

Johann Wolfgang Goethe–Universität
Frankfurt am Main

Fachbereich Physik
Institut für Theoretische Physik

Bachelorarbeit

Dreikörperzerfälle in effektiven hadronischen Modellen am Beispiel pseudoskalarer Glueballs

Klaus Neuschwander

Betreuer

Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Institut für Theoretische Physik
Universität Frankfurt a. M.

Zweitgutachter

Dr. Francesco Giacosa
Institut für Theoretische Physik
Universität Frankfurt a. M.

Erklärung nach § 30 (11) Ordnung für den BA- und MA-Studiengang

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen oder aus anderen fremden Texten entnommen wurden, sind von mir als solche kenntlich gemacht worden. Ferner erkläre ich, dass die Arbeit nicht - auch nicht auszugsweise - für eine andere Prüfung verwendet wurde.

Frankfurt, den

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Dreikörperzerfälle in führender Ordnung	2
2.1	Übergangselement des direkten Zerfalls	2
2.2	Übergangselement des indirekten Zerfalls	4
2.3	Die lorentz-invariante Zerfallsbreite	6
3	Dalitz-Plots	7
4	Zerfälle höherer Ordnung	9
4.1	Loop-Beiträge	9
4.2	Die Spektralfunktion	9
5	Pseudoskalare Glueballs	12
5.1	Kaonische Zerfallskanäle	12
5.2	Interferenzen	13
6	Fazit und Ausblick	21
A	Der Feynman-Propagator	22
B	Zweikörperzerfall	24

1 Einführung

Ein zentraler Bestandteil der Teilchenphysik ist die Berechnung der Zerfallsbreiten bzw. Lebensdauern von Teilchen. Die meisten bekannten Teilchen sind instabil und zerfallen in zwei oder mehr leichtere Teilchen. Die Formel für die Berechnung einer Zerfallsbreite enthält zwei verschiedene Komponenten: Die *kinematischen* Faktoren, die lediglich vom Anfangs- und Endzustand abhängen und aus der Energie- und Impulserhaltung folgen, und die *dynamischen* Faktoren, die sich aus der Art der Wechselwirkung und eventuellen Zwischenstufen ergeben. Gibt es mehrere *Zerfallskanäle*, die zu den gleichen Endzuständen führen, so unterscheiden diese sich nur in den dynamischen Faktoren. Aus diesem Grunde werden kinematische und dynamische Faktoren getrennt, da nur letztere für die Analyse der Wechselwirkung relevant sind.

Die kinematischen Faktoren von Zwei- und Dreikörperzerfällen haben einen fundamentalen Unterschied: Beim Zweikörperzerfall ist durch die Erhaltungssätze die Verteilung der Energien der Produktteilchen komplett festgelegt, während sie bei einem Dreikörperzerfall innerhalb bestimmter Grenzen variieren kann.

Ein Dreikörperzerfall kann auf zwei verschiedene Weisen auftreten: Bei einem direkten Zerfall entstehen gleichzeitig alle drei Endprodukte. Bei einem indirekten Zerfall zerfällt das Startteilchen zuerst in zwei Teilchen, von denen eines stabil ist und das andere erneut zerfällt. Im Falle des indirekten Zerfalls haben die resultierenden Teilchen eine andere Impulsverteilung als bei einem direkten Zerfall, woraus sich Informationen über den Zwischenzustand gewinnen lassen.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit widmen wir uns der expliziten Berechnung der Zerfallsbreite für die verschiedenen Fälle. Wir beschränken uns hier und in allen weiteren Rechnungen auf skalare und pseudoskalare Teilchen, bei denen keine Spineffekte auftreten.

Die Zerfallsbreite eines Dreikörperzerfalls lässt sich in einer besonders praktischen Form, dem sogenannten *Dalitz-Plot*, darstellen. Hierbei sind alle kinematischen Faktoren konstant und eine Darstellung der Zerfallsbreite in Abhängigkeit der entsprechenden Variablen lässt direkten Aufschluss über die Art der Wechselwirkung zu. Die Form eines Dalitz-Plots sowie dessen Interpretation ist Gegenstand des zweiten Kapitels.

Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns kurz mit der Frage, welche Auswirkungen Prozesse höherer Ordnung auf den gesamten Zerfall haben. Hierbei beschränken wir uns auf die Betrachtung von Loopbeiträgen des Zwischenzustandes eines indirekten Zerfalls.

Im letzten Kapitel werden wir die theoretischen Betrachtungen am Zerfall eines pseudoskalaren Glueballs anwenden. Ein Glueball ist ein gebundener Zustand aus Gluonen, den Austauschteilchen der starken Wechselwirkung. Da die Gluonen aufgrund der nichtabelschen Struktur der Farbsymmetriegruppe selbst Farbladung tragen, ist es theoretisch möglich, Zustände nur aus Gluonen zu konstruieren, die farbneutral sind und damit den Regeln des Confinements entsprechen. Im Falle der betrachteten Glueballs tritt ein weiterer interessanter Effekt auf: Da es mehrere Zerfallskanäle gibt, die zum gleichen Endzustand führen, treten Interferenzeffekte auf, deren Auswirkung auf das Gesamtergebnis näher untersucht wird.

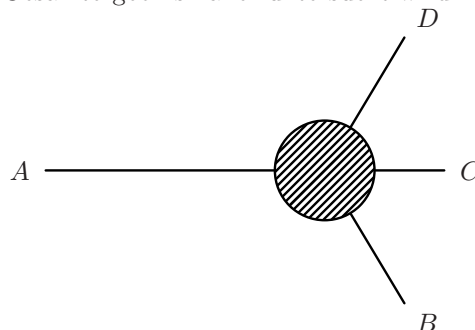


Abbildung 1: Allgemeiner Dreikörperzerfall: Ein Teilchen der Sorte A zerfällt in jeweils ein Teilchen der Sorten B, C und D.

2 Dreikörperzerfälle in führender Ordnung

2.1 Übergangselement des direkten Zerfalls

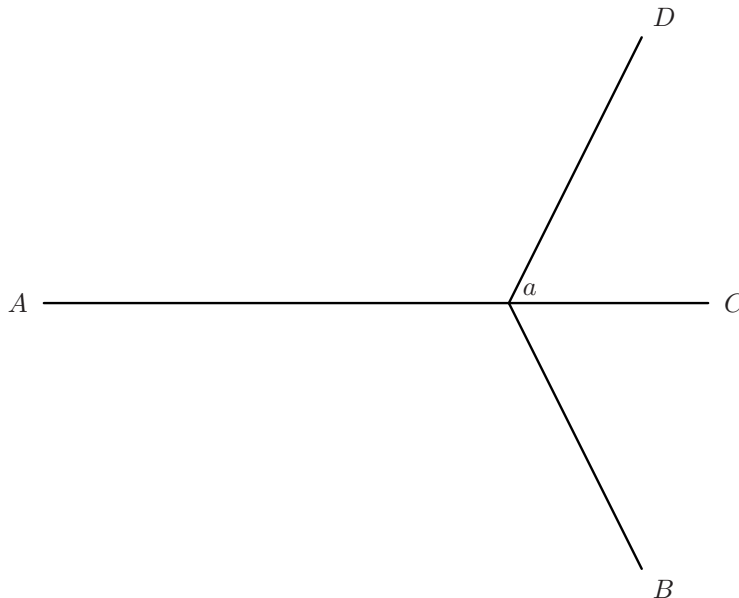


Abbildung 2: Direkter Zerfall $A \rightarrow BCD$

Die Lagrange-Dichte für vier skalare Felder lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m_A^2 A^2 + (\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m_B^2 B^2 + (\partial_\mu C)(\partial^\mu C) - m_C^2 C^2 + (\partial_\mu D)(\partial^\mu D) - m_D^2 D^2] + \mathcal{L}_i, \quad (1)$$

wobei \mathcal{L}_i den Wechselwirkungsteil darstellt und

$$A(x) = \tau^{-\frac{3}{2}\textcircled{1}} \int \frac{d^3 \vec{k}_A}{\sqrt{2E_{k_A}}} [a(\vec{k}_A) e^{-ik_A x} + a^\dagger(\vec{k}_A) e^{ik_A x}] \quad (2)$$

die Amplitude des Feldes von Teilchensorte A zum Raum-Zeit-Punkt x und

$$E_{k_A} = \sqrt{m_A^2 + \vec{k}_A^2} \quad (3)$$

die Energie eines Teilchens des Typs A mit Impuls \vec{k} ist. Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger(\vec{k})$ und $a(\vec{k})$ der entsprechenden Teilchensorte erfüllen die Kommutatorrelationen für skalare Felder:

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] &= 0 \\ [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= 0 \\ [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \quad (4)$$

Erzeuger und Vernichter unterschiedlicher Felder kommutieren immer miteinander.

Die verschiedenen Zerfallskanäle unterscheiden sich nur im Wechselwirkungsteil \mathcal{L}_i . Für den direkten Zerfall $A \rightarrow BCD$ über eine Punktwechselwirkung wählen wir eine Wechselwirkungs-Lagrangedichte von

$$\mathcal{L}_i = -aBCD. \quad (5)$$

^①In dieser Arbeit wird die Kurzschreibweise $\tau = 2\pi$ verwendet.

Wir definieren einen Anfangszustand $|i\rangle$ und einen Endzustand $|f\rangle$, der je ein Teilchen der Sorte A bzw. B , C und D enthält. Hierfür verwenden wir eine Boxnormierung mit Volumen $V = L^3$, das wir gegen unendlich laufen lassen (vgl. [1]). Für die Anfangs- und Endzustände erhalten wir zusätzliche Normierungskonstanten

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \left(\frac{\tau^3}{V}\right)^{\frac{1}{2}} a^\dagger(\vec{p}_A) |0\rangle \\ |f\rangle &= \left(\frac{\tau^3}{V}\right)^{\frac{3}{2}} b^\dagger(\vec{p}_B) c^\dagger(\vec{p}_C) d^\dagger(\vec{p}_D) |0\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Diese folgen aus der Orthonormalität der Zustände, z.B. für den Anfangszustand $|i\rangle = N_S a^\dagger(\vec{p}_i) |0\rangle$, und einer Definition der Delta-Distribution

$$\delta(p_i) = \frac{1}{\tau} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ip_i x_i} dx_i \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 1 = \langle i|i\rangle &= \langle 0| N_S^2 a(\vec{p}_i) a^\dagger(\vec{p}_i) |0\rangle \\ &= N_S^2 \delta^{(3)}(\vec{p}_i - \vec{p}_i) \langle 0|0\rangle \\ &= N_S^2 \delta^{(3)}(0) \\ &= N_S^2 \frac{1}{\tau^3} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d^3 \vec{x} e^0 \\ &= N_S^2 \frac{1}{\tau^3} \lim_{L \rightarrow \infty} L^3. \end{aligned} \quad (8)$$

Da sich das Normierungsvolumen am Ende wegekürzt, werden wir im folgenden die Limesbildung nicht explizit ausschreiben. Es ist jedoch zu beachten, dass die hier verwendeten Relationen nur im Limes $V \rightarrow \infty$ gelten.

Mit der sogenannten *Streumatrix*

$$S := \hat{T} \exp \left\{ -i \int H_i(x) d^4 x \right\} \quad (9)$$

lässt sich die Übergangswahrscheinlichkeit W von Zustand $|i\rangle$ zum Zustand $|f\rangle$

$$W = |\langle f|S|i\rangle|^2 \quad (10)$$

berechnen (vgl. Abschnitt 2.3). Hierbei ist zu beachten, dass die Integration in (9) über das Volumen der Boxnormierung sowie über ein Zeitintervall $[0, t]$ durchgeführt wird.

