu\partial^\alpha T_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha T_{\alpha\mu} - \partial_\nu\partial^\alpha T_{\alpha\mu}\right) \\ &- \left(\partial_\mu\partial_\nu T + g_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta T^{\alpha\beta}\right) \\ &- \frac{m^2}{2}\left(T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}\right) + g_{\mu\nu} m^2 T \ . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Man sieht, dass sich hier alle Terme gegenseitig kompensieren oder auf Grund anderer Eigenschaften gleich 0 sind. Demnach spielt der antisymmetrische Anteil in dieser Theorie keine Rolle. Das Tensorfeld kann daher im Folgenden als symmetrisch betrachtet werden. Gleichung (2.20) lässt sich zusammenfassen zu der Bewegungsgleichung des symmetrischen Anteils:

$$\begin{aligned} 0 = &-\Box T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box T + \left(\partial_\mu\partial^\alpha T_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha T_{\mu\alpha}\right) \\ &- \left(\partial_\mu\partial_\nu T + g_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta T^{\alpha\beta}\right) - m^2 T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} m^2 T \ . \end{aligned} \tag{2.22}$$

[5] Diese Gleichung ist auch in etwas anderer Form als Fierz-Pauli-Gleichung bekannt. Jedoch wird dort die Symmetrie des Tensorfeldes vorausgesetzt, obwohl es ein leichtes ist, dies zu auch zeigen.

[6] Die Zerlegung kann noch weiter geführt werden, in symmetrisch & spurfrei und antisymmetrisch und mit Spur. Wichtig ist hierbei, dass diese Zerlegung nur möglich ist und genutzt werden kann, weil jeder Teil eigenständig unter Lorentztransformationen transformiert und nicht mischt. Dies wird in einem Skript [5, S.31-32] von Herrn Ave Khamseh gezeigt, wurde jedoch schon am Anfang des Kapitels benutzt.

Der nächste Schritt besteht darin, ähnlich wie im Falle der Proca-Theorie, die Divergenz ∂^μ dieses Ausdrucks zu bilden. Dies, als auch die nachstehenden Rechnungen zur Ableitung der Zwangsbedingungen, findet man, bis auf die Symmetrieeigenschaft, auch bei Herrn Hinterbichler [12, S.16].

$$\begin{aligned} 0 = &-\Box\partial^\mu T_{\mu\nu} + \partial_\nu \Box T + \left(\Box\partial^\alpha T_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha\partial^\mu T_{\mu\alpha}\right) \\ &- \left(\Box\partial_\nu T + \partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta T^{\alpha\beta}\right) - m^2\partial^\mu T_{\mu\nu} + \partial_\nu m^2 T \ . \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dies ergibt den Zusammenhang

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial^\nu T \ , \tag{2.24}$$

welchen man wiederum in Gleichung (2.22) einsetzt:

$$\begin{aligned} 0 &= -\Box T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box T + (\partial_\mu\partial_\nu T + \partial_\nu\partial_\mu T) \\ &\quad - (\partial_\mu\partial_\nu T + g_{\mu\nu}\Box T) - m^2 T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} m^2 T \\ &= -\Box T_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu T - m^2 T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} m^2 T \ . \end{aligned} \tag{2.25}$$

Die Spur hiervon liefert einem das kurze Ergebnis:

$$0 = -\Box T + \Box T - m^2 T + 4m^2 T \ . \tag{2.26}$$

Und somit hat man auch die Spurfreiheit des Tensorfeldes aus der Lagrangedichte ableiten können, sowie mit Gleichung (2.24) die Divergenzfreiheit; auch die Symmetrie sei hier noch einmal explizit aufgelistet:

$$T = 0 \ , \tag{2.27}$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.28}$$

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = 0 \ . \tag{2.29}$$

Der letzte Schritt besteht nur noch darin, alle bisher gewonnenen Bedingungen an das Feld in (2.22) einzusetzen. Man erhält als letzte Bedingung die eigentliche Bewegungsgleichung des Feldes. Wie gefordert und zu erwarten war, ist dies die Klein-Gordon-Gleichung, oder auch Massenschalenbedingung für die einzelnen Komponenten:

$$0 = (\Box + m^2) T_{\mu\nu} \ . \tag{2.30}$$

2.4. Propagator

Wie bei jeder klassischen und insbesondere Quanten-Feldtheorie ist, auch im Falle des Spin-2-Feldes, der Propagator eine entscheidende Größe. Es gibt eine sehr einfache Methode den Feynman-Propagator herzuleiten. Diese ist im Kapitel 7.5 im Buch "Feldquantisierung" [10, S.117ff] für einige Lagrangedichten durchgeführt und dort knapp mit folgenden Worten zusammengefasst: "Der Feynman-Propagator im Impulsraum entsteht durch Invertieren des fouriertransformierten Differentialoperators der Lagrangedichte". Dieses Verfahren/"Kochrezept" soll hier auch angewandt werden[7].

[7] Diese Prozedur wurde auch in [12, S.21] durchgeführt, jedoch meiner Meinung nach nicht mathematisch einwandfrei. Das Feld in der Lagrangedichte wird von Anfang an als symmetrisch angenommen. So fehlen Terme, welche man für den Propagator benötigt. Dennoch kommt Herr Hinterbichler auf den korrekten Propagator. Darauf werde ich auch später noch einmal im Detail eingehen.

Der Ausgangspunkt ist die Lagrangedichte (2.18), welche man in ihren Differentialoperator und die Felder zerlegt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} T^{\nu\rho} D^{-1}_{\nu\rho\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \ . \tag{2.31}$$

Im oben stehenden Ausdruck werden Ableitungen durch Impulse in nachstehender Weise ersetzt:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\partial}^{\mu} &\to +ik^{\mu} \ , \\ \overrightarrow{\partial}^{\mu} &\to -ik^{\mu} \ . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Nach ein wenig Rechnung erhält man den Differentialoperator in dieser Gestalt:

$$\begin{aligned} D^{-1}_{\nu\rho\alpha\beta} = & \frac{1}{2}\left(k^2 - m^2\right)\left(g_{\nu\alpha}g_{\rho\beta} + g_{\nu\beta}g_{\rho\alpha}\right) \\ & - \left(k^2 - m^2\right)\left(g_{\nu\rho}g_{\alpha\beta}\right) \\ & - \frac{1}{2}\left(g_{\rho\beta}k_\nu k_\alpha + g_{\rho\alpha}k_\nu k_\beta + g_{\nu\alpha}k_\rho k_\beta + g_{\nu\beta}k_\rho k_\alpha\right) \\ & + \left(g_{\nu\rho}k_\alpha k_\beta + g_{\alpha\beta}k_\nu k_\rho\right) \ . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Der nächste Schritt besteht darin, diese Matrix zu invertieren. Dies klingt wesentlich leichter, als es ist. Ohne jeglichen Ansatz wäre man hier verloren. Aus anderen Überlegungen (vgl. Zee [23, S.32-39]) weiß man jedoch bereits wie der Propagator auszusehen hat. Man könnte nun fragen, wozu man dann noch diese komplizierte Matrix invertieren sollte, doch ist dagegen einzuwenden, dass man nur so zeigen kann, ob die Überlegungen von Herrn Zee [23, S.35] korrekt sind. Zudem kann man nur so die Konstanten im Lagrangian und im Propagator konsistent wählen[8]. Formal geht man wie folgt vor: Man wählt einen Ansatz für den Propagator, kontrahiert diesen mit dem Differentialoperator (was eine symmetrische 1 geben muss) und bestimmt so die freien Parameter. Für den Differentialoperator und sein Inverses, den Propagator $P^{\alpha\beta\sigma\lambda}$, gilt zunächst wie gefordert[9]:

$$D^{-1}_{\nu\rho\alpha\beta} P^{\alpha\beta\sigma\lambda} = \frac{1}{2}\left(g^\sigma_\nu g^\lambda_\rho + g^\lambda_\nu g^\sigma_\rho\right) \ . \tag{2.34}$$

Mit nachfolgendem Ansatz können die freien Parameter bestimmt werden. Die Rechnung erweist sich auch hier nicht als besonders schwer, jedoch extrem lang. Daher soll sie hier nicht durchgeführt werden, sondern im Anhang (B). Es sei nur das Resultat für den Propagator angegeben.
Der Ansatz sollte, wie auch der Differentialoperator, in den ersten und zweiten beiden Indizes

[8] Siehe hierzu auch die Diskussion über die Normierung der Polarisationstensoren später in dieser Arbeit.

[9] Herr Hinterbichler [12, S.21] stellt die gleiche Forderung auf, gibt jedoch keinen Ansatz zur Lösung. Es wird auch nicht klar, wie er von seinem Lagrangian auf seinen Differentialoperator kommt, da dieser die Symmetrie direkt enthält, während er in seiner Lagrangedichte die Symmetrie des Feldes noch annimmt (siehe [12, 13]). Er kommentiert dies nur mit "Integrating by parts, we can rewrite the Fierz-Pauli action as" [12, S.21], was nach meinem Wissen nicht ausreicht, um den Differentialoperator aus seinem Lagrangian zu erhalten. Ich nehme an, dass Herr Hinterbichler die Rechnung auf die selbe Art wie in dieser Arbeit durchgeführt hat, jedoch seine Resultate anschließend zu Lasten der Verständlichkeit vereinfacht hat.

symmetrisch gewählt werden:

$$\begin{aligned}P_{\alpha\beta\sigma\lambda} = {} & A\left(g_{\alpha\sigma}g_{\beta\lambda} + g_{\alpha\lambda}g_{\beta\sigma}\right) \\ & + B\left(g_{\alpha\beta}g_{\sigma\lambda}\right) \\ & + C\left(g_{\beta\lambda}k_\alpha k_\sigma + g_{\beta\sigma}k_\alpha k_\lambda + g_{\alpha\sigma}k_\beta k_\lambda + g_{\alpha\lambda}k_\beta k_\sigma\right) \\ & + D\left(g_{\sigma\lambda}k_\alpha k_\beta + g_{\alpha\beta}k_\sigma k_\lambda\right) \\ & + E\left(k_\alpha k_\beta k_\sigma k_\lambda\right)\ .\end{aligned} \tag{2.35}$$

Berechnet man nun die Konstanten $A, ..., E$ durch einen Koeffizientenvergleich nach dem Ausmultiplizieren mit dem Differentialoperator, so erhält man den Propagator der Theorie. Diese Rechnung wird in Apendix (B) durchgeführt.

$$\begin{aligned}P_{\alpha\beta\sigma\lambda} = \frac{1}{2}\frac{1}{(k^2-m^2)}\Bigg(& \left(g_{\alpha\sigma}g_{\beta\lambda} + g_{\alpha\lambda}g_{\beta\sigma}\right) - \frac{2}{3}\left(g_{\alpha\beta}g_{\sigma\lambda}\right) \\ & - \frac{1}{m^2}\left(g_{\beta\lambda}k_\alpha k_\sigma + g_{\beta\sigma}k_\alpha k_\lambda + g_{\alpha\sigma}k_\beta k_\lambda + g_{\alpha\lambda}k_\beta k_\sigma\right) \\ & + \frac{2}{3m^2}\left(g_{\sigma\lambda}k_\alpha k_\beta + g_{\alpha\beta}k_\sigma k_\lambda\right) \\ & + \frac{4}{3m^4}\left(k_\alpha k_\beta k_\sigma k_\lambda\right)\Bigg)\ .\end{aligned} \tag{2.36}$$

Man wird später schnell feststellen, dass der Zähler des Propagators mit der Vollständigkeitsrelation (2.73) übereinstimmt. Dies ist auch in Einklang mit der Proca-Theorie und dem Photon-Propagator. Auch das Dirac-Feld enthält eine Vollständigkeitsrelation, doch dazu mehr im Abschnitt (2.8). Wie man auch erst später sehen wird, lässt sich obiges Resultat noch zusammenfassen. Hier sei auf Gleichung (2.74) verwiesen.

$$P_{\alpha\beta\sigma\lambda} = \frac{\left(G_{\alpha\sigma}G_{\beta\lambda} + G_{\alpha\lambda}G_{\beta\sigma}\right) - \frac{2}{3}\left(G_{\alpha\beta}G_{\sigma\lambda}\right)}{2\left(k^2-m^2\right)}\ . \tag{2.37}$$

Man sieht demnach, dass Herr Zee mit seinen Überlegungen richtig lag. Das Schöne ist jedoch, dass zusammen mit den nächsten Abschnitten die Theorie des Spin-2-Feldes konsistent aufgezogen ist[10]. Wie ich bereits zu Beginn dieses Kapitels angemerkt habe, kamen auch die Autoren Bhargava und Watanabe zu einer Lagrangedichte für Spin-2-Felder. Auch in ihrem Artikel findet sich ein Ausdruck für den Propagator [21, S.277], der jedoch leider nicht ausführlich berechnet wurde. Da ich dies selbst nicht getan habe, kann ich mein Resultat leider nicht mit den Überlegungen von Bhargava und Watanabe vergleichen. Ein vergleichbares Resultat liefert jedoch R. J. Rivers in einer Arbeit über Spin-2-Felder. Der Propagator hat hier grundsätzlich die selbe Gestalt wie nach obiger Herleitung [20, S.394].

2.5. Energie-Impuls-Tensor

Da wir nun einen kompakten Ausdruck für die Lagrangedichte vorliegen haben, lässt sich unter anderem auch der zugehörige Energie-Impuls-Tensor (2.38) aufstellen. Man berechnet

[10] Ich habe mir hierbei größte Mühe gegeben um Inkonsistenzen zu vermeiden und alle Rechnungen verständlich zu präsentieren. Sollten dem Leser dennoch Unklarheiten auffallen, so bitte ich um Rückmeldungen.

ihn durch Einsetzen der Lagrangedichte in (1.60):

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu}T^{\alpha\beta}\right)}\partial_{\nu}T^{\alpha\beta} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}T_{\alpha\beta}\partial_{\nu}T^{\alpha\beta} + \partial_{\mu}T_{\beta\alpha}\partial_{\nu}T^{\alpha\beta}\right) - \partial_{\mu}T\partial_{\nu}T \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\partial_{\nu}T_{\mu\rho}\partial_{\gamma}T^{\gamma\rho} + \partial_{\nu}T_{\mu\rho}\partial_{\gamma}T^{\rho\gamma} + \partial_{\nu}T_{\rho\mu}\partial_{\gamma}T^{\gamma\rho} + \partial_{\nu}T_{\rho\mu}\partial_{\gamma}T^{\rho\gamma}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\partial_{\nu}T_{\mu\rho}\partial^{\rho}T + \partial_{\nu}T_{\rho\mu}\partial^{\rho}T + \partial_{\nu}T\partial^{\rho}T_{\rho\mu} + \partial_{\nu}T\partial^{\rho}T_{\mu\rho}\right) - g_{\mu\nu}\mathcal{L}\ .\end{aligned} \tag{2.38}$$

Da man auch hier an physikalischen Lösungen interessiert ist, verwendet man die Zwangsbedingungen (2.27), (2.28) und (2.29) und vereinfacht den Energie-Impuls-Tensor zu:

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} &= \partial_{\mu}T_{\alpha\beta}\partial_{\nu}T^{\alpha\beta} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{zwang} \\ &= \partial_{\mu}T_{\alpha\beta}\partial_{\nu}T^{\alpha\beta} - g_{\mu\nu}\frac{1}{2}\left(\partial_{\gamma}T_{\alpha\beta}\partial^{\gamma}T^{\alpha\beta} - m^2 T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}\right)\ .\end{aligned} \tag{2.39}$$

Dies ist ein sehr gutes Resultat, da der Energie-Impulstensor schon symmetrische Gestalt hat und demnach nicht noch symmetrisiert werden muss. Zudem erhält R. J. Rivers das selbe Resultat für seine Lagrangedichte des Spin-2-Feldes [20, S.397].

Konsequenterweise sollte man nun auch zeigen, dass die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors verschwindet, sprich das System ohne externe Ströme ein konservatives System ist. Hierzu wird die Bewegungsgleichung (Massenschalenbedingung) benötigt.

$$\begin{aligned}\partial^{\mu}\Theta_{\mu\nu} &= \Box T_{\alpha\beta}\partial_{\nu}T^{\alpha\beta} + \partial_{\mu}T_{\alpha\beta}\partial^{\mu}\partial_{\nu}T^{\alpha\beta} - \partial_{\gamma}T_{\alpha\beta}\partial^{\gamma}\partial_{\nu}T^{\alpha\beta} + m^2\partial_{\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \\ &= \left(\Box + m^2\right)T_{\alpha\beta}\partial_{\nu}T^{\alpha\beta} \\ &= 0\ .\end{aligned} \tag{2.40}$$

Dies war bereits zu erwarten, wenn man davon ausgeht, dass die Lagrangedichte sinnvoll und nicht explizit raumzeitabhängig ist. Das System ist translationsinvariant.

2.6. Erhaltungsgrößen

Im vorangegangen Kapitel wurde die Translationsinvarianz bestätigt. Man kann jetzt die Erhaltungsgrößen aus dem Energie-Impuls-Tensor ableiten. Dies geschieht durch Einsetzen des Energie-Impuls-Tensors in (1.35), (1.36) und (1.54). Für den Spin (1.55) werden noch die Generatoren benötigt. Dabei verwendet man für das kanonisch konjugierte Feld $\partial_0 T_{\alpha\beta} = \Pi_{\alpha\beta}$, was später im Kapitel (3.1) gezeigt wird. Extrem wichtig ist es an dieser Stelle zu erwähnen, dass ab diesem Moment die Hamilton-Funktion, im Vergleich zu Lagrangedichte, nicht mehr die vollständige Information über das System trägt, da sie nicht aus einer Legendre-Transformation der Lagrangedichte hervorgeht, sondern als physikalische Größe die Energie des Systems beschreibt und aus dem Energie-Impuls-Tensor stammt. Man hatte hier die Bewegungsgleichungen und Zwangsbedingungen bereits verwendet, um den Energie-Impulstensor auf eine physikalische Form zu bringen. Demnach können diese Zwangsbedingungen nicht mehr durch Anwenden der kanonischen Gleichungen aus der Hamilton Funktion gewonnen werden. Will man jedoch eine manifest kovariante Hamiltondichte, aus der man selbst alle Informationen und Bewegungsgleichungen ableiten kann, so muss man eine Legendre-Transformation der Lagrangedichte durchführen, bei der nicht nur die Ableitung der Lagrangedichte nach der zeitlichen Ableitung des Feldes das kanonisch konjugierte Feld liefert $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \Pi$, sondern muss das kanonisch konjugierte Feld durch Ableiten nach der Vierdivergenz des Feldes bilden $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \Pi^\mu$. Dieses Problem wird leider zu selten deutlich gemacht. Für eine detaillierte Diskussion will ich auf das Buch von Herrn Struckmeier [18] verweisen, in welchem er sich dieses Problem zu seinem Hauptthema macht. Demnach lauten Energie-/Hamilton-Funktion und der Impuls des Feldes:

Energie/Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 T_{\alpha\beta}\right)} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_0} - \mathcal{L} \right) \, \mathrm{d}^3x \\ &= \int \left(\Pi_{\alpha\beta}\Pi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(\Pi_{\alpha\beta}\Pi^{\alpha\beta} - \vec{\nabla} T_{\alpha\beta}\vec{\nabla} T^{\alpha\beta} - m^2 T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \right) \right) \, \mathrm{d}^3x \\ &= \int \frac{1}{2}\left(\Pi_{\alpha\beta}\Pi^{\alpha\beta} + \vec{\nabla} T_{\alpha\beta}\vec{\nabla} T^{\alpha\beta} + m^2 T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \right) \, \mathrm{d}^3x \; . \end{aligned} \tag{2.41}$$

Impuls:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -\int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 T_{\alpha\beta}\right)} \vec{\nabla} T_{\alpha\beta} \right) \, \mathrm{d}^3x \\ &= -\int \left(\Pi_{\alpha\beta}\vec{\nabla} T^{\alpha\beta} \right) \mathrm{d}^3x \; . \end{aligned} \tag{2.42}$$

Um auch die Erhaltungsgrößen zur Lorentzinvarianz abzuleiten, benötigt man zunächst das Transformationsverhalten des Tensorfeldes unter Lorentztransformationen. Dies lässt sich herleiten, indem man das Tensorfeld in ein Produkt aus zwei Vektorfelder zerlegt und deren infinitesimales Transformationsverhalten verwendet. Im letzten Schritt wird die Symmetrie des Feldes ausgenutzt. Man berechnet so:

$$\begin{aligned} T'^{\mu\nu} &= \Lambda^{\mu\alpha}\Lambda^{\nu\beta} T_{\alpha\beta} \\ &= \left(g^{\mu\alpha} + \delta\omega^{\mu\alpha} + O(\delta\omega^2) \right) \left(g^{\nu\beta} + \delta\omega^{\nu\beta} + O(\delta\omega^2) \right) T_{\alpha\beta} \\ &= T^{\mu\nu} + \delta\omega^{\mu\alpha} T_\alpha{}^\nu + \delta\omega^{\nu\beta} T^\mu{}_\beta + O(\delta\omega^2) \\ &= T^{\mu\nu} + \delta\omega^{\mu\lambda} T_{\lambda\rho} g^{\rho\nu} + \delta\omega^{\nu\lambda} T_{\rho\lambda} g^{\rho\mu} \\ &= T^{\mu\nu} + \left(\delta\omega^{\mu\lambda} g^{\rho\nu} + \delta\omega^{\nu\lambda} g^{\rho\mu} \right) T_{\lambda\rho} \; . \end{aligned} \tag{2.43}$$

Das hier gewonnene Transformationsverhalten vergleicht man mit dem Ausdruck (1.40) um sich die Generatoren herzuleiten.

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\delta\omega_{\varepsilon\eta} \left(I^{\varepsilon\eta} \right)^{\mu\lambda\nu\rho} T_{\lambda\rho} \; . \tag{2.44}$$

Ein einfacher Koeffizientenvergleich führt auf:

$$\delta\omega^{\mu\lambda}g^{\rho\nu} + \delta\omega^{\nu\lambda}g^{\rho\mu} = \frac{1}{2}\delta\omega_{\varepsilon\eta}\left(I^{\varepsilon\eta}\right)^{\mu\lambda\nu\rho}$$
$$\delta\omega_{\varepsilon\eta}\left(g^{\varepsilon\mu}g^{\eta\lambda}g^{\rho\nu} + g^{\varepsilon\nu}g^{\eta\lambda}g^{\rho\mu}\right) = \delta\omega_{\varepsilon\eta}\left(\frac{1}{2}\left(I^{\varepsilon\eta}\right)^{\mu\lambda\nu\rho}\right) \ .$$

Daraus folgt:

$$\left(I^{\varepsilon\eta}\right)^{\mu\lambda\nu\rho} = 2\left(g^{\varepsilon\mu}g^{\eta\lambda}g^{\rho\nu} + g^{\varepsilon\nu}g^{\eta\lambda}g^{\rho\mu}\right) \ . \tag{2.45}$$

Verwendet man nun noch die Eigenschaft, dass der Generator $\left(I^{\varepsilon\eta}\right)^{\mu\lambda\nu\rho}$ antisymmetrisch in den Indizes ε und η ist, was aus (1.39) folgt, so kann man in der weiteren Rechnung die antisymmetrisierte Version benutzen:

$$\left(I^{\varepsilon\eta}\right)^{\mu\lambda\nu\rho} = \left(g^{\varepsilon\mu}g^{\eta\lambda} - g^{\eta\mu}g^{\varepsilon\lambda}\right)g^{\rho\nu} + \left(g^{\varepsilon\nu}g^{\eta\lambda} - g^{\eta\nu}g^{\varepsilon\lambda}\right)g^{\rho\mu} \ . \tag{2.46}$$

Wie bereits im Zusammenhang mit der allgemeinen Transformation eines Feldes unter Lorentztransformation erwähnt, müssen die Generatoren die Vertauschungsrelationen der Lorentz-Algebra erfüllen. Diese lautet im Allgemeinen für beliebige Generatoren:

$$\left[I^{\alpha\beta}, I^{\gamma\delta}\right] = -g^{\alpha\gamma}I^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}I^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma}I^{\alpha\delta} - g^{\beta\delta}I^{\alpha\gamma} \ . \tag{2.47}$$

Man sollte nun zeigen können, dass auch die vorliegenden Generatoren diese Algebra erfüllen. Dies ist leider nicht offensichtlich, da nicht klar ist, wie das Produkt geschweige denn der Kommutator zweier Tensoren mit vier Lorentz-Indizes zu berechnen ist. Leider konnte ich dies auch nicht in Erfahrung bringen und bitte an dieser Stelle um Rückmeldung, da dies eine sehr wichtige Forderung ist, ohne welche man streng genommen hier aufhören sollte. Da die späteren Resultate jedoch völlig in Einklang mit den bekannten Theorien stehen, ist dies bereits ein Indiz für die korrekte Herleitung der Generatoren.

Bevor die Betrachtung anhand der Generatoren fortgesetzt wird, sei noch der Abschnitt zum Drehimpuls eingeschoben. Da der Drehimpuls nicht direkt von den Generatoren abhängt, lässt er sich unmittelbar aufschreiben:

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{2}\varepsilon_{mnl}\int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 T_{\alpha\beta}\right)}\left(\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^l}x_n - \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^n}x_l\right)\,\mathrm{d}^3x \\ &= \varepsilon_{mnl}\int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 T_{\alpha\beta}\right)}\left(-\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^n}x_l\right)\,\mathrm{d}^3x \\ &= -\varepsilon_{mnl}\int \Pi_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^n}x_l\right)\,\mathrm{d}^3x \ . \end{aligned} \tag{2.48}$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = \int \Pi_{\alpha\beta}\left(\vec{x}\times\vec{\nabla}T^{\alpha\beta}\right)\,\mathrm{d}^3x \ . \tag{2.49}$$

Im Falle des Spins startet man bei der vierdimensionalen Version:

$$S^{\varepsilon\eta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 T^{\mu\nu}\right)}\left(I^{\varepsilon\eta}\right)^{\mu\lambda\nu\rho}T_{\lambda\rho} \ . \tag{2.50}$$

Eigentlich darf man hier nicht direkt den ersten Term durch das kanonisch konjugierte Feld ersetzen, sondern muss die Zwangsbedingungen erst am Ende einarbeiten. Da ich beide Rechnungen gemacht habe, weiß ich, dass es letzten Endes keinen Unterschied macht. Man berechnet und verwendet am Ende die Symmetrie des Feldes und erhält:

$$\begin{aligned} S^{\varepsilon\eta} &= \Pi_{\mu\nu} \left(I^{\varepsilon\eta}\right)^{\mu\lambda\nu\rho} T_{\lambda\rho} \\ &= \Pi_{\mu\nu} \left[\left(g^{\varepsilon\mu} g^{\eta\lambda} - g^{\eta\mu} g^{\varepsilon\lambda} \right) g^{\rho\nu} + \left(g^{\varepsilon\nu} g^{\eta\lambda} - g^{\eta\nu} g^{\varepsilon\lambda} \right) g^{\rho\mu} \right] T_{\lambda\rho} \\ &= \Pi^{\varepsilon\rho} T^{\eta}{}_{\rho} - \Pi^{\eta\rho} T^{\varepsilon}{}_{\rho} + \Pi^{\rho\varepsilon} T^{\eta}{}_{\rho} - \Pi^{\rho\eta} T^{\varepsilon}{}_{\rho} \\ &= 2 \left(\Pi^{\varepsilon\rho} T^{\eta}{}_{\rho} - \Pi^{\eta\rho} T^{\varepsilon}{}_{\rho} \right) \ . \end{aligned} \tag{2.51}$$

Die eigentliche erhaltene Größe kann man erst jetzt bestimmen:

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{1}{2} \varepsilon_{mnl} \int \left[2 \left(\Pi_n{}^{\rho} T_{l\rho} - \Pi_l{}^{\rho} T_{n\rho} \right) \right] \ \mathrm{d}^3 x \\ &= 2 \varepsilon_{mnl} \int \left(\Pi_{n\rho} T_l{}^{\rho} \right) \ \mathrm{d}^3 x \ . \end{aligned} \tag{2.52}$$

Dies lässt sich in die auf den ersten Blick etwas schönere, jedoch auch ungewohnte und rechentechnisch ungeeignete Form bringen.

Spin:

$$\vec{S} = 2 \int \vec{\Pi}_{\rho} \times \vec{T}^{\rho} \ \mathrm{d}^3 x \ . \tag{2.53}$$

2.7. Lösung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung, welche aus der Euler-Lagrange-Gleichung resultiert, hatten wir bereits mit der Klein-Gordon-Gleichung identifiziert, welche wiederum die Massenschalenbedingung für relativistische Teilchen mit endlicher Masse darstellt. Diese gilt es nun zu lösen[11]. Man geht analog zum Spin-0-Teilchen vor, sprich dem neutralen skalaren Feld. Zunächst wählt man als Ansatz die Fouriertransformation des Tensorfeldes $T_{\mu\nu}(x)$, wobei $\tilde{T}_{\mu\nu}(k)$ das fouriertransformierte Feld ist:

$$T_{\mu\nu}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{\sqrt{2\pi}^4} \tilde{T}_{\mu\nu}(k) e^{-ikx} \ . \tag{2.54}$$

Als nächstes nutzt man die Eigenschaft, dass die vorliegende Lagrangedichte ein reelles ungeladenes Feld beschreibt (daher das Feld mit seinem komplex Konjugierten übereinstimmt).

[11] Ein besonderer Dank gilt hier Florian Divotgey, welcher das Lösen solcher Gleichungen sehr ausführlich in seinem Tutorium erklärte.

Man erhält so eine Bedingung für die fouriertransformierten Felder:

$$\begin{aligned} T^*_{\mu\nu}(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{\sqrt{2\pi}^4}\tilde{T}^*_{\mu\nu}(k)e^{+ikx} \\ &\underset{k\to -k}{=} \int \frac{\mathrm{d}^4k}{\sqrt{2\pi}^4}\tilde{T}^*_{\mu\nu}(-k)e^{-ikx} \\ &\overset{!}{=} T_{\mu\nu}(x) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{\sqrt{2\pi}^4}\tilde{T}_{\mu\nu}(k)e^{-ikx} \ . \end{aligned} \tag{2.55}$$

Man erhält:

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(k) = \tilde{T}^*_{\mu\nu}(-k) \ . \tag{2.56}$$

Der nächste Schritt besteht darin, den Lösungsansatz in die Klein-Gordon-Gleichung einzusetzen und umzuformen:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\Box + m^2\right) T_{\mu\nu}(x) \\ &= \left(\Box + m^2\right) \int \frac{\mathrm{d}^4k}{\sqrt{2\pi}^4}\tilde{T}_{\mu\nu}(k)e^{-ikx} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{\sqrt{2\pi}^4}\tilde{T}_{\mu\nu}(k)\left(\Box + m^2\right) e^{-ikx} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{\sqrt{2\pi}^4}\tilde{T}_{\mu\nu}(k)\left(-k^2 + m^2\right) e^{-ikx} \ . \end{aligned} \tag{2.57}$$

Konsequenterweise liefert dies gerade die Massenschalenbedingung $k^2 = m^2$, was sich wie folgt umschreiben lässt:

$$m^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 \ , \tag{2.58}$$

bzw.

$$k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \ . \tag{2.59}$$

Man modifiziert so den Lösungsansatz. Hierzu verwendet man (A.5) (Rechenregel für Deltafunktionen) und setzt $\pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = \pm\omega_k$ (man beachte den Unterschied zwischen k_0 und ω_k). Im vorletzten Schritt wird im hinteren Integral $\vec{k} \to -\vec{k}$ substituiert. Am Ende werden die fouriertransformierten Felder in Polarisationstensoren und Fourieramplituden umgeschrieben.

Letztere werden später zu Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erhoben.

