

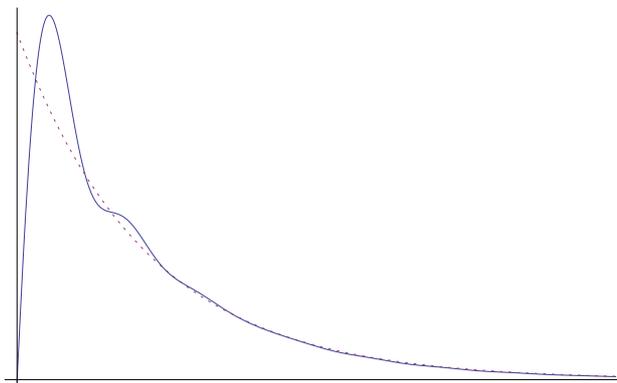
BACHELORARBEIT IN PHYSIK

Abweichungen vom exponentiellen
Zerfall in der Quantenmechanik

Aufgesetzte Oszillationen und der Quanten-Zeno-Effekt im
Zerfallsgesetz. Eine theoretische Erklärung der GSI Anomalie?

Tobias Schäfer

Oktober 2012



Abweichungen vom exponentiellen Zerfall in der Quantenmechanik

1. Gutachter: Prof. Dirk Rischke

Institut für Theoretische Physik - Goethe Universität Frankfurt

2. Gutachter: Dr. Francesco Giacosa

Institut für Theoretische Physik - Goethe Universität Frankfurt

Angefertigt in den Räumen der Arbeitsgruppe von Prof. Caslav Brukner

Quantum Optics, Quantum Nanophysics, Quantum Information -

Universität Wien

Bachelorarbeit von Tobias Schäfer

Tag der Einreichung: 05. Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

1. Historische Einleitung und Motivation	5
I. Philosophische Einleitung	7
2. Theoretische Herangehensweise und mathematische Exaktheit	9
3. Was ist ein Teilchen?	9
4. Die offene Frage: Der Messprozess in der Quantenmechanik	10
5. Zenon der Eleat	11
II. Abweichungen vom exponentiellen Zerfallsgesetz	15
6. Quantenmechanik instabiler Systeme, Überlebenswahrscheinlichkeiten	17
6.1. Das empirische exponentielle Zerfallsgesetz	17
6.2. Übergang zur Quantenmechanik	17
6.3. Definitionen und die Bestimmungsgleichung des Zerfallsgesetzes $p(t)$	18
6.4. Die Energiedichte d_S	21
6.5. Zerfallsprodukte verhindern exponentielles Zerfallsgesetz	22
6.6. Verhalten von $p(t)$ für kleine Zeiten	24
6.7. Verhalten von $p(t)$ für große Zeiten	25
6.8. Das exponentielle Zerfallsgesetz als Näherung von $p(t)$	26
6.9. Stetigkeit von $p(t)$ in d_S	27
6.10. Welche Energiedichten d_S führen auf ein exponentielles Zerfallsgesetz?	28
6.11. Gemessener nicht-exponentieller Zerfall durch den Tunneleffekt	31
6.12. GSI-Anomalie: Gemessene Oszillationen im Zerfallsgesetz	31
6.13. Der Fall frequenter Messungen	35
7. Quanten-Zeno-Paradoxon und Quanten-Zeno-Effekt	37
7.1. Das Quanten-Zeno-Paradoxon: Einfrieren der Zeitentwicklung	37
7.2. Interpretation des Quanten-Zeno-Paradoxons	38
7.3. Quanten-Zeno-Paradoxon und Energie-Zeit-Unschärfe	38
7.4. Zeno Regime und Heraklit Regime	40
7.5. Experimenteller Nachweis	41
8. Teilchenzerfall in zwei Kanäle: Modell mit Lee-Hamiltonian	45
8.1. Der Lee-Hamiltonian	45
8.2. Die Energiedichte des instabilen Teilchens	47
8.3. Wahrscheinlichkeit für den Zerfall in einen Kanal	49
8.4. Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten und Definitionen der Zerfallsraten	50
8.5. Grenzfall: exponentieller Zerfall in zwei Kanäle als Vergleich	50
8.6. Algorithmus zur numerischen Berechnung der Wahrscheinlichkeiten	51
9. Numerische Ergebnisse des Lee-Modells	53
10. Fazit und Ausblick	64
A. Mathematica Code	66