Der Interaktions-Hamiltonian ergibt sich aus Gleichung (5) zu

$$H_i(x) = aA(x)B(x)C(x)D(x). \quad (11)$$

Für kleine Kopplungskonstanten a lässt sich die Exponentialreihe der Streumatrix nach dem ersten Glied abbrechen:

$$S = \hat{T} \left[\mathbf{1} - i \int H_i(x) d^4 x \right] + O(H_i^2) \quad (12)$$

Das gesuchte Matrixelement der Streumatrix lautet nun

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \left\langle f \left| \mathbf{1} - i \int H_i(x) d^4 x \right| i \right\rangle \quad (13)$$

$$= -i \left\langle f \left| \int H_i(x) d^4 x \right| i \right\rangle, \quad (14)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass der Zeitordnungsoperator auf einen Term mit nur einer Zeitkomponente wie die Identität wirkt und dass $\langle f|i \rangle = 0$ ist.

Setzen wir nun (6) und (11) ein, so erhalten wir

$$S_{fi} = -ia \frac{1}{V^2} \iiint d^4x d^3\vec{k}_A d^3\vec{k}_B d^3\vec{k}_C d^3\vec{k}_D \frac{1}{4\sqrt{E_{k_A} E_{k_B} E_{k_C} E_{k_D}}} \\ \langle 0| b(p_B)c(p_C)d(p_D) \left[a(\vec{k}_A)e^{-ik_Ax} + a^\dagger(\vec{k}_A)e^{+ik_Ax} \right] \left[b(\vec{k}_B)e^{-ik_Bx} + b^\dagger(\vec{k}_B)e^{+ik_Bx} \right] \\ \left[c(\vec{k}_C)e^{-ik_Cx} + c^\dagger(\vec{k}_C)e^{+ik_Cx} \right] \left[d(\vec{k}_D)e^{-ik_Dx} + d^\dagger(\vec{k}_D)e^{+ik_Dx} \right] a^\dagger(p_A) |0 \rangle. \quad (15)$$

Die meisten Kombinationen aus Erzeugern und Vernichtern verschwinden, indem man $b(\vec{k}_B)$, $c(\vec{k}_C)$ und $d(\vec{k}_D)$ bis ganz nach rechts oder $a^\dagger(\vec{k}_A)$ ganz nach links kommutiert und $x(\vec{k}_x) |0 \rangle = 0$ verwendet. Es bleibt nur eine Kombination erhalten, bei der für jede Teilchensorte die Anzahl an Erzeugern gleich der der Vernichter ist. Es ergibt sich

$$S_{fi} = -ia \frac{1}{V^2} \iiint d^4x d^3\vec{k}_A d^3\vec{k}_B d^3\vec{k}_C d^3\vec{k}_D \frac{1}{4\sqrt{E_{k_A} E_{k_B} E_{k_C} E_{k_D}}} \\ \langle 0| b(p_B)c(p_C)d(p_D)a(k_A)b^\dagger(k_B)c^\dagger(k_C)d^\dagger(k_D)a^\dagger(p_A) |0 \rangle e^{i(-k_A+k_B+k_C+k_D)x} \quad (16)$$

$$= -ia \frac{1}{V^2} \iiint d^4x d^3\vec{k}_A d^3\vec{k}_B d^3\vec{k}_C d^3\vec{k}_D \frac{1}{4\sqrt{E_{k_A} E_{k_B} E_{k_C} E_{k_D}}} \\ \delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{k}_A)\delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{k}_B)\delta^{(3)}(\vec{p}_C - \vec{k}_C)\delta^{(3)}(\vec{p}_D - \vec{k}_D)e^{i(-k_A+k_B+k_C+k_D)x} \quad (17)$$

$$= -ia \frac{1}{V^2} \int d^4x \frac{1}{4\sqrt{E_{p_A} E_{p_B} E_{p_C} E_{p_D}}} e^{i(-p_A+p_B+p_C+p_D)x}. \quad (18)$$

Wir definieren in dieser Gleichung nun noch

$$M_1 = -ia \quad (19)$$

und erhalten

$$S_{fi} = \frac{1}{V^2} \frac{1}{4\sqrt{E_{p_A} E_{p_B} E_{p_C} E_{p_D}}} \int d^4x e^{-i(p_A-p_B-p_C-p_D)x} M_1. \quad (20)$$

Bevor wir aus diesem Matrixelement die Zerfallsbreite berechnen, wollen wir das entsprechende Matrixelement für einen mehrstufigen Zerfall berechnen.

2.2 Übergangselement des indirekten Zerfalls

Wir betrachten nun einen indirekten Zerfall. Bei diesem zerfällt ein Teilchen zuerst in zwei andere Teilchen, von denen eines wiederum in zwei Teilchen zerfällt. Hierbei treten zwei Wechselwirkungen mit unterschiedlichen Kopplungskonstanten auf. Der Lagrangian für den betrachteten Zerfall lautet

$$\mathcal{L} = -gABS - hSCD. \quad (21)$$

Wir gehen vor wie in Abschnitt 2.1 und entwickeln die Streumatrix. Da es sich jedoch hier um einen Prozess zweiter Ordnung handelt, können wir erst nach einem weiteren Glied abbrechen:

$$S = \hat{T} \left[\mathbf{1} - i \int H_i(x) d^4x - \frac{1}{2} \iint H_i(x)H_i(x') d^4x d^4x' \right] + O(H_i^3) \quad (22)$$

Der Term erster Ordnung, $\langle f|H_i|i \rangle$, verschwindet, da die Anzahl von Erzeugern und Vernichtern nicht für jede Teilchensorte gleich ist. Damit ist es immer möglich, einen Erzeuger oder Vernichter ganz nach links oder rechts zu kommutieren und auf den Vakuumzustand anzuwenden. Es ergibt sich ein Matrixelement

$$S_{fi} = -\frac{1}{2} \iint d^4x d^4x' \\ \left\langle f \left| \hat{T} \left[g^2 ABSA'B'S' + h^2 SCDS'C'D' + ghABSS'C'D' + ghA'B'S'SCD \right] \right| i \right\rangle, \quad (23)$$

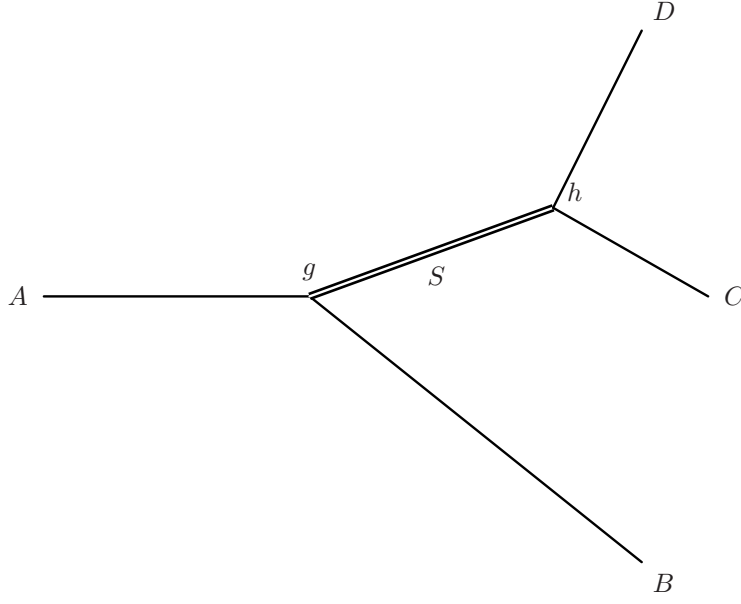


Abbildung 3: Indirekter Zerfall $A \rightarrow BS \rightarrow BCD$

wobei wir die Abkürzungen $A = A(x)$ und $A' = A(x')$ eingeführt haben. Die ersten beiden Terme fallen wieder entsprechend obiger Argumentation weg. Die zeitgeordneten Summanden lassen sich wiederum vereinfachen:

$$\begin{aligned}
& \hat{T}[ABSS'C'D' + A'B'S'SCD] \\
& = ABSS'C'D'\theta(t-t') + S'C'D'ABS\theta(t'-t) + A'B'S'SCD\theta(t'-t) + SCDA'B'S'\theta(t-t') \\
& = 2[ABSS'C'D'\theta(t-t') + S'C'D'ABS\theta(t'-t)], \tag{24}
\end{aligned}$$

wobei wir in den hinteren beiden Summanden die Koordinaten $x \leftrightarrow x'$ vertauscht haben, da über beide integriert wird. Eingesetzt in (23) ergibt sich

$$\begin{aligned}
S_{fi} = & gh \frac{1}{V^2 \tau^3} \iint d^4x d^4x' d^3\vec{k}_A d^3\vec{k}_B d^3\vec{k}_C d^3\vec{k}_D d^3\vec{k}_S d^3\vec{k}'_S \frac{1}{8\sqrt{E_{k_A} E_{k_B} E_{k_C} E_{k_D} E_{k_S} E_{k'_S}}} \\
& \langle 0 | b(\vec{p}_b) c(\vec{p}_C) d(\vec{p}_D) \left\{ \left[a(\vec{k}_A) e^{-ik_A x} + a^\dagger(\vec{k}_A) e^{+ik_A x} \right] \left[b(\vec{k}_B) e^{-ik_B x} + b^\dagger(\vec{k}_B) e^{+ik_B x} \right] \right. \\
& \left[s(\vec{k}_S) e^{-ik_S x} + s^\dagger(\vec{k}_S) e^{+ik_S x} \right] \left[s'(\vec{k}_{S'}) e^{-ik_{S'} x'} + s'^\dagger(\vec{k}_{S'}) e^{+ik_{S'} x'} \right] \\
& \left[c(\vec{k}_C) e^{-ik_C x'} + c^\dagger(\vec{k}_C) e^{+ik_C x'} \right] \left[d(\vec{k}_D) e^{-ik_D x'} + d^\dagger(\vec{k}_D) e^{+ik_D x'} \right] \theta(x^0 - x'^0) \\
& + \left[s(\vec{k}_S) e^{-ik_S x'} + s^\dagger(\vec{k}_S) e^{+ik_S x'} \right] \left[c(\vec{k}_C) e^{-ik_C x'} + c^\dagger(\vec{k}_C) e^{+ik_C x'} \right] \\
& \left[d(\vec{k}_D) e^{-ik_D x'} + d^\dagger(\vec{k}_D) e^{+ik_D x'} \right] \left[a(\vec{k}_A) e^{-ik_A x} + a^\dagger(\vec{k}_A) e^{+ik_A x} \right] \\
& \left. \left[b(\vec{k}_B) e^{-ik_B x} + b^\dagger(\vec{k}_B) e^{+ik_B x} \right] \left[s(\vec{k}_S) e^{-ik_S x} + s^\dagger(\vec{k}_S) e^{+ik_S x} \right] \theta(x'^0 - x^0) \right\} a^\dagger(\vec{p}_A) |0\rangle. \tag{25}
\end{aligned}$$