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{\sqrt{2\pi}^4} \tilde{T}'_{\mu\nu}(k)\delta^{(4)}(k^2-m^2)e^{-ikx} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{\sqrt{2\pi}^4} \tilde{T}'_{\mu\nu}(k)\frac{1}{2\omega_k}\left(\delta(k_0-\omega_k)+\delta(k_0+\omega_k)\right)e^{-ikx} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\pi}^4} \frac{1}{2\omega_k}\tilde{T}'_{\mu\nu}(\vec{k})\left(e^{-i(\omega_k t-\vec{k}\vec{x})}+e^{-i(-\omega_k t-\vec{k}\vec{x})}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\pi}^4} \frac{1}{2\omega_k}\left(\tilde{T}'_{\mu\nu}(\vec{k})e^{-i(\omega_k t-\vec{k}\vec{x})}+\tilde{T}'_{\mu\nu}(-\vec{k})e^{-i(-\omega_k t+\vec{k}\vec{x})}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\pi}^4} \frac{1}{2\omega_k}\left(\tilde{T}'_{\mu\nu}(\vec{k})e^{-ikx}+\tilde{T}'^{*}_{\mu\nu}(\vec{k})e^{+ikx}\right)\Bigg|_{k_0=\omega_k} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\pi}^3} \frac{1}{2\omega_k}\sum_{\lambda=1}^{5}\epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\left(a(\vec{k},\lambda)e^{-ikx}+a^*(\vec{k},\lambda)e^{+ikx}\right)\Bigg|_{k_0=\omega_k} .
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass sich das Teilchen auf der Massenschale befindet und $k_0 = \omega_k$. Die allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung für das Spin-2-Feld lautet demnach:

$$T_{\mu\nu}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\pi}^3} \frac{1}{2\omega_k}\sum_{\lambda=1}^{5}\epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\left(a(\vec{k},\lambda)e^{-ikx}+a^*(\vec{k},\lambda)e^{+ikx}\right) . \tag{2.61}$$

2.8. Polarisationstensoren

In Abschnitt (2.7) wurde gezeigt, dass die Fourieramplituden der Felder in einen Polarisationstensor und einen Teil, welcher später als Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperator fungiert, aufgespalten werden kann. Die ersten drei Zwangsbedingungen, welche in Abschnitt (2.1) motiviert wurden, gelten dementsprechend für die Polarisationstensoren, während die Massenschalenbedingung für die Ebene-Welle-Lösung und die Erzeuger-/Vernichteroperatoren sorgt. Analog zum Maxwell- und Proca-Feld erhält man für jeden Freiheitsgrad einen Polarisationsvektor, bzw. in im vorliegenden Fall Polarisationstensor [12].
In Abschnitt (2.1) wurde auch begründet, warum das Spin-2-Feld gerade durch fünf Freiheitsgrade beschrieben wird und welche Zwangsbedingungen wie viele Freiheitsgrade eliminieren. Die spezielle Wahl der Polarisationstensoren ist nicht eindeutig festgelegt. Es bietet sich jedoch an die Polarisationstensoren so zu wählen, dass sie die Zwangsbedingungen im Ruhesystem des Feldes/Teilchens erfüllen (siehe hier auch [10, S.177ff] oder [23, S.32ff] über das Proca-/Maxwell-Feld). Man kann später durch Lorentztransformationen zu beliebigen Darstellungen

[12] Auch an dieser Stelle sei auf das klassisch feldtheoretisch diskutierte Gravitationsfeld verwiesen. Dieses kann auch durch ein Spin-2-Feld beschrieben werden. Auf Grund der fehlenden Masse treten hier jedoch noch weitere Zwangsbedingungen auf, welche die Anzahl an Freiheitsgraden und Polarisationstensoren weiter, bis auf zwei, reduziert [3, S.151] [13, S.62-66].

in beliebigen Bezugssystemen übergehen.

$$k_\mu \epsilon^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.62}$$

$$g_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.63}$$

$$\epsilon^{\mu\nu} = \epsilon^{\nu\mu} \ , \tag{2.64}$$

wobei hier der Vier-Impuls im Ruhesystem $k^\mu = (m, 0, 0, 0)^T$ ist. Durch "geschicktes Raten" bzw. Vergleichen kann man schnell sehen, dass die symmetrischen, spurfreien Gell-Mann-Matrizen den räumlichen Teil der Polarisationstensoren füllen, während der zeitliche auf Grund von (2.62) und (2.64) gleich null sein muss. Zudem fordert man, abermals in Analogie zur Proca- und Maxwell-Theorie, eine Orthonormalitätsbedingung (2.65) zwischen den einzelnen Polarisationstensoren[13]. Diese dient daher auch indirekt als Normierung (vgl. [10, S.179] für den Spin-1-Fall). Da hier über zwei Lorentz-Indizes summiert wird, fällt das Minus-Zeichen im Vergleich zum Proca-Fall weg.

$$\epsilon_{\mu\nu}(\lambda) \epsilon^{\mu\nu}(\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \ . \tag{2.65}$$

Das Nachprüfen der Erfüllung aller Bedingungen durch die folgende Wahl der Polarisationstensoren[14] bleibt dem Leser selbst überlassen, lässt sich jedoch schnell im Kopf nachrechnen:

$$\epsilon^{\mu\nu}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\epsilon^{\mu\nu}(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\epsilon^{\mu\nu}(3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\epsilon^{\mu\nu}(4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\epsilon^{\mu\nu}(5) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

[13] Ab sofort wird durch verschiede Argumente λ zwischen den fünf Tensoren unterschieden.

[14] Eine häufige Wahl der beiden Polarisationstensoren für Gravitationswellen in der ART sind die Tensoren $\lambda = 1, 2$.

Nachdem die Polarisationstensoren bestimmt sind, muss man sich fragen, ob diese, wie auch Spinoren oder Polarisationsvektoren eine Vollständigkeitsrelation erfüllen. Als Ansatz konstruiert man sich die allgemeinste lorentz-invariante Größe (vlg. Zee [23, S.39]) aus $g^{\mu\nu}$ und k^μ. Aus praktischen Gründen verwendet man direkt $G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}$ und k_μ.

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda)\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda) = {} & AG_{\mu\nu}G_{\alpha\beta} + B_1 G_{\mu\alpha}G_{\nu\beta} + B_2 G_{\mu\beta}G_{\nu\alpha} \\ & + C_1 k_\alpha k_\beta G_{\mu\nu} + C_2 k_\mu k_\nu G_{\alpha\beta} + D_1 k_\mu k_\alpha G_{\nu\beta} + D_2 k_\mu k_\beta G_{\nu\alpha} \\ & + D_3 k_\nu k_\beta G_{\mu\alpha} + D_4 k_\nu k_\alpha G_{\mu\beta} + E k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta \ .\end{aligned} \tag{2.66}$$

Nun muss dieser Ausdruck laut (2.64) symmetrisch in μ und ν sowie in α und β sein. Außerdem darf er sich unter Austausch von $\mu\nu \to \alpha\beta$ nicht ändern. Man erhält so folgende Bedingungen für die Parameter:

$$\begin{aligned} & C_1 = C_2 = C \ , \\ & D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D \ , \\ & B_1 = B_2 = B \ . \end{aligned}$$

Man vereinfacht den Ansatz zu:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda)\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda) = {} & AG_{\mu\nu}G_{\alpha\beta} + B(G_{\mu\alpha}G_{\nu\beta} + G_{\mu\beta}G_{\nu\alpha}) \\ & + C(k_\alpha k_\beta G_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu G_{\alpha\beta}) + E k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta \\ & + D(k_\mu k_\alpha G_{\nu\beta} + k_\mu k_\beta G_{\nu\alpha} + k_\nu k_\beta G_{\mu\alpha} + k_\nu k_\alpha G_{\mu\beta}) \ .\end{aligned} \tag{2.67}$$

Als nächstes verwendet man (2.62) und (2.63). Zudem wird folgende Relation wichtig:

$$\begin{aligned} k^\mu G_{\mu\nu} &= k^\mu \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right) \\ &= k_\nu - \frac{k^2 k_\nu}{m^2} \\ &= k_\nu - \frac{m^2 k_\nu}{m^2} \\ &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.68}$$

Zusammen erhält man die folgenden Bedingungen an die Konstanten:

$$\begin{aligned} 0 &= k^\mu \sum_{\lambda=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda)\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda) \\ &= C\left(k^2 k_\nu G_{\alpha\beta}\right) + D\left(k^2 k_\alpha G_{\nu\beta} + k^2 k_\beta G_{\nu\alpha}\right) + E\left(k^2 k_\nu k_\alpha k_\beta\right) \ . \end{aligned} \tag{2.69}$$

Also sind $C = D = E = 0$. Und der Ansatz reduziert sich weiter zu:

$$\sum_{\lambda=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda)\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda) = A(G_{\mu\nu}G_{\alpha\beta}) + B(G_{\mu\alpha}G_{\nu\beta} + G_{\mu\beta}G_{\nu\alpha}) \ . \tag{2.70}$$

Im nächsten Schritt wird wie bereits erwähnt (2.63) verwendet.

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\mu\nu} \sum_{\lambda=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda)\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda) \\ &= Ag^{\mu\nu}\left(G_{\mu\nu}G_{\alpha\beta}\right) + Bg^{\mu\nu}\left(G_{\mu\alpha}G_{\nu\beta} + G_{\mu\beta}G_{\nu\alpha}\right) \\ &= AG_{\mu}{}^{\mu}G_{\alpha\beta} + 2BG_{\mu\alpha}G^{\mu}{}_{\beta} \\ &= A\left(g_{\mu}{}^{\mu} - \frac{k_\mu k^\mu}{m^2}\right)G_{\alpha\beta} + 2B\left(g_{\mu\alpha} - \frac{k_\mu k_\alpha}{m^2}\right)\left(g^{\mu}{}_{\beta} - \frac{k^\mu k_\beta}{m^2}\right) \\ &= 3AG_{\alpha\beta} + 2BG_{\alpha\beta} \ . \end{aligned} \tag{2.71}$$

Schlussendlich erhält man die Vollständigkeitsrelation, welche bis auf eine Konstante bestimmt ist:

$$\sum_{\lambda=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\lambda) = -\frac{2}{3}BG_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + B(G_{\mu}{}^{\mu}G_{\nu}{}^{\nu} + G_{\mu}{}^{\nu}G_{\nu}{}^{\mu}) \ . \tag{2.72}$$

Diese fixiert man, anders als Herr Zee [23, S.35] es getan hat, mit Hilfe der Orthonormalitätsbedingung (2.65) indem man $\mu\nu = \alpha\beta$ setzt[15]:

$$\begin{aligned} 5 = \sum_{\lambda=1}^{5} \delta_{\lambda\lambda} &= B\left[-\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right)\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}\right)\right. \\ &\qquad + \left(g_{\mu}{}^{\mu} - \frac{k_\mu k^\mu}{m^2}\right)\left(g_{\nu}{}^{\nu} - \frac{k_\nu k^\nu}{m^2}\right) \\ &\qquad \left. + \left(g_{\mu}{}^{\nu} - \frac{k_\mu k^\nu}{m^2}\right)\left(g_{\nu}{}^{\mu} - \frac{k_\nu k^\mu}{m^2}\right)\right] \\ &= B\left[-\frac{2}{3}\left(g^{\mu}_{\mu} - \frac{2k^2}{m^2} + \frac{k^2k^2}{m^2m^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. + 3^2 + \left(g^{\mu}_{\mu} - \frac{2k^2}{m^2} + \frac{k^2k^2}{m^2m^2}\right)\right] \\ &= B\left(-2 + 9 + 3\right) \ . \end{aligned}$$

[15]Dies macht auch Sinn, wie man später sieht, da so die Konsistenz mit der Lagrangedichte und dem Propagator gewahrt bleibt. Zudem muss sich Herr Zee selbst in seinem Buch eingestehen, dass der dadurch entstehende Faktor $\frac{1}{2}$ seine Rechnungen konsistenter und einfacher macht [23, S.439]. Schlussendlich bleibt der Faktor jedoch Konvention, wie auch die Lagrangedichte und der Propagator mit einem konstanten Faktor multipliziert werden können, ohne dass sich die Physik ändert.

Die Vollständigkeitsrelation lautet schlussendlich:

$$\sum_{\lambda=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda)\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda) = -\frac{1}{3}G_{\mu\nu}G_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(G_{\mu\alpha}G_{\nu\beta} + G_{\mu\beta}G_{\nu\alpha}) \ . \tag{2.73}$$

Mit

$$G_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right) \tag{2.74}$$

lässt sie sich auch in anderer Form schreiben:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda)\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda) = &-\frac{1}{3}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + \frac{1}{2}g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} \\ &+ \frac{1}{3}g_{\mu\nu}\frac{k_\alpha k_\beta}{m^2} + \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}\frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \\ &- \frac{1}{2}g_{\mu\alpha}\frac{k_\nu k_\beta}{m^2} - \frac{1}{2}g_{\nu\alpha}\frac{k_\mu k_\beta}{m^2} - \frac{1}{2}g_{\mu\beta}\frac{k_\nu k_\alpha}{m^2} - \frac{1}{2}g_{\nu\beta}\frac{k_\mu k_\alpha}{m^2} \\ &+ \frac{2}{3}\frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{m^4} \ .\end{aligned} \tag{2.75}$$

Diese Relation wird im Folgenden von großer Bedeutung sein, da sie sowohl in der kanonischen Quantisierung, wie auch im Propagator eine tragende Rolle spielt, wie man bereits sehen konnte. Demnach wird sie auch bei dem Berechnen von Zerfallsbreiten essentiell werden.

2.9. Polarisationstensoren außerhalb des Ruhesystems

Die bisherigen Betrachtungen der Polarisationstensoren hatten sich nur auf das Ruhesystem des Feldes/Teilchens beschränkt. Man kann im Anschluss daran natürlich auch das Feld/Teilchen von außen, als bewegtes Objekt betrachten. Hierzu soll eine Lorentztransformation in z-Richtung durchgeführt werden. Die Transformationsregeln für Lorentz-Vektoren/-Tensoren lauten:

$$A'^\mu = L^\mu{}_\nu A^\nu \ , \tag{2.76}$$

$$B'^{\alpha\beta} = L^\alpha{}_\mu L^\beta{}_\nu B^{\mu\nu} \ , \tag{2.77}$$

wobei die Boostmatrix $L^\mu{}_\nu$ explizit durch $\beta = \frac{v}{c} = v$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ausgedrückt werden kann:

$$L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \ . \tag{2.78}$$

Für den Impulsvektor des Teilchens ergibt sich somit:

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m \\ 0 \\ 0 \\ -\beta\gamma m \end{pmatrix} = k'^\mu \ . \tag{2.79}$$

Gleichung (2.77) lässt sich zu einer Matrixgleichung umschreiben:

$$B' = LBL^T \ . \tag{2.80}$$

Allgemein transformieren sich demnach die Polarisationstensoren aus Abschnitt (2.8) durch:

$$(\epsilon'^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} (\epsilon^{\mu\nu}) \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \ . \tag{2.81}$$

Berechnet man die Polarisationstensoren nun einzeln ergibt dies:

$$\epsilon'^{\mu\nu}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\epsilon'^{\mu\nu}(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\epsilon'^{\mu\nu}(3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\epsilon'^{\mu\nu}(4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\epsilon'^{\mu\nu}(5) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2\beta^2\gamma^2 & 0 & 0 & 2\beta\gamma^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2\beta\gamma^2 & 0 & 0 & -2\gamma^2 \end{pmatrix} \ .$$

Man kann schnell nachprüfen, dass (2.62), (2.63) und (2.64) weiterhin erfüllt sind. Zudem sieht man sehr schön, dass der erste und zweite Polarisationstensor durch den Boost nicht beeinflusst wird, was logisch erscheint, da sie "orthogonal" zum Boost stehen[16].

[16] Während dem Anfertigen dieser Arbeit habe ich mir häufiger Gedanken dazu gemacht, was man sich unter einem Polarisationstensor vorstellen muss. Bei Polarisationsvektoren von Licht erscheint dies noch anschaulich. Diese stehen für die Schwingungsebenen des Lichtes. Ich kam zu dem Schluss, dass ein Polarisationstensor nicht nur eine Schwingungsebene hat, sondern vielmehr in zwei Dimensionen angibt wie sich das Feld deformiert. Anschaulich wäre dies vielleicht zu beschreiben durch einen Kreis in einer Ebene, welcher in eine Richtung gestreckt und in die dazu orthogonale gestaucht, sprich zu einer Ellipse deformiert wird und dieser Vorgang anschließend in umgekehrter Richtung, so dass eine periodische Bewegung/Schwingung entsteht. Diese Überlegungen bestätigten sich durch die Analogie bei Gravitationswellen. Hier wird ein Ring aus Testmassen deformiert [13, S.65].

3. Kanonische Quantisierung

3.1. Kommutationsrelationen

Die kanonische Quantisierung des Spin-2-Feldes wird aus rechentechnischen Gründen ein wenig anders verlaufen als die der Spin-0- bis Spin-1-Felder. Diese wurden quantisiert, indem man die Felder und ihre kanonisch konjugierten Felder zu Operatoren erhob und Vertauschungsrelationen (Kommutatoren und Antikommutatoren) für ihre physikalischen Komponenten, in Analogie zur Quantenmechanik, forderte. Dieser Vorgang ist unter dem Begriff der zweiten Quantisierung bekannt und wurde stets für gleiche Zeiten durchgeführt. Die Ersetzungen sind:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(x) &\to \hat{T}_{\mu\nu}(x) \\
\Pi_{\mu\nu}(x) &\to \hat{\Pi}_{\mu\nu}(x) \\
a(\vec{k},\lambda) &\to \hat{a}(\vec{k},\lambda) \\
a^*(\vec{k},\lambda) &\to \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)
\end{aligned}$$

Wendet man diese Übersetzung auf das Spin-2-Feld an, so erhält man folgendes Resultat:

$$\hat{T}_{\mu\nu}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\pi}^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{\lambda=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda) \left(\hat{a}(\vec{k},\lambda) e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda) e^{+ikx} \right) . \tag{3.1}$$

Im Falle des Proca- oder Maxwell-Feldes wurde sich dabei auf die physikalischen (meistens räumlichen) Komponenten durch eine Wahl der Eichung beschränkt. Hier gestaltet sich dieses Vorgehen jedoch als schwierig. Somit wählt man einen anderen Weg. Man postuliert nicht Kommutatoren für die Felder, sondern direkt für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Diese rät/fordert man in Analogie zu den anderen gut bekannten Feldern. Anschließend berechnet man die Kommutatoren für die Felder zunächst bei allgemeinen Raumzeitpunkten und fordert schlussendlich Gleichzeitigkeit. Dann betrachtet man nur die räumlichen Komponenten, in welchen die physikalischen Freiheitsgrade stecken. Folgende Wahl für die Kommutatoren bietet sich an:

$$\left[\hat{a}(\vec{k},\lambda), \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\right]_- = 2\omega_k \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') , \tag{3.2}$$

$$\left[\hat{a}(\vec{k},\lambda), \hat{a}(\vec{k}',\lambda')\right]_- = 0 , \tag{3.3}$$

$$\left[\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda), \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\right]_- = 0 . \tag{3.4}$$

An dieser Stelle sei auch direkt der Anzahloperator $\hat{N}(\vec{k},\lambda)$ definiert als:

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda) = 2\omega_k \delta^3(0) \hat{N}(\vec{k},\lambda) . \tag{3.5}$$

Zudem benötigt man das kanonisch konjugierte Feld, das sich aus

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\gamma T_{\sigma\rho}\right)} &= +\frac{1}{2}\left(\partial^\gamma T^{\sigma\rho}+\partial^\gamma T^{\rho\sigma}\right)-g^{\rho\sigma}\partial^\gamma T \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(g^{\gamma\sigma}\partial_\mu T^{\mu\rho}+g^{\gamma\sigma}\partial_\mu T^{\rho\mu}+g^{\gamma\rho}\partial_\mu T^{\sigma\mu}+g^{\gamma\rho}\partial_\mu T^{\mu\sigma}\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(g^{\gamma\sigma}\partial^\rho T+\partial_\mu T^{\mu\gamma}g^{\rho\sigma}+\partial^\sigma T g^{\rho\gamma}+\partial_\mu T^{\gamma\mu}g^{\sigma\rho}\right)\end{aligned} \tag{3.6}$$

ergibt. Setzt man hier die Lösung (3.1) der Bewegungsgleichungen ein und verwendet die Zwangsbedingungen (2.62), (2.64) und (2.63), so erhält man:

$$\begin{aligned}\Pi_{\sigma\rho\gamma} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\gamma T_{\sigma\rho}\right)} \\ &= \partial^\gamma T^{\sigma\rho}\ .\end{aligned} \tag{3.7}$$

Nun betrachtet man die zeitliche Ableitung und erhält das kanonisch konjugierte Feld $\hat{\Pi}_{\mu\nu}(x)$:

$$\hat{\Pi}_{\mu\nu}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\pi}^3}\frac{1}{2\omega_k}\sum_{\lambda=1}^{5}\epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\left(-i\omega_k\hat{a}(\vec{k},\lambda)e^{-ikx}+i\omega_k\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)e^{+ikx}\right)\ . \tag{3.8}$$

Im Anschluss berechnet man die drei Kommutationsrelationen für die Felder zu allgemeinen Raumzeitpunkten unter Verwendung der Vollständigkeitsrelation (2.73):

$$\begin{aligned}\left[\hat{T}_{\mu\nu}(x),\hat{T}_{\alpha\beta}(y)\right] &= \int \frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{2\pi}^6}\frac{1}{4\omega_k\omega_{k'}}\sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5}\epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}',\lambda') \\ &\quad \cdot\Big(\left[\hat{a}(\vec{k},\lambda),\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\right]e^{-ikx-ik'y} \\ &\quad +\left[\hat{a}(\vec{k},\lambda),\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\right]e^{-ikx+ik'y} \\ &\quad +\left[\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda),\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\right]e^{-ikx-ik'y} \\ &\quad +\left[\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda),\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\right]e^{+ikx+ik'y}\Big) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{2\pi}^6}\frac{1}{4\omega_k\omega_{k'}}\sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5}\epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}',\lambda') \\ &\quad \cdot\Big(2\omega_k\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')e^{-ikx+ik'y} \\ &\quad -2\omega_k\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')e^{+ikx-ik'y}\Big) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\pi}^6}\frac{1}{2\omega_k}\sum_{\lambda=1}^{5}\epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\lambda)\left(e^{-ik(x-y)}-e^{+ik(x-y)}\right)\ .\end{aligned} \tag{3.9}$$

Setzt man die Vollständigkeitsrelation in den Ausdruck ein, so kann man die Vier-Impulse aus dem Integral herausziehen:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{T}_{\mu\nu}(x), \hat{T}_{\alpha\beta}(y)\right] = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\pi}^6} \frac{1}{2\omega_k} \Big(& -\frac{1}{3} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + \frac{1}{2} g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \\
& + \frac{1}{3} g_{\mu\nu} \frac{k_\alpha k_\beta}{m^2} + \frac{1}{3} g_{\alpha\beta} \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \\
& - \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \frac{k_\nu k_\beta}{m^2} - \frac{1}{2} g_{\nu\alpha} \frac{k_\mu k_\beta}{m^2} - \frac{1}{2} g_{\mu\beta} \frac{k_\nu k_\alpha}{m^2} - \frac{1}{2} g_{\nu\beta} \frac{k_\mu k_\alpha}{m^2} \\
& + \frac{2}{3} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{m^4} \Big) \left(e^{-ik(x-y)} - e^{+ik(x-y)} \right) \\
= \Big(& -\frac{1}{3} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + \frac{1}{2} g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \\
& - \frac{1}{3} g_{\mu\nu} \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{m^2} - \frac{1}{3} g_{\alpha\beta} \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2} \\
& + \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \frac{\partial_\nu \partial_\beta}{m^2} + \frac{1}{2} g_{\nu\alpha} \frac{\partial_\mu \partial_\beta}{m^2} + \frac{1}{2} g_{\mu\beta} \frac{\partial_\nu \partial_\alpha}{m^2} + \frac{1}{2} g_{\nu\beta} \frac{\partial_\mu \partial_\alpha}{m^2} \\
& + \frac{2}{3} \frac{\partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta}{m^4} \Big) \\
& \cdot \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\pi}^6} \frac{1}{2\omega_k} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{+ik(x-y)} \right) \\
= \Big(& -\frac{1}{3} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + \frac{1}{2} g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \\
& + \frac{1}{3} g_{\mu\nu} \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{m^2} + \frac{1}{3} g_{\alpha\beta} \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2} \\
& - \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \frac{\partial_\nu \partial_\beta}{m^2} - \frac{1}{2} g_{\nu\alpha} \frac{\partial_\mu \partial_\beta}{m^2} - \frac{1}{2} g_{\mu\beta} \frac{\partial_\nu \partial_\alpha}{m^2} - \frac{1}{2} g_{\nu\beta} \frac{\partial_\mu \partial_\alpha}{m^2} \\
& + \frac{2}{3} \frac{\partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta}{m^4} \Big) i\Delta(x-y) \ .
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Betrachtet man, wie bereits erwähnt, nur die räumlichen Komponenten, so ergibt sich mit den Eigenschaften der Invarianten-Pauli-Jordan-Funktion aus Appendix (A) folgende Gleichzeitigkeits-Kommutationsrelation:

$$\left[\hat{T}_{ij}(\vec{x}), \hat{T}_{lk}(\vec{y})\right] = 0 \ . \tag{3.11}$$

Als nächstes berechnet man den Kommutator der kanonisch konjugierten Felder:

$$\begin{aligned}\left[\hat{\Pi}_{\mu\nu}(x),\hat{\Pi}_{\alpha\beta}(y)\right] &= \partial_0^x\partial_0^y\left[\hat{T}_{\mu\nu}(x),\hat{T}_{\alpha\beta}(y)\right] \\ &= \partial_0^x\partial_0^y\Bigg(-\frac{1}{3}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} \\ &\quad+\frac{1}{3}g_{\mu\nu}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{m^2}+\frac{1}{3}g_{\alpha\beta}\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2} \\ &\quad-\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}\frac{\partial_\nu\partial_\beta}{m^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\alpha}\frac{\partial_\mu\partial_\beta}{m^2}-\frac{1}{2}g_{\mu\beta}\frac{\partial_\nu\partial_\alpha}{m^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\beta}\frac{\partial_\mu\partial_\alpha}{m^2} \\ &\quad+\frac{2}{3}\frac{\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta}{m^4}\Bigg)i\Delta(x-y) \\ &= -i\Bigg(-\frac{1}{3}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} \\ &\quad+\frac{1}{3}g_{\mu\nu}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{m^2}+\frac{1}{3}g_{\alpha\beta}\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2} \\ &\quad-\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}\frac{\partial_\nu\partial_\beta}{m^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\alpha}\frac{\partial_\mu\partial_\beta}{m^2}-\frac{1}{2}g_{\mu\beta}\frac{\partial_\nu\partial_\alpha}{m^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\beta}\frac{\partial_\mu\partial_\alpha}{m^2} \\ &\quad+\frac{2}{3}\frac{\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta}{m^4}\Bigg)\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\pi}^6}\omega_k sin(p(x-y))\ .\end{aligned} \tag{3.12}$$

In diesem Fall betrachtet man auch nur die räumlichen Komponenten bei Gleichzeitigkeit. Der Faktor $(\omega_k)^2$ ändert nichts am in Appendix (A) diskutierten Verhalten des Integrals, da er symmetrisch in $\vec{k}$ ist und beim partiellen Ableiten nicht berücksichtigt wird. Nach kurzem Überlegen ergibt sich:

$$\left[\hat{\Pi}_{ij}(\vec{x}),\hat{\Pi}_{lk}(\vec{y})\right] = 0\ . \tag{3.13}$$

Schlussendlich wird auch der nicht verschwindende Fall betrachtet:

$$\begin{aligned}\left[\hat{T}_{\mu\nu}(x),\hat{\Pi}_{\alpha\beta}(y)\right] &= \partial_0^y\left[\hat{T}_{\mu\nu}(x),\hat{T}_{\alpha\beta}(y)\right] \\ &= \partial_0^y\Bigg(-\frac{1}{3}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} \\ &\quad+\frac{1}{3}g_{\mu\nu}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{m^2}+\frac{1}{3}g_{\alpha\beta}\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2} \\ &\quad-\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}\frac{\partial_\nu\partial_\beta}{m^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\alpha}\frac{\partial_\mu\partial_\beta}{m^2}-\frac{1}{2}g_{\mu\beta}\frac{\partial_\nu\partial_\alpha}{m^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\beta}\frac{\partial_\mu\partial_\alpha}{m^2} \\ &\quad+\frac{2}{3}\frac{\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta}{m^4}\Bigg)i\Delta(x-y)\ .\end{aligned} \tag{3.14}$$

Beschränkt man sich auch hier auf die räumlichen Komponenten, so erhält man ein nicht triviales Resultat:

$$\begin{aligned}\left[\hat{T}_{ij}(x), \hat{\Pi}_{lk}(y)\right] = \partial_0^y \Big(&-\frac{1}{3} g_{ij} g_{lk} + \frac{1}{2} g_{il} g_{jk} + \frac{1}{2} g_{ik} g_{jl} \\ &+ \frac{1}{3} g_{ij} \frac{\partial_l \partial_k}{m^2} + \frac{1}{3} g_{lk} \frac{\partial_i \partial_j}{m^2} \\ &- \frac{1}{2} g_{il} \frac{\partial_j \partial_k}{m^2} - \frac{1}{2} g_{jl} \frac{\partial_i \partial_k}{m^2} - \frac{1}{2} g_{ik} \frac{\partial_j \partial_l}{m^2} - \frac{1}{2} g_{jk} \frac{\partial_i \partial_l}{m^2} \\ &+ \frac{2}{3} \frac{\partial_i \partial_j \partial_l \partial_k}{m^4} \Big) i\Delta(x-y) \ .\end{aligned} \tag{3.15}$$

Nun muss dieser Ausdruck diskutiert werden, um ihn weiter zu vereinfachen. Die erste Zeile ist hierbei einfach und es sei dabei auf Appendix (A) verwiesen. Es ergeben sich nach Gleichzeitigkeitsbetrachtungen einfache Deltafunktionen im Ortsraum. Die Terme in der zweiten und dritten Zeile sind nach Anwendung der Ableitung von folgender Form [1]:

$$\begin{aligned} &-i \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2\pi}^6} \frac{1}{2\omega_k} \left(\omega_k p_i p_j e^{-ipz} + \omega_k p_i p_j e^{+ipz} \right) \Big|_{z_0=0} \\ &= -i \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2\pi}^6} p_i p_j cos(pz) \Big|_{z_0=0} \\ &= -i \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2\pi}^6} p_i p_j cos(\vec{p}\vec{z}) \ . \end{aligned} \tag{3.16}$$

An diesem Ausdruck erkennt man gut, dass für $i \neq j$ der Integrand in zwei Integrationsrichtungen ungerade ist und beim ersten Integrieren das Integral verschwindet. Demnach können in Gleichung (3.15) alle Ableitungen durch Ableitungen in die gleiche Richtung ersetzt und zusätzliche Kronecker-Deltas eingeführt werden. Dann berechnet man das Integral für $i = j$. Die Indizes m und n stehen für eine, jedoch beliebige, Raumrichtung. Es soll nicht über sie summiert werden! Die Raumrichtung ist beliebig, da das Integral einen "echten" Wert hat, symmetrisch in allen Raumrichtungen ist und somit nicht von ihnen abhängt.

$$\begin{aligned} &-i \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{\sqrt{2\pi}^6} \frac{1}{2\omega_k} \left(\omega_k p_i^2 e^{-ipz} + \omega_k p_i^2 e^{+ipz} \right) \Big|_{z_0=0} \\ &= -i \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{\sqrt{2\pi}^6 2} p_i^2 \left(e^{-i\vec{p}\vec{z}} + e^{+i\vec{p}\vec{z}} \right) \\ &= i\partial_i^2 \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{\sqrt{2\pi}^6 2} \left(e^{-i\vec{p}\vec{z}} + e^{+i\vec{p}\vec{z}} \right) \\ &= i\partial_i^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \ . \end{aligned} \tag{3.17}$$

[1] Auch hier ist Appendix (A) beim Nachvollziehen hilfreich.