1. Historische Einleitung und Motivation

Die Analyse der Überlebenswahrscheinlichkeit von Quantenzuständen war schon in den frühen Jahren der Quantenmechanik ein bekannter, wenn auch kleiner Forschungsgegenstand. So stammt beispielsweise die älteste, in dieser Arbeit zitierte Veröffentlichung von den sowjetischen Physikern H. Krylov und B. Fock [18] aus dem Jahre 1947.

Es wurde schon von Beginn an erkannt, dass die mathematische Funktion der Überlebenswahrscheinlichkeit eines Quantenzustandes in Abhängigkeit der Zeit, welche durch die Schrödingergleichung determiniert wird, keine exponentiell abfallende Form annehmen kann. Es bestand allerdings Unklarheit darüber, in wie weit diese theoretischen Ergebnisse mit experimentell gemessenen Überlebenswahrscheinlichkeiten instabiler Teilchen verglichen werden kann (z.B. beim Zerfall von Uran). Denn die empirisch gewonnenen Überlebenswahrscheinlichkeiten konnten bestens mit einer exponentiell abfallenden Funktion gefittet werden (1902 entdeckt von E. Rutherford und F. Soddy [1]). Die (bis heute) unbefriedigende Beschreibung des Messprozesses in der Quantenmechanik kann als Ursache für diese Unklarheit angesehen werden. Denn die Wechselwirkung eines Systems mit seiner Umgebung hat Einfluss auf den Quantenzustand, wird aber in den meisten Idealisierungen vernachlässigt. Darauf wiesen z.B. J. Rau [21] 1963 und A. Beskow und J. Nilsson [2] 1967 hin.

Im Jahr 1974 beseitigten A. Degasperis, L. Fonda und G. Ghirardi diese Unklarheit in ihrer Veröffentlichung *Does the Lifetime of an Unstable System Depend on the Measuring Apparatus?* [3]. Dort zeigen sie, dass ein Quantensystem einem exponentiellen Zerfallsgesetz folgt, wenn es frequenten Messungen ausgesetzt ist (als Beispiel verwenden sie ein instabiles Teilchen in der Blaskammer) und dass die Lebensdauer von der Frequenz der Messungen abhängt. Insofern hängt die Lebensdauer in der Quantenmechanik vom Beobachter ab und ist keine Eigenschaft des instabilen Systems selbst. Außerdem beschreiben sie sogar ein theoretisches Phänomen, welches später von B. Misra und E. Sudarshan *Quanten-Zeno-Paradoxon* [9] genannt wurde und kommen diesen damit zuvor (dies wird in der Literatur jedoch nicht gewürdigt). Nach diesem Phänomen ließe sich ein instabiler Quantenzustand durch kontinuierliche Beobachtung in einen stabilen Zustand verwandeln, wobei dessen Zeitentwicklung „eingefroren“ wird. In der abgeschwächten Variante (*Quanten-Zeno-Effekt*) biete eine Erhöhung der Messfrequenz eine Verlängerung der Lebensdauer. In wie weit es sich hierbei nur um theoretisch, mathematische Argumente handelt oder ob sie verwirklicht werden können, wird in dieser Bachelorarbeit diskutiert.

Die Erkenntnis von Degasperis, Fonda und Ghirardi [3] über den exponentiellen und nicht-exponentiellen Zerfall von Quantenzuständen kann scheinbar bis heute nicht als wohlbekannt bezeichnet werden. So fragt z.B. 1980 der bekannte Physiker A. Peres in der Veröffentlichung *Nonexponential Decay Law* [6] erneut: „*The real question is why is it valid at all (with good experimental accuracy) for most unstable atoms and nuclei, with only very few exceptions?*“ Und sogar aus dem Jahr 2006 lässt sich eine Veröffentlichung [13] finden, in welcher der Zerfall von Gold (^{198}Au) erfolglos auf Abweichungen von einer exponentiellen Form untersucht wird, ohne darauf zu achten, dass das Experiment nicht den Fall erfüllt, für den Degasperis, Fonda und Ghirardi gerade den exponentiellen Zerfall vorhersagen.