Auch hier verschwinden wieder die meisten Terme, es ergibt sich

$$\begin{aligned}
S_{fi} = & -gh \frac{1}{V^2 \tau^3} \iint d^4x d^4x' d^3\vec{k}_A d^3\vec{k}_B d^3\vec{k}_C d^3\vec{k}_D d^3\vec{k}_S d^3\vec{k}'_S \frac{1}{8\sqrt{E_{k_A} E_{k_B} E_{k_C} E_{k_D} E_{k_S} E_{k'_S}}} \\
& \delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{k}_A) \delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{k}_B) \delta^{(3)}(\vec{p}_C - \vec{k}_C) \delta^{(3)}(\vec{p}_D - \vec{k}_D) \delta^{(3)}(\vec{k}_S - \vec{k}'_S) \\
& \left\{ e^{i(-k_A + k_B - k_S)x} e^{i(k'_S + k_C + k_D)\theta(x^0 - x'^0)} + e^{i(-k_A + k_B + k_S)x} e^{i(-k'_S + k_C + k_D)x'} \theta(x'^0 - x^0) \right\} \\
& = -gh \frac{1}{V^2 \tau^3} \iint d^4x d^4x' \frac{1}{4\sqrt{E_A E_B E_C E_D}} e^{i(-p_A + p_B)x} e^{i(p_C + p_D)x'} \\
& \int d^3\vec{k}_S \frac{1}{2E_{k_S}} \left[e^{ik_S(x'-x)} \theta(x^0 - x'^0) + e^{ik_S(x-x')} \theta(x'^0 - x^0) \right] \tag{26}
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile lässt sich auch als komplexes Kurvenintegral

$$\begin{aligned} & \int d^3\vec{k}_S \frac{1}{2E_{k_S}} \left[e^{ik_S(x'-x)}\theta(x^0-x'^0) + e^{ik_S(x-x')}\theta(x'^0-x^0) \right] \\ &= \int d^3\vec{k}_S \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi i} \int dk_S^0 \frac{e^{ik_S(x-x')}}{k_S^2 - m_S^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (27)$$

schreiben (vgl. Anhang A), wobei $k_S^2 = (k_S^0)^2 - \vec{k}_S^2$. Da hier nun über k_S^0 integriert wird und nicht mehr $k_S^0 = E_S$ gilt, ist auch $k_S^2 \neq m_S^2$. Nun lassen sich die Integrale über k_S^0 und \vec{k}_S zusammenfassen und die Integration über eine der Raum-Zeit-Komponenten ausführen:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -igh \frac{1}{V^2\tau^4} \frac{1}{4\sqrt{E_A E_B E_C E_D}} \iint d^4x d^4x' d^4k_S \\ &\quad \cdot \frac{1}{k_S^2 - m_S^2 + i\epsilon} e^{i(-p_A + p_B + k_S)x} e^{i(-k_S + p_C + p_D)x'} \\ &= -igh \frac{1}{V^2\tau^4} \frac{1}{4\sqrt{E_A E_B E_C E_D}} \iint d^4x d^4k_S \\ &\quad \cdot \frac{1}{k_S^2 - m_S^2 + i\epsilon} e^{i(-p_A + p_B + k_S)x} \tau^4 \delta^{(4)}(-k_S + p_C + p_D) \end{aligned} \quad (28)$$

Die Ausführung der Integration über k_S ergibt mit der Definition $p_{CD} = p_C + p_D$

$$S_{fi} = -igh \frac{1}{V^2} \frac{1}{4\sqrt{E_A E_B E_C E_D}} \int d^4x \frac{1}{p_{CD}^2 - m_S^2 + i\epsilon} e^{i(-p_A + p_B + p_C + p_D)x}. \quad (29)$$

Mit der Definition

$$M_2 = -igh \frac{1}{p_{CD}^2 - m_S^2 + i\epsilon} \quad (30)$$

ergibt sich wieder die allgemeine Form analog zu (20).

2.3 Die lorentz-invariante Zerfallsbreite

Aus den Gleichungen (20) und (29) wollen wir nun die gesamte Zerfallswahrscheinlichkeit bestimmen. Dazu berechnen wir zuerst die Übergangswahrscheinlichkeit für den Übergang in einen bestimmten Endzustand (vgl. (10)):

$$|S_{fi}|^2 = \frac{1}{V^4} \frac{1}{16E_A E_B E_C E_D} |M|^2 \int d^4x e^{-i(p_A - p_B - p_C - p_D)x} \int d^4x' e^{-i(p_A - p_B - p_C - p_D)x'} \quad (31)$$

Wir führen nun eine der Integrationen aus und erhalten

$$|S_{fi}|^2 = \frac{1}{V^4} \frac{1}{16E_A E_B E_C E_D} |M|^2 \int d^4x e^{-i(p_A - p_B - p_C - p_D)x} \tau^4 \delta^{(4)}(p_A - p_B - p_C - p_D) \quad (32)$$

$$= \frac{1}{V^4} \frac{1}{16E_A E_B E_C E_D} |M|^2 \int d^4x e^0 \tau^4 \delta^{(4)}(p_A - p_B - p_C - p_D) \quad (33)$$

$$= \frac{1}{V^4} \frac{1}{16E_A E_B E_C E_D} |M|^2 Vt \tau^4 \delta^{(4)}(p_A - p_B - p_C - p_D) \quad (34)$$

$$= \frac{\tau^4}{V^3} \frac{1}{16E_A E_B E_C E_D} |M|^2 \delta^{(4)}(p_A - p_B - p_C - p_D) \cdot t. \quad (35)$$

Da es verschiedene mögliche Endzustände gibt, muss für die Ermittlung der gesamten Zerfallswahrscheinlichkeit über alle möglichen Endzustände integriert werden

$$W = \int |S_{fi}|^2 \left(\frac{V}{\tau^3}\right)^3 d^3\vec{p}_B d^3\vec{p}_C d^3\vec{p}_D, \quad (36)$$

wobei der Faktor $\frac{V}{\tau^3}$ die Dichte der Endzustände im Phasenraum angibt.

Die Übergangswahrscheinlichkeit W ist (in erster Näherung) proportional zur Zeit t . Der Proportionalitätsfaktor wird als *Zerfallsbreite* Γ bezeichnet. Für die Gesamtwahrscheinlichkeit des Zerfalls ergibt sich also

$$W = \Gamma t \quad (37)$$

$$\Gamma = \frac{1}{t} \int |S_{fi}|^2 \left(\frac{V}{\tau^3} \right) d^3\vec{p}_B d^3\vec{p}_C d^3\vec{p}_D \quad (38)$$

$$= \int d\Gamma, \quad (39)$$

wobei die Integration über $d\Gamma$ als Integration über alle möglichen Endzustände zu interpretieren ist. Es gibt verschiedene Formen, $d\Gamma$ auszudrücken, z. B. in Abhängigkeit von den Impulsen oder Energien. Trotz verschiedener funktionaler Abhängigkeiten wird der Übersichtlichkeit wegen keine Unterscheidung der verschiedenen $d\Gamma$ gemacht. Die allgemeine, Lorentz-invariante Form, aus der alle weiteren Formen abgeleitet werden, ergibt sich aus obigen Überlegungen zu

$$d\Gamma = \frac{1}{16\tau^5} \frac{\delta^{(4)}(p_A - p_B - p_C - p_D)}{E_A E_B E_C E_D} |M|^2 d^3\vec{p}_B d^3\vec{p}_C d^3\vec{p}_D. \quad (40)$$

3 Dalitz-Plots

Die in Gleichung (40) eingeführte Darstellung der Zerfallsbreite hat für die Analyse von Zerfällen den Nachteil, dass sie sowohl kinematische Faktoren (wie z. B. die Energien der Endteilchen) als auch dynamische Faktoren ($|M|^2$) enthält. Im Allgemeinen ist man nur an den dynamischen Faktoren interessiert, da nur diese Aufschluss über Zerfallskanäle liefern können, während die kinematischen Faktoren lediglich vom Endzustand abhängig sind. Es bietet sich nun an, die Zerfallsbreite in eine andere Form zu bringen. Dazu wechseln wir in das Ruhesystem des zerfallenden Teilchens und integrieren über den Impuls \vec{p}_C :

$$d\Gamma = \frac{1}{16\tau^5} \frac{\delta(m_A - E_B - E_C - E_D)}{m_A E_B E_C E_D} |M|^2 d^3\vec{p}_B d^3\vec{p}_D \quad \vec{p}_C = -(\vec{p}_B + \vec{p}_D) \quad (41)$$

Nun wechseln wir zu Kugelkoordinaten

$$d^3\vec{p}_x = |\vec{p}_x|^2 d(\phi_x) d(\cos \theta_x) d|\vec{p}_x| \quad (42)$$

und wählen dabei $\theta_B = \angle(\vec{p}_B, \vec{p}_D)$.

Nun formen wir die Delta-Distribution um. Dazu betrachten wir zunächst das Argument, das wir kurz als $E = m_A - E_B - E_C - E_D$ bezeichnen. Aus (41) ist ersichtlich, dass E_C wiederum von \vec{p}_B und \vec{p}_D abhängt:

$$\begin{aligned} E_C &= \sqrt{m_C^2 + \vec{p}_C^2} \\ &= \sqrt{m_C^2 + |\vec{p}_B|^2 + |\vec{p}_D|^2 + 2 \cos \theta_B |\vec{p}_B| |\vec{p}_D|} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{dE}{d(\cos \theta_B)} = \frac{dE_C}{d(\cos \theta_B)} = \frac{|\vec{p}_B| |\vec{p}_D|}{E_C(\cos \theta_B)} \quad (44)$$

Die Nullstelle $c = \cos \theta_B$ des Argumentes lautet

$$\begin{aligned} c &= \frac{(m_A - E_B - E_D)^2 - m_C^2 - |\vec{p}_B|^2 - |\vec{p}_D|^2}{2 |\vec{p}_B| |\vec{p}_D|} \\ &= \frac{m_A^2 + m_B^2 + m_D^2 - 2m_A(E_B + E_D)}{2 |\vec{p}_B| |\vec{p}_D|}, \end{aligned} \quad (45)$$

womit sich die Delta-Distribution umschreiben lässt als

$$\begin{aligned}\delta(m_A - E_B - E_C - E_D) &= \frac{\delta(\cos \theta_B - c)}{\left| \left(\frac{dE}{d(\cos \theta_B)} \right)_{\cos \theta_B = c} \right|} \\ &= \frac{E_C(c)}{|\vec{p}_B| |\vec{p}_D|} \delta(\cos \theta_B - c).\end{aligned}\quad (46)$$

Wir führen nun die Integration über $d(\cos \theta_B)$ aus und erhalten

$$\begin{aligned}d\Gamma &= \frac{1}{16\tau^5} \frac{1}{m_A E_B E_C E_D} |M|^2 |\vec{p}_B|^2 |\vec{p}_D|^2 d\phi_B d(\cos \theta_B) d|\vec{p}_B| d\phi_D d(\cos \theta_D) d|\vec{p}_D| \\ &\quad \cdot \frac{E_C(c)}{|\vec{p}_B| |\vec{p}_D|} \delta(\cos \theta_B - c) \\ &= \frac{1}{16\tau^5} \frac{|\vec{p}_B| |\vec{p}_D|}{m_A E_B E_D} |M|^2 d|\vec{p}_B| d|\vec{p}_D| d\phi_B d\phi_D d(\cos \theta) \theta(1 - c^2).\end{aligned}\quad (47)$$

Die Integration über $\cos \theta_B$ läuft von -1 bis 1 , weshalb die Zerfallsbreite für $c \notin [-1, 1]$ verschwindet: Der Zerfall ist kinematisch nicht erlaubt. Die übrigen Terme enthalten keine weitere Winkelabhängigkeit, sodass man die Winkelintegrale separat ausführen kann:

$$d\Gamma = \frac{1}{8\tau^3} |M|^2 \frac{|\vec{p}_B| |\vec{p}_D|}{m_A E_B E_D} d|\vec{p}_B| d|\vec{p}_D| \theta(1 - c^2)\quad (48)$$