Für den letzten Term geht man analog vor. Man kann hier erkennen, dass jeweils zwei Indizes paarweise gleich sein müssen. Dies berücksichtigt man später in drei Kronecker-Delta-Termen:

$$
\begin{aligned}
&i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2\pi}^6 2\omega_k}\left(\omega_k p_i^2 p_j^2 e^{-ipz} + \omega_k p_i^2 p_j^2 e^{+ipz}\right)\Big|_{z_0=0} \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2\pi}^6 2} p_i^2 p_j^2 \left(e^{-i\vec{p}\vec{z}} + e^{+i\vec{p}\vec{z}}\right) \\
&= i\partial_i^2\partial_j^2 \int \frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2\pi}^6 2}\left(e^{-i\vec{p}\vec{z}} + e^{+i\vec{p}\vec{z}}\right) \\
&= i\partial_i^2\partial_j^2 \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Jetzt ist es ein Leichtes alle Teile zusammenzubasteln. Es ergibt:

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{T}_{ij}(\vec{x}), \hat{\Pi}_{lk}(\vec{y})\right] = \Bigg(&-\frac{1}{3}g_{ij}g_{lk} + \frac{1}{2}g_{il}g_{jk} + \frac{1}{2}g_{ik}g_{jl} \\
&+ \frac{1}{3}g_{ij}g_{lk}\frac{\partial_n^2}{m^2} + \frac{1}{3}g_{lk}g_{ij}\frac{\partial_n^2}{m^2} \\
&- \frac{1}{2}g_{il}g_{jk}\frac{\partial_n^2}{m^2} - \frac{1}{2}g_{jl}g_{ik}\frac{\partial_n^2}{m^2} - \frac{1}{2}g_{ik}g_{jl}\frac{\partial_n^2}{m^2} - \frac{1}{2}g_{jk}g_{il}\frac{\partial_n^2}{m^2} \\
&+ \frac{2}{3}\left(g_{ij}g_{kl} + g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk}\right)\frac{\partial_m^2\partial_n^2}{m^4}\Bigg) i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Der Kommutator lautet demnach:

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{T}_{ij}(\vec{x}), \hat{\Pi}_{lk}(\vec{y})\right] &= g_{ij}g_{lk}\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{\partial_n^2}{m^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial_m^2\partial_n^2}{m^4}\right) i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\
&+ g_{il}g_{jk}\left(+\frac{1}{2} - \frac{\partial_n^2}{m^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial_m^2\partial_n^2}{m^4}\right) i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\
&+ g_{ik}g_{jl}\left(+\frac{1}{2} - \frac{\partial_n^2}{m^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial_m^2\partial_n^2}{m^4}\right) i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Als erstes sei angemerkt, dass der Kommutator für ungleiche Orte $\vec{x} \neq \vec{y}$ verschwindet. Für Gleiche Orte $\vec{x} = \vec{y}$ ist dies nicht der Fall. Auf Grund der Symmetrie der Felder/Polarisationstensoren waren nicht nur nicht verschwindende Terme zwischen den jeweils gleichen Komponenten, sondern auch zwischen den symmetrischen “Partnern“ zu erwarten (z.B. nicht nur die “1-2“- mit der “1-2“-Komponente, sondern auch die “1-2“- mit der “2-1“-Komponente verschwindet nicht). Die Ableitungen der Deltafunktionen sind auch völlig in Ordnung. Man bezeichnet sie als Schwinger-Terme. Insgesamt ist das Ergebnis schlüssig. An dieser Stelle sei angemerkt, dass Bhargava und Watanabe in ihrem Artikel auf dasselbe Resultat [21, S.276-277] für den Kommutator zwischen Feld und (komplex konjugiertem) Feld, jedoch zu unterschiedlichen Raumzeitpunkten kommen wie ich nach der kanonischen Quantisierung (3.10). Leider haben die Autoren keine Kommutationsrelationenen für das Feld mit seinem kanonisch konjugierten Feld angegeben. Es gibt noch eine weitere Arbeit aus derselben Zeit, die Kommutationsrelationen angibt und sich auf ähnliche Veröffentlichungen wie die eben genannte bezieht. Die dort erwähnten Kommutationsrelationen sind zwar ähnlich, jedoch nicht völlig gleich zu den, in meiner Arbeit hergeleiteten [20, S.394, S.400, S.403].

3.2. Hamiltonoperator

Der Hamiltonoperator brechnet sich durch Einsetzen des quantisierten Feldes (3.1) sowie seines komplex konjugierten, auch quantisierten Feldes (3.8), in die Energie/Hamilton-Funktion (2.41). Hier sei noch einmal angemerkt, dass spätestens an dieser Stelle der Hamiltonoperator nur noch die Energie des Systems bzw. die Quantisierung der Energie des Systems beschreibt und nicht mehr die vollständige Systeminformation trägt. Dies wäre auch der Fall, wenn man bis zu dieser Stelle im kanonisch konjugierten Feld und somit auch im Hamiltonoperator alle unphysikalischen Terme “mitgeschleppt“ hätte, da man hier die Lösung der Bewegungsgleichung einsetzt und spätestens dann alle unphysikalischen Terme verschwinden.

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left(\hat{\Pi}_{\mu\nu}\hat{\Pi}^{\mu\nu} + \vec{\nabla}\hat{T}_{\mu\nu}\vec{\nabla}\hat{T}^{\mu\nu} + m^2\hat{T}_{\mu\nu}\hat{T}^{\mu\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 4\omega_k\omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\vec{k}',\lambda') \\
&\cdot \Big[\left(-i\omega_k\hat{a}(\vec{k},\lambda)e^{-ikx} + i\omega_k\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)e^{ikx}\right) \\
&\quad \cdot \left(-i\omega_{k'}\hat{a}(\vec{k}',\lambda')e^{-ik'x} + i\omega_{k'}\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')e^{ik'x}\right) \\
&\quad + \left(i\vec{k}\hat{a}(\vec{k},\lambda)e^{-ikx} - i\vec{k}\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)e^{ikx}\right) \\
&\quad \cdot \left(i\vec{k}'\hat{a}(\vec{k}',\lambda')e^{-ik'x} - i\vec{k}'\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')e^{ik'x}\right) \\
&\quad + m^2\left(\hat{a}(\vec{k},\lambda)e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)e^{ikx}\right) \\
&\quad \cdot \left(\hat{a}(\vec{k}',\lambda')e^{-ik'x} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')e^{ik'x}\right)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 4\omega_k\omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\vec{k}',\lambda') \\
&\cdot \Big[\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\left(-\omega_k\omega_{k'} - \vec{k}\vec{k}' + m^2\right)e^{-i(k+k')x} \\
&\quad + \hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\left(\omega_k\omega_{k'} + \vec{k}\vec{k}' + m^2\right)e^{-i(k-k')x} \\
&\quad + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\left(\omega_k\omega_{k'} + \vec{k}\vec{k}' + m^2\right)e^{+i(k-k')x} \\
&\quad + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\left(-\omega_k\omega_{k'} - \vec{k}\vec{k}' + m^2\right)e^{+i(k+k')x}\Big] \ .
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{H} = \frac{1}{2} \int & \frac{\mathrm{d}^3k \mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 4\omega_k\omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\vec{k}',\lambda') \\
& \cdot \Big[\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\left(-\omega_k\omega_{k'} - \vec{k}\vec{k}' + m^2\right) e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k}') \\
& \quad + \hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\left(\omega_k\omega_{k'} + \vec{k}\vec{k}' + m^2\right) e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \\
& \quad + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\left(\omega_k\omega_{k'} + \vec{k}\vec{k}' + m^2\right) e^{+i(\omega_k-\omega_{k'})t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \\
& \quad + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\left(-\omega_k\omega_{k'} - \vec{k}\vec{k}' + m^2\right) e^{+i(\omega_k+\omega_{k'})t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')\Big] \\
= \frac{1}{2} \int & \frac{\mathrm{d}^3k 2(\omega_k)^2}{4(\omega_k)^2} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\vec{k},\lambda') \\
& \cdot \left(\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda')\right) \\
= \frac{1}{2} \int & \frac{\mathrm{d}^3k}{2} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \delta_{\lambda\lambda'} \left(\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda')\right) \ .
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Kommutationsrelationen und des Anzahloperators lässt sich dies noch vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2} \sum_{\lambda=1}^{5} \left(2\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda)\right) + 2\omega_k\delta^3(0) && (3.22) \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3k \sum_{\lambda=1}^{5} \left(2\omega_k\delta^3(0)\hat{N}(\vec{k},\lambda) + \omega_k\delta^3(0)\right) \\
&= \delta^3(0) \int \mathrm{d}^3k \sum_{\lambda=1}^{5} \omega_k \left(\hat{N}(\vec{k},\lambda) + \frac{1}{2}\right) \ . && (3.23)
\end{aligned}
$$

Ein solches Resultat war zu erwarten, da die Analogie zu den bekannten Hamilton Operatoren offensichtlich ist. Auch hier hat man durch den Summanden “$+\frac{1}{2}$“ eine unendliche Vakuumsenergie, welche renormiert werden muss. Des Weiteren wird wie bei jedem Hamiltonoperator durch den Anzahl-Operator die Zahl der Teilchen mit Energie ω_k gezählt. Das Integral über alle Impulse und die Summe über alle Polarisationen sorgt dafür, dass auch alle Teilchen erfasst werden. Der Faktor $\delta^3(0)$ kann als “unendliches Volumen“ aufgefasst werden.

3.3. Impulsoperator

Hier geht man völlig simultan zum Hamiltonoperator vor. Auch hier verwendet man das quantisierte Feld (3.1) und das kanonisch konjugierte (3.8) und setzt es in die Impulsfunktion

(2.42) ein:

$$\hat{\vec{P}} = -\int \left(\hat{\Pi}_{\alpha\beta}\vec{\nabla}\hat{T}^{\alpha\beta}\right) \mathrm{d}^3x \tag{3.24}$$

$$= -\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3k \mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 4\omega_k\omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\vec{k}',\lambda')$$

$$\cdot \Big[\left(-i\omega_k \hat{a}(\vec{k},\lambda)e^{-ikx} + i\omega_k \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)e^{ikx}\right)$$

$$\cdot \left(i\vec{k}'\hat{a}(\vec{k}',\lambda')e^{-ik'x} - i\vec{k}'\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')e^{ik'x}\right)\Big]$$

$$= -\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3k \mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 4\omega_k\omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\vec{k}',\lambda')$$

$$\cdot \Big[\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\left(\omega_k\vec{k}'\right) e^{-i(k+k')x}$$

$$+ \hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\left(-\omega_k\vec{k}'\right) e^{-i(k-k')x}$$

$$+ \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\left(-\omega_k\vec{k}'\right) e^{+i(k-k')x}$$

$$+ \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\left(\omega_k\vec{k}'\right) e^{+i(k+k')x}\Big]$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}^3k \mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 4\omega_k\omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\vec{k}',\lambda')$$

$$\cdot \Big[\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\left(\omega_k\vec{k}'\right) e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')$$

$$+ \hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\left(-\omega_k\vec{k}'\right) e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$+ \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\left(-\omega_k\vec{k}'\right) e^{+i(\omega_k-\omega_{k'})t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$+ \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\left(\omega_k\vec{k}'\right) e^{+i(\omega_k+\omega_{k'})t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')\Big] \ .$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\vec{P}} = &-\int \frac{\mathrm{d}^3k\ \vec{k}}{4\omega_k} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\pm\vec{k},\lambda') \\
&\cdot \Big[-\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}(-\vec{k},\lambda')e^{-i2\omega_k t} - \hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda') \\
&-\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda') - \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(-\vec{k},\lambda')e^{+i2\omega_k t}\Big] \\
= &\int \frac{\mathrm{d}^3k\ \vec{k}}{4\omega_k} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\pm\vec{k},\lambda') \\
&\cdot \Big[\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}(-\vec{k},\lambda')e^{-i2\omega_k t} + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(-\vec{k},\lambda')e^{+i2\omega_k t} \\
&+\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda')\hat{a}(\vec{k},\lambda) + 2\omega_k\delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(0)\Big] \ .
\end{aligned}
$$

Das + des $\pm$ gehört zu den Kombinationen aus einem $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ und das $-$ zu Kombinationen aus zwei $\hat{a}$ oder zwei $\hat{a}^\dagger$. Auf Grund der Antisymmetrie des Integranden für den ersten, zweiten und fünften Term in der eckigen Klammer braucht man diese Terme nicht weiter berücksichtigen. Man erhält so:

$$
\begin{aligned}
\hat{\vec{P}} &= \int \frac{\mathrm{d}^3k\ \vec{k}}{2\omega_k} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\mu\nu}(\vec{k},\lambda') \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda')\hat{a}(\vec{k},\lambda)\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k\ \vec{k}}{2\omega_k} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \delta_{\lambda\lambda'} \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda')\hat{a}(\vec{k},\lambda)\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k\ \vec{k}}{2\omega_k} \sum_{\lambda=1}^{5} \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda) \\
&= \delta^3(0) \int \mathrm{d}^3k \sum_{\lambda=1}^{5} \vec{k}\left(\hat{N}(\vec{k},\lambda)\right) \ . \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Auch hier wirkt das Resultat vertraut und schlüssig. Der Impuls des Feldes besteht aus der Summe der Impulse aller Quanten mit Impuls $\vec{k}$.

3.4. Spinoperator/Helizitätsoperator

Die Berechnung des Spinoperators läuft zunächst analog zu der Berechnung der vorherigen Operatoren. Man startet mit der quantisierten Version der Gleichung (2.52), projiziert diese jedoch auf die Bewegungsrichtung des Teilchens. Jene soll die z-Richtung sein. Dies ist der Grund, warum es sinnvoll war, die Polarisationstensoren zu boosten. Diese Darstellung soll hier verwendet werden. Der Operator, welchen man nun erhält, ist der Helizitätsoperator:

$$
\begin{aligned}
\hat{\vec{S}} \cdot \vec{e}_z &= 2 \int \left(\hat{\Pi}_{1\rho} \hat{T}^{2\rho} - \hat{\Pi}_{2\rho} \hat{T}^{1\rho} \right) \, \mathrm{d}^3 x \\
&= 2 \int \mathrm{d}^3 x \int \frac{\mathrm{d}^3 k \mathrm{d}^3 k'}{(2\pi)^3 4 \omega_k \omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \left(\epsilon_{1\rho}(\vec{k},\lambda) \epsilon^{2\rho}(\vec{k}',\lambda') - \epsilon_{2\rho}(\vec{k},\lambda) \epsilon^{1\rho}(\vec{k}',\lambda') \right) \\
&\quad \cdot \Big[\left(-i\omega_k \hat{a}(\vec{k},\lambda) e^{-ikx} + i\omega_k \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda) e^{ikx} \right) \\
&\quad \left(\hat{a}(\vec{k}',\lambda') e^{-ik'x} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda') e^{ik'x} \right) \Big] \\
&= 2i \int \mathrm{d}^3 x \int \frac{\mathrm{d}^3 k \mathrm{d}^3 k'}{(2\pi)^3 4 \omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \left(\epsilon_{1\rho}(\vec{k},\lambda) \epsilon^{2\rho}(\vec{k}',\lambda') - \epsilon_{2\rho}(\vec{k},\lambda) \epsilon^{1\rho}(\vec{k}',\lambda') \right) \\
&\quad \cdot \Big[-\hat{a}(\vec{k},\lambda) \hat{a}(\vec{k}',\lambda') e^{-i(k+k')x} \\
&\quad - \hat{a}(\vec{k},\lambda) \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda') e^{-i(k-k')x} \\
&\quad + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda) \hat{a}(\vec{k}',\lambda') e^{+i(k-k')x} \\
&\quad + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda) \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda') e^{+i(k+k')x} \Big] \\
&= 2i \int \frac{\mathrm{d}^3 k \mathrm{d}^3 k'}{(2\pi)^3 4 \omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \left(\epsilon_{1\rho}(\vec{k},\lambda) \epsilon^{2\rho}(\vec{k}',\lambda') - \epsilon_{2\rho}(\vec{k},\lambda) \epsilon^{1\rho}(\vec{k}',\lambda') \right) \\
&\quad \cdot \Big[-\hat{a}(\vec{k},\lambda) \hat{a}(\vec{k}',\lambda') e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}+\vec{k}') \\
&\quad - \hat{a}(\vec{k},\lambda) \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda') e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \\
&\quad + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda) \hat{a}(\vec{k}',\lambda') e^{+i(\omega_k-\omega_{k'})t} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \\
&\quad + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda) \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda') e^{+i(\omega_k+\omega_{k'})t} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}+\vec{k}') \Big] \; .
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

$$\begin{aligned}\hat{\vec{S}} \cdot \vec{e}_z = i \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k} \Bigg[& \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \left(\epsilon_{1\rho}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{2\rho}(-\vec{k},\lambda') - \epsilon_{2\rho}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{1\rho}(-\vec{k},\lambda') \right) \\ & \cdot \left(-\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}(-\vec{k},\lambda')e^{-2i\omega_k t} + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(-\vec{k},\lambda')e^{2i\omega_k t} \right) \\ & + \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \left(\epsilon_{1\rho}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{2\rho}(\vec{k},\lambda') - \epsilon_{2\rho}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{1\rho}(\vec{k},\lambda') \right) \\ & \cdot \left(-\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda') \right) \Bigg] \ .\end{aligned}$$

Macht man nun in der ersten Summe die Substitution $\vec{k} \to -\vec{k}$ und vertauscht man λ mit λ', so erkennt man, dass dadurch ein Minus entsteht und somit der Integrand antisymmetrisch ist und nichts beiträgt. Übrig bleibt:

$$\begin{aligned}\hat{\vec{S}} \cdot \vec{e}_z = i \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k} & \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \left(\epsilon_{1\rho}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{2\rho}(\vec{k},\lambda') - \epsilon_{2\rho}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{1\rho}(\vec{k},\lambda') \right) \\ & \cdot \left(-\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda') \right) \ .\end{aligned}$$

Nun muss man die Doppelsumme per Hand auswerten (ich habe leider keinen besseren Weg gefunden). Hierzu verwendet man die Polarisationstensoren außerhalb des Ruhesystems (2.9). Glücklicherweise verschwinden so gut wie alle Summanden der Doppelsumme, es bleiben vier übrig und man erhält:

$$\begin{aligned}\hat{\vec{S}} \cdot \vec{e}_z = i \int \frac{\mathrm{d}^3k}{4\omega_k} \Big[& -2 \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k},1)\hat{a}(\vec{k},2) - \hat{a}(\vec{k},1)\hat{a}^\dagger(\vec{k},2) \right) \\ & + 2 \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k},2)\hat{a}(\vec{k},1) - \hat{a}(\vec{k},2)\hat{a}^\dagger(\vec{k},1) \right) \\ & - \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k},3)\hat{a}(\vec{k},4) - \hat{a}(\vec{k},3)\hat{a}^\dagger(\vec{k},4) \right) \\ & + \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k},4)\hat{a}(\vec{k},3) - \hat{a}(\vec{k},4)\hat{a}^\dagger(\vec{k},3) \right) \Big] \ .\end{aligned} \tag{3.27}$$

Da der Kommutationsrest in jedem Fall null ergeben würde, da es sich immer um verschiedene Polarisationsrichtungen handelt (vgl.(3.2)), können wir die Operatorenreihenfolge beliebig wählen:

$$\begin{aligned}\hat{\vec{S}} \cdot \vec{e}_z = i \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k} \Big[& 2\hat{a}^\dagger(\vec{k},2)\hat{a}(\vec{k},1) - 2\hat{a}^\dagger(\vec{k},1)\hat{a}(\vec{k},2) \\ & + \hat{a}^\dagger(\vec{k},4)\hat{a}(\vec{k},3) - \hat{a}^\dagger(\vec{k},3)\hat{a}(\vec{k},4) \Big] \ .\end{aligned} \tag{3.28}$$

Dieser Operator ist noch nicht diagonalisiert. Dies erreicht man, indem man die Basis der Erzeuger und Vernichter wechselt. Es eignet sich:

$$
\begin{aligned}
\hat{a}(\vec{k},+) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}(\vec{k},1) - i\hat{a}(\vec{k},2)\Big) \ , \\
\hat{a}(\vec{k},-) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}(\vec{k},1) + i\hat{a}(\vec{k},2)\Big) \ , \\
\hat{a}(\vec{k},\Delta) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}(\vec{k},3) - i\hat{a}(\vec{k},4)\Big) \ , \\
\hat{a}(\vec{k},\Box) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}(\vec{k},3) + i\hat{a}(\vec{k},4)\Big) \ , \\
\hat{a}(\vec{k},0) &= \hat{a}(\vec{k},5) \ .
\end{aligned}
$$

Die Umkehrtransformation lautet:

$$
\begin{aligned}
\hat{a}(\vec{k},1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}(\vec{k},+) + \hat{a}(\vec{k},-)\Big) \ , \\
\hat{a}(\vec{k},2) &= \frac{i}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}(\vec{k},+) - \hat{a}(\vec{k},-)\Big) \ , \\
\hat{a}(\vec{k},3) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}(\vec{k},\Delta) + \hat{a}(\vec{k},\Box)\Big) \ , \\
\hat{a}(\vec{k},4) &= \frac{i}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}(\vec{k},\Delta) - \hat{a}(\vec{k},\Box)\Big) \ , \\
\hat{a}(\vec{k},5) &= \hat{a}(\vec{k},0) \ .
\end{aligned}
$$

Diese neu definierten Operatoren erfüllen die gleichen Kommutationseigenschaften, wie die alten. Man kann auch zeigen, dass der Hamiltonoperator weiterhin diagonal in der neuen Basis ist. Setzt man die Rücktransformationen in den Helizitätsoperator ein, erhält man:

$$
\begin{aligned}
\hat{\vec{S}}\cdot\vec{e}_z = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k}\Big[2\Big(\hat{a}^\dagger(\vec{k},+)\hat{a}(\vec{k},+) - \hat{a}^\dagger(\vec{k},-)\hat{a}(\vec{k},-)\Big) \\
+ \Big(\hat{a}^\dagger(\vec{k},\Delta)\hat{a}(\vec{k},\Delta) - \hat{a}^\dagger(\vec{k},\Box)\hat{a}(\vec{k},\Box)\Big)\Big] \ .
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Nun kann man noch die Ersetzung durch den Anzahloperator vornehmen:

$$
\hat{\vec{S}}\cdot\vec{e}_z = \delta^3(0)\int \mathrm{d}^3k\Big[2\hat{N}(\vec{k},+) - 2\hat{N}(\vec{k},-) + \hat{N}(\vec{k},\Delta) - \hat{N}(\vec{k},\Box)\Big] \ . \tag{3.30}
$$

Das Ergebnis ist auch hier wunderbar. Die Anzahloperatoren zählen die Quanten mit zirkular polarisiertem Spin 2, 1, -1 und -2. Die Spin-Einstellung Spin null taucht nicht auf, da hier eigentlich der Helizitätsoperator verwendet wurde und durch die Projektion auf die Bewegungsrichtung diese Anregung verschwindet. Sehr interessant ist an dieser Stelle, dass, betrachtet man die Polarisationen genauer, man feststellt, dass die Spin-Einstellungen 1 und -1 nur mit den zur Bewegungsrichtung "orthogonal schwingenden" Polarisationstensoren verknüpft sind. Die Spin-Projektionen 2 und -2 sind hingegen ausschließlich mit den Polarisationstensoren verknüpft, welche in Bewegungsrichtung, beziehungsweise unabhängig von der Bewegungsrichtung, schwingen. Der fünfte Polarisationstensor, welcher die Komponenten mischt, taucht nicht mehr auf.

3.5. Drehimpulsoperator

Es sei schon zu Beginn angemerkt, dass sich durch den Ebene-Wellen-Ansatz kein guter, sprich diagonaler, Drehimpulsoperator wird herleiten lassen. Sicher ist dies jedoch in einer sphärischen Darstellung möglich. Man verwendet in der Regel hierzu die Kugelflächenfunktionen, welche bereits als Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators aus der Quantenmechanik bekannt sind. Dennoch soll hier, wie auch bei den vorherigen Operatoren, mit der Ebene-Wellen-Lösung gearbeitet werden. Die Betrachtung in sphärischer Darstellung wird in dieser Arbeit nicht berücksichtigt, wird allerdings mit großer Wahrscheinlichkeit als Fortsetzung von mir berechnet werden.
Man startet wie gewohnt mit Gleichung (2.49), welche klassisch den Drehimpuls des Spin-2-Feldes beschreibt. Diese Gleichung macht man operatorwertig und symmetrisiert sie, was später schneller zu dem gewünschten Resultat führt:

$$\hat{\vec{L}} = \frac{1}{2} \int \left(\hat{\Pi}_{\alpha\beta} \left(\vec{x} \times \vec{\nabla} \hat{T}^{\alpha\beta} \right) + \left(\vec{x} \times \vec{\nabla} \hat{T}^{\alpha\beta} \right) \hat{\Pi}_{\alpha\beta} \right) \, \mathrm{d}^3 x \; . \tag{3.31}$$

Im nächsten Schritt ersetzt man die Gradienten mittels Ableiten durch Impulse und die Orte durch Gradienten im Impulsraum. Zudem werden die Lösungen der Bewegungsgleichung (3.1) und (3.8) eingesetzt. Es ist wichtig, dass die Gradienten stets nur auf den Ebene-Welle-Anteil wirken.

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{L}} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 x \int \frac{\mathrm{d}^3 k \mathrm{d}^3 k'}{(2\pi)^3 4 \omega_k \omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\lambda) \epsilon^{\alpha\beta}(\vec{k}',\lambda') \qquad (3.32) \\
\cdot \Big[\left(-i\omega_k \hat{a}(\vec{k},\lambda) e^{-ikx} + i\omega_k \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda) e^{ikx} \right) \\
\cdot \left(\vec{\nabla}_{k'} \times \vec{k}' \right) \left(\hat{a}(\vec{k}',\lambda') e^{-ik'x} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda') e^{ik'x} \right) \\
+ \left(\vec{\nabla}_{k} \times \vec{k} \right) \left(\hat{a}(\vec{k},\lambda) e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda) e^{ikx} \right) \\
\cdot \left(-i\omega_{k'} \hat{a}(\vec{k}',\lambda') e^{-ik'x} + i\omega_{k'} \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda') e^{ik'x} \right) \Big] \; .
\end{aligned}$$

$$\hat{L} = i\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 4\omega_k\omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\alpha\beta}(\vec{k}',\lambda')$$
$$\cdot \left[\left(\omega_k\left(\vec{\nabla}_{k'}\times\vec{k}'\right)+\omega_{k'}\left(\vec{\nabla}_k\times\vec{k}\right)\right)\right.$$
$$\cdot\left(-\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')e^{-i(k+k')x}+\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')e^{+i(k+k')x}\right)$$
$$+\left(\omega_k\left(\vec{\nabla}_{k'}\times\vec{k}'\right)-\omega_{k'}\left(\vec{\nabla}_k\times\vec{k}\right)\right)$$
$$\left.\cdot\left(-\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')e^{-i(k-k')x}+\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')e^{+i(k-k')x}\right)\right] \quad .$$

Nun kann man die räumliche Integration durchführen und erhält wie gewohnt Deltafunktionen für den Impulsvektor:

$$\hat{\vec{L}} = i\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{4\omega_k\omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\alpha\beta}(\vec{k}',\lambda') \tag{3.33}$$
$$\cdot \left[\left(\omega_k\left(\vec{\nabla}_{k'}\times\vec{k}'\right)+\omega_{k'}\left(\vec{\nabla}_k\times\vec{k}\right)\right)\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')\right.$$
$$\cdot\left(-\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t}+\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')e^{+i(\omega_k+\omega_{k'})t}\right)$$
$$+\left(\omega_k\left(\vec{\nabla}_{k'}\times\vec{k}'\right)-\omega_{k'}\left(\vec{\nabla}_k\times\vec{k}\right)\right)\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$
$$\left.\cdot\left(-\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t}+\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')e^{+i(\omega_k-\omega_{k'})t}\right)\right] \quad .$$

An dieser Stelle benötigt man zwei wichtige Relationen. Zum Einen:

$$\vec{\nabla}_{\vec{k}}\times\vec{k}\delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right) = -\vec{\nabla}_{\vec{k}'}\times\vec{k}'\delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right) \quad . \tag{3.34}$$

Zum Anderen wird eine Rechenregel für Deltafunktionen unter Integralen entscheidend.

$$f(\vec{k})\left[\vec{\nabla}_{\vec{k}}\times\vec{k}\;\delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\right] = \delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\left[-\vec{\nabla}_{\vec{k}}\times\vec{k}\;f(\vec{k})\right] \quad . \tag{3.35}$$

Mit Hilfe der ersten Relation kann man sich klar machen, dass alle Kombinationen aus $\hat{a}$ und $\hat{a}$ sowie die Terme mit $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}^\dagger$ verschwinden. Die anderen Terme lassen sich umschreiben zu:

$$\hat{\vec{L}} = i\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{4\omega_k\omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\alpha\beta}(\vec{k}',\lambda') \tag{3.36}$$

$$\cdot \left[\left(\omega_k\left(\vec{\nabla}_{k'}\times\vec{k}'\right) - \omega_{k'}\left(\vec{\nabla}_k\times\vec{k}\right)\right)\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t} + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')e^{+i(\omega_k-\omega_{k'})t}\right)\right]$$

$$= i\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{4\omega_k\omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\alpha\beta}(\vec{k}',\lambda')$$

$$\cdot\left[-\omega_k\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\left(\vec{\nabla}_{k'}\times\vec{k}'\right) + \omega_k\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\left(\vec{\nabla}_{k'}\times\vec{k}'\right)\right.$$

$$\left.+\omega_{k'}\hat{a}(\vec{k},\lambda)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\left(\vec{\nabla}_k\times\vec{k}\right) - \omega_{k'}\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k}',\lambda')\left(\vec{\nabla}_k\times\vec{k}\right)\right]$$

$$\cdot\,\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$= i\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{4\omega_k\omega_{k'}} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\alpha\beta}(\vec{k}',\lambda')$$

$$\cdot\left[-\omega_k\left(\vec{\nabla}_k\times\vec{k}\ \hat{a}(\vec{k},\lambda)\right)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda') - \omega_k\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\left(\vec{\nabla}_{k'}\times\vec{k}'\ \hat{a}(\vec{k}',\lambda')\right)\right.$$

$$\left.-\omega_{k'}\left(\vec{\nabla}_k\times\vec{k}\ \hat{a}(\vec{k},\lambda)\right)\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda') - \omega_{k'}\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\left(\vec{\nabla}_{k'}\times\vec{k}'\ \hat{a}(\vec{k}',\lambda')\right)\right]$$

$$\cdot\,\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')\ .$$

$$
\begin{aligned}
\hat{L} = -i\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{4\omega_k} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{\alpha\beta}(\vec{k},\lambda') \\
\cdot \Big[\Big(\vec{\nabla}_k \times \vec{k}\ \hat{a}(\vec{k},\lambda)\Big)\, \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\, \Big(\vec{\nabla}_k \times \vec{k}\ \hat{a}(\vec{k},\lambda')\Big) \\
+ \Big(\vec{\nabla}_k \times \vec{k}\ \hat{a}(\vec{k},\lambda)\Big)\, \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\, \Big(\vec{\nabla}_k \times \vec{k}\ \hat{a}(\vec{k},\lambda')\Big)\Big] \\
= -i\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{4\omega_k} \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{5} \delta_{\lambda\lambda'} \\
\cdot \Big[\Big(\vec{\nabla}_k \times \vec{k}\ \hat{a}(\vec{k},\lambda)\Big)\, \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\, \Big(\vec{\nabla}_k \times \vec{k}\ \hat{a}(\vec{k},\lambda')\Big) \\
+ \Big(\vec{\nabla}_k \times \vec{k}\ \hat{a}(\vec{k},\lambda)\Big)\, \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\, \Big(\vec{\nabla}_k \times \vec{k}\ \hat{a}(\vec{k},\lambda')\Big)\Big] \\
= \frac{1}{2i}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\omega_k} \sum_{\lambda=1}^{5} \Big(\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\, \Big(\vec{\nabla}_k \times \vec{k}\ \hat{a}(\vec{k},\lambda)\Big) + \omega_k \vec{\nabla}_k \times \vec{k}\ \delta^3(0)\Big)\ .
\end{aligned}
$$

Man sieht, dass dies zu keinem eleganten Ausdruck führt. Dennoch ist das Ergebnis höchst sinnvoll, da es in Analogie zu den bekannten Theorien steht und man keine diagonale Darstellung erwartet. Dies kann man am Nabla-Operator am deutlichsten sehen, welcher auf den Vernichter wirkt. Höchstwahrscheinlich muss man einen Ansatz in Kugelflächenfunktionen machen, um elegante Resultate zu erhalten, in welchen abermals der Anzahl-Operator die Quanten zählt.