Die bis heute ausführlichste und tiefgründigste Analyse des Zerfalls instabiler Systeme in der Quantenmechanik gelang 1978 den Italienern L. Fonda, G. Ghirardi und A. Rimini in ihrem Review *Decay theory of unstable quantum systems* [24]. Fast alle Untersuchungen beschränkten sich aber auf die wenigen zugänglichen analytischen Ansätze (Existenz von Abweichungen zum exponentiellen Zerfall, Verhalten für kleine und große Zeiten, etc.), sodass kaum konkrete Überlebenswahrscheinlichkeiten berechnet werden konnten, geschweige denn quantenmechanische Modelle für den Teilchenzerfall vorgestellt wurden.

Die Überlebenswahrscheinlichkeit eines unbeobachteten Systems steht in dieser Bachelorarbeit im Vordergrund. Die Existenz der Abweichungen von einem exponentiellen Verlauf stand (wie beschrieben) schon sehr früh fest, jedoch nicht wie diese Abweichungen genau aussehen. Etwas mehr Aufmerksamkeit erfuhr diese Tatsache, als 2008 Daten von einem Experiment an der GSI in Darmstadt veröffentlicht wurde, welche Oszillationen in den Zerfallsraten von ^{140}Pr und ^{142}Pm durch Elektroneneinfang aufwiesen. Welche Ursache diese Oszillationen haben ist bis heute nicht geklärt. In dieser Arbeit wird ein quantenmechanisches, nicht-relativistisches Modell zur Beschreibung eines Teilchenzerfalls in zwei Kanäle vorgestellt. Mit diesem konnte die Überlebenswahrscheinlichkeit eines instabilen Teilchens und die Entstehungswahrscheinlichkeiten der Tochterteilchen berechnet werden. Es stellte sich heraus, dass Oszillationen im Zerfallsgesetz ein normaler quantenmechanischer Effekt sind.

Nach Auffassung des Autors wurde dies noch nicht zuvor berechnet. Die Idee hierfür stammt von Francesco Giacosa, in dessen Veröffentlichung [14] dieses Modell im Rahmen der Quantenfeldtheorie vorgestellt wird.

Gliederung

Die Arbeit ist in zwei Teile gegliedert. Der erste Teil behandelt einige naturphilosophische und mathematische Probleme. Es wird außerdem das Pfeil-Paradoxon von Zeno vorgestellt, auf dem die moderne Variante des Quanten-Zeno-Paradoxons basiert.

Im zweiten Teil wird zunächst eine allgemeine Analyse des Zerfallsgesetzes instabiler Quantensysteme gegeben. Es ist eine Mischung aus Zusammenfassungen von Reviews und neuen Ideen. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Wellenfunktion in Energiedarstellung bzw. deren Betragsquadrat, genannt Energiedichte. Es wird auch auf den Fall eingegangen, wenn ein Quantensystem wiederholten (frequenten) Messungen ausgesetzt ist. Anschließend wird der Quanten-Zeno-Effekt und das Quanten-Zeno-Paradoxon als Folge des Verhaltens der Überlebenswahrscheinlichkeit für Zeiten kurz nach der Zustandspräparation beschrieben.

Danach wird das Lee-Modell zur Beschreibung eines Teilchenzerfalls vorgestellt. Das Modell beschreibt den Zerfall eines instabilen Teilchens in zwei mögliche Kanäle, d.h. entweder in (genannt) a -Teilchen oder b -Teilchen. Es werden alle wichtigen Funktionen (Zerfallsgesetz, Energiedichte, etc.) analytisch hergeleitet.

Es folgen darauf die Ergebnisse der numerischen Auswertung.