Nun wollen wir die Integration über die Impulsbeträge durch eine Integration über die Energien ersetzen. Dazu leiten wir die Energie-Impuls-Relationen ab und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{dE_X}{d|\vec{p}_X|} &= \frac{|\vec{p}_X|}{E_X} \\ d\Gamma &= \frac{1}{8\tau^3} \frac{1}{m_A} |M|^2 dE_B dE_D \theta(1 - c^2)\end{aligned}\quad (49)$$

In dieser Form treten wie gewünscht nur dynamische Faktoren auf. Für die weitere Verwendung lassen sich die Differentiale nochmals ersetzen. Hierzu führen wir die Variablen

$$p_{ij} = p_i + p_j\quad (50)$$

$$m_{ij} = \sqrt{p_{ij}^2}\quad (51)$$

ein und berechnen

$$\begin{aligned}\frac{m_A^2 + m_B^2 - m_{CD}^2}{2m_A} &= \frac{m_A^2 + m_B^2 - (p_A - p_B)^2}{2m_A} \\ &= \frac{m_A^2 + m_B^2 - (m_A^2 + m_B^2 - 2m_A E_B + 2\vec{p}_A \vec{p}_B)}{2m_A} \\ &= E_B,\end{aligned}\quad (52)$$

wobei wir von der zweiten zur dritten Zeile verwendet haben, dass wir uns im Ruhesystem von A befinden, also $E_A = m_A$ und $\vec{p}_A = 0$. Eine analoge Rechnung führt uns auf

$$E_D = \frac{m_A^2 + m_D^2 - m_{BC}^2}{2m_A}.\quad (53)$$

Mit den Ersetzungen

$$\frac{dE_D}{d(m_{BC}^2)} = \frac{dE_B}{d(m_{CD}^2)} = -\frac{1}{2m_A}\quad (54)$$

erhalten wir

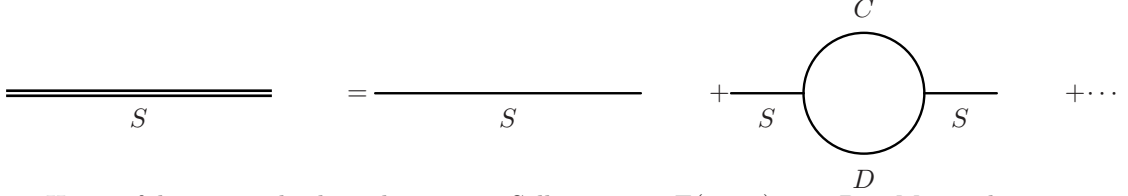
$$d\Gamma = \frac{1}{32\tau^3} \frac{1}{m_A^3} |M|^2 d(m_{BC}^2) d(m_{CD}^2) \theta(1 - c^2).\quad (55)$$

Die grafische Auftragung $d\Gamma(m_{BC}^2, m_{CD}^2)$ wird nach ihrem Erfinder *Dalitz-Plot* genannt. Der Vorteil dieser Form ist, dass sich an ihr besonders einfach Resonanzen erkennen lassen. Den Dalitz-Plots der verschiedenen Zerfallstypen werden wir uns noch einmal in Kapitel 5 zuwenden.

4 Zerfälle höherer Ordnung

4.1 Loop-Beiträge

In Abschnitt 2.2 haben wir das Matrixelement M_2 für einen indirekten Zerfall in führender Ordnung berechnet. Wir wollen nun Gleichung (30) erweitern, um Loopbeiträge zu berücksichtigen:



Hierzu führen wir die komplexwertige Selbstenergie $\Sigma(m_{CD})$ ein. Das Matrixelement mit Loopbeiträgen lautet dann [2]:

$$M_3 = \frac{-igh}{m_{CD}^2 - m_s^2 + \Sigma(m_{CD})}. \quad (56)$$

Das *optische Theorem* gibt einen Zusammenhang zwischen dem Imaginärteil der Loopfunktion und der Zerfallsbreite $S \rightarrow CD$ an:

$$\text{Im } \Sigma(m_{CD}) = m_{CD} \Gamma_{S \rightarrow CD}(m_{CD}) \quad (57)$$

Die Komponenten von M_3 lauten dann

$$\begin{aligned} \text{Re } M_3 &= -gh \frac{m_{CD} \Gamma_{S \rightarrow CD}(m_{CD})}{(m_{CD}^2 + \text{Re } \Sigma(m_{CD}) - m_s^2)^2 + m_{CD}^2 \Gamma_{S \rightarrow CD}^2(m_{CD})} \\ \text{Im } M_3 &= -gh \frac{m_{CD}^2 + \text{Re } \Sigma(m_{CD}) - m_s^2}{(m_{CD}^2 + \text{Re } \Sigma(m_{CD}) - m_s^2)^2 + m_{CD}^2 \Gamma_{S \rightarrow CD}^2(m_{CD})} \\ |M_3|^2 &= g^2 h^2 \frac{1}{(m_{CD}^2 + \text{Re } \Sigma(m_{CD}) - m_s^2)^2 + m_{CD}^2 \Gamma_{S \rightarrow CD}^2(m_{CD})}. \end{aligned} \quad (58)$$

4.2 Die Spektralfunktion

Wir kommen noch einmal zurück zu Gleichung (55) und führen die Integration über m_{BC}^2 aus. Die Integrationsgrenzen lassen sich am einfachsten im CD -Ruhesystem berechnen. Wir markieren alle auftretenden Größen mit einem Stern, um sie von den Größen im Ruhesystem von A zu unterscheiden. Es gilt

$$m_{BC}^2 = (E_B^* + E_C^*)^2 - (\vec{p}_B^* + \vec{p}_C^*)^2 \quad (59)$$

$$= (E_B^* + E_C^*)^2 - |\vec{p}_B^*|^2 - |\vec{p}_C^*|^2 - 2 |\vec{p}_B^*| |\vec{p}_C^*| \cos \angle(\vec{p}_B^*, \vec{p}_C^*). \quad (60)$$

Ein minimaler Wert von m_{BC}^2 ergibt sich bei parallelen, ein maximaler Wert bei antiparallelen \vec{p}_B^* und \vec{p}_C^* :

$$\begin{aligned} (m_{BC}^2)_{\text{max/min}} &= (E_B^* + E_C^*)^2 - (|\vec{p}_B^*| \mp |\vec{p}_C^*|)^2 \\ (m_{BC}^2)_{\text{max}} - (m_{BC}^2)_{\text{min}} &= 4 |\vec{p}_B^*| |\vec{p}_C^*| \end{aligned} \quad (61)$$

Zusammen mit der Ersetzung $d(m_{CD}^2) = m_{CD} dm_{CD}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{4\tau^3 m_A^2} |M|^2 \frac{|\vec{p}_B^*| |\vec{p}_C^*| m_{CD}}{m_A} dm_{CD} \\ &= \frac{1}{4\tau^3 m_A^2} |M|^2 |\vec{p}_B| |\vec{p}_C| dm_{CD}, \end{aligned} \quad (62)$$

wobei wir $|\vec{p}_B^*| m_{CD} = |\vec{p}_B| m_A$ ausgenutzt haben. Setzen wir nun das Matrixelement mit Loopbeiträgen (58) in (62) ein, so erhalten wir

$$d\Gamma = \frac{1}{4\tau^3 m_A} g^2 h^2 |\vec{p}_C^*| |\vec{p}_B| \frac{1}{(m_{CD}^2 + \text{Re } \Sigma(m_{CD}) - m_s^2)^2 + m_{CD}^2 \Gamma_{S \rightarrow CD}^2(m_{CD})} dm_{CD} \quad (63)$$

Mit den Zerfallsbreiten der einzelnen Zweikörperzerfälle (siehe Anhang B)

$$\Gamma_{A \rightarrow BS}(m_{CD}) = \frac{g^2}{4\tau m_A^2} |\vec{p}_B| \quad \Gamma_{S \rightarrow CD}(m_{CD}) = \frac{h^2}{4\tau m_{CD}} |\vec{p}_C^*| \quad (64)$$

ergibt sich

$$d\Gamma = \Gamma_{A \rightarrow BS}(m_{CD}) \cdot \frac{2}{\pi} \frac{m_{CD}^2 \Gamma_{S \rightarrow CD}(m_{CD})}{(m_{CD}^2 + \text{Re } \Sigma(m_{CD}) - m_S^2)^2 + m_{CD}^2 \Gamma_{S \rightarrow CD}^2(m_{CD})} dm_{CD}. \quad (65)$$

Mit der Definition der Spektralfunktion

$$d_S(m_{CD}) = \frac{2}{\pi} \frac{m_{CD}^2 \Gamma_{S \rightarrow CD}(m_{CD})}{(m_{CD}^2 + \text{Re } \Sigma(m_{CD}) - m_S^2)^2 + m_{CD}^2 \Gamma_{S \rightarrow CD}^2(m_{CD})} \quad (66)$$

ergibt sich eine Gesamtzerfallsbreite von

$$\Gamma = \int \Gamma_{A \rightarrow BS}(m_{CD}) d_S(m_{CD}) dm_{CD}. \quad (67)$$

Diese Gleichung ähnelt der Berechnung eines Erwartungswertes aus einer Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Spektralfunktion $d_S(m_{CD})$ lässt sich als Wahrscheinlichkeit interpretieren, dass der erzeugte S -Zustand die invariante Masse m_{CD} besitzt. Diese Wahrscheinlichkeit wird mit der Zerfallsbreite in genau diesen S -Zustand multipliziert und schließlich über alle möglichen Werte für m_{CD} integriert. In der Tat ist die Spektralfunktion, wie eine Wahrscheinlichkeitsdichte, normiert [2]:

$$\int d_S(m_{CD}) dm_{CD} = 1 \quad (68)$$

Wir werden nun eine Vereinfachung vornehmen und die m_{CD} -Abhängigkeit des Realteiles der Loopfunktion vernachlässigen:

$$\text{Re } \Sigma(m_{CD}) \rightarrow \text{Re } \Sigma = \text{const} \quad (69)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Kopplungskonstante des zweiten Zerfalls klein ist und der Realteil $\text{Re } \Sigma(m_{CD})$ nicht stark fluktuiert, ist diese Näherung gut, da die Spektralfunktion einen scharfen Peak besitzt (siehe Abb. 4).