4. Multiplets von Tensormesonen

Spätestens nachdem ich in den vorangegangenen Kapiteln sehr ausführlich die formale Theorie für ein Spin-2-Teilchen klassisch und kanonisch quantisiert behandelt habe, muss man sich die Frage stellen, wozu man dies überhaupt machen sollte. Alle fundamentalen Teilchen, ob Quarks oder Leptonen, tragen den Spin $\frac{1}{2}$. Dazu kommt noch das Higgs-Teilchen mit Spin 0 und die Eichbosonen, welche durch den Spin 1 ausgezeichnet sind. Spin-2-Teilchen tauchen im Standardmodell zunächst nicht fundamental auf.
Eine Rechtfertigung für eine Spin-2 Betrachtung wäre die bereits häufiger erwähnte Gravitation. Es wird allgemein vermutet, dass sich diese durch ein masseloses Spin-2-Feld beschreiben lässt. Da ich jedoch eine massive Theorie bearbeitet habe, müsste man die Masse gegen Null schicken. Dies scheint zunächst kein Problem zu sein, jedoch ergeben sich dadurch unüberschaubare Konsequenzen. So reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade des Feldes weiter und es muss eine Eichung gewählt werden (völlig analog zur Proca- und Maxwell-Theorie). Dazu kommt, dass man auch beim Propagator Probleme erhält, um nur eine weitere Schwierigkeit zu nennen.
Mein Ziel ist es daher, wirklich massive Spin-2-Teilchen zu beschreiben. Hier bietet sich natürlich der Sektor der Hadronenphysik an. Da Quarks nicht alleine vorliegen können, sondern stets farbneutrale Zustände bilden (Confinement), kann man Zustände aus Quark und Antiquark konstruieren, deren Spin und Drehimpuls zu einem Gesamtdrehimpuls/Gesamtspin koppeln. Da Quarks Spin $\frac{1}{2}$ tragen, kann im Falle von Mesonen der Gesamtspin nur die Werte 0 oder 1 tragen[1]. Außer dem Spin können die beiden Quarks auch noch einen echten Drehimpuls besitzen, welcher auch quantisiert ist. Der Drehimpuls ist eine Anregung des gebundenen Zustandes.
Nun kann man die Regeln der Drehimpulsaddition verwenden. Der Gesamtspin bzw. Gesamtdrehimpuls J nimmt Werte

$$L - S \leq J \leq L + S \tag{4.1}$$

an. Da wir ein Spin-2-Teilchen beschreiben wollen, ist J hier auf den Wert 2 festgelegt. Setzen wir nun $S = 0$ in (4.1) ein, so erhält man:

$$L \leq 2 \leq L \ .$$

Die Konsequenz ist, dass in diesem Falle L auf den Wert 2 festgelegt ist.
Betrachtet man als nächstes $S = 1$, so ergibt sich ein anderes Resultat:

$$L - 1 \leq 2 \leq L + 1 \ .$$

Dies ist für alle $1 \leq L \leq 3$ erfüllt.
Man kann nun zwei Formeln verwenden, welche einem für Teilchen die Werte der Parität und

[1] An dieser Stelle sei angemerkt, dass durchaus die Möglichkeit besteht, dass tensorartige Teilchen auch aus mehr als zwei Quarks bestehen könnten. Hier wollen wir uns jedoch auf den/die einfachsten möglichen Fall/Fälle beschränken.

Ladungskonjugation liefern, sofern man S und L kennt. Dabei sei angemerkt, dass die Formel für C nur für neutrale Mesonen ohne Flavour gilt.

$$P = (-1)^{L+1} \quad , \tag{4.2}$$

$$C = (-1)^{L+S} \quad . \tag{4.3}$$

Man charakterisiert mesonische Zustände mit Hilfe dieser beiden Quantenzahlen und dem Gesamtspin/Gesamtdrehimpuls J durch:

$$J^{PC} \quad . \tag{4.4}$$

Betrachtet man mit diesem Wissen die beiden unterschiedlichen Einstellmöglichkeiten des Spins (0 und 1), so erhält man für $S = 0$ und $L = 2$ nur einen eindeutigen Zustand:

$$2^{-+} \quad . \tag{4.5}$$

Für Spin $S = 1$ hingegen erhält man drei Zustände, von denen jedoch zwei strukturell gleich sind. So bildet $S = 1$ und $L = 1$ bzw. $L = 3$ den Zustand:

$$2^{++} \quad . \tag{4.6}$$

Einen anderen Zustand erhält man für $S = 1$ und $L = 2$:

$$2^{--} \quad . \tag{4.7}$$

Ein Zustand ist jedoch für neutrale Teilchen ohne Flavour gänzlich unmöglich. Man bezeichnet ihn als exotischen Zustand, welcher nicht aus zwei Quarks konstruiert werden kann. Verwendet man jedoch mehr als zwei Quarks, oder gebundene Zustände aus Gluonen, so kann dieser Zustand auch existieren:

$$2^{+-} \quad . \tag{4.8}$$

Dies gilt es nun in das in den vorherigen Kapiteln beschriebene Modell des Tensorfeldes zu integrieren. Hierzu konstruiert man sogenannte Quarkströme. Das Tensorfeld selbst ist der Quarkstrom aus Quark und Antiquark, welcher alle Symmetrien und Eigenschaften (wie zum Beispiel die Zwangsbedingungen) des Tensorfeldes erfüllt und zu dem richtigen Gesamtspin/Gesamtdrehimpuls führt. Wie wir soeben gesehen haben, sollte es zumindest drei strukturell verschiedene Quarkströme geben. In den nächsten Abschnitten sollen die zunächst postulierten bzw. übernommenen Ströme hinsichtlich ihrer Symmetrien untersucht werden. Man wird am Ende sehen, dass sie genau soeben angegebenen Zuständen entsprechen.

4.1. Tensormesonen 2^{++}

Der Quarkstrom, welcher Tensormesonen beschreiben wird, stammt aus [6, S.2]. Er lautet:

$$\begin{aligned}(X_{\mu\nu})_{ji} &= i\bar{q}_i \left[\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\gamma_\delta \overleftrightarrow{\partial}^\delta\right] q_j \\ &= i\Bigg[\bar{q}_i\gamma_\mu\partial_\nu q_j - \partial_\nu\bar{q}_i\gamma_\mu q_j + \bar{q}_i\gamma_\nu\partial_\mu q_j - \partial_\mu\bar{q}_i\gamma_\nu q_j \\ &\qquad -\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\bar{q}_i\gamma_\delta\partial^\delta q_j - \partial^\delta\bar{q}_i\gamma_\delta q_j\right)\Bigg] \quad .\end{aligned} \tag{4.9}$$

Hierbei stehen die Indizes an den Quark-Spinoren nicht für Dirac-Indizes, sondern für die Quarkflavours. Die Dirac-Indizes werden nicht ausgeschrieben. Der Quarkstrom kann zunächst aus beliebigen Kombinationen der sechs Quarks bestehen. Da die Flavour-Symmetrie für mehr als die leichtesten drei Quarks zu stark gebrochen ist, macht es jedoch nur Sinn, den Quarkstrom aus up-, down- und strange-Quark zu konstruieren. Der Quarkstrom beschreibt als Folge dessen ein Nonet von Mesonen:

$$X_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{f_{2,N}+a_2^0}{\sqrt{2}} & a_2^+ & K_2^{*+} \\ a_2^- & \frac{f_{2,N}-a_2^0}{\sqrt{2}} & K_2^{*0} \\ K_2^{*-} & \bar{K}_2^{*0} & f_{2,S} \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad . \tag{4.10}$$

Dieses Mesonen dieses Nonets identifiziert man mit folgenden Teilchen, welche von der Particle Data Group gelistet sind. Mischungseffekte sind hier durch "≈"-Zeichen angedeutet, werden jedoch später im Detail besprochen.

Meson	Identifikation	Masse [MeV]
a_2	$a_2(1320)$	$1318,3 \pm 0,5$
K_2^*	$K_2^*(1430)$	$1425,6 \pm 1,5$
$f_{2,N} \approx f_2$	$f_2(1270)$	$1275,1 \pm 1,2$
$f_{2,S} \approx f_2'$	$f_2'(1525)$	1525 ± 5

Tabelle 4.1: Tensormesonen und deren Massen.

Dementsprechend modifiziert man auch die Lagrangedichte mit einer Spur im Flavourraum:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = Tr \Big\{ & \frac{1}{4}\left(\partial_\mu X_{\alpha\beta}\partial^\mu X^{\alpha\beta} + \partial_\mu X_{\alpha\beta}\partial^\mu X^{\beta\alpha}\right) - \frac{1}{2}\partial_\mu X \partial^\mu X \\ & - \frac{1}{4}\left(\partial_\alpha X^{\alpha\beta}\partial^\mu X_{\mu\beta} + \partial_\alpha X^{\alpha\beta}\partial^\mu X_{\beta\mu} + \partial_\alpha X^{\beta\alpha}\partial^\mu X_{\mu\beta} + \partial_\alpha X^{\beta\alpha}\partial^\mu X_{\beta\mu}\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu X^{\mu\nu}\partial_\nu X + \partial_\mu X^{\nu\mu}\partial_\nu X\right) \\ & - \frac{m^2}{4}\left(X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + X_{\mu\nu}X^{\nu\mu}\right) + \frac{m^2}{2}X^2 \Big\} \quad . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nun gilt es, den Quarkstrom auf seine Symmetrien zu untersuchen. Diese Untersuchungen in den nächsten Abschnitten erfolgen analog zu denen, die Florian Divotgey in seiner Arbeit tätigte [7, S.21 ff].

4.1.1. Lorentzsymmetrie

Eine Quantenfeldtheorie sollte stets invariant unter Lorentztransformationen sein. Hierbei werden nur eigentliche, orthochrone Lorentztransformationen berücksichtigt. Da sich der Quarkstrom aus Quarks zusammensetzt, die sich, da sie fermionisch sind, wie Spinoren transformieren, benötigt man die Spinordarstellung der Lorentztransformation in der nachstehenden Form:

$$S(\Lambda) = exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \tag{4.12}$$

mit

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]_- \quad .$$

Die lorentztransformierten Spinoren lauten demnach:

$$
\begin{aligned}
q'(x) &= S(\Lambda)q(\Lambda^{-1}x) \ , \\
\bar{q}'(x) &= \bar{q}(\Lambda^{-1}x)S^{-1}(\Lambda) \ .
\end{aligned}
$$

Man benötigt außerdem die Eigenschaft, dass

$$
S^{-1}(\Lambda)\gamma_\mu S(\Lambda) = \Lambda_\mu{}^\nu \gamma_\nu \tag{4.13}
$$

gilt. Am Ende der Rechnung braucht man noch eine Regel, die für die Transformationsmatrizen gilt:

$$
\delta_\epsilon^\zeta = \Lambda_\delta{}^\zeta \Lambda^\delta{}_\epsilon \ . \tag{4.14}
$$

Nun kann man den lorentztransformierten Quarkstrom berechnen:

$$
\begin{aligned}
(X'_{\mu\nu})_{ji} = i \Big[& \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\gamma_\mu \Lambda_\nu{}^\alpha \left(\partial_\alpha S(\Lambda) q_j\right) - \Lambda_\nu{}^\alpha \left(\partial_\alpha \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\right) \gamma_\mu S(\lambda) q_j \\
& + \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\gamma_\nu \Lambda_\mu{}^\beta \left(\partial_\beta S(\Lambda) q_j\right) - \Lambda_\mu{}^\beta \left(\partial_\beta \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\right) \gamma_\nu S(\lambda) q_j \\
& - \Lambda_\mu{}^\beta \Lambda_\nu{}^\alpha \frac{2}{3} \left(g_{\beta\alpha} - \frac{k_\beta k_\alpha}{k^2} \right) \\
& \cdot \left(\bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\gamma_\delta \Lambda^\delta{}_\epsilon \left(\partial^\epsilon S(\Lambda) q_j\right) - \Lambda^\delta{}_\epsilon \left(\partial^\epsilon \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\right) \gamma_\delta S(\Lambda) q_j \right) \Big] \\
= i\Lambda_\mu{}^\beta \Lambda_\nu{}^\alpha \Big[& \bar{q}_i \gamma_\beta \partial_\alpha q_j - \partial_\alpha \bar{q}_i \gamma_\beta q_j + \bar{q}_i \gamma_\alpha \partial_\beta q_j - \partial_\beta \bar{q}_i \gamma_\alpha q_j \\
& - \frac{2}{3} \left(g_{\beta\alpha} - \frac{k_\beta k_\alpha}{k^2} \right) \delta_\epsilon^\zeta \left(\bar{q}_i \gamma_\zeta \partial^\epsilon q_j - \partial^\epsilon \bar{q}_i \gamma_\zeta q_j \right) \Big] \\
= \Lambda_\mu{}^\beta & \Lambda_\nu{}^\alpha (X_{\beta\alpha})_{ji} \\
= \Lambda_\mu{}^\alpha & \Lambda_\nu{}^\beta (X_{\alpha\beta})_{ji} \ .
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Dies ist das erwartete Ergebnis. Der Quarkstrom transformiert sich wie ein Lorentz-Tensor. Das Ergebnis setzt man in die Lagrangedichte (4.11) ein und überprüft deren Invarianz. Dies sei hier exemplarisch für den ersten Term vorgeführt. Die Berechnung aller weiteren Terme erfolgt völlig analog:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \frac{1}{4} \Lambda_\mu{}^\zeta \partial_\zeta \Lambda_\lambda{}^\alpha \Lambda_\delta{}^\beta X_{\alpha\beta} \Lambda^\mu{}_\tau \partial^\tau \Lambda^\lambda{}_\gamma \Lambda^\delta{}_\rho X^{\gamma\rho} + ... \\
&= \frac{1}{4} \delta_\tau^\zeta \delta_\gamma^\alpha \delta_\rho^\beta \partial_\zeta X_{\alpha\beta} \partial^\tau X^{\gamma\rho} + ... \\
&= \frac{1}{4} \partial_\tau X_{\alpha\beta} \partial^\tau X^{\alpha\beta} + ... \\
&= \mathcal{L} \ .
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Dies gilt auch, wenn sich der Ausdruck in einer Spur im Flavourraum befindet, da dieser keinen Einfluss auf die Raumzeit-Struktur hat.

4.1.2. Ladungskonjugation

In diesem Unterabschnitt soll das Verhalten des Quarkstromes unter Ladungskonjugation untersucht werden. Hierzu verwendet man den Ladungskonjugationsoperator $\hat{C}$, welcher durch zwei Gamma-Matrizen definiert ist:

$$\hat{C} = i\gamma^2\gamma^0 \ . \tag{4.17}$$

Daraus lassen sich einige Eigenschaften herleiten:

$$\hat{C} = -\hat{C}^{-1} = -\hat{C}^{\dagger} = -\hat{C}^T \ . \tag{4.18}$$

Zudem wird es wichtig sein, wie sich ein γ^μ zwischen zwei Ladungskonjugationsoperatoren verhält:

$$\hat{C}\gamma^\mu\hat{C} = \gamma^{\mu T} \ . \tag{4.19}$$

Auch hier ist es abermals sinnvoll zunächst die Transformationseigenschaften der einzelnen Spinoren zu betrachten. Sie transformieren sich durch diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} q'(x) &= -i\gamma^0\gamma^2\bar{q}^T(x) = \hat{C}\bar{q}^T(x) \ , \\ \bar{q}'(x) &= -q^T(x)i\gamma^0\gamma^2 = q^T(x)\hat{C} \ . \end{aligned}$$

Diese Transformationseigenschaften setzt man in Gleichung (4.9) und kalkuliert:

$$\begin{aligned} (X'_{\mu\nu})_{ji} = i\Big[& q_i^T\hat{C}\gamma_\mu\left(\partial_\nu\hat{C}\bar{q}_j^T\right) - \left(\partial_\nu q_i^T\hat{C}\right)\gamma_\mu\hat{C}\bar{q}_j^T \\ & + q_i^T\hat{C}\gamma_\nu\left(\partial_\mu\hat{C}\bar{q}_j^T\right) - \left(\partial_\mu q_i^T\hat{C}\right)\gamma_\nu\hat{C}\bar{q}_j^T \\ & -\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(q_i^T\hat{C}\gamma_\delta\left(\partial^\delta\hat{C}\bar{q}_j^T\right) - \left(\partial^\delta q_i^T\hat{C}\right)\gamma_\delta\hat{C}\bar{q}_j^T\right)\Big] \\ = i\Big[& q_i^T\gamma_\mu^T\partial_\nu\bar{q}_j^T - \partial_\nu q_i^T\gamma_\mu^T\bar{q}_j^T \\ & + q_i^T\gamma_\nu^T\partial_\mu\bar{q}_j^T - \partial_\mu q_i^T\gamma_\nu^T\bar{q}_j^T \\ & -\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(q_i^T\gamma_\delta^T\partial^\delta\bar{q}_j^T - \partial^\delta q_i^T\gamma_\delta^T\bar{q}_j^T\right)\Big] \ . \end{aligned} \tag{4.20}$$

An dieser Stelle muss man zwei Regeln beachten. Das Vertauschen zweier Fermionen ergibt ein negatives Vorzeichen. Zudem ist zu beachten, dass die Differentialoperatoren auch weiterhin auf das gleiche “Fermion“ wirken. Es sei zudem angemerkt, dass große “T“’s zum transponieren in den Dirac-Indizes und kleine “t“’s zum transponieren in den Flavour-Indizes verwendet wurden.

$$
\begin{aligned}
(X'_{\mu\nu})_{ji} &= -i\Big[\partial_\nu\bar{q}_j\gamma_\mu q_i - \bar{q}_j\gamma_\mu\partial_\nu q_i \\
&\quad + \partial_\mu\bar{q}_j\gamma_\nu q_i - \bar{q}_j\gamma_\nu\partial_\mu q_i \\
&\quad -\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\partial^\delta\bar{q}_j\gamma_\delta q_i - \bar{q}_j\gamma_\delta\partial^\delta q_i\right)\Big]^T \\
&= i\Big[\bar{q}_j\gamma_\mu\partial_\nu q_i - \partial_\nu\bar{q}_j\gamma_\mu q_i \\
&\quad + \bar{q}_j\gamma_\nu\partial_\mu q_i - \partial_\mu\bar{q}_j\gamma_\nu q_i \\
&\quad -\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\bar{q}_j\gamma_\delta\partial^\delta q_i - \partial^\delta\bar{q}_j\gamma_\delta q_i\right)\Big] \\
&= i\Big[\bar{q}_i\gamma_\mu\partial_\nu q_j - \partial_\nu\bar{q}_i\gamma_\mu q_j \\
&\quad + \bar{q}_i\gamma_\nu\partial_\mu q_j - \partial_\mu\bar{q}_i\gamma_\nu q_j \\
&\quad -\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\bar{q}_i\gamma_\delta\partial^\delta q_j - \partial^\delta\bar{q}_i\gamma_\delta q_j\right)\Big]^t \\
&= (X_{\mu\nu})^t_{ji} \ .
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Auch dieses Resultat muss wieder in den Lagrangian (4.11) eingesetzt werden. Wichtig ist hier, dass Spuren in den Lorentz-Indizes nicht gleichbedeutend mit Spuren in den Flavour-Indizes sind. Auch an dieser Stelle soll nur die Rechnung für den ersten Term vorgeführt werden. Die anderen ergeben sich analog. In dieser Rechnung wird wichtig, dass die Spur invariant unter dem Transponieren $Tr\{A^t\} = Tr\{A\}$ ist.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= Tr\left\{\frac{1}{4}\partial_\mu(X_{\alpha\beta})^t\partial^\mu(X^{\alpha\beta})^t + ...\right\} \\
&= Tr\left\{\frac{1}{4}\left(\partial^\mu X^{\alpha\beta}\partial_\mu X_{\alpha\beta}\right)^t + ...\right\} \\
&= Tr\left\{\frac{1}{4}\partial_\mu X_{\alpha\beta}\partial^\mu X^{\alpha\beta} + ...\right\} \\
&= \mathcal{L} \ .
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

4.1.3. Paritätstransformation

Der nächste Schritt besteht darin, eine Paritätstransformation am vorliegenden Quarkstrom durchzuführen und dessen Verhalten zu untersuchen. Hierfür ist es wichtig, die Transformationsregeln von Fermionen unter Parität zu kennen. Diese sind gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
q'(t,\vec{x}) &= \gamma^0 q(t,-\vec{x}) \ , \\
\bar{q}'(t,\vec{x}) &= \bar{q}(t,\vec{x})\gamma^0 \ .
\end{aligned}
$$

Auch diese Transformationen setzt man in den Strom ein, um den transformierten Quarkstrom zu erhalten. Diese Auswertung gestaltet sich hier jedoch schwieriger, da die rein räumlichen, räumlich zeitlich gemischten und rein zeitlichen Komponenten unterschiedlich transformieren. Dies hängt damit zusammen, dass γ^0 selbstverständlich mit sich selbst vertauscht, jedoch $\{\gamma^0, \gamma^i\}$ für $i = 1, 2, 3$ gilt. Außerdem ist zu beachten, dass die räumlichen Ableitungen ein zusätzliches negatives Vorzeichen erhalten. Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten verwendet man $(-1)^{(\mu)}$. Dies soll kein Lorentz-Index sein, sondern als geschlossener Ausdruck gleich 1 für $\mu = 0$ und 1 für $\mu = 1, 2, 3$ sein. Man berechnet:

$$\begin{aligned}
(X'_{\mu\nu})_{ji} = i \Big[& \bar{q}_i \gamma^0 \gamma_\mu \left(\partial_\nu \gamma^0 q_j\right) - \left(\partial_\nu \bar{q}_i \gamma^0\right) \gamma_\mu \gamma^0 q_j \\
& + \bar{q}_i \gamma^0 \gamma_\nu \left(\partial_\mu \gamma^0 q_j\right) - \left(\partial_\mu \gamma^0 \bar{q}_i\right) \gamma_\nu \gamma^0 q_j \\
& - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \left(\bar{q}_i \gamma^0 \gamma_\delta \left(\partial^\delta \gamma^0 q_j\right) - \left(\partial^\delta \bar{q}_i \gamma^0\right) \gamma_\delta \gamma^0 q_j\right)\Big] \\
= i\,(-1)^{(\mu)}\,(-1)^{(\nu)} \Big[& \bar{q}_i \gamma_\mu \partial_\nu q_j - \partial_\nu \bar{q}_i \gamma_\mu q_j + \bar{q}_i \gamma_\nu \partial_\mu q_j - \partial_\mu \bar{q}_i \gamma_\nu q_j \\
& - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \left(\bar{q}_i \gamma_\delta \partial^\delta q_j - \partial^\delta \bar{q}_i \gamma_\delta q_j\right)\Big] \\
= \ & (-1)^{(\mu)}\,(-1)^{(\nu)}\,(X_{\mu\nu})_{ji} \\
= \ & (X^{\mu\nu})_{ji} \ .
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Man sieht, dass der Quarkstrom genau die richtigen Quantenzahlen für 2^{++}-Zustände liefert. An dieser Stelle soll auch noch die Lagrangedichte einer Paritätstransformation unterzogen werden. Dabei ist zu beachten, dass die räumlichen Komponenten der Differentialoperatoren ihr Vorzeichen ändern. Man kann diese, wie bereits oben gezeigt, schreiben als $(-1)^{(\mu)}\,\partial_\mu$. Dieses mal soll als Beispiel nicht der erste Term dienen, sondern der vierte, da dieser sich ein wenig "komplizierter" verhält.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' = Tr &\left\{-\frac{1}{4}\,(-1)^{(\alpha)}\,\partial_\alpha \left((-1)^{(\alpha)}\,(-1)^{(\beta)}\,X^{\alpha\beta}\right)(-1)^{(\mu)}\,\partial^\mu \left((-1)^{(\mu)}\,(-1)^{(\beta)}\,X_{\mu\beta}\right)\right\} \\
= \mathcal{L} \ . &
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Dass der Lagrangian auch invariant unter Parität ist, sieht man an diesem Term sehr schön. Die Vorzeichenwechsel tauchen stets quadratisch auf. Aus der CP-Invarianz kann man nun, auf Grund des CPT-Theorems, auch auf die Invarianz unter Zeitumkehr schließen.

4.1.4. Flavour-Symmetrie

Eine weitere Symmetrie, welche bisher noch keine Erwähnung gefunden hat ist die $SU(N_f)$-Flavour-Symmetrie. Sie gehört, wie die bereits besprochenen Symmetrien, zum Fundament der Quantenchromodynamik, welche einer Beschreibung von Hadronen stets zu Grunde liegen muss[2]. Will man die Eigenschaft einer Theorie, welche invariant unter $SU(N_f)$-Flavour-Transformationen sein soll, in einfache Worte fassen, so heißt dies, dass unter der Annahme, dass alle Quark-Massen gleich groß sind, man Quarks, in andere Quarks transformieren kann,

[2]Weitere solcher Symmetrien sind die $SU(N_c)$-Farbe, welche in diesem Model jedoch keine Rolle spielt, da nur farbneutrale Objekte Betrachtet werden, sowie die chirale Symmetrie, welche noch nicht in das Model integriert werden soll.

ohne dass sich die Dynamik ändert. Mathematisch bedeutet dies, dass sich ein Quark-Spinor unter Flavourtransformation wie folgt verhält:

$$\begin{aligned} q_i' &= U_{ij} q_j \\ \bar{q}_i' &= (U_{ij} q_j)^\dagger \gamma^0 = q_j^\dagger U_{ji}^\dagger \gamma^0 = \bar{q}_j U_{ji}^\dagger \ . \end{aligned}$$

Nun gilt es zu zeigen, wie sich der Quarkstrom 4.9 unter dieser Transformation verhält:

$$\begin{aligned} (X'_{\mu\nu})_{li} &= i\bar{q}_j U_{ji}^\dagger \left[\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}\mu - \frac{2}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \gamma_\delta \overleftrightarrow{\partial}^\delta \right] U_{lm} q_m \qquad (4.25) \\ &= U_{lm} i\bar{q}_j \left[\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}\mu - \frac{2}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \gamma_\delta \overleftrightarrow{\partial}^\delta \right] q_m U_{ji}^\dagger \\ &= U_{lm} (X_{\mu\nu})_{mj} U_{ji}^\dagger \\ &= \left(U X_{\mu\nu} U^\dagger \right)_{li} \ . \end{aligned}$$

Testet man die Lagrangedichte (4.11), so sieht man, dass diese invariant unter $SU(N_f)$-Flavour ist, da die Spur zyklische Vertauschungen erlaubt (auch hier wird nur ein Term exemplarisch getestet):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= Tr \left\{ \frac{1}{4} \partial_\mu \left(U X_{\alpha\beta} U^\dagger \right) \partial^\mu \left(U X^{\alpha\beta} U^\dagger \right) + ... \right\} \qquad (4.26) \\ &= Tr \left\{ \frac{1}{4} U \partial_\mu X_{\alpha\beta} U^\dagger U \partial^\mu X^{\alpha\beta} U^\dagger + ... \right\} \\ &= Tr \left\{ \frac{1}{4} \partial_\mu X_{\alpha\beta} \partial^\mu X^{\alpha\beta} + ... \right\} \ . \end{aligned}$$

In diesen Rechnungen wurde noch keine Aussage über die Anzahl N_f der Flavours gemacht. Daher gilt die Invarianz auch für beliebig viele Flavours. Im vorliegenden Fall, wird jedoch nur von einer $SU(3)$-Flavour-Symmetrie ausgegangen. Der Grund hierfür ist, dass im Grunde die Symmetrie nicht vorhanden ist, da alle Quarks unterschiedliche Massen haben. Die Massen von up-, down- und strange-Quark unterscheiden sich jedoch nicht viel. Man sagt, die Symmetrie ist für drei Flavours nur schwach gebrochen und kann weiterhin angenommen werden, während für $N_f = 4$ diese Brechung viel zu groß ist.

4.1.5. Zwangsbedingungen

Wie bereits angekündigt sollte der Quarkstrom die Zwangsbedingungen des Tensorfeldes erfüllen. Dies wäre zunächst die Symmetrie in den beiden Indizes, welche jedoch offensichtlich erfüllt ist. Die Klein-Gordon-Gleichung wird ohnehin durch jeden Spinor gelöst, braucht demnach auch nicht gesondert betrachtet werden.

Im nächsten Schritt soll die Spurfreiheit getestet werden:

$$
\begin{aligned}
(X_\mu{}^\mu)_{ji} &= i \Big[\bar{q}_i \gamma_\mu \partial^\mu q_j - \partial^\mu \bar{q}_i \gamma_\mu q_j + \bar{q}_i \gamma^\mu \partial_\mu q_j - \partial_\mu \bar{q}_i \gamma^\mu q_j \\
&\quad - \frac{2}{3} \left(g^\mu_\mu - \frac{k_\mu k^\mu}{k^2} \right) \left(\bar{q}_i \gamma_\delta \partial^\delta q_j - \partial^\delta \bar{q}_i \gamma_\delta q_j \right) \Big] \\
&= i \Big[\bar{q}_i \gamma_\mu \partial^\mu q_j - \partial^\mu \bar{q}_i \gamma_\mu q_j + \bar{q}_i \gamma^\mu \partial_\mu q_j - \partial_\mu \bar{q}_i \gamma^\mu q_j \\
&\quad - 2 \left(\bar{q}_i \gamma_\delta \partial^\delta q_j - \partial^\delta \bar{q}_i \gamma_\delta q_j \right) \Big] \\
&= 0 \ .
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Und schlussendlich ist es noch notwendig die Divergenzfreiheit zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu X^{\mu\nu} \\
&= k_\mu X^{\mu\nu} \ .
\end{aligned}
$$

Hierfür werden einige Relationen wichtig werden. Zunächst einmal soll die Betrachtung im Ruhesystem des Mesons erfolgen, $k_\mu = (k_0, 0, 0, 0)$. Die Relation vereinfacht sich zu:

$$
0 = k_0 X^{0\nu} \ .
$$

Da es sich bei k_0 nur um die Gesamtenergie des Mesons handelt, kann durch diese geteilt werden und im Ruhesystem findet man:

$$
0 = X^{0\nu} \ . \tag{4.28}
$$

Diese Relation wendet man nun auf den Quarkstrom (4.9) an:

$$
\begin{aligned}
0 &= (X_{0\nu})_{ji} \\
&= i \bar{q}_i \left[\gamma_0 \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}_0 - \frac{2}{3} \left(g_{0\nu} - \frac{k_0 k_\nu}{k^2} \right) \gamma_\delta \overleftrightarrow{\partial}^\delta \right] q_j \ .
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Nun gilt es eine Fallunterscheidung zu machen.