Diese Näherung führt allerdings zur Verletzung der Normierung (68). Wir führen daher eine Normierungskonstante N ein, sodass gilt

$$N^2 \int d_S(m_{CD}) dm_{CD} = 1. \quad (70)$$

Diese Normierungskonstante werden wir direkt in das Matrixelement schreiben:

$$\tilde{M}_3 := N \frac{-igh}{m_{CD}^2 - m_S^2 + \text{Re } \Sigma + im_{CD} \Gamma_{S \rightarrow CD}(m_{CD})} \quad (71)$$

Für $\text{Re } \Sigma < m_S^2$ lassen sich die beiden Größen zu $M_S^2 = m_S^2 - \text{Re } \Sigma$ zusammenfassen (für den anderen Fall siehe [2]):

$$\tilde{M}_3 := N \frac{-igh}{m_{CD}^2 - M_S^2 + im_{CD} \Gamma_{S \rightarrow CD}(m_{CD})} \quad (72)$$

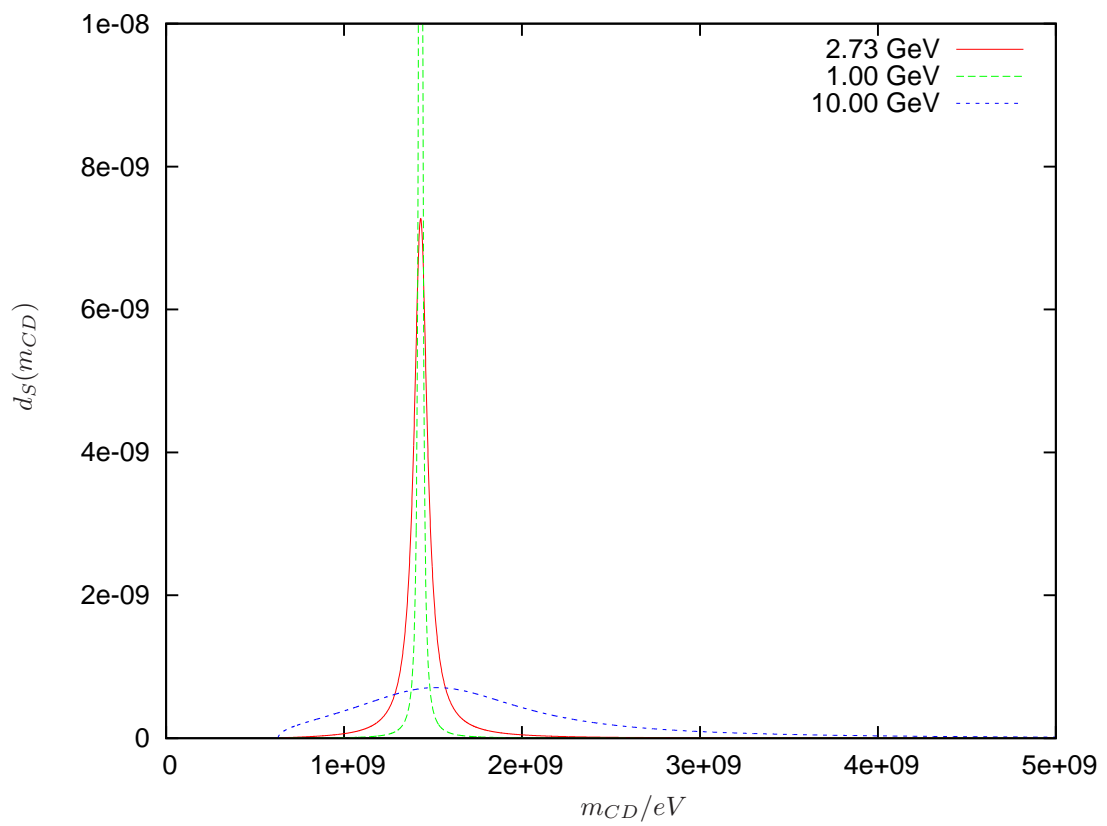


Abbildung 4: Spektralfunktion des K_S^0 für unterschiedliche Kopplungskonstanten h . Je geringer die Kopplungskonstante, desto schärfer der Peak.

5 Pseudoskalare Glueballs

Für Mesonen und Baryonen gilt das *Confinement*, also die Tatsache, dass alle stabilen Zustände farbneutral sind. Die Starke Wechselwirkung als $SU(3)$ -Eichsymmetrie ist nicht-abelsch, ihre Austauschteilchen, die Gluonen, tragen selbst Farbladung und können miteinander in Wechselwirkung treten. Dies führt zu der Vermutung, dass es Zustände gibt, die nur aus miteinander wechselwirkenden Gluonen bestehen, die sogenannten *Glueballs*.

Wir betrachten im weiteren Verlauf zwei verschiedene potentielle Glueballs mit unterschiedlichen Massen: Einerseits ergeben Lattice-QCD-Berechnungen eine Masse von ca. 2.6 GeV [3], andererseits wurde im BesIII-Experiment die Resonanz X(2370) mit passenden Quantenzahlen bei 2.37 GeV gemessen [4].

5.1 Kaonische Zerfallskanäle

Wir werden uns im weiteren Verlauf auf drei Prozesse konzentrieren:

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \bar{K}^0 K^0 \pi^0 \\ G &\rightarrow \bar{K}^0 K_S^0 \rightarrow \bar{K}^0 K^0 \pi^0 \\ G &\rightarrow K^0 \bar{K}_S^0 \rightarrow \bar{K}^0 K^0 \pi^0 \end{aligned}$$

Alle diese Zerfälle enden im gleichen Endzustand mit zwei Kaonen und einem Pion. Die hier relevanten Terme der Lagrange-Dichte für die Glueball-Wechselwirkung lauten[5]:

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} c_{G\Phi} G (-Z_K^2 Z_\pi K^0 \bar{K}^0 \pi^0 + Z_{K_S} Z_K K_S^0 \bar{K}^0 \phi_N + Z_K Z_{K_S} K^0 \bar{K}_S^0 \phi_N). \quad (73)$$

Mit den Parametern aus Tabelle 1 ergeben sich die Kopplungskonstanten

$$a = 9.81 \quad (74)$$

$$g = -566 \text{ MeV} \quad (75)$$

Teilchen	Masse	Konstante	Wert
$G_{2.37}$	2.37 GeV	Z_π	1.77
$G_{2.6}$	2.60 GeV	Z_K	1.16
K^0, \bar{K}^0	494 MeV	Z_{K_S}	1
K_S^0	1.43 GeV	ϕ_N	0.16 GeV
π^0	135 MeV	$c_{G\Phi}$	4.3 ^②

Tabelle 1: Massen[6] und Normierungskonstanten[5, 7, 8] des Glueball-Zerfalls

Die Kopplungskonstante h bestimmen wir aus experimentellen Daten zum Zerfall von K_S^0 . Dieses Teilchen hat eine Gesamtzerfallsbreite von

$$\begin{aligned} \Gamma_{K_S^0} &= \Gamma_{K_S^0 \rightarrow K^0 \pi^0} + \Gamma_{K_S^0 \rightarrow K^+ \pi^-} \\ &= 3\Gamma_{K_S^0 \rightarrow K^0 \pi^0}. \end{aligned} \quad (76)$$

Setzen wir nun die experimentell ermittelte Gesamtzerfallsbreite von 270 MeV[6] in (B7) ein, so erhalten wir

$$|h| = 2.73 \text{ GeV} \quad (77)$$

^②Der Wert $c_{G\Phi} = 4.3$ gilt nur für die gemessene Resonanz mit $m_G = 2.37$ GeV. Für die Resonanzmasse aus Latticeberechnungen liegt kein entsprechender Wert vor. Auf die Verhältnisse der Zerfallsbreiten hat die Wahl von $c_{G\Phi}$ keinen Einfluss, weshalb wir hier auch für $m_G = 2.6$ GeV mit diesem Wert rechnen.

Die Matrixelemente lauten für die drei Kanäle:

$$M_1 = -ia \quad (78)$$

$$M_2 = -ighN_2 \frac{1}{m_{CD}^2 - M_S^2 + im_{CD}\Gamma_{K_S^0}(m_{CD})} \quad (79)$$

$$M_3 = -ighN_3 \frac{1}{m_{BC}^2 - M_S^2 + im_{CD}\Gamma_{\bar{K}_S^0}(m_{BC})} \quad (80)$$

Die verschiedenen Zerfallskanäle sind separat in den Abbildungen 5, 6 und 7 dargestellt. Die Zerfallsbreiten der indirekten Zerfälle haben ein Maximum bei $m_{BC}^2 \approx M_S^2$ bzw. $m_{CD}^2 \approx M_S^2$. Nun ist erkennbar, weshalb der Dalitz-Plot eine sinnvolle Darstellung ist: Man kann an senkrechten, waagrechten und diagonalen Linien erkennen, dass eine Resonanz auftritt und welche Teilchen aus der Resonanz stammen. Die Position der Linie lässt unmittelbar Aufschluss über die Masse der Resonanz zu.

5.2 Interferenzen

Das Vorzeichen der Kopplungskonstante h lässt sich mit unserer Rechnung nicht bestimmen. Modellbetrachtungen in [7] und [8] deuten auf $h < 0$ hin [9], im weiteren werden wir allerdings beide Möglichkeiten in Betracht ziehen. Dies hat Konsequenzen, da mehrere Zerfallskanäle auftreten, die zum gleichen Endzustand führen. In diesem Falle müssen Interferenzeffekte zwischen den Zerfallskanälen berücksichtigt werden. Könnten die Zerfallsbreiten der einzelnen Kanäle einfach addiert werden ($\Gamma_+ = \sum \Gamma_i$), so wäre dies äquivalent zu einer Addition der Betragsquadrate der einzelnen Übergangselemente.

$$|M_+|^2 = \sum |M_i|^2 \quad (81)$$

Diese Rechnung berücksichtigt jedoch keine Interferenzterme, eine korrekte Rechnung hingegen führt mit

$$M_c = \sum M_i \quad |M_c|^2 = \left| \sum M_i \right|^2 \quad (82)$$

auf eine korrekte Zerfallsbreite Γ_c . In unserem Fall gibt es drei Zerfallskanäle, mit denen man das Betragsquadrat explizit ausschreiben kann:

$$\begin{aligned} |M_c|^2 &= |M_1 + M_2 + M_3|^2 \\ &= |M_+|^2 + 2\text{Re}[M_1^*M_2 + M_2^*M_3 + M_3^*M_1] \end{aligned} \quad (83)$$

Im Vergleich zur simplen Addition der Zerfallsbreiten tritt also ein zusätzlicher Interferenzterm auf. Es stellt sich nun die Frage, ob dieser vernachlässigt werden kann. Dazu berechnen wir die relative Größe des Interferenzterms

$$R := \frac{\Gamma_c - \Gamma_+}{\Gamma_+} \quad (84)$$

Aus der Unsicherheit bezüglich des Vorzeichens der Kopplungskonstante folgt, dass wir keine Aussage treffen können, ob ein Fall konstruktiver oder destruktiver Interferenz vorliegt. Die Dalitz-Plots der verschiedenen Fälle sind in den Abbildungen 8 und 9 dargestellt. Für die Zerfallsbreiten erhalten wir bei einer numerischen Auswertung ähnliche Werte für die Zerfallsbreiten bei beiden Glueballs (Tabelle 2).

Der relative Fehler durch Vernachlässigung des Interferenzterms ist beim leichteren Glueball wesentlich größer als beim schweren. Dies lässt sich durch die Lage der Resonanz einfach erklären: Das skalare Kaon K_S^0 hat eine Masse von 1.43 GeV, was ungefähr der Hälfte der Glueballmassen entspricht. Stimmt die Glueballmasse mit einem bestimmten Wert m_G^* überein, so können sich die konstruktive und destruktive Interferenz ober- und unterhalb der Resonanzmasse wegheben. Dieser Punkt liegt in der Nähe, aufgrund der unsymmetrischen kinematischen Faktoren jedoch

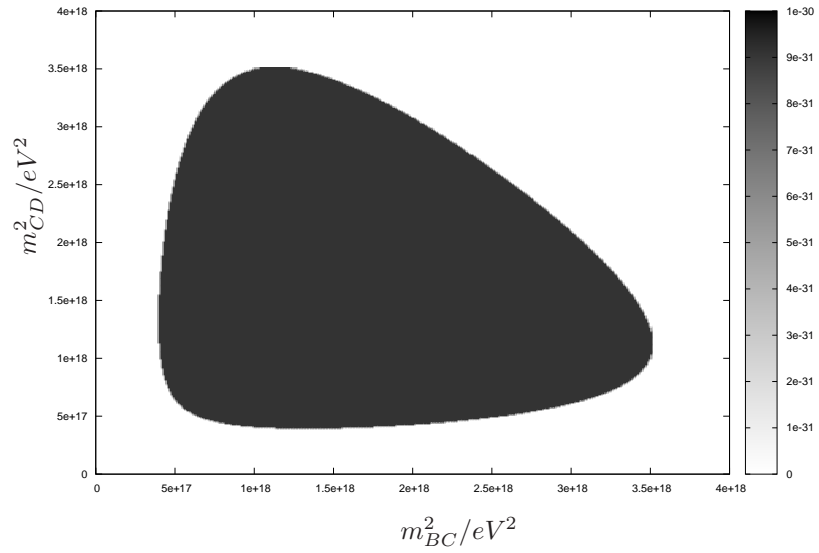
	Matrixelement	$G_{2.37}$	$G_{2.6}$
Γ_1	$ M_1 ^2$	6.49 MeV	8.08 MeV
Γ_2	$ M_2 ^2$	0.43 MeV	0.47 MeV
Γ_+	$ M_1 ^2 + M_2 ^2 + M_3 ^2$	7.34 MeV	9.02 MeV
$\Gamma_c (h > 0)$	$ M_1 + M_2 + M_3 ^2$	8.79 MeV	9.68 MeV
$\Gamma_c (h < 0)$	$ M_1 + M_2 + M_3 ^2$	6.41 MeV	8.82 MeV
$R (h > 0)$		0.20	0.07
$R (h < 0)$		-0.12	-0.02

Tabelle 2: Die Zerfallsbreiten der Glueballs in den Endzustand $K^0 \bar{K}^0 \pi^0$ bei Berücksichtigung verschiedener Zerfallskanäle

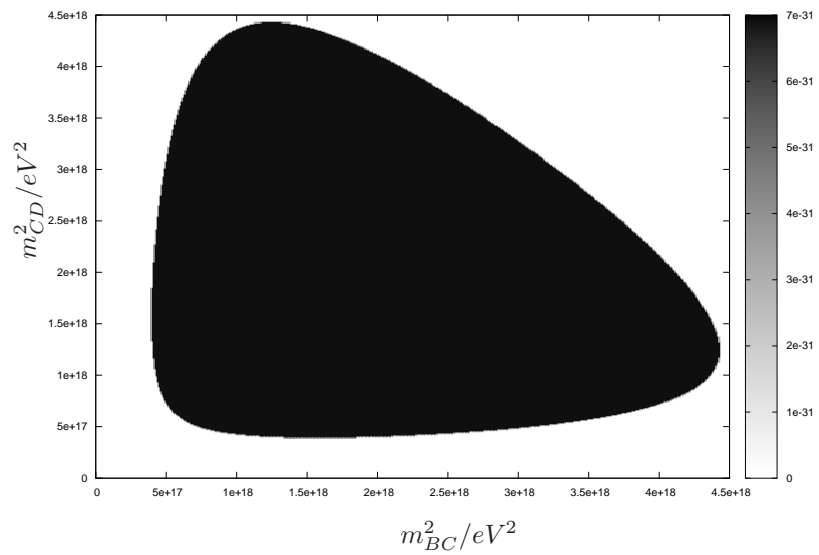
nicht genau bei der doppelten Resonanzmasse. Eine numerische Betrachtung zeigt, dass der Interferenzterm ungefähr bei

$$m_G^* = \begin{cases} 2.83 \text{ GeV} & h > 0 \\ 2.67 \text{ GeV} & h < 0 \end{cases} \quad (85)$$

verschwindet (vgl. Abbildung 10).

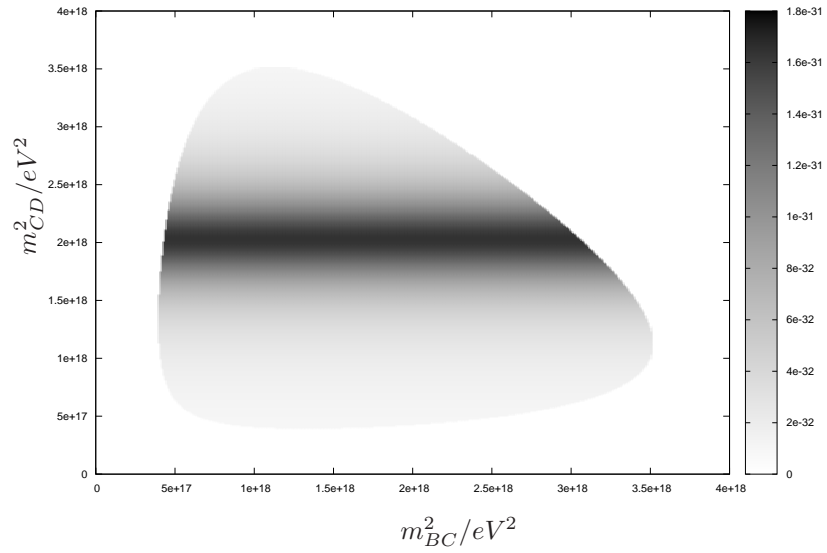


(a) $m_G = 2.37$ GeV

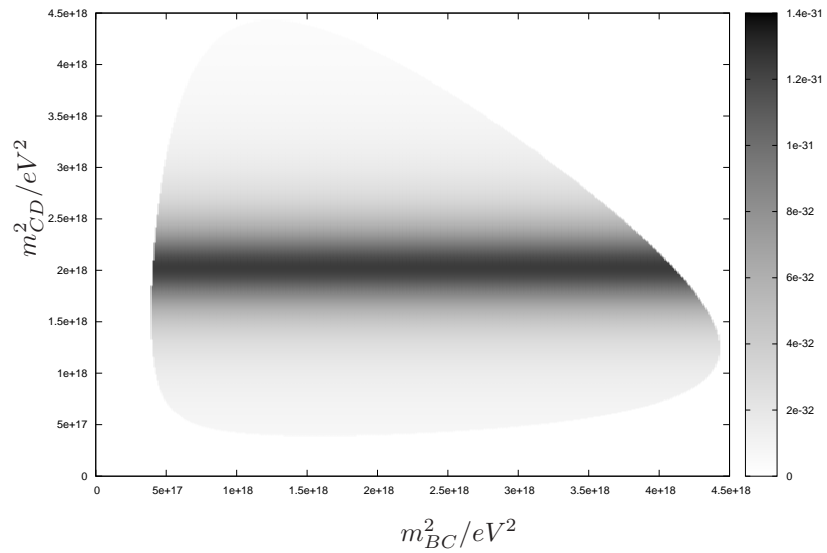


(b) $m_G = 2.6$ GeV

Abbildung 5: Dalitz-Plots für den direkten Zerfall unter der Annahme, dass keine Interferenzen auftreten.

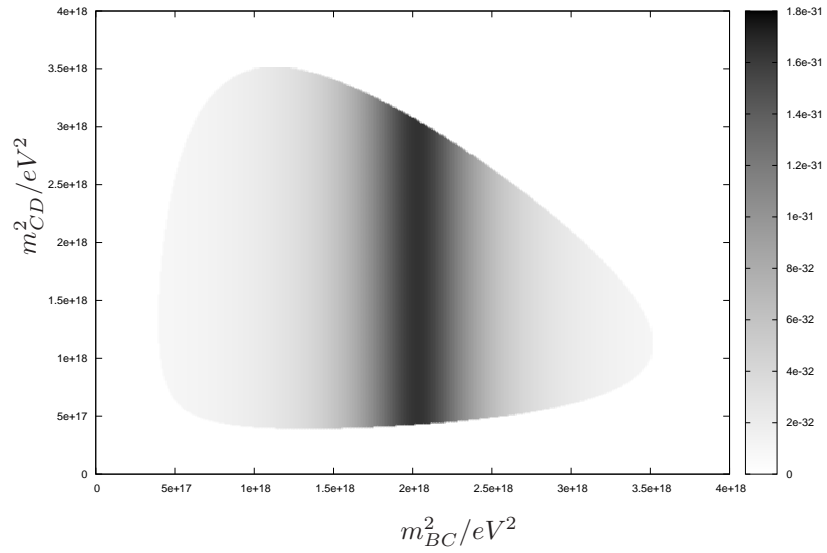


(a) $m_G = 2.37$ GeV

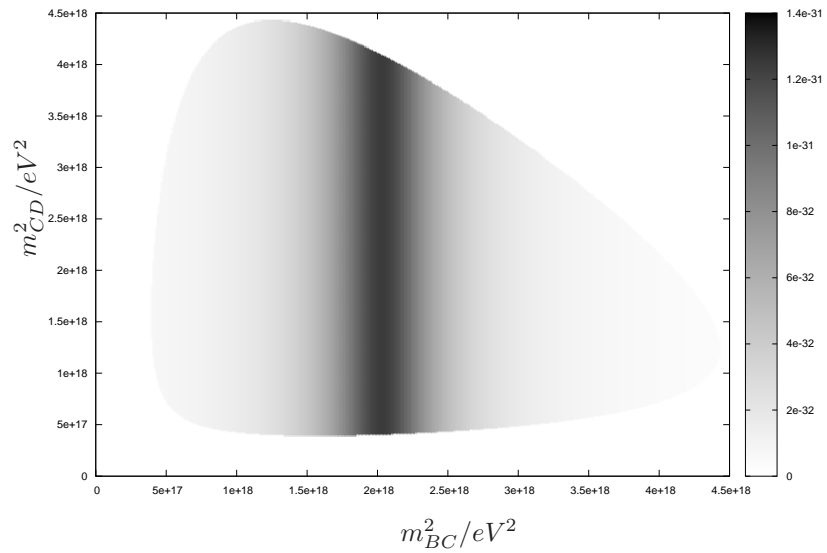


(b) $m_G = 2.6$ GeV

Abbildung 6: Dalitz-Plots für den indirekten Zerfall über K_S^0 unter der Annahme, dass keine Interferenzen auftreten.

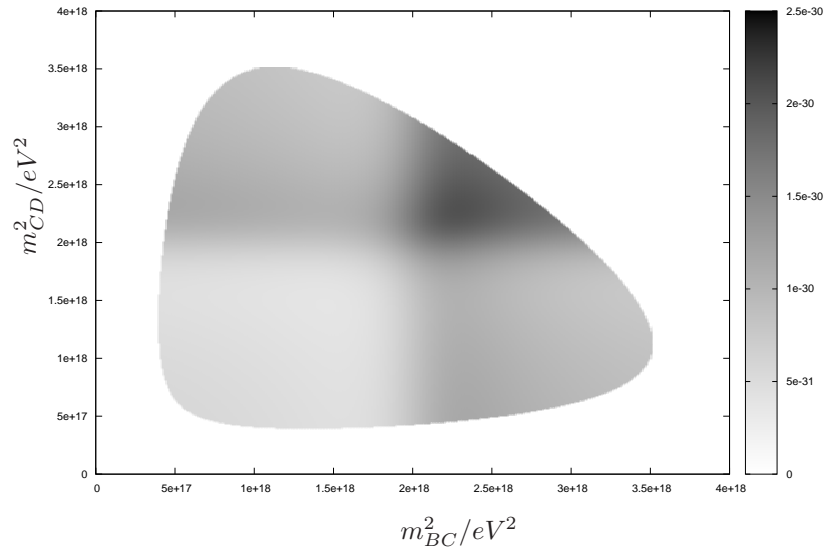


(a) $m_G = 2.37$ GeV

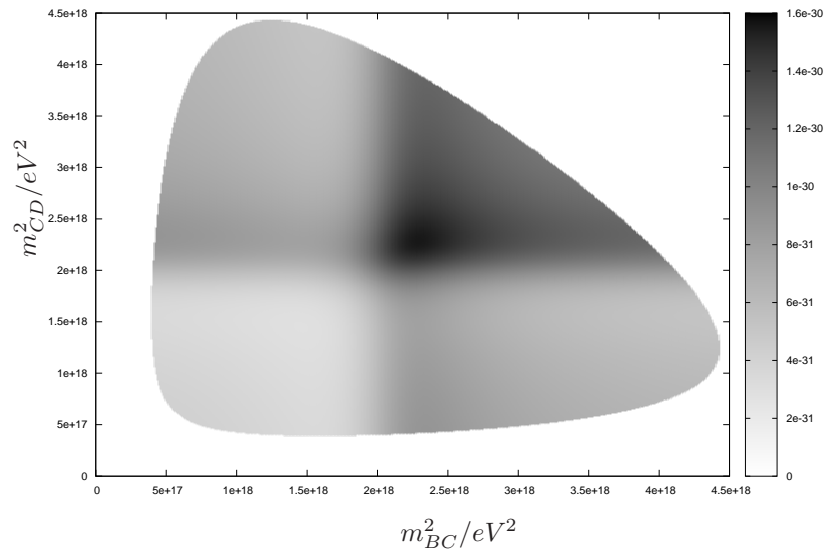


(b) $m_G = 2.6$ GeV

Abbildung 7: Dalitz-Plots für den indirekten Zerfall über \bar{K}_S^0 unter der Annahme, dass keine Interferenzen auftreten.