Für $\nu = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= i \bar{q}_i \left[\gamma_0 \overleftrightarrow{\partial}_0 + \gamma_0 \overleftrightarrow{\partial}_0 - \frac{2}{3} \left(g_{00} - \frac{k_0 k_0}{k_0^2} \right) \gamma_\delta \overleftrightarrow{\partial}^\delta \right] q_j \\
&= \bar{q}_i \gamma_0 \overleftrightarrow{\partial}_0 q_j \\
&= \bar{q}_i \gamma_0 k_0 q_j - k_0 \bar{q}_i \gamma_0 q_j \\
&= \bar{q}_i \gamma_0 q_j - \bar{q}_i \gamma_0 q_j \\
&= 0 \ .
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Für $\nu = m$:

$$0 = i\bar{q}_i \left[\gamma_0 \overleftrightarrow{\partial}_m + \gamma_m \overleftrightarrow{\partial}_0 - \frac{2}{3} \left(g_{0m} - \frac{k_0 k_m}{k_0^2} \right) \gamma_\delta \overleftrightarrow{\partial}^\delta \right] q_j \; . \tag{4.31}$$

Da $g_{0m} = k_m = 0$ ist, ist es nicht weiter notwendig den letzten Term zu betrachten. Zudem muss man sich nun darüber Gedanken machen, wie die einzelnen Impulse der beiden Quarks orientiert sind. Ist ist sinnvoll anzunehmen, dass sie stets in entgegengesetzte Richtung zeigen, so dass sie sich insgesamt zu null addieren. Sowohl in der folgenden Rechnung, als auch für die Fälle des Axial- und Pseudo-Tensormeson, soll $\bar{q}_i(\vec{k})$ und $q_j(-\vec{k})$ abhängen. Man beachte, dass hier nun mit k_μ nicht mehr der Gesamtimpuls, sondern nur noch die Einzelimpulse der Quarks gemeint sind. Der vordere Teil wird demnach zu:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{q}_i(\vec{k})\gamma_0(-k_m q_j(-\vec{k})) - (+k_m \bar{q}_i(\vec{k}))\gamma_0 q_j(-\vec{k}) \\ &\quad + \bar{q}_i(\vec{k})\gamma_m k_0 q_j(-\vec{k}) - k_0 \bar{q}_i(\vec{k})\gamma_m q_j(-\vec{k}) \\ &= -k_m \bar{q}_i(\vec{k})\gamma_0 q_j(-\vec{k}) \\ &= q_i^\dagger(\vec{k}) q_j(-\vec{k}) \; . \end{aligned} \tag{4.32}$$

Man sieht diesem Objekt noch nicht an, dass es verschwindet, jedoch sollte man sich über die tiefer liegende Struktur Klarheit verschaffen. Mesonen bestehen stets aus einem Quark und einem Antiquark. Quarks und Antiquarks werden mathematisch durch Anwenden der Erzeugeroperatoren für Teilchen $\hat{b}^\dagger(\vec{k}, s)$ und Antiteilchen $\hat{d}^\dagger(\vec{k}, s)$ mit Spin $\pm\frac{1}{2}$ auf das Vakuum generiert (Man kann sich leicht klarmachen, dass alle anderen Kombinationen von Erzeugern und Vernichtern stets mindestens einen Vernichter enthalten, der auf das Vakuum angewendet, null ergibt.). Dabei ist zu beachten, dass man die Spinoren selbst nicht vergisst. Man erhält ein Objekt von folgender Gestalt:

$$0 = \hat{b}_i^\dagger(\vec{k}, s)\hat{d}_j^\dagger(-\vec{k}, s')u_i^\dagger(\vec{k}, s)v_j(-\vec{k}, s')|0\rangle \tag{4.33}$$

An dieser Stelle sollte man sich ein wenig mit den Lösungen der Dirac-Gleichung auskennen. Mit folgenden Relationen lässt sich obiger Ausdruck leicht vereinfachen:

$$u^\dagger(\vec{k}, s)u(\vec{k}, s') = 2E_k \delta_{s,s'} \tag{4.34}$$

$$v^\dagger(\vec{k}, s)v(\vec{k}, s') = 2E_k \delta_{s,s'} \tag{4.35}$$

$$u^\dagger(\vec{k}, s)v(-\vec{k}, s') = 0 \tag{4.36}$$

$$v^\dagger(\vec{k}, s)u(-\vec{k}, s') = 0 \tag{4.37}$$

Man kann demnach mit etwas aufwand zeigen, dass

$$0 = X^{0\mu} \tag{4.38}$$

gilt.

Es sind alle Bedingungen an den Quarkstrom erfüllt. Es ist jedoch hierdurch noch nicht gesagt und gezeigt, dass es sich um den einzig möglichen Quarkstrom handelt, welcher den 2^{++} Zustand charakterisiert.

4.2. Axial-Tensormesonen 2^{--}

Der Quarkstrom für die Axial-Tensormesonen[3], welcher aus einem Artikel über Gitterrechnungen zu dem Zustand 2^{--} stammt [22, S.2-3], ist der Quarkstrom der Tensormesonen (4.9), modifiziert um γ^5-Matrizen. Auch hier soll er nur das Nonet beschreiben, so dass die Flavour-Symmetrie nicht zu stark gebrochen wird. Das Nonet hat die Form:

$$B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{h_{2,N}+b_2^0}{\sqrt{2}} & b_2^+ & K_2^+ \\ b_2^- & \frac{h_{2,N}-b_2^0}{\sqrt{2}} & K_2^0 \\ K_2^- & \bar{K}_2^0 & h_{2,S} \end{pmatrix}_{\mu\nu} . \tag{4.39}$$

Leider kann hier, auf Grund von fehlenden Daten seitens der Particle Data Group nur eine Identifikation vorgenommen werden.

Meson	Identifikation	Masse [MeV]
b_2		
K_2	$K_2(1820)$	1816 ± 13
$h_{2,N} \approx h_2$		
$h_{2,S} \approx h_2'$		

Tabelle 4.2: Axial-Tensormesonen und deren Massen.

Der zugehörige Quarkstrom lautet:

$$(B_{\mu\nu})_{ji} = i\bar{q}_i \left[\gamma_\mu \gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu \gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_\mu - \frac{2}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \gamma_\delta \gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}^\delta \right] q_j \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} &= i \Big[\bar{q}_i \gamma_\mu \gamma^5 \partial_\nu q_j - \partial_\nu \bar{q}_i \gamma_\mu \gamma^5 q_j + \bar{q}_i \gamma_\nu \gamma^5 \partial_\mu q_j - \partial_\mu \bar{q}_i \gamma_\nu \gamma^5 q_j \\ &\quad - \frac{2}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left(\bar{q}_i \gamma_\delta \gamma^5 \partial^\delta q_j - \partial^\delta \bar{q}_i \gamma_\delta \gamma^5 q_j \right) \Big] . \end{aligned} \tag{4.41}$$

Um die freie Theorie des Axial-Tensormesons zu beschreiben, wird dieselbe Lagrangedichte (4.11) wie für Tensormesonen verwendet. In den nächsten Unterabschnitten wird der Quarkstrom auf seine Symmetrien untersucht werden, um auch schließlich die Invarianz der Lagrangedichte unter diesen zu zeigen. Dabei wird völlig analog zur Untersuchung der Tensormesonen vorgegangen.

4.2.1. Lorentzsymmetrie

Das Transformationsverhalten der Spinoren unter Lorentztransformationen bleibt unverändert. Wichtig ist hier zu wissen, wie sich γ^5 in Bezug auf die anderen Objekte verhält. Es gilt:

$$\left[S(\Lambda), \gamma^5 \right]_- = 0 .$$

[3] Der Name Axial-Tensormesonen wurde von mir in Analogie zu Axial-Vektormesonen gewählt. Sollte es bereits eine andere oder zutreffendere Bezeichnung für diese Zustände geben, bitte ich mir dies mitzuteilen.

Zudem sei auf den Abschnitt Notationen verwiesen. Man findet somit:

$$\begin{aligned}(B'_{\mu\nu})_{ji} = i\Big[&\bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\gamma_\mu\gamma^5 \Lambda_\nu{}^\alpha \left(\partial_\alpha S(\Lambda)q_j\right) - \Lambda_\nu{}^\alpha \left(\partial_\alpha \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\right)\gamma_\mu\gamma^5 S(\lambda)q_j \\ &+ \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\gamma_\nu\gamma^5 \Lambda_\mu{}^\beta \left(\partial_\beta S(\Lambda)q_j\right) - \Lambda_\mu{}^\beta \left(\partial_\beta \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\right)\gamma_\nu\gamma^5 S(\lambda)q_j \\ &- \Lambda_\mu{}^\beta \Lambda_\nu{}^\alpha \frac{2}{3}\left(g_{\beta\alpha} - \frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}\right) \\ &\cdot \left(\bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\gamma_\delta\gamma^5 \Lambda^\delta{}_\epsilon \left(\partial^\epsilon S(\Lambda)q_j\right) - \Lambda^\delta{}_\epsilon \left(\partial^\epsilon \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda)\right)\gamma_\delta\gamma^5 S(\Lambda)q_j\right)\Big] \\ = i\Lambda_\mu{}^\beta \Lambda_\nu{}^\alpha \Big[&\bar{q}_i\gamma_\beta\gamma^5\partial_\alpha q_j - \partial_\alpha \bar{q}_i\gamma_\beta\gamma^5 q_j + \bar{q}_i\gamma_\alpha\gamma^5\partial_\beta q_j - \partial_\beta\bar{q}_i\gamma_\alpha\gamma^5 q_j \\ &-\frac{2}{3}\left(g_{\beta\alpha} - \frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}\right)\delta^\zeta_\epsilon \left(\bar{q}_i\gamma_\zeta\gamma^5\partial^\epsilon q_j - \partial^\epsilon\bar{q}_i\gamma_\zeta\gamma^5 q_j\right)\Big] \\ = \Lambda_\mu{}^\beta &\Lambda_\nu{}^\alpha (B_{\beta\alpha})_{ji} \\ = \Lambda_\mu{}^\alpha &\Lambda_\nu{}^\beta (B_{\alpha\beta})_{ji} \ .\end{aligned} \tag{4.42}$$

Der Quarkstrom verhält sich wie ein Lorentz-Tensor. Es ist also nicht mehr nötig, das Transformationsverhalten der Lagrangedichte (4.11) zu testen, da diese, wie man am Beispiel des Tensormesons (4.1.1) festgestellt hat, invariant unter Lorentztransformationen ist.

4.2.2. Ladungskonjugation

In diesem Abschnitt soll das Verhalten unter Ladungskonjugation untersucht werden. Man erwartet hier durch die γ^5-Matrizen ein negatives Vorzeichen. Dies wird in nachstehender Rechnung bestätigt. Wichtig ist auch hier, dass γ^5 mit dem Ladungskonjugationsoperator auf Grund eines doppelten Vorzeichenwechsels vertauscht. Ansonsten verwendet man wieder das Transformationsverhalten der Spinoren unter Ladungskonjugation.

$$\begin{aligned}(B'_{\mu\nu})_{ji} = i\Big[&q_i^T\hat{C}\gamma_\mu\gamma^5\left(\partial_\nu\hat{C}\bar{q}_j^T\right) - \left(\partial_\nu q_i^T\hat{C}\right)\gamma_\mu\gamma^5\hat{C}\bar{q}_j^T \\ &+ q_i^T\hat{C}\gamma_\nu\gamma^5\left(\partial_\mu\hat{C}\bar{q}_j^T\right) - \left(\partial_\mu q_i^T\hat{C}\right)\gamma_\nu\gamma^5\hat{C}\bar{q}_j^T \\ &-\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(q_i^T\hat{C}\gamma_\delta\gamma^5\left(\partial^\delta\hat{C}\bar{q}_j^T\right) - \left(\partial^\delta q_i^T\hat{C}\right)\gamma_\delta\gamma^5\hat{C}\bar{q}_j^T\right)\Big] \\ = i\Big[&q_i^T\gamma_\mu^T\gamma^5\partial_\nu\bar{q}_j^T - \partial_\nu q_i^T\gamma_\mu^T\gamma^5\bar{q}_j^T \\ &+ q_i^T\gamma_\nu^T\gamma^5\partial_\mu\bar{q}_j^T - \partial_\mu q_i^T\gamma_\nu^T\gamma^5\bar{q}_j^T \\ &-\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(q_i^T\gamma_\delta^T\gamma^5\partial^\delta\bar{q}_j^T - \partial^\delta q_i^T\gamma_\delta^T\gamma^5\bar{q}_j^T\right)\Big] \\ = i\Big[&q_i^T\gamma_\mu^T{\gamma^5}^T\partial_\nu\bar{q}_j^T - \partial_\nu q_i^T\gamma_\mu^T{\gamma^5}^T\bar{q}_j^T \\ &+ q_i^T\gamma_\nu^T{\gamma^5}^T\partial_\mu\bar{q}_j^T - \partial_\mu q_i^T\gamma_\nu^T{\gamma^5}^T\bar{q}_j^T \\ &-\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(q_i^T\gamma_\delta^T{\gamma^5}^T\partial^\delta\bar{q}_j^T - \partial^\delta q_i^T\gamma_\delta^T{\gamma^5}^T\bar{q}_j^T\right)\Big] \ .\end{aligned} \tag{4.43}$$

Auch hier sei abermals auf das Problem der verschiedenen "Transponiert"-Operatoren hingewiesen. Außerdem wird es durch das Vertauschen von γ^μ und γ^5 einen zusätzlichen Vorzeichenwechsel geben.

$$
\begin{aligned}
(B'_{\mu\nu})_{ji} &= -i\Big[\partial_\nu \bar{q}_j\gamma^5\gamma_\mu q_i - \bar{q}_j\gamma^5\gamma_\mu\partial_\nu q_i \\
&\quad + \partial_\mu\bar{q}_j\gamma^5\gamma_\nu q_i - \bar{q}_j\gamma^5\gamma_\nu\partial_\mu q_i \\
&\quad -\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\partial^\delta\bar{q}_j\gamma^5\gamma_\delta q_i - \bar{q}_j\gamma^5\gamma_\delta\partial^\delta q_i\right)\Big]^T \\
&= i\Big[\partial_\nu\bar{q}_j\gamma_\mu\gamma^5 q_i - \bar{q}_j\gamma_\mu\gamma^5\partial_\nu q_i \\
&\quad + \partial_\mu\bar{q}_j\gamma_\nu\gamma^5 q_i - \bar{q}_j\gamma_\nu\gamma^5\partial_\mu q_i \\
&\quad -\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\partial^\delta\bar{q}_j\gamma_\delta\gamma^5 q_i - \bar{q}_j\gamma_\delta\gamma^5\partial^\delta q_i\right)\Big]^T \\
&= i\Big[\partial_\nu\bar{q}_i\gamma_\mu\gamma^5 q_j - \bar{q}_i\gamma_\mu\gamma^5\partial_\nu q_j \\
&\quad + \partial_\mu\bar{q}_i\gamma_\nu\gamma^5 q_j - \bar{q}_i\gamma_\nu\gamma^5\partial_\mu q_j \\
&\quad -\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\partial^\delta\bar{q}_i\gamma_\delta\gamma^5 q_j - \bar{q}_i\gamma_\delta\gamma^5\partial^\delta q_j\right)\Big]^t \\
&= -\left(B_{\mu\nu}\right)^t_{ji} \quad .
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

Dieses Resultat stimmt mit der vorausgegangenen Überlegung überein. Es sollte natürlich auch die Lagrangedichte (4.11) invariant unter Ladungskonjugation sein. Dies kann man sich leicht klarmachen, da sie sich unter Ladungskonjugation, bis auf ein doppeltes negatives Vorzeichen in jedem Term, genau so verhält wie die der Tensormesonen. Die beiden negativen Vorzeichen heben sich gegenseitig auf. Die Invarianz ist somit gezeigt. Es sei hier noch einmal auf (4.22) verwiesen.

4.2.3. Paritätstransformation

Da auch hier das Transformationsverhalten der Spinoren unter Parität schon bekannt ist, muss nur noch angemerkt werden, dass, wie in den Notationen bemerkt, γ^0 und γ^5 antikommutieren. Die Notation aus dem letzten Abschnitt "$(-1)^{(\mu)}$" wird weiterhin beibehalten. Es ergibt sich folgende Transformationsregel:

$$
\begin{aligned}
(B'_{\mu\nu})_{ji} = i \Big[& \bar{q}_i \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^5 \left(\partial_\nu \gamma^0 q_j\right) - \left(\partial_\nu \bar{q}_i \gamma^0\right) \gamma_\mu \gamma^5 \gamma^0 q_j \\
& + \bar{q}_i \gamma^0 \gamma_\nu \gamma^5 \left(\partial_\mu \gamma^0 q_j\right) - \left(\partial_\mu \bar{q}_i \gamma^0\right) \gamma_\nu \gamma^5 \gamma^0 q_j \\
& - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\bar{q}_i \gamma^0 \gamma_\delta \gamma^5 \left(\partial^\delta \gamma^0 q_j\right) - \left(\partial^\delta \bar{q}_i \gamma^0\right) \gamma_\delta \gamma^5 \gamma^0 q_j\right)\Big] \\
= -i\,(-1)^{(\mu)}\,(-1)^{(\nu)} \Big[& \bar{q}_i \gamma_\mu \gamma^5 \partial_\nu q_j - \partial_\nu \bar{q}_i \gamma_\mu \gamma^5 q_j + \bar{q}_i \gamma_\nu \gamma^5 \partial_\mu q_j - \partial_\mu \bar{q}_i \gamma_\nu \gamma^5 q_j \\
& - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\bar{q}_i \gamma_\delta \gamma^5 \partial^\delta q_j - \partial^\delta \bar{q}_i \gamma_\delta \gamma^5 q_j\right)\Big] \\
= -\,(-1)^{(\mu)}\,&(-1)^{(\nu)}\,(B_{\mu\nu})_{ji} \\
= -(B^{\mu\nu})_{ji}\ .&
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Dieses Resultat war auch zu erwarten. Man hat demnach einen möglichen Quarkstrom für den 2^{--}-Zustand gefunden. Die Untersuchung der Lagrangedichte (4.11) kann abgekürzt werden. Wie im Falle der Ladungskonjugation heben sich die doppelten Vorzeichen genau Term für Term auf. Die Lagrangedichte (4.11) ist konsequenterweise invariant unter CPT-und Lorentztransformationen.

4.2.4. Flavour-Symmetrie

An den Transformationen der Quark-Spinoren unter Flavour-Transformation ändert sich nichts. Nun gilt es nur den Quarkstrom selbst zu betrachten:

$$
\begin{aligned}
(B'_{\mu\nu})_{li} &= i\bar{q}_j U^\dagger_{ji} \left[\gamma_\mu \gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu \gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_\mu - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\gamma_\delta \overleftrightarrow{\partial}^\delta\right] U_{lm} q_m \\
&= U_{lm} i\bar{q}_j \left[\gamma_\mu \gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu \gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_\mu - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\gamma_\delta \overleftrightarrow{\partial}^\delta\right] q_m U^\dagger_{ji} \\
&= U_{lm} (B_{\mu\nu})_{mj} U^\dagger_{ji} \\
&= \left(U B_{\mu\nu} U^\dagger\right)_{li}\ .
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

Dies ist exakt das selbe Transformationsverhalten wie im Falle des Quarkstroms für Tensormesonen und muss daher nicht noch einmal explizit in Lagrangedichte eingesetzt werden, um zu sehen, dass diese invariant und selbigen Transformationen ist.

4.2.5. Zwangsbedingungen

Was auch hier nicht vergessen werden darf, ist, den Quarkstrom auf das Erfüllen aller Zwangsbedingungen zu testen, da er sonst nicht konsistent zur freien Theorie ist. Die Symmetrie in den Lorentz-Indizes ist trivialerweise erfüllt. Außerdem ist es nicht nötig, die Spurfreiheit noch einmal separat zu testen, da diese völlig analog zu der Rechnung für Tensormesonen (4.27) gezeigt wird. Der einzige Unterschied liegt in den zusätzlichen γ^5-Matrizen. Auch die

Klein-Gordon-Gleichung bleibt erfüllt. Was noch zu testen gilt, ist die Divergenzfreiheit. Hier muss nicht von Beginn an gestartet werden, sondern man verwendet direkt:

$$\begin{aligned} 0 &= (B_{0\nu})_{ji} \\ &= i\bar{q}_i \left[\gamma_0\gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu\gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_0 - \frac{2}{3}\left(g_{0\nu} - \frac{k_0 k_\nu}{k^2}\right)\gamma_\delta\gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}^\delta\right] q_j \ . \end{aligned} \tag{4.47}$$

Auch hier wird es mit einer Fallunterscheidung weitergehen. Gleichwohl wird es nicht nötig sein, den letzten Term weiter zu betrachten, da dieser sowohl für $\nu = 0$, als auch $\nu = m$ verschwindet.

Für $\nu = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{q}_i \left(\gamma_0\gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_0 + \gamma_0\gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_0\right) q_j \\ &= \bar{q}_i\gamma_0\gamma^5 k_0 q_j - k_0 \bar{q}_i \gamma_0\gamma^5 q_j \\ &= 0 \ . \end{aligned} \tag{4.48}$$

Für $\nu = m$:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{q}_i(\vec{k}) \left(\gamma_0\gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_m + \gamma_m\gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_0\right) q_j(-\vec{k}) \\ &= \bar{q}_i(\vec{k})\gamma_0\gamma^5(-k_m q_j(-\vec{k})) - (k_m \bar{q}_i(\vec{k}))\gamma_0\gamma^5 q_j(-\vec{k}) \\ &\quad + \bar{q}_i(\vec{k})\gamma_m\gamma^5 k_0 q_j(-\vec{k}) - k_0\bar{q}_i(\vec{k})\gamma_m\gamma^5 q_j(-\vec{k}) \\ &= -k_m q_i^\dagger(\vec{k})\gamma^5 q_j(-\vec{k}) \\ &= q_i^\dagger(\vec{k})\gamma^5 q_j(-\vec{k}) \ . \end{aligned} \tag{4.49}$$

In dieser Rechnung wurde wie gehabt Gebrauch davon gemacht, dass die Impulse der Quarks antiparallel orientiert sind.
Der nun gewonnene Ausdruck muss wie im Falle der Tensormesonen auf das Vakuum angewendet werden. Es bleibt aus den gleichen Gründen nur ein Ausdruck mit zwei Erzeuger-Operatoren übrig:

$$0 = \hat{b}_i^\dagger(\vec{k}, s)\hat{d}_j^\dagger(-\vec{k}, s')u_i^\dagger(\vec{k}, s)\gamma^5 v_j(-\vec{k}, s')|0\rangle \ . \tag{4.50}$$

Dieses Objekt verschwindet leider nicht einfach durch Anwenden der Relation (4.36), da sich eine γ^5-Matrix zwischen den Spinoren befindet. Man kann jedoch für die weitere Argumentation die Erzeuger und Vernichter, sowie das Vakuum, außeracht lassen, da diese Terme nie Verschwinden:

$$0 = u_i^\dagger(\vec{k}, s)\gamma^5 v_j(-\vec{k}, s') \ . \tag{4.51}$$

Um hier weiter zu kommen, kommt man leider nicht umhin, die Spinoren explizit zu verwenden. Sie haben im Allgemeinen folgende Gestalt:

$$u(\vec{k}, s) = \sqrt{k_0 + m}\begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{k_0+m}\chi \end{pmatrix} \ , \tag{4.52}$$

$$v(\vec{k}, s) = \sqrt{k_0 + m}\begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{k_0+m}\eta \\ \eta \end{pmatrix} \ . \tag{4.53}$$

Dabei ist $\vec{\sigma}$ der Vektor der Pauli-Matrizen. $u(\vec{k}, s)$ ist wie gehabt der Spinor für ein Teilchen, während $v(\vec{k}, s)$ der Spinor für ein Antiteilchen bleibt. Die χ's und η's sind für Spin $+\frac{1}{2}$

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{4.54}$$

$$\eta_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

und für Spin $-\frac{1}{2}$

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \tag{4.56}$$

$$\eta_- = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{4.57}$$

Jetzt gilt dies in Ausdruck (4.51) einzusetzten und diesen auszuwerten. Man wird dabei feststellen, das folgende Identität nützlich ist:

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \mathbb{1} + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma} . \tag{4.58}$$

Mit dieser Vorarbeit erhält man (Die Flavour-Indizes werden im Laufe der Rechnung weggelassen, da sie das Ergebnis nicht beeinflussen. Jedoch ist das Vorzeichen des Impulses, sowie die generelle Möglichkeit verschiedener Spin-Einstellungen wichtig.):

$$0 = u_i^\dagger(\vec{k}, s)\gamma^5 v_j(-\vec{k}, s) \tag{4.59}$$

$$= \sqrt{k_0 + m}^2 \left(\chi^\dagger, \left[\frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{k_0 + m}\chi \right]^\dagger \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma}\vec{k}}{k_0+m}\eta \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{k_0 + m}^2 \left(\chi^\dagger, \chi^\dagger \frac{\vec{\sigma}^\dagger \vec{k}}{k_0 + m} \right) \begin{pmatrix} \eta \\ \frac{-\vec{\sigma}\vec{k}}{k_0+m}\eta \end{pmatrix} .$$

Jetzt kommt (4.58) zum tragen. Außerdem muss man wissen, dass der Vektor der Pauli-Matrizen hermitisch ist, $\vec{\sigma}^\dagger = \vec{\sigma}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \chi^\dagger \eta + \chi^\dagger \frac{(\vec{\sigma}\vec{k})(-\vec{\sigma}\vec{k})}{(k_0 + m)^2}\eta \\ &= \chi^\dagger \eta + \chi^\dagger \eta \frac{-\vec{k}^2}{(k_0 + m)^2} . \end{aligned} \tag{4.60}$$

Jetzt ist man fast fertig. Wir wissen aus der Diskussion über mögliche Spin-2-Zustände vom Anfang des Kapitels, dass Axial-Tensormesonen (2^{--}) nur möglich sind, wenn die Spins der beiden Quarks zu Gesamtspin gleich eins koppeln. Dafür müssen beide Spinoren die Spin-Einstellung $+\frac{1}{2}$ oder beide Spinoren die Spin-Einstellung $-\frac{1}{2}$ haben. Setzt man nun explizit die zugehörigen χ's und η's ein, so sieht man, dass der Ausdruck in beiden Fällen gleich null ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \chi^\dagger_\pm \eta_\pm + \chi^\dagger_\pm \eta_\pm \frac{-\vec{k}^2}{(k_0+m)^2} \\ &= 0\ . \end{aligned} \tag{4.61}$$

Damit wäre auch gezeigt, dass der Quarkstrom für Axial-Tensormesonen (4.41) alle Bedingungen erfüllt.

4.3. Pseudo-Tensormesonen 2^{-+}

Wie bereits am Anfang des Kapitels motiviert wurde, sollte es mindestens noch einen dritten Quarkstrom geben. Dieser wird Pseudo-Tensormesonen beschreiben. Dabei wird seine Form wiederholt Ähnlichkeiten mit den bereits vorgeschlagenen Strömen haben. Auch dieser Quarkstrom wird durch ein Meson-Nonet repräsentiert. Zusammen erhält man:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\eta_{2,N}+\pi_2^0}{\sqrt{2}} & \pi_2^+ & K_2^+ \\ \pi_2^- & \frac{\eta_{2,N}-\pi_2^0}{\sqrt{2}} & K_2^0 \\ K_2^- & \bar{K}_2^0 & \eta_{2,S} \end{pmatrix}_{\mu\nu} , \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned} (T_{\mu\nu})_{ji} &= i\bar{q}_i \left[\overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}_\nu - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\overleftrightarrow{\partial}_\alpha \gamma^5 \overleftrightarrow{\partial}^\alpha\right)\right] q_j \\ &= i\Big[\bar{q}_i\gamma^5\partial_\mu\partial_\nu q_j - \partial_\nu\bar{q}_i\gamma^5\partial_\mu q_j - \partial_\mu\bar{q}_i\gamma^5\partial_\nu q_j + \partial_\mu\partial_\nu\bar{q}_i\gamma^5 q_j \\ &\quad -\frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\bar{q}_i\gamma^5\Box q_j - 2\partial_\alpha\bar{q}_i\gamma^5\partial^\alpha q_j + \Box\bar{q}_i\gamma^5 q_j\right)\Big]\ . \end{aligned} \tag{4.63}$$

Im Falle des Pseudo-Tensormeson-Nonets, können wieder gute Identifikationen gewählt werden. Sie sind in folgender Tabelle gelistet.

Meson	Identifikation	Masse [MeV]
π_2	$\pi_2(1670)$	$1672,2 \pm 3,0$
K_2	$K_2(1770)$	1773 ± 8
$\eta_{2,N} \approx \eta_2$	$\eta_2(1645)$	1617 ± 5
$\eta_{2,S} \approx \eta_2'$	$\eta_2'(1870)$	1842 ± 8

Tabelle 4.3: Pseudo-Tensormesonen und deren Massen.

Die Lagrangedichte, welche man für Pseudo-Tensormesonen verwendet, ist dieselbe wie bei Axial- und Tensormesonen (4.11). Zum wiederholten Male müssen die Symmetrien des Quarkstromes getestet werden.

4.3.1. Lorentzsymmetrie

Alle wichtigen Rechenregeln zum Testen der Lorentz-Symmetrie sind aus den vorherigen Kapiteln bekannt. Die vollständig kontrahierten Terme in der letzten sind alle invariant unter Lorentz-Transformationen. Dies wird nicht explizit gezeigt, da sich der Term analog zu den vorherigen Fällen verhält. Man berechnet demgemäß:

$$
\begin{aligned}
(T'_{\mu\nu})_{ji} = i \Big[&(\bar{q}_i S^{-1}(\Lambda))\gamma^5 {\Lambda_\mu}^\delta {\Lambda_\nu}^\rho (\partial_\delta \partial_\rho S(\Lambda) q_j) \\
&- {\Lambda_\nu}^\rho (\partial_\rho \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda))\gamma^5 {\Lambda_\mu}^\delta (\partial_\delta S(\Lambda) q_j) \\
&- {\Lambda_\mu}^\delta (\partial_\delta \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda))\gamma^5 {\Lambda_\nu}^\rho (\partial_\rho S(\Lambda) q_j) \\
&+ {\Lambda_\mu}^\delta {\Lambda_\nu}^\rho (\partial_\delta \partial_\rho \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda))\gamma^5 (S(\Lambda) q_j) \\
&- \frac{2}{3} {\Lambda_\mu}^\delta {\Lambda_\nu}^\rho \left(g_{\delta\rho} - \frac{k_\delta k_\rho}{k^2} \right) \Big((\bar{q}_i S^{-1}(\Lambda))\gamma^5 (\Box S(\Lambda) q_j) \\
&\quad -2(\partial_\alpha \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda))\gamma^5 (\partial^\alpha S(\Lambda) q_j) + (\Box \bar{q}_i S^{-1}(\Lambda))\gamma^5 (S(\Lambda) q_j) \Big) \Big] \\
= {} & {\Lambda_\mu}^\delta {\Lambda_\nu}^\rho (T_{\delta\rho})_{ji} \ .
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

Man sieht, dass es nicht nötig ist, das Resultat extra noch einmal in die Lagrangedichte (4.11) einzusetzen, da die Transformationseigenschaft von Pseudo-Tensormesonen unter Lorentztransformationen dieselbe wie bei Axial- und Tensormesonen ist.

4.3.2. Ladungskonjugation

Im nächsten Schritt ist auch zu testen, wie sich der Strom unter Ladungskonjugation verhält und ob er das gewünschte Vorzeichen liefert:

$$
\begin{aligned}
(T'_{\mu\nu})_{ji} = i \Bigg[& (q_i^T \hat{C})\gamma^5(\partial_\mu\partial_\nu \hat{C}\bar{q}_j^T) - (\partial_\nu q_i^T \hat{C})\gamma^5(\partial_\mu \hat{C}\bar{q}_j^T) \\
& - (\partial_\mu q_i^T \hat{C})\gamma^5(\partial_\nu \hat{C}\bar{q}_j^T) + (\partial_\mu\partial_\nu \bar{q}_i q_i^T \hat{C})\gamma^5(\hat{C}\bar{q}_j^T) \\
& - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\Big((q_i^T \hat{C})\gamma^5(\Box\hat{C}\bar{q}_j^T) \\
& \quad -2(\partial_\alpha q_i^T \hat{C})\gamma^5(\partial^\alpha \hat{C}\bar{q}_j^T) + (\Box q_i^T \hat{C})\gamma^5(\hat{C}\bar{q}_j^T)\Big)\Bigg] \\
= -i \Bigg[& q_i^T \hat{C}\hat{C}^{-1}\gamma^{5^T}\partial_\mu\partial_\nu \bar{q}_j^T - \partial_\nu q_i^T \hat{C}\hat{C}^{-1}\gamma^{5^T}\partial_\mu \bar{q}_j^T \\
& - \partial_\mu q_i^T \hat{C}\hat{C}^{-1}\gamma^{5^T}\partial_\nu \bar{q}_j^T + \partial_\mu\partial_\nu \bar{q}_i q_i^T \hat{C}\hat{C}^{-1}\gamma^{5^T}\bar{q}_j^T \\
& - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\Big(q_i^T \hat{C}\hat{C}^{-1}\gamma^{5^T}\Box\bar{q}_j^T \\
& \quad -2\partial_\alpha q_i^T \hat{C}\hat{C}^{-1}\gamma^{5^T}\partial^\alpha \bar{q}_j^T + \Box q_i^T \hat{C}\hat{C}^{-1}\gamma^{5^T}\bar{q}_j^T\Big)\Bigg] \\
= i \Bigg[& \bar{q}_j\gamma^5\partial_\mu\partial_\nu q_i - \partial_\nu \bar{q}_j\gamma^5\partial_\mu q_i - \partial_\mu \bar{q}_j\gamma^5\partial_\nu q_i + \partial_\mu\partial_\nu \bar{q}_j\gamma^5 q_i \\
& - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\Big(\bar{q}_j\gamma^5\Box q_i - 2\partial_\alpha \bar{q}_j\gamma^5\partial^\alpha q_i + \Box\bar{q}_j\gamma^5 q_i\Big)\Bigg]^T \\
= (T_{\mu\nu}&)^t_{ji} \; .
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

Unter Ladungskonjugation transformiert sich ein Pseudo-Tensormeson wie gewünscht. Dies muss nicht mehr in der Lagrangedichte (4.11) getestet werden, da dies bereits für Tensormesonen beispielhaft erklärt wurde.