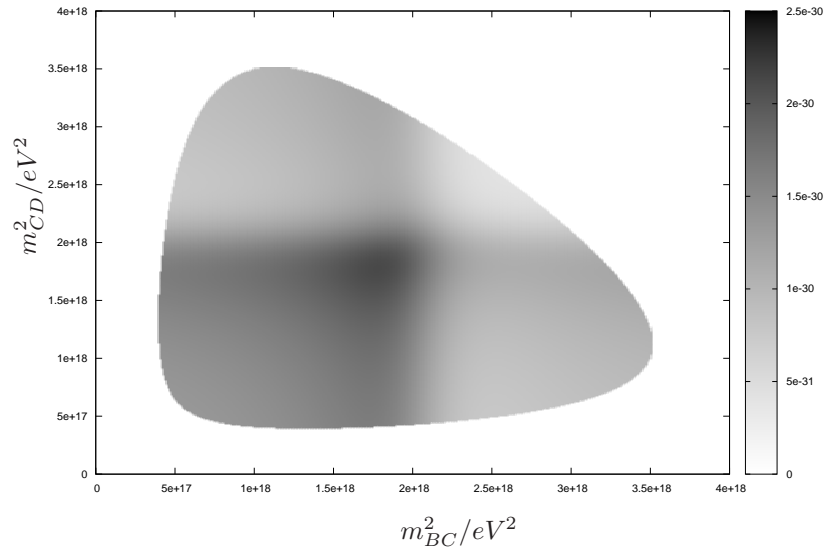


(a) $m_G = 2.37$ MeV

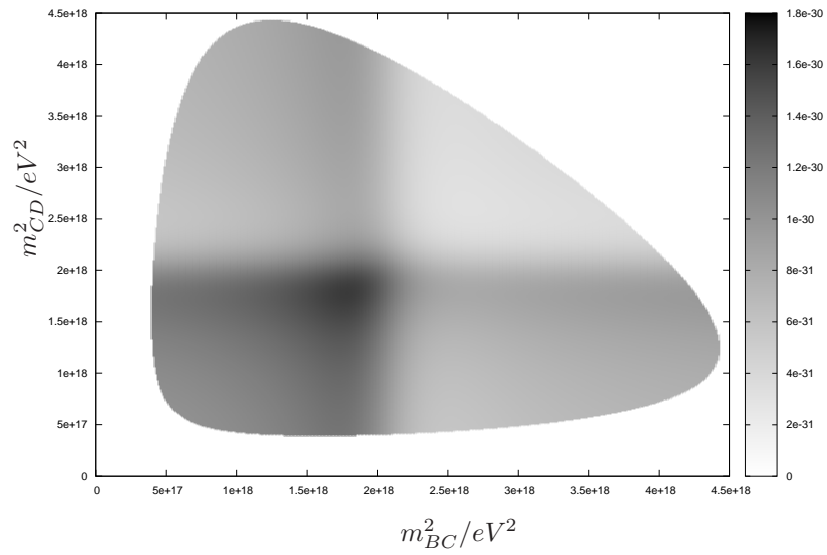


(b) $m_G = 2.6$ MeV

Abbildung 8: Dalitz-Plots des Glueballzerfalls unter Berücksichtigung der Interferenz mit $h < 0$

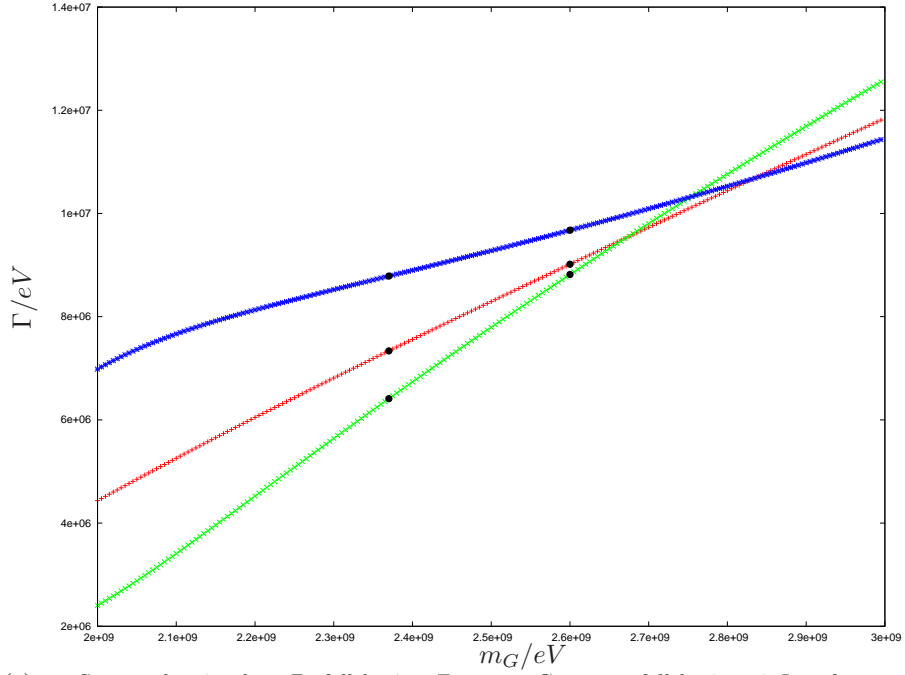


(a) $m_G = 2.37$ MeV

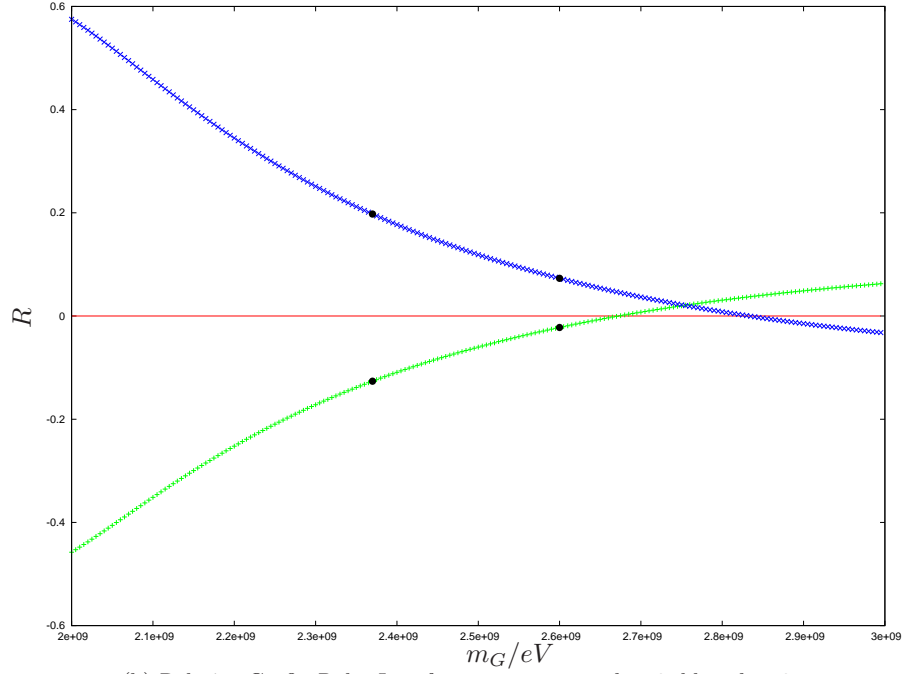


(b) $m_G = 2.6$ MeV

Abbildung 9: Dalitz-Plots des Glueballzerfalls unter Berücksichtigung der Interferenz mit $h > 0$



(a) rot: Summe der einzelnen Zerfallsbreiten Γ_+ , grün: Gesamtzerfallsbreite mit Interferenzen Γ_c für $h < 0$, blau: Gesamtzerfallsbreite mit Interferenzen Γ_c für $h > 0$



(b) Relative Größe R des Interferenzterms; grün: $h < 0$, blau: $h > 0$

Abbildung 10: Unterschiedliche Zerfallsbreiten in Abhängigkeit von der Glueballmasse m_G : Markiert sind jeweils die Massen $m_G = 2.37$ GeV und $m_G = 2.60$ GeV. Der integrierte Interferenzterm verschwindet bei $m_G^* \approx 2.83$ GeV ($h > 0$) bzw. $m_G^* \approx 2.67$ GeV ($h < 0$).

6 Fazit und Ausblick

Nachdem wir die Zerfallsbreite für direkte und indirekte Zerfälle berechnet haben, hat sich herausgestellt, dass die Lorenz-invariante Zerfallsbreite für die Analyse von Dreikörperzerfällen unnötige kinematische Faktoren beinhaltet.

Der Dalitz-Plot hingegen hat keine zusätzlichen kinematischen Faktoren, sämtliche Veränderungen innerhalb des kinematisch erlaubten Bereiches sind allein auf die Wechselwirkung der Teilchen zurückzuführen. Außerdem bewirkt die spezielle funktionale Abhängigkeit im Dalitz-Plot, dass spinlose Resonanzen leicht erkannt und ihre Massen direkt aus dem Plot abgelesen werden können.

Für die betrachteten pseudoskalaren Glueballs hat sich herausgestellt, dass mehrere Zerfallskanäle zum gleichen Endzustand führen, weshalb Interferenzeffekte auftreten. Diese Interferenzeffekte erreichen eine Größenordnung, die ihre Beachtung bei der Berechnung der Gesamtzerfallsbreite verlangt.

Klarheit über die Korrektheit der Rechnungen werden zukünftige Experimente wie das PANDA-Experiment in Darmstadt [10] bringen.

A Der Feynman-Propagator

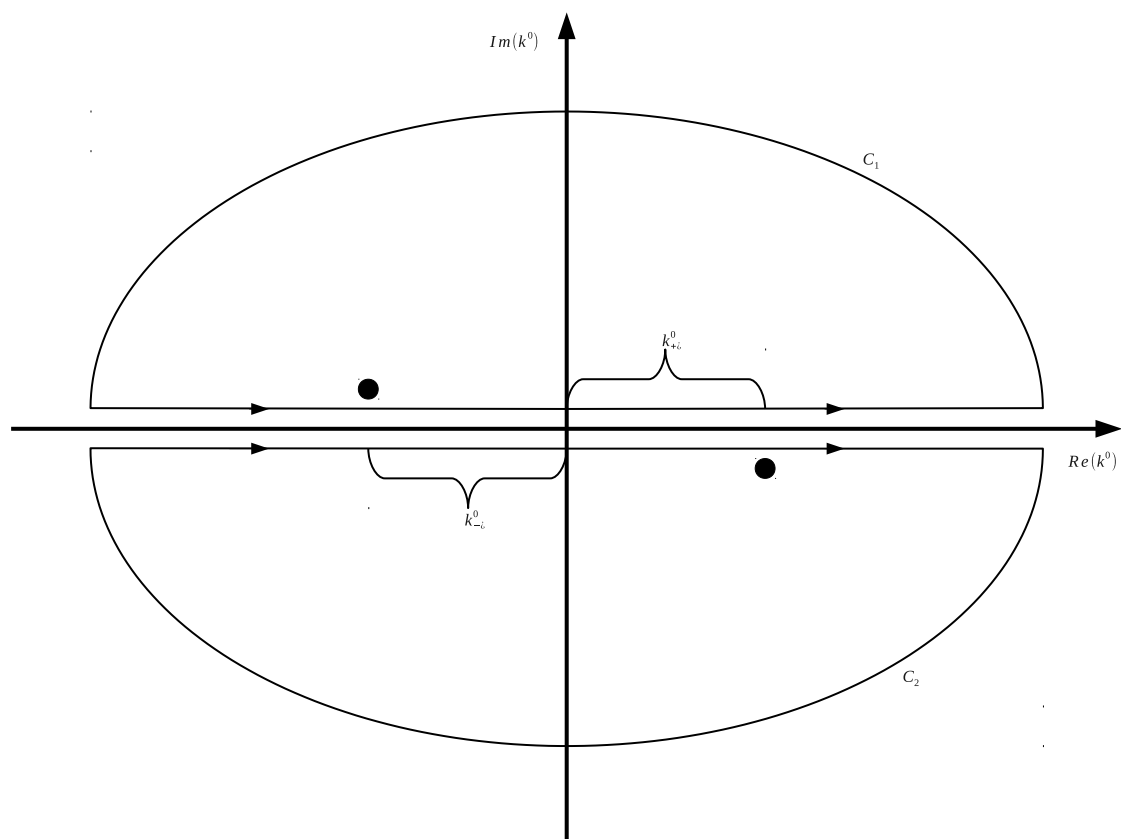


Abbildung 11: Für die beiden Fälle $x^0 > x'^0$ und $x'^0 > x^0$ werden die unterschiedlichen Integrationswege C_1 und C_2 gewählt. Durch die Verschiebung der Pole befindet sich jeweils genau ein Pol innerhalb der Integrationskontur.

Gleichung (27) lässt sich mithilfe des Residuensatzes

$$\int_C f(x) = 2\pi i \sum_i \text{Res}[f](x_i) \chi_C(x_i), \quad (\text{A1})$$

bequem beweisen, wobei $\text{Res}[f](x)$ das Residuum der Funktion f an der Stelle x und $\chi_C(x)$ die Anzahl der Windungen der Kurve C um den Punkt x ist. Die Funktion

$$\begin{aligned} f(k^0) &= \frac{e^{ik_S(x-x')}}{k_s^2 - m_s^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{e^{ik_S(x-x')}}{k_S^{02} - E_s^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

besitzt die zwei Pole erster Ordnung

$$k_{\pm}^0 = \pm \sqrt{E_s^2 - i\epsilon}. \quad (\text{A3})$$

Betrachten wir zunächst den Fall $x^0 > x'^0$. Hier können wir als Integrationsweg C_1 wählen. Es gilt

$$x^0 < x'^0 \Rightarrow \lim_{k_s^0 \rightarrow +i\infty} e^{ik_S(x-x')} = 0, \quad (\text{A4})$$

der Halbkreis trägt folglich nicht zum Wert des Kurvenintegrals bei. Es gilt also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(k^0) = \int_{C_1} f(k^0). \quad (\text{A5})$$

Die Kurve C_1 schließt nur den linken Pol ein, deshalb gilt

$$\begin{aligned} \int_{C_1} &= 2\pi i \left[(k_S^0 - k_-^0) \frac{e^{ik_S(x-x')}}{(k_S^0 - k_-^0)(k_S^0 - k_+^0)} \right]_{k_S^0 = k_-^0} \\ &= 2\pi i \frac{e^{ik_S(x-x')}}{2k_-^0} \Big|_{k_S^0 = k_-^0} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

$$= -2\pi i \frac{e^{ik_-^0(x^0-x'^0) - i\vec{k}_S(\vec{x}-\vec{x}')}}{2k_+^0}. \quad (\text{A7})$$

Eine analoge Betrachtung für $x^0 < x'^0$ führt auf

$$\begin{aligned} \int_{C_2} &= -2\pi i \left[(k_S^0 - k_+^0) \frac{e^{ik_S(x-x')}}{(k_S^0 - k_-^0)(k_S^0 - k_+^0)} \right]_{k_S^0 = k_+^0} \\ &= -2\pi i \frac{e^{ik_+^0(x^0-x'^0) - i\vec{k}_S(\vec{x}-\vec{x}')}}{2k_+^0}, \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

wobei das negative Vorzeichen in der ersten Zeile aus dem mathematisch negativen Umlaufsinn von C_2 um den Pol folgt.

Wir setzen nun (A7) und (A8) zusammen und führen den Limes $\epsilon \rightarrow 0$ aus:

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_S^0 \frac{e^{ik_S(x-x')}}{k_S^2 - m_S^2 + i\epsilon} \\ &= -2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\theta(x^0 - x'^0) \frac{e^{ik_-^0(x^0-x'^0) - i\vec{k}_S(\vec{x}-\vec{x}')}}{2k_+^0} + \theta(x'^0 - x^0) \frac{e^{ik_+^0(x^0-x'^0) - i\vec{k}_S(\vec{x}-\vec{x}')}}{2k_+^0} \right] \\ &= -2\pi i \frac{1}{2E_S} \left[\theta(x^0 - x'^0) e^{-iE_S(x^0-x'^0) - i\vec{k}_S(\vec{x}-\vec{x}')} + \theta(x'^0 - x^0) e^{iE_S(x^0-x'^0) - i\vec{k}_S(\vec{x}-\vec{x}')} \right] \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

Führen wir nun noch die Integration über \vec{k}_S aus, so lässt sich im ersten Summanden $\vec{k}_S \rightarrow -\vec{k}_S$ substituieren:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^3\vec{k}_S \int dk_S^0 \frac{e^{ik_S(x-x')}}{k_S^2 - m_S^2 + i\epsilon} = -2\pi i \frac{1}{2E_S} \left[\theta(x^0 - x'^0) e^{-ik_S(x-x')} + \theta(x'^0 - x^0) e^{ik_S(x-x')} \right] \quad (\text{A10})$$

B Zweikörperzerfall

Der Zweikörperzerfall kann weitgehend analog zum Dreikörperzerfall beschrieben werden. Der fundamentale Unterschied besteht darin, dass bei einem Zweikörperzerfall – bis auf eine Rotation des Gesamtsystems – sämtliche kinematischen Größen aufgrund der Energie- und Impulserhaltung festgelegt sind. Wir verwenden hier einen Lagrangian

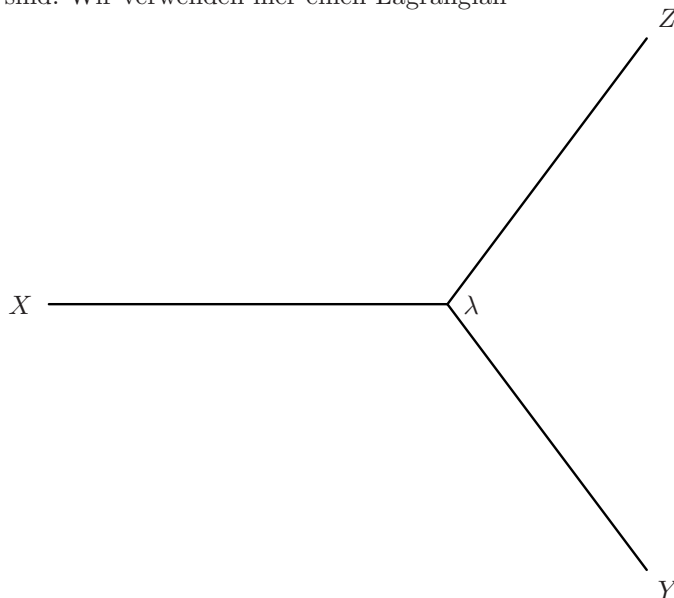


Abbildung 12: Zweikörperzerfall $X \rightarrow YZ$

$$\mathcal{L} = -\lambda XYZ, \quad (\text{B1})$$

der uns analog zu Gleichung (18) auf das Matrixelement

$$S_{fi} = -i\lambda \frac{1}{V^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_x E_y E_z}} \int d^4x e^{i(-p_x + p_y + p_z)x} \quad (\text{B2})$$

und die Zerfallsbreite

$$\Gamma = \iint \lambda^2 \frac{1}{8\tau^2} \frac{\delta^{(4)}(p_x - p_y - p_z)}{E_x E_y E_z} d^3\vec{p}_y d^3\vec{p}_z \quad (\text{B3})$$

führt. Wechseln wir wieder in das Ruhesystem des zerfallenden Teilchens und integrieren über \vec{p}_z , so erhalten wir mit der Definition $E = m_x - E_y - E_z$

$$\Gamma = \int \lambda^2 \frac{1}{8\tau^2} \frac{\delta(E)}{m_x E_y E_z} d^3\vec{p}_y. \quad (\text{B4})$$

Das Argument der Delta-Distribution hat eine Nullstelle bei $|\vec{p}_Y| = p_f$ mit

$$p_f = \sqrt{\frac{m_x}{4} + \left(\frac{m_z^2 - m_y^2}{2m_x}\right)^2 - \frac{m_y^2 + m_z^2}{2}}$$

$$\left. \frac{dE}{d|\vec{p}_Y|} \right|_{E=0} = -|\vec{p}_Y| \left. \frac{E_y + E_z}{E_y E_z} \right|_{E=0} = -p_f \frac{m_x}{E_y E_z}. \quad (\text{B5})$$

Einsetzen in (B4) und Transformation zu Kugelkoordinaten ergibt

$$\Gamma = \int \lambda^2 \frac{1}{8\tau^2} \frac{\delta(|\vec{p}_Y| - p_f)}{m_x E_y E_z} \frac{E_y E_z}{p_f m_x} d\Omega_y |\vec{p}_Y|^2 d|\vec{p}_Y| \quad (\text{B6})$$

$$= \lambda^2 \frac{1}{4\tau} \frac{1}{m_x^2} p_f. \quad (\text{B7})$$

Literatur

- [1] W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics* (Springer, 2008).
- [2] F. Giacosa and G. Pagliara, Phys. Rev. C **76**, 065204 (2007).
- [3] C. Morningstar and M. J. Peardon, AIP Conf.Proc. **688**, 220 (2004), nucl-th/0309068.
- [4] BESIII Collaboration, M. Ablikim *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 072002 (2011).
- [5] W. I. Eshraim, S. Janowski, F. Giacosa, and D. H. Rischke, (2012), 1208.6474.
- [6] Particle Data Group, J. Beringer *et al.*, Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012).
- [7] D. Parganlija, *Quarkonium Phenomenology in Vacuum*, PhD thesis, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2011.
- [8] D. Parganlija, P. Kovacs, G. Wolf, F. Giacosa, and D. H. Rischke, (2012), 1208.0585.
- [9] W. I. Eshraim, S. Janowski, A. Peters, K. Neuschwander, and F. Giacosa, (2012), 1209.3976.
- [10] PANDA Collaboration, M. Lutz *et al.*, (2009), 0903.3905.