4.3.3. Paritätstransformation

Auch für Paritätstransformationen sind alle Rechenregeln bekannt. Die Notationen werden weiter beibehalten.

$$
\begin{aligned}
(T'_{\mu\nu})_{ji} = i \Bigg[& \bar{q}_i\gamma^0\gamma^5\partial_\mu\partial_\nu\gamma^0 q_j - \partial_\nu\bar{q}_i\gamma^0\gamma^5\partial_\mu\gamma^0 q_j - \partial_\mu\bar{q}_i\gamma^0\gamma^5\partial_\nu\gamma^0 q_j + \partial_\mu\partial_\nu\gamma^0\bar{q}_i\gamma^5\gamma^0 q_j \\
& - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\Big(\bar{q}_i\gamma^0\gamma^5\Box\gamma^0 q_j - 2\partial_\alpha\bar{q}_i\gamma^0\gamma^5\partial^\alpha\gamma^0 q_j + \Box\bar{q}_i\gamma^0\gamma^5\gamma^0 q_j\Big)\Bigg] \\
= -(-1&)^{(\mu)}(-1)^{(\nu)}(T_{\mu\nu})_{ji} \\
= -(T^{\mu\nu}&)_{ji} \; .
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

Der Quarkstrom transformiert wie ein 2^{-+}-Zustand und beschreibt somit Pseudo- Tensormesonen. Wie bereits in den vorherigen Fällen muss die Lagrangedichte (4.11) nicht extra getestet werden, da das Transformationsverhalten unter Parität dem des Axial-Tensormesons entspricht. Das CPT-Theorem ist als Konsequenz erfüllt, die Theorie ist invariant unter CPT-Transformationen.

4.3.4. Flavour-Symmetrie

Die Flavour-Symmetrie lässt sich auf die gleiche Weise testen, wie in den beiden vorausgegangenen Fällen:

$$\begin{aligned}(T'_{\mu\nu})_{li} &= i\bar{q}_j U^\dagger_{ji}\left[\overleftrightarrow{\partial}_\mu\gamma^5\overleftrightarrow{\partial}_\nu - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\overleftrightarrow{\partial}_\alpha\gamma^5\overleftrightarrow{\partial}^\alpha\right)\right]U_{lm}q_m \\ &= U_{lm} i\bar{q}_j\left[\overleftrightarrow{\partial}_\mu\gamma^5\overleftrightarrow{\partial}_\nu - \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\overleftrightarrow{\partial}_\alpha\gamma^5\overleftrightarrow{\partial}^\alpha\right)\right]q_m U^\dagger_{ji} \\ &= U_{lm}(T_{\mu\nu})_{mj}U^\dagger_{ji} \\ &= (UT_{\mu\nu}U\dagger)_{li} \ .\end{aligned} \tag{4.67}$$

Der Test der Lagrangedichte (4.11) erübrigt sich, da das gleiche Transformationsverhalten wie bei Axial- und Tensormesonen vorliegt.

4.3.5. Zwangsbedingungen

Der Test, ob alle Zwangsbedingungen erfüllt sind, wird sich auch hier zunächst auf einfache Überlegungen beschränken. Die Symmetrie des Quarkstroms in μ und ν ist offensichtlich, und auch die Spurfreiheit lässt sich, in Analogie zu den Tensormesonen, schon durch bloßes Anschauen erkennen. Auch hier geht man davon aus, dass die Quarks die Klein-Gordon-Gleichung einzeln erfüllen. Es bleibt wie gehabt die Untersuchung der Divergenzfreiheit. Man startet auch hier bei

$$\begin{aligned}0 &= (T_{0\nu})_{ji} \\ &= i\bar{q}_i\left[\overleftrightarrow{\partial}_0\gamma^5\overleftrightarrow{\partial}_\nu - \frac{2}{3}\left(g_{0\nu} - \frac{k_0 k_\nu}{k^2}\right)\left(\overleftrightarrow{\partial}_\alpha\gamma^5\overleftrightarrow{\partial}^\alpha\right)\right]q_j \ .\end{aligned} \tag{4.68}$$

Im Falle der Pseudo-Tensormesonen wird es nicht einmal nötig sein, eine Fallunterscheidung durchzuführen. Die Klammer mit den Impulsen verschwindet, egal welchen Wert ν annimmt. Dies wurde bereits mehrfach gezeigt. Nun schreibt man den vorderen Teil aus:

$$\begin{aligned}0 &= i\left[\bar{q}_i\gamma^5\partial_0\partial_\nu q_j - \partial_\nu\bar{q}_i\gamma^5\partial_0 q_j - \partial_0\bar{q}_i\gamma^5\partial_\nu q_j + \partial_0\partial_\nu\bar{q}_i\gamma^5 q_j\right] \\ &= i\left[\bar{q}_i\gamma^5 k_0\partial_\nu q_j - \partial_\nu\bar{q}_i\gamma^5 k_0 q_j - k_0\bar{q}_i\gamma^5\partial_\nu q_j + k_0\partial_\nu\bar{q}_i\gamma^5 q_j\right] \\ &= i\left[\bar{q}_i\gamma^5\partial_\nu q_j - \partial_\nu\bar{q}_i\gamma^5 q_j - \bar{q}_i\gamma^5\partial_\nu q_j + \partial_\nu\bar{q}_i\gamma^5 q_j\right] \\ &= 0 \ .\end{aligned} \tag{4.69}$$

Man sieht, dass sich hier die einzelnen Terme gegeneinander aufheben. Demnach sind auch für den letzten Quarkstrom alle Zwangsbedingungen erfüllt.

5. Effektive Modelle von Tensormesonen

Bisher wurde in den vorherigen Abschnitten nur die freie Theorie für Spin-2-Teilchen, sowie ihre Substruktur, die Quarkströme betrachtet. Als nächstes sollen wechselwirkende Terme in die Lagrangedichte eingeführt werden. Auch diese Terme müssen auf ihre Symmetrien hin untersucht werden und invariant unter den gleichen Transformationen, wie es die freie Theorie ist, sein. Zudem müsste man auch die freie Theorie der mit dem Spin-2-Feld wechselwirkenden Teilchen in die Lagrangedichte integrieren. Dies soll in dieser Arbeit jedoch nicht diskutiert werden, da die entsprechenden freien Theorien zu den Teilchen/Feldern wohlbekannt sein werden und in jeder Einführungsvorlesung in die Quantenfeldtheorie diskutiert werden.
Zudem sei hier ausdrücklich gesagt, dass dieses Kapitel keine vollständige Diskussion der wechselwirkenden Quantenfeldtheorie des Spin-2-Teilchen liefert. Es werden nur einige, aus theoretischer Sicht mögliche, Wechselwirkungsterme vorgestellt und auf ihre Symmetrien untersucht. Als Ergänzung wird zu jedem Term auch die zugehörige Zerfallsamplitude berechnet sein, jedoch nicht weiter motiviert oder diskutiert. Die Transformationseigenschaften der anderen Felder unter Lorentz-Transformationen, sowie Ladungskonjugation und Parität, als auch Flavour-Transformation, werden der Bachelorarbeit von Herrn Divotgey [7, S.21 ff] entnommen (die Nonets werden jedoch im letzten Teil noch einmal explizit erwähnt). Das Transformationsverhalten der Tensorfelder wurde im vorherigen Kapitel (4) diskutiert. Zudem sei bereits hier gesagt, dass die Zerfallsamplituden im Ruhesystem des "zerfallenden" Teilchens $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$ bestimmt werden. Die Berechnung des Impulses, der in entgegengesetzter Richtung auslaufenden Teilchen, sei an das Ende des Kapitels gestellt. Im letzten Abschnitt sollen die theoretischen Betrachtungen auch auf experimentelle Übereinstimmung getestet werden.

5.1. Zerfall $2^{-+} \to 0^{-+}1^{--}$

Der Wechselwirkungsterm beschreibt den Zerfall von Pseudo-Tensormesonen 2^{-+} in Vektormesonen 1^{--} und Pseudo-Skalare-Mesonen 0^{-+} mit der Kopplungskonstanten c_{TPV} . Er ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{TPV} = c_{TPV} Tr \left\{ T_{\mu\nu} \left[V^\mu, \partial^\nu P \right]_- \right\} \ . \tag{5.1}$$

5.1.1. Lorentzsymmetrie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{TPV} &= c_{TPV} Tr \left\{ {\Lambda_\mu}^\alpha {\Lambda_\nu}^\beta T_{\alpha\beta} {\Lambda^\mu}_\gamma V^\gamma {\Lambda^\nu}_\delta \partial^\delta P - {\Lambda_\mu}^\alpha {\Lambda_\nu}^\beta T_{\alpha\beta} {\Lambda^\nu}_\delta \partial^\delta P {\Lambda^\mu}_\gamma V^\gamma \right\} \\ &= c_{TPV} Tr \left\{ \delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\delta T_{\alpha\beta} V^\gamma \partial^\delta P - \delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\delta T_{\alpha\beta} \partial^\delta P V^\gamma \right\} \\ &= c_{TPV} Tr \left\{ T_{\mu\nu} \left[V^\mu, \partial^\nu P \right]_- \right\} \\ &= \mathcal{L}_{TPV} \ . \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.1.2. Ladungskonjugation

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{TPV} &= c_{TPV} Tr \left\{ (T_{\mu\nu})^t \, (-V^\mu)^t \, (\partial^\nu P)^t - (T_{\mu\nu})^t \, (\partial^\nu P)^t \, (-V^\mu)^t \right\} \\
&= c_{TPV} Tr \left\{ (-\partial^\nu P V^\mu T_{\mu\nu} + V^\mu \partial^\nu T_{\mu\nu})^t \right\} \\
&= c_{TPV} Tr \left\{ V^\mu \partial^\nu P T_{\mu\nu} - \partial^\nu P V^\mu T_{\mu\nu} \right\} \\
&= c_{TPV} Tr \left\{ T_{\mu\nu} V^\mu \partial^\nu P - T_{\mu\nu} \partial^\nu P V^\mu \right\} \\
&= \mathcal{L}_{TPV} \ .
\end{aligned} \tag{5.3}$$

5.1.3. Paritätstransformation

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{TPV} = c_{TPV} Tr \Big\{ &\left(- (-1)^{(\mu)} \, (-1)^{(\nu)} \, T_{\mu\nu} \right) \left((-1)^{(\mu)} \, V^\mu \right) \left(- (-1)^{(\nu)} \, \partial^\nu P \right) \\
&- \left(- (-1)^{(\mu)} \, (-1)^{(\nu)} \, T_{\mu\nu} \right) \left(- (-1)^{(\nu)} \, \partial^\nu P \right) \left((-1)^{(\mu)} \, V^\mu \right) \Big\} \\
= c_{TPV} Tr \{ &T_{\mu\nu} V^\mu \partial^\nu P - T_{\mu\nu} \partial^\nu P V^\mu \} \\
= \mathcal{L}_{TPV} \ &.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

5.1.4. Flavour-Symmetrie

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{TPV} &= c_{TPV} Tr \left\{ U T_{\mu\nu} U^\dagger \left[U V^\mu U^\dagger , \partial^\nu U P U^\dagger \right]_- \right\} \\
&= c_{TPV} Tr \left\{ U T_{\mu\nu} \left[V^\mu , \partial^\nu P \right]_- U^\dagger \right\} \\
&= \mathcal{L}_{TPV} \ .
\end{aligned} \tag{5.5}$$

5.1.5. Zerfallsamplitude

Es genügt zur einfachen Rechnung folgenden Term zu betrachten. Wichtig hierbei ist, dass die Kopplungskonstante a_{TPV} proportional zu c_{TPV} ist, jedoch nicht identisch.

$$\mathcal{L}_{TPV} = a_{TPV} T_{\mu\nu} \partial^\mu P V^\nu \ . \tag{5.6}$$

Mit Hilfe der Feynman-Regeln ergibt sich:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{T_{\mu\nu} \to \partial^\mu \phi V^\nu} &= i a_{TPV} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda, k_t) i k_p^\mu \epsilon^\nu(\rho, k_v) \\
&= -a_{TPV} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda, k_t) k_p^\mu \epsilon^\nu(\rho, k_v) \ ,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$-i\mathcal{M}^\dagger_{T_{\mu\nu} \to \partial^\mu \phi V^\nu} = -c_{TPV} \epsilon_{\alpha\beta}(\lambda, k_t) k_p^\alpha \epsilon^\beta(\rho, k_v) \ . \tag{5.8}$$

Nun bildet man das Betragsquadrat, mittelt über alle einlaufenden Spins und summiert über alle ausgehenden Spins. Man erhält so die Zerfallsamplitude $\left|\mathcal{M}_{T_{\mu\nu}\to\partial^\mu\phi V^\nu}\right|^2$:

$$\begin{aligned}
\sum\left|\mathcal{M}_{T_{\mu\nu}\to\partial^\mu\phi V^\nu}\right|^2 &= \frac{a_{TPV}^2}{5}\sum_{\lambda=1}^{5}\sum_{\rho=1}^{3}\epsilon_{\mu\nu}(\lambda,k_t)\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda,k_t)k_p^\mu k_p^\alpha \epsilon^\nu(\rho,k_v)\epsilon^\beta(\rho,k_v) \\
&= \frac{a_{TPV}^2}{5}\left(-\frac{1}{3}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right. \\
&\quad +\frac{1}{3}g_{\mu\nu}\frac{k_{t\alpha}k_{t\beta}}{m_t^2}+\frac{1}{3}g_{\alpha\beta}\frac{k_{t\mu}k_{t\nu}}{m_t^2} \\
&\quad -\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}\frac{k_{t\alpha}k_{t\beta}}{m_t^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\alpha}\frac{k_{t\mu}k_{t\beta}}{m_t^2}-\frac{1}{2}g_{\mu\beta}\frac{k_{t\nu}k_{t\alpha}}{m_t^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\beta}\frac{k_{t\mu}k_{t\alpha}}{m_t^2} \\
&\quad \left.+\frac{2}{3}\frac{k_{t\mu}k_{t\nu}k_{t\alpha}k_{t_\beta}}{m_t^4}\right)k_p^\mu k_p^\alpha\left(-g^{\nu\beta}+\frac{k_v^\nu k_v^\beta}{m_v^2}\right) \\
&= \frac{a_{TPV}^2}{5}\left(\frac{k_p^2}{3}-2k_p^2-\frac{k_p^2}{2}-\frac{2(k_pk_t)^2}{3m_t^2}+\frac{k_p^2k_t^2}{2}+\frac{3(k_pk_t)^2}{m_t^2}\right. \\
&\quad -\frac{2(k_pk_t)^2k_t^2}{m_t^4}-\frac{(k_pk_v)^2}{3m_v^2}+\frac{k_p^2k_v^2}{2m_v^2}+\frac{(k_vk_p)^2}{2m_v^2} \\
&\quad +\frac{2(k_vk_p)(k_tk_p)(k_tk_v)}{3m_v^2m_t^2}-\frac{k_p^2(k_tk_v)^2}{2m_t^2m_v^2} \\
&\quad \left.-\frac{(k_vk_p)(k_tk_p)(k_tk_v)}{m_t^2m_v^2}-\frac{(k_tk_p)^2k_v^2}{2m_t^2m_v^2}+\frac{2(k_tk_p)^2(k_tk_v)^2}{3m_t^4m_v^2}\right) \\
&= \frac{a_{TPV}^2}{5}\left(-\frac{7m_p^2}{6}+\frac{7E_p^2}{6}+\frac{(E_v^2E_p^2+2E_vE_p\vec{k}^2+\vec{k}^4)}{6m_v^2}\right. \\
&\quad \left.-\frac{(E_v^2E_p2+\vec{k}^2E_vE_p)}{3m_v^2}-\frac{m_p^2E_v^2}{2m_v^2}+\frac{2E_v^2E_p^2}{3m_v^2}\right) \\
&= \frac{a_{TPV}^2}{5}\left(-\frac{7m_p^2}{6}+\frac{7E_p^2}{6}+\frac{E_v^2E_p^2}{2m_v^2}+\frac{\vec{k}^4}{6m_v^2}-\frac{m_p^2E_v^2}{2m_v^2}\right) \\
&= \frac{a_{TPV}^2}{15}\left(2\frac{\vec{k}^4}{m_v^2}+5\vec{k}^2\right)\ .
\end{aligned} \tag{5.9}$$

5.2. Zerfall $2^{-+}\to 2^{++}0^{-+}$

Dieser Wechselwirkungsterm gibt den möglichen Zerfall von Pseudo-Tensormesonen 2^{-+} in Tensormesonen 2^{++} und Pseudo-Skalare-Mesonen 0^{-+} an. Der zugehörige Wechselwirkungsterm sei wie folgt gegeben:

$$\mathcal{L}_{TXP} = c_{TXP}Tr\left\{T_{\mu\nu}\left\{X^{\mu\nu},P\right\}_+\right\}\ . \tag{5.10}$$

5.2.1. Lorentzsymmetrie

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{TXP} &= c_{TXP}Tr\left\{\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda_{\nu}{}^{\beta}T_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\gamma}\Lambda^{\nu}{}_{\delta}X^{\gamma\delta}P + \Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda_{\nu}{}^{\beta}T_{\mu\nu}P\Lambda^{\mu}{}_{\gamma}\Lambda^{\nu}{}_{\delta}X^{\gamma\delta}\right\} \\
&= c_{TXP}Tr\left\{\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\delta}T_{\mu\nu}X^{\gamma\delta}P + \delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\delta}T_{\mu\nu}PX^{\gamma\delta}\right\} \\
&= c_{TXP}Tr\left\{T_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta}P + T_{\alpha\beta}PX^{\alpha\beta}\right\} \\
&= \mathcal{L}_{TXP} \ .
\end{aligned} \tag{5.11}$$

5.2.2. Ladungskonjugation

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{TXP} &= c_{TXP}Tr\left\{(T_{\mu\nu})^t\,(X^{\mu\nu})^t\,(P)^t + (T_{\mu\nu})^t\,(P)^t\,(X^{\mu\nu})^t\right\} \\
&= c_{TXP}Tr\left\{PX^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + X^{\mu\nu}PT_{\mu\nu}\right\} \\
&= c_{TXP}Tr\left\{T_{\mu\nu}PX^{\mu\nu} + T_{\mu\nu}X^{\mu\nu}P\right\} \\
&= \mathcal{L}_{TXP} \ .
\end{aligned} \tag{5.12}$$

5.2.3. Paritätstransformation

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{TXP} = c_{TXP}Tr\Big\{&\left(-(-1)^{(\mu)}(-1)^{(\nu)}T_{\mu\nu}\right)\left((-1)^{(\mu)}(-1)^{(\nu)}X^{\mu\nu}\right)(-P) \\
&+\left(-(-1)^{(\mu)}(-1)^{(\nu)}T_{\mu\nu}\right)(-P)\left((-1)^{(\mu)}(-1)^{(\nu)}X^{\mu\nu}\right)\Big\} \\
= c_{TXP}Tr&\left\{T_{\mu\nu}X^{\mu\nu}P + T_{\mu\nu}PX^{\mu\nu}\right\} \\
= \mathcal{L}_{TXP}& \ .
\end{aligned} \tag{5.13}$$

5.2.4. Flavour-Symmetrie

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{TXP} &= c_{TXP}Tr\left\{UT_{\mu\nu}U^{\dagger}\left\{UX^{\mu\nu}U^{\dagger}, UPU^{\dagger}\right\}_{+}\right\} \\
&= c_{TXP}Tr\left\{UT_{\mu\nu}\left\{X^{\mu\nu}, P\right\}_{+}U^{\dagger}\right\} \\
&= \mathcal{L}_{TXP} \ .
\end{aligned} \tag{5.14}$$

5.2.5. Zerfallsamplitude

Erneut betrachtet man nur den ersten Term aus der Spur:

$$\mathcal{L}_{TXP} = a_{TXP}T_{\mu\nu}X^{\mu\nu}P \ . \tag{5.15}$$

Abermals wendet man die Feynman-Regeln an und erhält so:

$$i\mathcal{M}_{T\to XP} = ia_{TXP}\epsilon_{\mu\nu}(\lambda,p)\epsilon^{\mu\nu}(\rho,k) \ , \tag{5.16}$$

$$-i\mathcal{M}^{\dagger}_{T\to XP} = -ia_{TXP}\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda,p)\epsilon^{\alpha\beta}(\rho,k) \ . \tag{5.17}$$

Die über die Spins gemittelte Zerfallsamplitude ergibt:

$$\begin{aligned}
\sum|\mathcal{M}_{T\to XP}|^2 &= \frac{a^2_{TXP}}{5}\sum_{\lambda=1}^{5}\sum_{\rho=1}^{5}\epsilon_{\mu\nu}(\lambda,p)\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda,p)\epsilon^{\mu\nu}(\rho,k)\epsilon^{\alpha\beta}(\rho,k) \\
&= \frac{a^2_{TXP}}{5}\left(-\frac{1}{3}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right.\\
&\quad+\frac{1}{3}g_{\mu\nu}\frac{p_\alpha p_\beta}{m_p^2}+\frac{1}{3}g_{\alpha\beta}\frac{p_\mu p_\nu}{m_p^2}\\
&\quad-\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}\frac{p_\nu p_\beta}{m_p^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\alpha}\frac{p_\mu p_\beta}{m_p^2}-\frac{1}{2}g_{\mu\beta}\frac{p_\nu p_\alpha}{m_p^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\beta}\frac{p_\mu p_\alpha}{m_p^2}\\
&\quad\left.+\frac{2}{3}\frac{p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta}{m_p^4}\right)\left(-\frac{1}{3}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}+\frac{1}{2}g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\right.\\
&\quad+\frac{1}{3}g^{\mu\nu}\frac{k^\alpha k^\beta}{m_k^2}+\frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\frac{k^\mu k^\nu}{m_k^2}\\
&\quad-\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\frac{k^\nu k^\beta}{m_k^2}-\frac{1}{2}g^{\nu\alpha}\frac{k^\mu k^\beta}{m_k^2}-\frac{1}{2}g^{\mu\beta}\frac{k^\nu k^\alpha}{m_k^2}-\frac{1}{2}g^{\nu\beta}\frac{k^\mu k^\alpha}{m_k^2}\\
&\quad\left.+\frac{2}{3}\frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta}{m_k^4}\right)\\
&= \frac{a^2_{TXP}}{5}\left(\frac{38}{18}+\frac{76}{18}\frac{(pk)^2}{m_p^2m_k^2}-\frac{16}{18}\frac{k^2(pk)^2}{m_p^2m_k^4}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{8}{18}\frac{(pk)^4}{m_p^4m_k^4}-\frac{16}{18}\frac{k_p^2(pk)^2}{m_p^4}m_k^2\right)\\
&= \frac{a^2_{TXP}}{45}\left(4\frac{\vec{k}^4}{m_k^4}+30\frac{\vec{k}^2}{m_k^2}+45\right) \ .
\end{aligned} \tag{5.18}$$

5.3. Zerfall $2^{++}\to 0^{-+}0^{-+}$

An dieser Stelle soll auch noch ein Zerfall der Art Tensormesonen 2^{++} in zwei Pseudo-Skalare-Mesonen 0^{-+} diskutiert werden. Der Wechselwirkungsterm hat wieder eine sehr ähnliche Gestalt zu den vorherigen:

$$\mathcal{L}_{XPP} = c_{XPP}Tr\left\{X_{\mu\nu}\left\{\partial^\mu P_1,\partial^\nu P_2\right\}_+\right\} \ . \tag{5.19}$$

5.3.1. Lorentzsymmetrie

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{XPP} &= c_{XPP} Tr\left\{\Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta X_{\alpha\beta} \Lambda^\mu{}_\gamma \partial^\gamma P_1 \Lambda^\nu{}_\delta \partial^\delta P_2 + \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta X_{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\delta \partial^\delta P_2 \Lambda^\mu{}_\gamma \partial^\gamma P_1\right\} \\
&= c_{XPP} Tr\left\{\delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\delta X_{\alpha\beta} \partial^\gamma P_1 \partial^\delta P_2 + \delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\delta X_{\alpha\beta} \partial^\delta P_2 \partial^\gamma P_1\right\} \\
&= c_{XPP} Tr\left\{X_{\alpha\beta} \partial^\alpha P_1 \partial^\beta P_2 + X_{\alpha\beta} \partial^\beta P_2 \partial^\alpha P_1\right\} \\
&= \mathcal{L}_{XPP} \ .
\end{aligned} \tag{5.20}$$

5.3.2. Ladungskonjugation

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{XPP} &= c_{XPP} Tr\left\{(X_{\mu\nu})^t (\partial^\mu P_1)^t (\partial^\nu P_2)^t + (\partial^\nu P_2)^t (X_{\mu\nu})^t (\partial^\mu P_1)^t\right\} \\
&= c_{XPP} Tr\left\{\partial^\nu P_2 \partial^\mu P_1 X_{\mu\nu} + \partial^\mu P_1 \partial^\nu P_2 X_{\mu\nu}\right\} \\
&= c_{XPP} Tr\left\{X_{\mu\nu} \partial^\nu P_2 \partial^\mu P_1 + X_{\mu\nu} \partial^\mu P_1 \partial^\nu P_2\right\} \\
&= \mathcal{L}_{XPP} \ .
\end{aligned} \tag{5.21}$$

5.3.3. Paritätstransformation

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{XPP} = c_{XPP} Tr\Big\{&\left((-1)^{(\mu)} (-1)^{(\nu)} X_{\mu\nu}\right)\left(-(-1)^{(\mu)} \partial^\mu P_1\right)\left(-(-1)^{(\nu)} \partial^\nu P_2\right) \\
&+ \left((-1)^{(\mu)} (-1)^{(\nu)} X_{\mu\nu}\right)\left(-(-1)^{(\nu)} \partial^\nu P_2\right)\left(-(-1)^{(\mu)} \partial^\mu P_1\right)\Big\} \\
= c_{XPP} Tr&\left\{X_{\mu\nu} \partial^\mu P_1 \partial^\nu P_2 + X_{\mu\nu} \partial^\nu P_2 \partial^\mu P_1\right\} \\
= \mathcal{L}_{XPP}& \ .
\end{aligned} \tag{5.22}$$

5.3.4. Flavour-Symmetrie

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{XPP} &= c_{XPP} Tr\left\{U X_{\mu\nu} U^\dagger \left\{\partial^\mu U P_1 U^\dagger, \partial^\nu U P_2 U^\dagger\right\}_+\right\} \\
&= c_{XPP} Tr\left\{U X_{\mu\nu} \left\{\partial^\mu P_1, \partial^\nu P_2\right\}_+ U^\dagger\right\} \\
&= \mathcal{L}_{XPP} \ .
\end{aligned} \tag{5.23}$$

5.3.5. Zerfallsamplitude

Auch an dieser Stelle betrachtet man nur einen Summanden der Spur und ändert im Gegenzug die Kopplungskonstante:

$$\mathcal{L}_{XPP} = a_{XPP} X_{\mu\nu} \partial^\mu P_1 \partial^\nu P_2 \ . \tag{5.24}$$

Dann ergeben die Feynman-Regeln für Tensormesonen:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{X\to PP} &= i a_{XPP} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda, p) i k_1^\mu i k_2^\nu \\
&= -i a_{XPP} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda, p) k_1^\mu k_2^\nu \ ,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}^{\dagger}_{X\to PP} &= i a_{XPP}\epsilon_{\mu\nu}(\lambda,p)k_1^{\mu}k_2^{\nu} \\
&= i a_{XPP}\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda,p)k_1^{\alpha}k_2^{\beta} \ .
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

Die Zerfallsamplitude ergibt sich zu:

$$
\begin{aligned}
\sum |\mathcal{M}_{X\to PP}|^2 &= \frac{a_{XPP}^2}{5}\sum_{\lambda=1}^{5}\epsilon_{\mu\nu}(\lambda,p)\epsilon_{\alpha\beta}(\lambda,p)k_1^{\mu}k_2^{\nu}k_1^{\alpha}k_2^{\beta} \\
&= \frac{a_{XPP}^2}{5}\left(-\frac{1}{3}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}+\frac{1}{2}g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right. \\
&\quad +\frac{1}{3}g_{\mu\nu}\frac{p_\alpha p_\beta}{m_p^2}+\frac{1}{3}g_{\alpha\beta}\frac{p_\mu p_\nu}{m_p^2} \\
&\quad -\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}\frac{p_\nu p_\beta}{m_p^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\alpha}\frac{p_\mu p_\beta}{m_p^2}-\frac{1}{2}g_{\mu\beta}\frac{p_\nu p_\alpha}{m_p^2}-\frac{1}{2}g_{\nu\beta}\frac{p_\mu p_\alpha}{m_p^2} \\
&\quad \left.+\frac{2}{3}\frac{p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta}{m_p^4}\right)k_1^{\mu}k_2^{\nu}k_1^{\alpha}k_2^{\beta} \\
&= \frac{a_{XPP}^2}{5}\left(-\frac{E_1^2E_2^2}{2}+\frac{\vec{k}^4}{6}+\frac{m_1^2m_2^2}{2}+\frac{\vec{k}^2(E_1^2+E_2^2)}{2}\right) \\
&= \frac{4}{30}a_{XPP}^2\vec{k}^4 \ .
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

5.4. Zerfallsbreiten

Um die Theorie, welche in dieser Arbeit aufgebaut wurde, mit den experimentellen Werten vergleichen zu können, muss zunächst der Impuls $\vec{k}$, welcher in jeder Zerfallsamplitude auftrat, durch die Massen der beteiligten Teilchen ersetzt werden, da eine Zerfallswahrscheinlichkeit nicht vom Impuls des Teilchens abhängen darf. Dies erscheint auch logisch, da man sich stets durch Lorentztransformationen in ein System begeben kann, in welchem das Teilchen ruht. Da wir nur Zerfälle der Form: Teilchen mit Masse M zerfällt in Teilchen der Massen m_1 und m_2 betrachten, genügt es, die Betrachtung des Impulses ein einziges Mal vorzunehmen.
Im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens gilt Impulserhaltung, daher:

$$
\begin{gathered}
\vec{0} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \ , \\
\text{weiter} \\
\vec{k} = \vec{k}_1 = -\vec{k}_2 \ .
\end{gathered}
$$

Außerdem erfüllen alle Teilchen die Massenschalenbedingung:

$$E^2 = \vec{k}^2 + m^2 \ .$$

Aus der Energieerhaltung folgt, dass das zerfallende Teilchen keinen Impuls trägt.

$$
\begin{aligned}
M &= \sqrt{\vec{k}^2+m_1^2}\sqrt{\vec{k}^2+m_2^2} \ , \\
M^2 &= 2\vec{k}^2+m_1^2+m_2^2+2\sqrt{(\vec{k}^2+m_1^2)(\vec{k}^2+m_2^2)} \ .
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

Quadriert man das Ergebnis, so ergibt sich ein Ausdruck für $\vec{k}^2$, dessen positive Wurzel das gewünschte Resultat liefert:

$$\left(\frac{M^2}{2} - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \vec{k}^2\right) = \vec{k}^4 + \vec{k}^2(m_1^2 + m_2^2) + m_1^2 m_2^2 \ , \quad (5.29)$$

$$\frac{\left(M^2 - m_1^2 - m_2^2\right)^2}{4} + \left(-M^2 + (m_1^2 + m_2^2)\right)\vec{k}^2 + \vec{k}^4 = \vec{k}^4 + \vec{k}^2(m_1^2 + m_2^2) + m_1^2 m_2^2 \ .$$

Demnach erhält man:

$$|\vec{k}| = \sqrt{\frac{m_1^4 + (m_2^2 - M^2)^2 - 2m_1^2(m_2^2 + M^2)}{4M^2}} \ . \quad (5.30)$$

Dieses Ergebnis $|\vec{k}|$, sowie die einzelnen Zerfallsamplituden $|\mathcal{M}|^2$, müssen jeweils in die Formel (5.31) zur Berechnung von Zerfallsbreiten Γ, welche ich aus der Bachelorarbeit von Herrn Divotgey [7, S.19] übernommen habe, eingesetzt werden. Diese Werte können mit den experimentellen verglichen werden.

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{8\pi} \frac{|\vec{k}|}{M^2} \ . \quad (5.31)$$

Es sei hier angemerkt, dass diese Formel streng genommen noch nicht für Teilchen mit Spin-2 hergeleitet wurde. Dies werde ich vielleicht im Anschluss an diese Arbeit in meiner weiteren Forschung angehen.
Des Weiteren sei zu Formel (5.31) gesagt, dass stets die unpolarisierten Zerfallsamplituden verwendet werden. Im Folgenden sollen explizit Kopplungskonstanten und Zerfallsbreiten mit experimentellen Daten berechnet und abgeglichen werden. Hier sei angemerkt, dass in Rechnungen stets über die Ausgangszustände gemittelt und über die Endzustände summiert wird. Zudem werden in den Rechnungen die Fehler in den Massenangaben vernachlässigt, sowie immer die Massen der geladenen Konstituenten verwendet werden. Diese Näherung ist akzeptabel, da die Ungenauigkeit in den Massen im Vergleich zu der Ungenauigkeit der gemessenen Zerfallsamplituden gering ist. Nur dieser Fehler wird berücksichtigt werden.

5.4.1. Mischungseffekte und physikalische Nonets

Im Abschnitt (4) wurden die Quarkströme und Nonets der (Pseudo-/Axial-)Tensormesonen vorgestellt. Zudem ist bereits erwähnt worden, dass die Nonets der anderen Teilchen-Zustände, im Abschnitt über Wechselwirkung (5) der Bachelorarbeit von Herrn Divotgey entnommen werden [7, S.20-21]. Die in diesen Nonets enthaltenen Teilchen sind jedoch leider nicht die in der Natur (den Beschleunigerexperimenten) auftretenden physikalischen Teilchen. Dies äußert sich wie folgt: Die Nonets, welche in den von mir und Herrn Divotgey berechneten Zerfällen verwendet werden, haben die allgemeine Struktur:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{f_N + a^0}{\sqrt{2}} & a^+ & K^+ \\ a^- & \frac{f_n - a^0}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & f_S \end{pmatrix} \ . \quad (5.32)$$

Wobei die einzelnen Einträge Quark-Anitquark-Zustände sind:

$$
\begin{aligned}
a^0 &= \sqrt{2}(\bar{u}u - \bar{d}d) \ , \\
a^+ &= \bar{d}u \ , \\
a^- &= \bar{u}d \ , \\
f_N &= \sqrt{2}(\bar{u}u + \bar{d}d) \ , \\
f_S &= \bar{s}s \ , \\
K^0 &= \bar{s}d \ , \\
\bar{K}^0 &= \bar{d}s \ , \\
K^+ &= \bar{s}u \ , \\
K^- &= \bar{u}s \ .
\end{aligned}
$$

Einige der in diesen Nonets auftretenden Zustände müssen jedoch durch die physikalischen, messbaren Teilchen ausgedrückt werden. Dies betrifft ausschließlich die Diagonalelemente:

$$
N = \begin{pmatrix} \frac{(\cos(\theta')f' - \sin(\theta')f) + a^0}{\sqrt{2}} & a^+ & K^+ \\ a^- & \frac{(\cos(\theta')f' - \sin(\theta')f) - a^0}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & (\cos(\theta')f + \sin(\theta')f') \end{pmatrix} . \tag{5.33}
$$

Der Winkel, der hierbei auftritt, ist der sogenannte Mischungswinkel θ'. Das allgemeine Transformationsverhalten zwischen den physikalischen und reinen Zuständen lässt sich durch eine einfache Rotation beschreiben:

$$
\begin{pmatrix} f' \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta') & \sin(\theta') \\ -\sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_N \\ f_S \end{pmatrix} ,
$$

$$
\begin{pmatrix} f_N \\ f_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f' \\ f \end{pmatrix} .
$$

Der Mischungswinkel lässt sich mit Hilfe einer Formel der Particle Data Group [8, Kap.15] bestimmen[1]. Verwendet wurde in dieser Arbeit die quadratische Form:

$$
\tan(\theta) = \frac{4m_K^2 - m_a^2 - 3m_{f'}^2}{2\sqrt{2}(m_a^2 - m_K^2)} . \tag{5.34}
$$

Zusätzlich verwendet man die Relation:

$$
\theta' = -(\theta + 54,7^\circ) . \tag{5.35}
$$

Man spricht von einer idealen Mischung, sobald $\theta' = 90^\circ$ ist, da so die physikalischen mit den reinen Zuständen übereinstimmen. (Dies ist in guter Näherung für das Vektor Nonet erfüllt.)

Es ist an dieser Stelle wichtig zu bemerken, dass diese Formel zur Bestimmung des Winkels

[1] Mehr zu diesem Thema findet sich auch in der Dissertation von Herrn Parganlija [15, S.122-125].

nur eine Näherung darstellt. Diese ist mit Sicherheit für den peudoskalaren und vektoriellen Fall gut erfüllt, jedoch für andere Fälle nicht gut bestätigt. Ich habe mich dennoch für die Einbeziehung von Mischungseffekten entschieden, da ich denke, dass dies bessere Voraussagen liefert und außerdem später leichter an verbesserte Mischungswinkel angepasst werden kann. Zudem besteht stets die Möglichkeit $\theta' = 90°$ zu wählen. Nur im Falle der Vektor-Mesonen nehme ich eine ideale Mischung an, da dies ein gut bestätigtes Resultat ist. Es wird sich später sogar zeigen, dass die von mir hier angenommene Mischung im 2^{-+}-Zustand viel zu klein ist. Die tatsächliche Größe des Winkels werde ich versuchen im Anschluss an diese Arbeit zu bestimmen. Direkt betroffen sind davon jedoch nur die Zerfälle von $\eta_2'(1870)$ und $\eta_2(1645)$. Die Zerfallsbreiten dieser Teilchen sind also unter großen Vorbehalten zu verstehen.

Die jedoch zunächst hier weiter benötigten und berechneten Mischungswinkel sind:

Zustand	θ'	Winkel
0^{-+}	θ_p'	$-43,2°$
1^{--}	θ_v'	$-93,4°$
2^{++}	θ_t'	$-84,3°$
2^{-+}	θ_{pt}'	$-76,9°$

Tabelle 5.1: Mit Hilfe von Gleichung (5.34) berechnete Mischungswinkel für Verschiedene mesonische Zustände.

5.4.2. Daten und Werte

Der letzte Schritt besteht darin, die in diesem Kapitel vorgestellten Wechselwirkungsterme explizit mit den, um die physikalischen Teilchen modifizierten, Nonets zu berechnen. Die vollständig ausgerechneten Wechselwirkungs-Lagrangedichten sind im Anhang (C) aufgeführt. Zusammen mit den obigen Regeln und Formeln, sowie experimentellen Werten der Particle Data Group kann man so die Kopplungskonstanten fixieren und Voraussagen für die anderen Zerfallskanäle treffen. Es sollen in dieser Arbeit nur Werte für die ersten beiden besprochenen Wechselwirkungen (5.1) und (5.2) berechnet werden. Die dritte Art der Wechselwirkung (5.3) sollte nur beispielhaft Erwähnung finden, da sie bereits in einem Artikel von Herrn Giacosa diskutiert wurde [9].

Die erste Kopplungskonstante für Zerfälle von Pseudo-Tensormesonen in Vektor- und pseudoskalare Mesonen fixiere ich am gut bekannten Zerfall $\pi_2 \to \rho\pi$ anhand nachstehendem Anteil der Wechselwirkungs-Lagrangedichte. Auf Grund der Mittlung über eingehende Zustände reicht es den Zerfall des neutralen π_2^0 zu betrachten:

$$\mathcal{L}_{TPV} = c_{TPV}\sqrt{2}\pi^0_{2\mu\nu}\left(\rho^{+\mu}\partial^\nu\pi^- - \rho^{-\mu}\partial^\nu\pi^+\right) \ .$$

Aus den Massen (der geladenen Teilchen, welche ohne Fehler angenommen werden,) bestimmt man, für diesen speziellen Fall, den Impuls der erzeugten Teilchen zu:

$$|\vec{k}| = k = 651,47 \text{ MeV} \ .$$

Mit Hilfe von Formel (5.31) und den Regeln zur Summation über ausgehende Teilchen-Zustände erhält man die Zerfallsbreite in Abhängigkeit der Kopplungskonstante:

$$\begin{aligned}\Gamma(\pi_2 \to \rho\pi) &= 2\frac{2c_{TPV}^2}{120\pi m_{\pi_2}^2}\left(2\frac{k^5}{m_\rho^2} + 5k^3\right) \\ &= c_{TPV}^2 \cdot 6,76 \text{ MeV} \ .\end{aligned}$$

Zusammen mit dem Wert für diesen Zerfallskanal aus dem Particle Data Booklet [8] $\Gamma(\pi_2 \to \rho\pi) = (80,60 \pm 10,77)$ MeV lässt sich die Kopplungskonstante bestimmen:

$$c_{TPV} = 3,45 \pm 0,23 \ . \tag{5.36}$$

Dasselbe Vorgehen wird benutzt, um die zweite Kopplungskonstante zu bestimmen. Diese wird für Zerfälle von Pseudo-Tensormesonen in Tensormesonen und pseudoskalare Mesonen verwendet. Zur Fixierung verwendet man den Zerfallskanal $\pi_2 \to f_2\pi$, welcher auch gut bekannt und noch dazu sehr dominant ist. Der Anteil der Wechselwirkung, welcher nach Mittlung über eingehende Zustände betrachtet wird, ist:

$$\mathcal{L}_{TXP} = -c_{TXP}\sqrt{2}\sin(\theta_t')\pi_{2\mu\nu}^+ f_2^{\mu\nu}\pi^- \ .$$

Der Impuls des auslaufenden π und f_2 beträgt:

$$|\vec{k}| = k = 327,26 \text{ MeV} \ .$$

Die Zerfallsbreite lässt sich analog zum obigen Fall bestimmen. Man verwendet hier den Mischungswinkel aus der Tabelle.

$$\begin{aligned}\Gamma(\pi_2 \to f_2\pi) &= 2\sin^2(\theta_t')\frac{c_{TXP}^2}{8\pi m_{\pi_2}^2}\left(\frac{4}{45}\frac{k^5}{m_{f_2}^4} + \frac{2}{3}\frac{k^3}{m_{f_2}^2} + k\right) \\ &= c_{TXP}^2 \cdot 9,63 \cdot 10^{-6} \text{ (MeV)}^{-1} \ .\end{aligned}$$

Aus dem experimentellen Wert von $\Gamma(\pi_2 \to f_2\pi) = (146,38 \pm 9,74)$ MeV lässt sich die Kopplungskonstante zu

$$c_{TXP} = (3,898 \pm 0,130) \text{ GeV} \tag{5.37}$$

bestimmen.

Mit Hilfe dieser Kopplungskonstanten und der Massen der Teilchen lassen sich eine ganze Reihe von Zerfällen berechnen. Einige theoretisch mögliche Zerfälle, welche in dem Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichten auftauchen, werden kinematisch nicht möglich sein, da die Masse der zu erzeugenden Teilchen über der Masse des zerfallenden Teilchens liegt[2].

In der Tabelle am Ende des Kapitels sind alle im Modell möglichen Zerfallskanäle aufgeschrieben. Vom Modell ausgeschlossene, sprich nicht in der Wechselwirkungs-Lagrangedichte

[2] Diese werde ich später mit “kin.“ kennzeichnen.

auftretende Zerfälle, werden auch gelistet, sofern es von der Particle Data Group entsprechende Angaben zu diesen gibt[3]. Die mit Hilfe der Kopplungskonstanten theoretisch berechneten/vorhergesagten Werte befinden sich in der zweiten Spalte (Γ_{th}). In der dritten Spalte (Γ_{th}/Γ_{tot}) findet sich ein prozentualer Wert der (aus dem Experiment stammenden) Gesamtzerfallsbreite des ursprünglichen Teilchens, welche in der letzten Spalte (Γ_{tot}) angegeben ist. In der vierten Spalte ($\Gamma_{exp}/\Gamma_{tot}$) befindet sich der von der Particle Data Group angegebene Wert[4].
Wie man sehr schön erkennen kann, passen die Werte für alle Kanäle, in welchen $\eta_2'(1870)$ und $\eta_2(1645)$ nicht vorkommen, gut und könnten sehr gute Vorhersagen liefern, was man bereits am Kanal $\pi_2 \to K\bar{K}^*(892) + c.c.$ erkennen kann. Man sieht jedoch sofort, dass der Kanal $\eta_2 \to a_2\pi$ einen viel zu hohen theoretischen Wert vorhersagt, welcher nicht mit den experimentellen Daten vereinbar ist. Man kann sich jedoch die Zerfallskanäle, sowie Verhältnisse zwischen einzelnen Zerfallsbreiten von $\eta_2(1645)$, näher betrachten. Dabei stellt man fest, dass der Kanal $\eta_2 \to a_2\pi$ zwar ein nicht ganz so hohes Ergebnis liefern wird, jedoch sehr dominant sein muss. Der konsequente Schluss ist, dass hier Mischungseffekte noch deutlicher zum Tragen kommen als bereits angenommen. Dies bedeutet, dass der Mischungswinkel viel mehr von den idealen $-90°$ abweicht, als durch $-76,9°$ angenommen. Will man die Zerfallsbreite des auffälligen Kanals unter die Schwelle von (181 ± 11) MeV bringen, so ist mindestens ein Winkel in der Größenordnung von $-45°$ erforderlich. Es besteht auch die Möglichkeit den Mischungswinkel anhand der Verhältnisse von Zerfallsbreiten besser zu bestimmen, dieses wird allerdings nicht mehr in dieser Bachelorarbeit behandelt. Bereits angefangene Rechnungen meinerseits deuten jedoch darauf hin, dass der Winkel in der Größenordnung von $-30°$ liegen sollte. Dies würde den Wert für die Zerfallsbreite von $\eta_2 \to a_2\pi$ auf in etwa $70MeV$ reduzieren, was als dominant interpretiert werden kann und mit allen anderen Überlegungen übereinstimmt. Diese Rechnungen, samt Fehlerkalkulation sollen jedoch Platz in einer anderen Veröffentlichung finden und sind bisher noch nicht fertig ausgereift. Der Leser behandle demnach alle Werte, die durch Zerfälle von $\eta_2'(1870)$ und $\eta_2(1645)$ entstehen, mit großer Vorsicht.

[3] Diese nicht auftretenden Zerfälle werden mit “not seen“ in der ersten Spalte gekennzeichnet.
[4] Dieser kann auch nur mit “seen“, “dominant“,“not seen“ oder gar nichts angegeben sein.

Kanal	Γ_{th} [MeV]	Γ_{th}/Γ_{tot} [%]	$\Gamma_{exp}/\Gamma_{tot}$ [%]	Γ_{tot} [MeV]
$\pi_2 \to KK^* + c.c.$	$11,75 \pm 1,57$	$4,52 \pm 0,62$	$4,2 \pm 1,4$	
$\pi_2 \to f_2'\pi$	$0,19 \pm 0,01$	$0,073 \pm 0,005$		
$\pi_2 \to K_2^*K$	0 (kin.)			260 ± 9
$\pi_2 \to a_2\pi$	0 (not seen)		not seen	
$\pi_2 \to a_2\eta$	0 (kin.)			
$\pi_2 \to a_2\eta'$	0 (kin.)			
$K_2 \to \rho K$	$22,21 \pm 2,96$	$11,94 \pm 1,83$		
$K_2 \to K^*\pi$	$25,52 \pm 3,40$	$13,72 \pm 2,10$	seen	
$K_2 \to \phi K$	$4,64 \pm 0,62$	$2,49 \pm 0,38$	seen	
$K_2 \to \omega K$	$6,98 \pm 0,93$	$3,75 \pm 0,57$	seen	
$K_2 \to K^*\eta$	$10,71 \pm 1,43$	$5,76 \pm 0,88$		
$K_2 \to K^*\eta'$	0 (kin.)			186 ± 14
$K_2 \to a_2K$	0 (kin.)			
$K_2 \to K_2^*\pi$	$84,98 \pm 5,65$	$45,69 \pm 4,59$	dominant	
$K_2 \to K_2^*\eta$	0 (kin.)			
$K_2 \to K_2^*\eta'$	0 (kin.)			
$K_2 \to f_2'K$	0 (kin.)			
$K_2 \to f_2K$	$6,81 \pm 0,45$	$3,66 \pm 0,37$	seen	
$\eta_2 \to K^*K$	$3,69 \pm 0,49$	$2,04 \pm 0,30$	seen	
$\eta_2 \to K_2^*K$	0 (kin.)			
$\eta_2 \to a_2\pi$	$322,17 \pm 21,44$	$177,99 \pm 16,04$	seen	
$\eta_2 \to \rho\eta$	0 (not seen)		seen ($\pi^+\pi^-\eta$)	181 ± 11
$\eta_2 \to f_2\eta$	0 (kin.)		not seen	
$\eta_2 \to f_2\eta'$	0 (kin.)			
$\eta_2 \to f_2'\eta$	0 (kin.)			
$\eta_2 \to f_2'\eta'$	0 (kin.)			
$\eta_2' \to K^*K$	$58,73 \pm 7,83$	$26,10 \pm 3,84$		
$\eta_2' \to K_2^*K$	0 (kin.)			
$\eta_2' \to a_2\pi$	$8,50 \pm 0,57$	$3,78 \pm 0,35$		
$\eta_2' \to \rho\eta$	0 (not seen)			225 ± 14
$\eta_2' \to f_2\eta$	$2,90 \pm 0,19$	$1,29 \pm 0,12$		
$\eta_2' \to f_2\eta'$	0 (kin.)			
$\eta_2' \to f_2'\eta$	0 (kin.)			
$\eta_2' \to f_2'\eta'$	0 (kin.)			

Tabelle 5.2: Theoretische Vorhersagen für Zerfallsbreiten, sowie (sofern vorhanden) experimentelle Vergleichswerte der Particle Data Group [8]. Hierbei ist Γ_{th}/Γ_{tot} stets der prozentuale Anteil des theoretisch berechneten Wertes an der experimentell bestimmten Zerfallsbreite.

6. Ausblick

Nachdem ich dem Leser hoffentlich einen guten Eindruck, beziehungsweise eine gute Übersicht über die Theorie der Spin-2-Felder/-Teilchen verschaffen konnte, will ich selbstverständlich auch einige Punkte dieser Arbeit noch einmal aufgreifen und ggf. kritisch hinterfragen.
Zunächst will ich anmerken, dass mir durch die Arbeit auf diesem Gebiet klargeworden ist, dass es prinzipiell möglich sein sollte, für Teilchen beliebigen Spins, explizit eine Theorie aufzustellen. Da sich jedoch Hadronen stets aus einer eher geringen Anzahl an Quarks zusammensetzen, sei dahingestellt, ob es generell erstrebenswert ist, dies auch für sehr hohe Spin-Werte zu verwirklichen. Der Grund hierfür ist, dass solche Zustände nur durch Anregung mit extrem hohen Bahndrehimpulsen möglich wären und es fraglich ist, ob solche Zustände noch stabil sind und sich durch ein einzelnes effektives Feld beschreiben lassen. Andererseits findet man im Particle Data Buch durchaus Gesamtspin-Werte für Teilchen, welche deutlich über denen der üblichen, allgemein bekannten und ausformulierten Theorien liegen, wie zum Beispiel das $\rho_5(2350)$ oder $a_6(2450)$ [8].
Ein weiterer noch zu diskutierender Punkt an dieser Arbeit ist die Frage, ob die von mir hergeleiteten Generatoren der Lorentz-Gruppe für Tensoren unter Lorentztransformationen auch wirklich die Lorentz-Algebra (2.4) erfüllen. Dies konnte ich bisher leider nicht zeigen, da ich nicht in Erfahrung bringen konnte, wie ein Kommutator zwischen zwei vierdimensionalen Matrizen/Objekten mit vier Lorentz-Indizes definiert ist. Daher kann ich leider nicht mit Sicherheit sagen, beziehungsweise beweisen, dass die Generatoren korrekt sind, obwohl die späteren Resultate, welche völlig analog zu denen der etablierten Theorien sind, eindeutig darauf hinweisen.
Des Weiteren sollte ich auch an dieser Stelle noch einmal anmerken, dass die Quarkströme, welche in dieser Arbeit vorgestellt wurden, nur Modelle sind und sich nach meinem Wissen durch nichts beweisen lassen. Zudem bin ich selbst skeptisch, ob sie die einzig möglichen in niedrigster Ordnung der Ableitungen sind. Ich denke auch hier besteht weiterer Diskussionsbedarf.
Nichtsdestominder möchte ich hier auch einen Ausblick auf mögliche Erweiterungen, fortführende Überlegungen und Konsequenzen meiner Arbeit aufmerksam machen.
Da sich diese Bachelorarbeit, unter anderem aus Zeitgründen, nur mit der kanonischen Quantisierung befasst hat, ist es naheliegend und ich denke auch notwendig, sich im Anschluss mit der Möglichkeit der Pfadintral-Methode auseinanderzusetzen, soweit dies nicht schon, in einem mir nicht bekannten Artikel geschehen ist. Diese Behandlung sollte prinzipiell machbar sein, da diese Arbeit bereits die Invertierbarkeit des Differentialoperators gezeigt hat, was eine wichtige Voraussetzung zur Lösung der Gauß-Integrale im erzeugenden Funktional ist.
Ein anderer Punkt, der Ansatz zu weiteren Überlegungen bietet, ist, dass ich im Zuge meiner hier niedergeschriebenen Gedanken stets von einem neutralen Feld/Teilchen ausgegangen bin. Die Frage wäre, in wie weit man die Konzepte des geladenen Klein-Gordon- oder Dirac-Feldes auf das Spin-2-Feld übertragen könnte. Dabei sei insbesondere eine mögliche globale $U(1)$-Invarianz und als deren Konsequenz ein erhaltener Noether-Strom erwähnt, welcher auch hier mit der Ladung des Systems in Verbindung gebracht werden könnte und ggf. später als quan-

tisierter Ladungsoperator fungieren kann. Zudem sollte unter dem Aspekt der Eichtheorie eine lokale $U(1)$-Invarianz und eine mögliche Kopplung an das Photonfeld genauer diskutiert werden. Zu diesen Aspekten und allgemein einer geladenen komplexwertigen Variante des Spin-2-Feldes gibt es bereits Ansätze von Fierz und Pauli in einem Paper von 1939 [16], bei welcher ich jedoch denke, dass sie noch einmal in einem größeren Kontext eingebettet und besser zugänglich aufbereitet werden sollten und weiter besprochen werden müssen, zumal die dort präsentierte Lagrangedichte nicht ohne Hilfsfelder auskommt [16, S.216].
Als letzten Punkt im Kontext der Quantisierung wäre es, denke ich, interessant und notwendig, als Basis der Operatoren nicht nur ebene Wellen zu diskutieren, sondern die Rechnungen auf sphärische Koordinaten zu verallgemeinern. Dies sollte es möglich machen, auch für den Drehimpulsoperator, in Analogie zu Herrn Reinhardts Ausführungen [10, S.100-S.105], eine diagonale Darstellung zu finden.
Die letzte Anmerkung betrifft die wechselwirkende Theorie, in der, durch die drei beispielhaft diskutierten Fälle, längst nicht alle Möglichkeiten ausgeschöpft sind. So wurde ich bereits darauf angesprochen über eine Kopplung der Tensor-Felder als bosonische Zustände an fermionische Zustände nachzudenken. Außerdem sollte es möglich sein, die Streumatrix und Zerfallsamplitude auch explizit für Spin-2-Teilchen herzuleiten. Dies müsste sowohl im kanonischen Formalismus als auch im Pfadintegral-Formalismus möglich sein. Sehr interessant und unbedingt notwendig wird es auch sein, sich den Mischungswinkel zwischen $\eta_2'(1870)$ und $\eta_2(1645)$ näher zu betrachten um anschließend bessere Vorhersagen zu treffen. Außerdem wäre es sicher höchst interessant eine weitere Symmetrie mit in das Modell zu integrieren. Im speziellen meine ich hiermit, dass außer der $SU(3)$-Flavoursymmetrie, welche die Komponenten der Nonets mischt, auch die chirale Symmetrie eingebaut werden sollte, in der Nonets, welche sich nur durch ihre Parität unterscheiden mischen.
Wie ich finde, bietet demnach dieses große Gebiet insgesamt noch reichlich Möglichkeiten besser und übersichtlicher gestaltet und in alle Richtungen erweitert und ausgebaut zu werden.

7. Erklärung zu selbstständigen Anfertigung der Bachelorarbeit

Nach §28 (12) Ordnung für den Bachelor- und dem Masterstudiengang erkläre ich hiermit, dass ich die Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen oder aus anderen fremden Texten entnommen wurden, sind von mir als solche kenntlich gemacht worden. Ferner erkläre ich, dass die Arbeit nicht - auch nicht auszugsweise - für eine andere Prüfung verwendet wurde.

Frankfurt a. M., den 23. Oktober 2014

Adrian Königstein

8. Literaturverzeichnis

[1] Michiel Snoek; Ben Bakker; Daniel Boer. *Group Theory in Physics, Part 2, Lie Groups and Lie Algebras.* Department of Physics and Astronomy; Faculty of Science Vrije Universität, Amsterdam, Niederlande, 10. edition, 2010.

[2] Xavier Bekaert; Nicolas Boulanger. *The unitary representations of the Poincare group in any spacetime dimension.* Laboratoire de Mathematiques et Physique Theorique; Universite Francois Rabelais und Service de Mecanique et Gravitation, Universite de Mons-Hainaut, Tours, Frankreich und Mons Belgien, 24. November 2006, hep-th/0611263v1.

[3] Sean M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity.* Institute for Theoretical Physics, University of California, Santa Barbara Vereinigte Staaten, 03. Dezember 1997, gr-qc/9712019v1.

[4] D. Dalmazi. *A note on the nonuniqueness of the massive Fierz-Pauli theory and spectator fields.* Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, Guaratingueta, Brasil, 22 Juli 2013, 1305.1513v1.

[5] Ave Khamseh; Luigi Del Debbio. *Representations of the Poincaré Group.* School of Physics and Astronomy; University of Edinburgh, Edinburgh, Vereinigtes Königreich, 28. Juli 2013.

[6] Zhi-Gang Wang; Zun-Yan Di. *Masses and decay constants of the heavy tensor mesons with QCD sum rules.* Departement of Physics; North-China Electric Power University, Baoding, China, 19. Mai 2014, 1405.5092v2.

[7] Florian Divotgey. *Phänomenologie von Axialvektor-Mesonen und Mischungseffekte in Kaon-Feldern.* Institut für Theoretische Physik; Goethe Universität, Frankfurt am Main, Deutschland, 02. Oktober 2012.

[8] J. Beringer et al. *Particle Data Group.* Physical Review D86, 010001, 2014.

[9] Francesco Giacosa; Th. Gutsche; V.E. Lyubovitskij; Amand Faessler. *Decays of tensor mesons and the tensor glueball in an effective field approach.* Physical Review D72, 114021, 14. November 2005, hep-ph/0511171v1.

[10] Joachim Reinhardt; Walter Greiner. *Theoretische Physik 7A, Feldquantisierung.* Harri Deutsch, Thun, Schweiz; Frankfurt am Main, Deutschland, 1. edition, 1993.

[11] Walter Greiner. *Theoretische Physik 6, Relativistische Quantenmechanik Wellengleichungenl.* Harri Deutsch, Thun, Schweiz; Frankfurt am Main, Deutschland, 2. edition, 1987.

[12] Kurt Hinterbichler. *Theoretical aspects of massive gravity.* University of Pensylvania, Philadelphia, Vereinigte Staaten, 02.Oktober 2011, 1105.3735v2.

[13] Thomas Müller. *Gravitation und Quantentheorie; Einige Aspekte der Unvereinbarkeit beider Theorien.* Institut für Theoretische Physik, Eberhard-Karls-Universität, Tübingen, Deutschland, März 2001.

[14] P. J. Mulders. *Quantum Field Theory.* Department of Theoretical Physics und Department of Physics and Astronomy; Faculty of Science Vrije Universität, Amsterdam, Niederlande, 6.04 edition, Novemver 2011.

[15] Denis Parganlija. *Quarkonium Phenomenology in Vacuum.* Institut für theoretische Physik, Goethe Universität, Frankfurt am Main, Deutschland, 12. Dezember 2012.

[16] M. Fierz; W. Pauli. *On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field.* Proceedings of the Royal Society A173, The Royal Society, London, Vereinigtes Königreich, 28. November 1993.

[17] Asim O. Barut; Ryszard Raczka. *Theory of Group Representations and Applications.* Polish Scientific Publishers, Warschau, Polen, 1977.

[18] Jürgen Struckmeier; Walter Greiner; Hermine Reichau. *Extended Lagrange and Hamilton Formalism for Point Mechanics and Covariant Hamilton Field Theory.* World Scientific Pub Co, London, Vereinigtes Königreich, (in Druck) voraussichtlich 30. November2014.

[19] Dirk H. Rischke. *Theoretische Physik 7/8: Quantenfeldtheorie.* Institut für theoretische Physik, Goethe Universität, Frankfurt am Main, Deutschland, 2013/2014.

[20] R. J. Rivers. *Lagrangian Theory for Neutral Massive Spin 2 Fields.* Il Nuovo Cimento Vol. 34, Societa Italiana di Fisica, Bologna, Italien, 16. Oktober 1964.

[21] S. C. Bhargava; H. Watanabe. *The Lagrangian Formalism of the Theory of Spin 2 Fields.* Nuclear Physics 87, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Niederlande, 1966.

[22] Shi-Lin Zhu Wei Chen; Zi-Xing Cai. *Masses of the tensor mesons with JP = 2-.* Nuclear Physics B, Elsevier, Philadelphia, Vereinigte Staaten, 09. August 2014.

[23] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell.* Princeton University Press, Princeton, Vereinigte Staaten, 2. edition, 2010.

[24] Shi-Zhong Huang; Tu-Nan Ruan; Ning Wu; Zhi-Peng Zheng. *Wavefunctions for Particles with Arbitrary Spin.* Commun. Theor. Phys. 37, International Academic Publishers, Peking, China, 15. Januar 2002.

Appendices

A. Invariante Pauli-Jordan-Funktion

Dieser Abschnitt ist weitestgehend aus dem Buch Feldquantisierung [10, S.115ff] übernommen. An einigen Stellen sind die Rechnungen explizit ausgeführt worden, sowie mit Kommentaren und Ergänzungen versehen.
Die invariante Pauli-Jordan-Funktion ist zunächst nicht mehr als das Ergebnis des Kommutators zwischen dem geladenen skalaren Feld und seinem hermitisch adjungierten Feld bei unterschiedlichen Raumzeit-Punkten:

$$i\Delta\left(x-y\right) := [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^{\dagger}(y)] \ . \tag{A.1}$$

Man kann dies explizit mit Hilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausrechnen, jedoch sei an dieser Stelle auf das Buch Feldquantisierung [10] sowie das Skript der Vorlesung Quantenfeldtheorie verwiesen. Man erhält:

$$\begin{aligned} i\Delta\left(x-y\right) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)}\right) && \text{(A.2)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 i\omega_k} sin(p(x-y)) \ . && \text{(A.3)} \end{aligned}$$

Man kann nun einige Eigenschaften dieser Funktion zeigen, welche zum Teil auch in dieser Bachelorarbeit vonnöten sind.

1. Lorentz-Invarianz
Um dies zu zeigen, ersetzt man zunächst $x-y$ durch z, was kein Problem darstellt, da die Differenz während der gesamten Rechnung nur als Konstante auftritt. Während des weiteren Umformens wird $\vec{p}$ durch $-\vec{p}$ im zweiten Summanden substituiert. Das "$-$", welches im Integrationsmaß entsteht, wird durch Vertauschen der Integrationsgrenzen aufgehoben. Außerdem wird die Vorzeichenfunktion A.4 eingeführt:

$$sgn(p_0) = \begin{cases} +1 & \text{für} p_0 > 0 \\ -1 & \text{für} p_0 < 0 \end{cases} \ . \tag{A.4}$$

Außerdem wird folgende Rechenregel für Deltafunktionen nötig sein, um den Integranden adäquat umzuformen.

$$\delta\left(g(x)\right) = \sum_i \frac{\delta(x-x_0)}{|g(x_0)|} \ . \tag{A.5}$$

Man startet mit Gleichung A.2 und versucht ihre rechte Seite auf eine lorentzinvariante Form zu bringen:

$$\begin{aligned}
i\Delta\left(x-y\right) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(e^{-ipz} - e^{+ipz}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(e^{-i(\omega_k t - \vec{p}\vec{z})} - e^{+i(\omega_k t - \vec{p}\vec{z})}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(e^{-i(\omega_k t - \vec{p}\vec{z})} - e^{+i(\omega_k t + \vec{p}\vec{z})}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(\delta(p_0-\omega_k) - \delta(p_0+\omega_k)\right)e^{-ipz} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3 2\omega_k} sgn(p_0)\left(\delta(p_0-\omega_k) + \delta(p_0+\omega_k)\right)e^{-ipz} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3} sgn(p_0)\delta\left((p_0-\omega_k)(p_0+\omega_k)\right)e^{-ipz} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3} sgn(p_0)\delta(p_0^2-\omega_k^2)e^{-ipz} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3} sgn(p_0)\delta(p_0^2-\vec{p}^2-m^2)e^{-ipz} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3} sgn(p_0)\delta(p^2-m^2)e^{-ip(x-y)}\ .
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Man sieht sofort, dass auf der rechten Seite nur skalare lorentzinvariante Größen stehen. Auch die Vorzeichenfunktion ist für zeitartige Impulsvektoren invariant unter orthochronen Lorentztransformationen, da Impulsvektoren mit $p_0 < 0$ immer im Rückwärtslichtkegel und $p_0 > 0$ immer im Vorwärtslichtkegel liegen.

2. Ungerade Funktion

Dies lässt sich sehr schön an A.3 sehen.

3. Verschwinden bei Gleichzeitigkeit

Dies zeigt man am einfachsten mit A.3:

$$
\begin{aligned}
i\Delta\left(0, \vec{x}-\vec{y}\right) &= -i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \omega_k} sin(\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})) \\
&= -i \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \omega_k} sin(\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})) + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \omega_k} sin(\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})) \right) \\
&= -i \left(\int\limits_{+\infty}^{0} \frac{-\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \omega_k} sin(-\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})) + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \omega_k} sin(\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})) \right) \\
&= -i \left(- \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \omega_k} sin(\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})) + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \omega_k} sin(\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})) \right) \\
&= 0 \; .
\end{aligned} \tag{A.7}
$$

Hier wurde die Antisymmetrie des Integranden ausgenutzt.

4. Verschwinden von Ableitungen beliebiger Ordnung für Gleichzeitigkeit
Dies zeigt man am besten getrennt für räumliche und zeitliche Ableitungen. Man setzt, um die Rechnung zu vereinfachen, $x - y = z$. An dieser Stelle sollen Ableitungen bis zur vierten Ordnung berücksichtigt werden.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_0} i\Delta(z_0, \vec{z}) \Big|_{z_0=0} &= \frac{\partial}{\partial z_0} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(e^{-ipz} - e^{+ipz} \right) \Big|_{z_0=0} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(-i\omega_k e^{-ipz} - (i\omega_k) e^{+ipz} \right) \Big|_{z_0=0} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2i} \left(e^{-ipz} + e^{+ipz} \right) \Big|_{z_0=0} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2i} \left(e^{+i\vec{p}\vec{z}} + e^{-i\vec{p}\vec{z}} \right) \\
&= -i\delta^3(\vec{z}) \; .
\end{aligned} \tag{A.8}
$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2}{\partial^2 z_0} i\Delta(z_0,\vec{z})\right|_{z_0=0} &= \frac{\partial}{\partial z_0}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left.\left(-i\omega_k e^{-ipz} - (i\omega_k)e^{+ipz}\right)\right|_{z_0=0} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left.\left(-\omega_k^2 e^{-ipz} + \omega_k^2 e^{+ipz}\right)\right|_{z_0=0} \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2i}\omega_k\left(e^{+i\vec{p}\vec{z}} - e^{-i\vec{p}\vec{z}}\right) \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\omega_k sin(\vec{p}\vec{z}) \\
&= 0\ .
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Hier wurde A.7 benutzt:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^3}{\partial^3 z_0} i\Delta(z_0,\vec{z})\right|_{z_0=0} &= \frac{\partial}{\partial z_0}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left.\left(-\omega_k^2 e^{-ipz} + \omega_k^2 e^{+ipz}\right)\right|_{z_0=0} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left.\left(+i\omega_k^3 e^{-ipz} + i\omega_k^3 e^{+ipz}\right)\right|_{z_0=0} \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2}\omega_k^2\left(e^{+i\vec{p}\vec{z}} + e^{-i\vec{p}\vec{z}}\right)\ .
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^4}{\partial^4 z_0} i\Delta(z_0,\vec{z})\right|_{z_0=0} &= \frac{\partial}{\partial z_0}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left.\left(+i\omega_k^3 e^{-ipz} + i\omega_k^3 e^{+ipz}\right)\right|_{z_0=0} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left.\left(\omega_k^4 e^{-ipz} - \omega_k^4 e^{+ipz}\right)\right|_{z_0=0} \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2i}\omega_k^3\left(-e^{-i\vec{p}\vec{z}} + e^{+i\vec{p}\vec{z}}\right) \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\omega_k^3 sin(\vec{p}\vec{z}) \\
&= ... \\
&= 0\ .
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_j} i\Delta(z_0,\vec{z})\bigg|_{z_0=0} &= \frac{\partial}{\partial z_j}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(e^{-ipz} - e^{+ipz}\right)\bigg|_{z_0=0} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(ip_j e^{-ipz} + ip_j e^{+ipz}\right)\bigg|_{z_0=0} \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\omega_k} p_j cos(\vec{p}\vec{z}) \\
&= 0 \ .
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass $j \ \epsilon\ 1,2,3$ und somit der Integrand für mindestens eine Integrationsrichtung ungerade ist.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial z_j} i\Delta(z_0,\vec{z})\bigg|_{z_0=0} &= \frac{\partial}{\partial z_k}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(ip_j e^{-ipz} + ip_j e^{+ipz}\right)\bigg|_{z_0=0} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(-p_k p_j e^{-ipz} + p_k p_j e^{+ipz}\right)\bigg|_{z_0=0} \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\omega_k} p_k p_j \ sin(pz)|_{z_0=0} \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\omega_k} p_k p_j sin(\vec{p}\vec{z}) \\
&= 0 \ .
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Auch hier wird ausgenutzt, dass in mindestens eine Richtung der Integrand eine ungerade Funktion darstellt. Auch im Folgenden wird diese Eigenschaft genutzt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_l}\frac{\partial}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial z_j} i\Delta(z_0,\vec{z})\bigg|_{z_0=0} &= \frac{\partial}{\partial z_l}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(-p_k p_j e^{-ipz} + p_k p_j e^{+ipz}\right)\bigg|_{z_0=0} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(-ip_l p_k p_j e^{-ipz} - ip_l p_k p_j e^{+ipz}\right)\bigg|_{z_0=0} \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\omega_k} p_l p_k p_j cos(pz)\bigg|_{z_0=0} \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\omega_k} p_l p_k p_j cos(\vec{p}\vec{z}) \\
&= 0 \ .
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_h}\frac{\partial}{\partial z_l}\frac{\partial}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial z_j} i\Delta(z_0,\vec{z})\bigg|_{z_0=0} &= \frac{\partial}{\partial z_h}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k} p_l p_k p_j \left(-ie^{-ipz} - ie^{+ipz}\right)\bigg|_{z_0=0} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k} p_l p_k p_j \left(p_h e^{-ipz} - p_h e^{+ipz}\right)\bigg|_{z_0=0} \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2i\omega_k} p_l p_k p_j p_h \left(-e^{-ipz} + e^{+ipz}\right)\bigg|_{z_0=0} \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\omega_k} p_l p_k p_j p_h sin(pz)\bigg|_{z_0=0} \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\omega_k} p_l p_k p_j p_h sin(\vec{p}\vec{z}) \\
&= 0\ .
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

B. Berechnung des Propagators

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(g_\nu^\sigma g_\rho^\lambda + g_\nu^\lambda g_\rho^\sigma\right) = &\left[\frac{1}{2}\left(k^2 - m^2\right)\left(g_{\nu\alpha}g_{\rho\beta} + g_{\nu\beta}g_{\rho\alpha}\right)\right. \\
&- \left(k^2 - m^2\right)\left(g_{\nu\rho}g_{\alpha\beta}\right) \\
&- \frac{1}{2}\left(g_{\rho\beta}k_\nu k_\alpha + g_{\rho\alpha}k_\nu k_\beta + g_{\nu\alpha}k_\rho k_\beta + g_{\nu\beta}k_\rho k_\alpha\right) \\
&\left. + \left(g_{\nu\rho}k_\alpha k_\beta + g_{\alpha\beta}k_\nu k_\rho\right)\right] \\
&\cdot \left[A\left(g^{\alpha\sigma}g^{\beta\lambda} + g^{\alpha\lambda}g^{\beta\sigma}\right)\right. \\
&\quad + B\left(g^{\alpha\beta}g^{\sigma\lambda}\right) \\
&\quad + C\left(g^{\beta\lambda}k^\alpha k^\sigma + g^{\beta\sigma}k^\alpha k^\lambda + g^{\alpha\sigma}k^\beta k^\lambda + g^{\alpha\lambda}k^\beta k^\sigma\right) \\
&\quad + D\left(g^{\sigma\lambda}k^\alpha k^\beta + g^{\alpha\beta}k^\sigma k^\lambda\right) \\
&\quad \left. + E\left(k^\alpha k^\beta k^\sigma k^\lambda\right)\right]
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

$$
\begin{aligned}
= &\frac{1}{2}\left(k^2 - m^2\right)\left[2A\left(g_\nu^\sigma g_\rho^\lambda + g_\nu^\lambda g_\rho^\sigma\right) + 2B\left(g_{\nu\rho}g^{\sigma\lambda}\right)\right. \\
&\qquad + 2C\left(g_\rho^\lambda k_\nu k^\sigma + g_\nu^\lambda k_\rho k^\sigma + g_\rho^\sigma k_\nu k^\lambda + g_\nu^\sigma k_\rho k^\lambda\right) \\
&\qquad \left. + 2D\left(g^{\sigma\lambda}k_\nu k_\rho + g_{\nu\rho}k^\sigma k^\lambda\right) + E\left(k_\nu k_\rho k^\sigma k^\lambda\right)\right] \\
&- \left(k^2 - m^2\right)\left[2A\left(g_{\nu\rho}g^{\sigma\lambda}\right) + 4B\left(g_{\nu\rho}g^{\sigma\lambda}\right) + 4C\left(g_{\nu\rho}k^\sigma k^\lambda\right)\right. \\
&\qquad \left. + D\left(g_{\nu\rho}g^{\sigma\lambda}k^2 + 4g_{\nu\rho}k^\sigma k^\lambda\right) + E\left(g_{\nu\rho}k^\sigma k^\lambda k^2\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\left[2A\left(g_\rho^\lambda k_\nu k^\sigma + g_\rho^\sigma k_\nu k^\lambda + g_\nu^\sigma k_\rho k^\lambda + g_\nu^\lambda k_\rho k^\sigma\right)\right. \\
&\quad + 4B\left(k_\nu k_\rho g^{\sigma\lambda}\right) \\
&\quad + 2C\left(g_\rho^\lambda k_\nu k^\sigma k^2 + g_\rho^\sigma k_\nu k^\lambda k^2 + g_\nu^\lambda k_\rho k^\sigma k^2 + g_\nu^\sigma k_\rho k^\lambda k^2\right) \\
&\quad + 8C\left(k_\nu k_\rho k^\sigma k^\lambda\right) + 4D\left(g^{\sigma\lambda}k_\nu k_\rho k^2 + k_\nu k_\rho k^\sigma k^\lambda\right) \\
&\quad \left. + 4E\left(k_\nu k_\rho k^\sigma k^\lambda k^2\right)\right] \\
&+ \left[2A\left(g_{\nu\rho}k^\sigma k^\lambda + g^{\sigma\lambda}k_\nu k_\rho\right) + B\left(g_{\nu\rho}g^{\sigma\lambda}k^2 + 4g^{\sigma\lambda}k_\nu k_\rho\right)\right. \\
&\quad + 4C\left(g_{\nu\rho}k^\sigma k^\lambda k^2 + k_\nu k_\rho k^\sigma k^\lambda\right) \\
&\quad + D\left(g^{\sigma\lambda}g_{\nu\rho}k^4 + k_\nu k_\rho g^{\sigma\lambda}k^2 + 4k_\nu k_\rho k^\lambda k^\sigma + k^\sigma k^\lambda g_{\nu\rho}k^2\right) \\
&\quad \left. + E\left(g_{\nu\rho}k^\sigma k^\lambda k^4 + k_\nu k_\rho k^\sigma k^\lambda k^2\right)\right] \ .
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

Nun betrachtet man die einzelnen Terme getrennt und führt einen Koeffizientenvergleich durch.

1. $g_\nu^\sigma g_\rho^\lambda$ **und** $g_\nu^\lambda g_\rho^\sigma$**:**

$$A = \frac{1}{2\left(k^2 - m^2\right)} \ . \tag{B.3}$$

2. $g_\rho^\lambda k_\nu k^\sigma$**,** $g_\nu^\lambda k_\rho k^\sigma$**,** $g_\rho^\sigma k_\nu k^\lambda$ **und** $g_\nu^\sigma k_\rho k_\lambda$**:**

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\left(k^2 - m^2\right) 2C - \frac{1}{2}\left(2A + 2Ck^2\right) \\ &= -m^2 C - A \ . \end{aligned}$$

$$C = -\frac{1}{2\left(k^2 - m^2\right)} \frac{1}{m^2} \ . \tag{B.4}$$

3. $g_{\nu\rho} k^\sigma k^\lambda$**:**

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\left(k^2 - m^2\right) 2D - \left(k^2 - m^2\right)\left(4C + 4d + Ek^2\right) + 2A + 4Ck^2 + Dk^2 Ek^4 \\ &= -k^2 2D + 3m^2 D + m^2 4C + m^2 k^2 E + 2A \ . \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\left(k^2 - m^2\right)} = 2Dk^2 - 3m^2 D - m^2 k^2 E \ . \tag{B.5}$$

4. $k_\nu k_\rho k^\sigma k^\lambda$**:**

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} 2E - 4C - 2D - 2Ek^2 + 4C + 4D + Ek^2 \\ &= -m^2 E + 2D \ . \end{aligned}$$

$$E = \frac{2D}{m^2} \ . \tag{B.6}$$

Zusammen mit B.5 erhält man:

$$-\frac{1}{\left(k^2 - m^2\right)} = m^2 k^2 E - \frac{3}{2} m^4 E - m^2 k^2 E \ ,$$

$$E = \frac{2}{3\left(k^2 - m^2\right)} \frac{1}{m^4} \ . \tag{B.7}$$

Natürlich ergibt sich über B.6 auch D:

$$D = \frac{1}{3\left(k^2 - m^2\right)} \frac{1}{m^2} \ . \tag{B.8}$$

5. $g^{\sigma\lambda}k_\nu k_\rho$**:**

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2}\left(k^2 - m^2\right)2D - \frac{1}{2}\left(4B4Dk^2\right) + 2A + 4B + Dk^2\\ &= -m^2D + 2B + 2A\ .\end{aligned}$$

Zusammen mit B.8 ergibt dies für B:

$$B = -\frac{1}{3\left(k^2 - m^2\right)}\ . \tag{B.9}$$

6. $g_{\nu\rho}g^{\sigma\lambda}$**:**
Es sind zwar bereits alle Koeffizienten bestimmt, jedoch liefert der 6. Koeffizientenvergleich eine weitere Relation, die erfüllt sein muss. Der Leser kann sich selbst davon überzeugen, dass diese erfüllt ist.

$$0 = \frac{1}{2}\left(k^2 - m^2\right)2B - \left(k^2 - m^2\right)\left(2A + 4B + Dk^2\right) + Bk^2 + Dk^4\ .$$

C. Wechselwirkungsterme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{TPV} = c_{TPV} \Bigg[&+ \frac{\pi^0_{2\mu\nu}}{\sqrt{2}} \Big(\bar{K}^{*0\mu}\partial^\nu K^0 - K^{*0\mu}\partial^\nu \bar{K}^0 + K^{*+\mu}\partial^\nu K^- - K^{*-\mu}\partial^\nu K^+ \\
&\quad +2\rho^{+\mu}\partial^\nu \pi^- - 2\rho^{-\mu}\partial^\nu \pi^+ \Big) \\
&+ \pi^+_{2\mu\nu} \Big(K^{*0\mu}\partial^\nu K^- - K^{*-\mu}\partial^\nu K^0 + \sqrt{2}(\rho^{-\mu}\partial^\nu \pi^0 - \rho^{0\mu}\partial^\nu \pi^-) \Big) \\
&+ \pi^-_{2\mu\nu} \Big(K^{*+\mu}\partial^\nu \bar{K}^0 - \bar{K}^{*0\mu}\partial^\nu K^+ + \sqrt{2}(\rho^{0\mu}\partial^\nu \pi^+ - \rho^{+\mu}\partial^\nu \pi^0) \Big) \\
&+ \frac{K^0_{2\mu\nu}}{2} \Big(-2\rho^{+\mu}\partial^\nu K^- - \sqrt{2}\bar{K}^{*0\mu}\partial^\nu \pi^0 + 2K^{*-\mu}\partial^\nu \pi^+ \\
&\quad + (\sqrt{2}\rho^{0\mu} + 2\phi^\mu - \sqrt{2}\omega^\mu)\partial^\nu \bar{K}^0 \\
&\quad + \bar{K}^{*0\mu}\partial^\nu ((\sqrt{2}\eta - 2\eta')\cos(\theta'_p) - (2\eta + \sqrt{2}\eta')\sin(\theta'_p)) \Big) \\
&+ \frac{K^+_{2\mu\nu}}{2} \Big(-2\rho^{-\mu}\partial^\nu \bar{K}^0 + \sqrt{2}K^{*-\mu}\partial^\nu \pi^0 + 2\bar{K}^{*0\mu}\partial^\nu \pi^- \\
&\quad - (\sqrt{2}\rho^{0\mu} - 2\phi^\mu + \sqrt{2}\omega^\mu)\partial^\nu K^- \\
&\quad + K^{*-\mu}\partial^\nu ((\sqrt{2}\eta - 2\eta')\cos(\theta'_p) - (2\eta + \sqrt{2}\eta')\sin(\theta'_p)) \Big) \\
&+ \frac{K^-_{2\mu\nu}}{2} \Big(2\rho^{+\mu}\partial^\nu K^0 - \sqrt{2}K^{*+\mu}\partial^\nu \pi^0 - 2K^{*0\mu}\partial^\nu \pi^+ \\
&\quad + (\sqrt{2}\rho^{0\mu} - 2\phi^\mu + \sqrt{2}\omega^\mu)\partial^\nu K^+ \\
&\quad + K^{*+\mu}\partial^\nu ((-\sqrt{2}\eta + 2\eta')\cos(\theta'_p) + (2\eta + \sqrt{2}\eta')\sin(\theta'_p)) \Big) \\
&+ \frac{\bar{K}^0_{2\mu\nu}}{2} \Big(2\rho^{-\mu}\partial^\nu K^+ + \sqrt{2}K^{*0\mu}\partial^\nu \pi^0 - 2K^{*+\mu}\partial^\nu \pi^- \\
&\quad + (-\sqrt{2}\rho^{0\mu} - 2\phi^\mu + \sqrt{2}\omega^\mu)\partial^\nu K^0 \\
&\quad + K^{*0\mu}\partial^\nu ((-\sqrt{2}\eta + 2\eta')\cos(\theta'_p) + (2\eta + \sqrt{2}\eta')\sin(\theta'_p)) \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{\eta_{2\mu\nu}}{2}\Big(\bar{K}^{*0\mu}\partial^\nu K^0 - K^{*0\mu}\partial^\nu \bar{K}^0 + K^{*-\mu}\partial^\nu K^+ - K^{*+\mu}\partial^\nu K^-\Big) \\
&\qquad \cdot (2\cos(\theta'_{pt}) + \sqrt{2}\sin(\theta'_{pt})) \\
&+ \frac{\eta'_{2\mu\nu}}{2}\Big(K^{*0\mu}\partial^\nu \bar{K}^0 - \bar{K}^{*0\mu}\partial^\nu K^0 - K^{*-\mu}\partial^\nu K^+ + K^{*+\mu} K^-\Big) \\
&\qquad \cdot(\sqrt{2}\cos(\theta'_{pt}) - 2\sin(\theta'_{pt}))\Bigg] \; .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{TXP} = c_{TXP}\Bigg[&+\frac{\pi^0_{2\mu\nu}}{\sqrt{2}}\Big(-K_2^{*0\mu\nu}\bar{K}^0 - \bar{K}_2^{*0\mu\nu}K^0 + K_2^{*-\mu\nu}K^+ + K_2^{*+\mu\nu}K^- \\
&\quad +2\pi^0(f'^{\mu\nu}_2\cos(\theta'_t) - f_2^{\mu\nu}\sin(\theta'_t)) + 2a_2^{0\mu\nu}(\eta\cos(\theta'_p) - \eta'\sin(\theta'_p))\Big) \\
&+ \pi^+_{2\mu\nu}\Big(K_2^{*0\mu\nu}K^- + K_2^{*-\mu\nu}K^0 + \sqrt{2}\pi^-(f'^{\mu\nu}_2\cos(\theta'_t) - f_2^{\mu\nu}\sin(\theta'_t)) \\
&\quad +\sqrt{2}a_2^{-\mu\nu}(\eta\cos(\theta'_p) - \eta'\sin(\theta'_p))\Big) \\
&+ \pi^-_{2\mu\nu}\Big(\bar{K}_2^{*0\mu\nu}K^+ + K_2^{*+\mu\nu}\bar{K}^0 + \sqrt{2}\pi^+(f'^{\mu\nu}_2\cos(\theta'_t) - f_2^{\mu\nu}\sin(\theta'_t)) \\
&\quad +\sqrt{2}a_2^{+\mu\nu}(\eta\cos(\theta'_p) - \eta'\sin(\theta'_p))\Big) \\
&+ \frac{K^0_{2\mu\nu}}{2}\Big(2a_2^{+\mu\nu}K^- - \sqrt{2}\bar{K}_2^{*0\mu\nu}\pi^0 + 2K_2^{*-\mu\nu}\pi^+ \\
&\quad + (-\sqrt{2}a_2^{0\mu\nu} + (2f_2^{\mu\nu} + \sqrt{2}f'^{\mu\nu}_2)\cos(\theta'_t) + (-\sqrt{2}f_2^{\mu\nu} + 2f'^{\mu\nu}_2)\sin(\theta'_t))\bar{K}^0 \\
&\quad + \bar{K}_2^{*0\mu\nu}((\sqrt{2}\eta + 2\eta')\cos(\theta'_p) + (2\eta - \sqrt{2}\eta')\sin(\theta'_p))\Big) \\
&+ \frac{K^+_{2\mu\nu}}{2}\Big(2a_2^{-\mu\nu}\bar{K}^0 + \sqrt{2}K_2^{*-\mu\nu}\pi^0 + 2\bar{K}_2^{*0\mu\nu}\pi^- \\
&\quad + (\sqrt{2}a_2^{0\mu\nu} + (2f_2^{\mu\nu} + \sqrt{2}f'^{\mu\nu}_2)\cos(\theta'_t) + (-\sqrt{2}f_2^{\mu\nu} + 2f'^{\mu\nu}_2)\sin(\theta'_t))K^- \\
&\quad + K_2^{*-\mu\nu}((\sqrt{2}\eta + 2\eta')\cos(\theta'_p) + (2\eta - \sqrt{2}\eta')\sin(\theta'_p))\Big) \\
&+ \frac{K^-_{2\mu\nu}}{2}\Big(2a_2^{+\mu\nu}K^0 + \sqrt{2}K_2^{*+\mu\nu}\pi^0 + 2K_2^{*0\mu\nu}\pi^+ \\
&\quad + (\sqrt{2}a_2^{0\mu\nu} + (2f_2^{\mu\nu} + \sqrt{2}f'^{\mu\nu}_2)\cos(\theta'_t) + (-\sqrt{2}f_2^{\mu\nu} + 2f'^{\mu\nu}_2)\sin(\theta'_t))K^+ \\
&\quad + K_2^{*+\mu\nu}((\sqrt{2}\eta + 2\eta')\cos(\theta'_p) + (2\eta - \sqrt{2}\eta')\sin(\theta'_p))\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{\bar{K}^0_{2\mu\nu}}{2} \Big(2a_2^{-\mu\nu} K^+ - \sqrt{2} K_2^{*0\mu\nu} \pi^0 + 2K_2^{*+\mu\nu} \pi^- \\
&\qquad + (-\sqrt{2} a_2^{0\mu\nu} + (2f_2^{\mu\nu} + \sqrt{2} f'^{\mu\nu}_2) \cos(\theta'_t) + (-\sqrt{2} f_2^{\mu\nu} + 2f'^{\mu\nu}_2) \sin(\theta'_t)) K^0 \\
&\qquad + K_2^{*0\mu\nu} ((\sqrt{2}\eta + 2\eta') \cos(\theta'_p) + (2\eta - \sqrt{2}\eta') \sin(\theta'_p)) \Big) \\
&+ \frac{\eta_{2\mu\nu}}{2} \Big((K_2^{*0\mu\nu} \bar{K}^0 + \bar{K}_2^{*0\mu\nu} K^0 + K_2^{*-\mu\nu} K^+ + K_2^{*+\mu\nu} K^-) \\
&\qquad \cdot (-\sqrt{2} \sin(\theta'_{pt}) + 2\cos(\theta'_{pt})) \\
&\qquad - 2\sqrt{2} \sin(\theta'_{pt}) (a_2^{0\mu\nu} \pi^0 + a_2^{+\mu\nu} \pi^- + a_2^{-\mu\nu} \pi^+) \\
&\qquad - 2\sqrt{2} \sin(\theta'_{pt}) (\eta \cos(\theta'_p) - \eta' \sin(\theta'_p)) (f'^{\mu\nu}_2 \cos(\theta'_t) - f_2^{\mu\nu} \sin(\theta'_t)) \\
&\qquad - 2 \cdot 2\cos(\theta'_{pt}) (\eta' \cos(\theta'_p) + \eta \sin(\theta'_p)) (f_2^{\mu\nu} \cos(\theta'_t) + f'^{\mu\nu}_2 \sin(\theta'_t)) \Big) \\
&+ \frac{\eta'_{2\mu\nu}}{2} \Big((K_2^{*0\mu\nu} \bar{K}^0 + \bar{K}_2^{*0\mu\nu} K^0 + K_2^{*-\mu\nu} K^+ + K_2^{*+\mu\nu} K^-) \\
&\qquad \cdot (\sqrt{2} \cos(\theta'_{pt}) + 2\sin(\theta'_{pt})) \\
&\qquad + 2\sqrt{2} \cos(\theta'_{pt}) (a_2^{0\mu\nu} \pi^0 + a_2^{+\mu\nu} \pi^- + a_2^{-\mu\nu} \pi^+) \\
&\qquad + 2\sqrt{2} \cos(\theta'_{pt}) (\eta \cos(\theta'_p) - \eta' \sin(\theta'_p)) (f'^{\mu\nu}_2 \cos(\theta'_t) - f_2^{\mu\nu} \sin(\theta'_t)) \\
&\qquad + 2 \cdot 2\sin(\theta'_{pt}) (\eta' \cos(\theta'_p) + \eta \sin(\theta'_p)) (f_2^{\mu\nu} \cos(\theta'_t) + f'^{\mu\nu}_2 \sin(\theta'_t)) \Big) \Bigg] \; .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{XPP} = c_{XPP} \Bigg[& K^{*0}_{2\mu\nu} \Big(2\partial^\mu K^- \partial^\nu \pi^+ - \sqrt{2}\partial^\mu \bar{K}^0 \partial^\nu \pi^0 \\
& \quad + \partial^\mu \bar{K}^0 \partial^\nu ((\sqrt{2}\eta + 2\eta') \cos(\theta') + (2\eta - \sqrt{2}\eta') \sin(\theta')) \Big) \\
& + \bar{K}^{*0}_{2\mu\nu} \Big(2\partial^\mu K^+ \partial^\nu \pi^- - \sqrt{2}\partial^\mu K^0 \partial^\nu \pi^0 \\
& \quad + \partial^\mu K^0 \partial^\nu ((\sqrt{2}\eta + 2\eta') \cos(\theta') + (2\eta - \sqrt{2}\eta') \sin(\theta')) \Big) \\
& + K^{*+}_{2\mu\nu} \Big(2\partial^\mu \bar{K}^0 \partial^\nu \pi^- + \sqrt{2}\partial^\mu K^- \partial^\nu \pi^0 \\
& \quad + \partial^\mu K^- \partial^\nu ((\sqrt{2}\eta + 2\eta') \cos(\theta') + (2\eta - \sqrt{2}\eta') \sin(\theta')) \Big) \\
& + K^{*-}_{2\mu\nu} \Big(2\partial^\mu K^0 \partial^\nu \pi^+ + \sqrt{2}\partial^\mu K^+ \partial^\nu \pi^0 \\
& \quad + \partial^\mu K^+ \partial^\nu ((\sqrt{2}\eta + 2\eta') \cos(\theta') + (2\eta - \sqrt{2}\eta') \sin(\theta')) \Big) \\
& + \sqrt{2} a^0_{2\mu\nu} \Big(\partial^\mu K^+ \partial^\nu K^- - \partial^\mu K^0 \partial^\nu \bar{K}^0 + 2\partial^\mu \pi^0 \partial^\nu (\eta \cos(\theta') - \eta' \sin(\theta')) \Big) \\
& + 2 a^+_{2\mu\nu} \Big(\partial^\mu K^0 \partial^\nu K^- + \sqrt{2}\partial^\mu \pi^- \partial^\nu (\eta \cos(\theta') - \eta' \sin(\theta')) \Big) \\
& + 2 a^-_{2\mu\nu} \Big(\partial^\mu K^0 \partial^\nu K^+ + \sqrt{2}\partial^\mu \pi^+ \partial^\nu (\eta \cos(\theta') - \eta' \sin(\theta')) \Big) \\
& + f'_{2\mu\nu} \Bigg(\frac{\cos(\theta'_t)}{\sqrt{2}} (2\partial^\mu K^0 \partial^\nu \bar{K} + 2\partial^\mu K^+ \partial^\nu K^- (\partial\eta)^2 (\partial\eta')^2 2 (\partial\pi^0)^2 \\
& \quad + 4\partial^\mu \pi^+ \partial^\nu \pi^- + \partial^\mu (\eta - \eta') \partial^\nu (\eta + \eta') \cos(2\theta'_p) - 2\partial^\mu \eta \partial^\nu \eta' \sin(2\theta'_p)) \\
& \quad + 2 \sin(\theta'_t) (\partial^\mu K^0 \partial^\nu \bar{K}^0 + \partial^\mu K^+ \partial^\nu K^- + (\partial\eta' \cos(\theta'_p) + \partial \sin(\theta'_p))^2) \Bigg) \\
& + f_{2\mu\nu} \Big(2 \cos(\theta'_t) (\partial^\mu K^0 \partial^\nu \bar{K}^0 + \partial^\mu K^+ \partial^\nu K^- + (\partial\eta' \cos(\theta'_p) + \partial\eta \sin(\theta'_p))^2) \\
& \quad - \sqrt{2} \sin(\theta'_t) (\partial^\mu K^0 \partial^\nu \bar{K}^0 + \partial^\mu K^+ \partial^\nu K^- + (\partial\pi^0)^2 + 2\partial^\mu \pi^+ \partial^\nu \pi^- \\
& \quad + (\partial\eta \cos(\theta'_p) - \partial\eta' \sin(\theta'_p))^2) \Big) \Bigg] \, .
\end{aligned}
$$