Teil I.
Philosophische Einleitung

2. Theoretische Herangehensweise und mathematische Exaktheit

In dieser Arbeit werden die beschriebenen Themen vom Standpunkt der Theoretischen Physik behandelt. Dabei stellt sich immer die Frage, wie genau (bzw. mathematisch exakt) neue Wege begangen oder alte Wege beschrieben werden. So wird beispielsweise in Abschnitt 8.2 die Energiedichte eines instabilen Teilchens im Rahmen des Lee-Modells hergeleitet. Es ist dabei aus physikalischen Gründen zwingend, dass diese Energiedichte eine untere Schranke besitzt. Zu beweisen, dass dies in diesem Modell immer der Fall ist bzw. welche Voraussetzungen dafür erfüllt sein müssen, erwies sich allerdings als zu schwierig. Stattdessen wird einfach überprüft, ob die Energiedichten, welche sich aus der konkreten numerischen Berechnung ergaben, eine optisch sichtbare untere Schranke besitzen. Dies ist natürlich ein deutlich schwächerer Grad an Genauigkeit, aber dennoch angemessen. Denn eine zu starke Fixierung auf mathematische Exaktheit wirkt in der Physik bei dem Ausprobieren neuer Wege oft hemmend (als Beispiel hierfür kann der bekanntermaßen lockere Umgang mit der Mathematik in den Anfangsjahren der Quantenmechanik herangezogen werden).

3. Was ist ein Teilchen?

Bei einer theoretischen Herangehensweise muss klar sein, dass eine physikalische Theorie immer aus den drei Komponenten

- *mathematischer Formalismus*,
- *physikalisches Konzept*,
- *Abbildung* zwischen mathematischen Objekten und physikalischen Konzepten

besteht. Gerade in der Quantenmechanik sind diese drei Komponenten nicht einfach zu formulieren. Das äußert sich z.B. auch in der Frage, was ein Teilchen ist? Denn für ein solches (hier instabiles Teilchen) soll ein quantenmechanisches Modell vorgestellt werden, das den Teilchenzerfall beschreibt. Der Schlüssel liegt in der Antwort auf die Frage, was mit quantenmechanischem Modell gemeint ist.

Hier ist damit gemeint, dass die Frage nach dem Überleben eines instabilen Teilchens (*physikalisches Konzept*, dynamische Variable) durch den Eigenwert eines linearen Operators repräsentiert wird (*Abbildung*). Die zeitliche Entwicklung wird durch die Dynamik der Quantenzustände, welche durch die Schrödingergleichung determiniert wird, berechnet (*mathematischer Formalismus*).

Was ein Teilchen ist, bleibt damit völlig offen. Stattdessen wird ein Teilchen in diesem Modell als ganz konkreter Quantenzustand definiert. D.h. die ontologische Frage nach dem Teilchen darf eigentlich gar nicht gestellt werden, bzw. kann nicht im ontologischen Sinne beantwortet werden. Im Gegenteil, es wird eher (mehr oder weniger willkürlich) festgelegt, dass ein Teilchen (*physikalisches Konzept*) durch einen Quantenzustand (*Abbildung*)

repräsentiert wird. Gerade diese Assoziationen (d.h. die *Abbildung* zwischen mathematischen Objekten und physikalischen Konzepten) ist in der Quantenmechanik problematisch, da sie allein auf Intuition oder Analogien beruht und oft alles andere als (logisch) zwingend ist. Das Fazit dieser Arbeit bietet allerdings eine gute Rechtfertigung dieser hier vorgenommenen Abbildung zwischen Teilchen und Quantenzustand.

4. Die offene Frage: Der Messprozess in der Quantenmechanik

Eine Schwierigkeit bei der Entwicklung und Interpretation der Quantenmechanik, Anfang des letzten Jahrhunderts, bestand darin, den Begriff von der Anschauung einer Teilchentrajektorie oder von einer scharf messbaren (und gewohnten) Eigenschaft wie Energie oder Impuls aufzugeben. Denn diese gewohnten Begriffe sind scheinbar in der alltäglichen, anschaulichen Welt (gut beschrieben durch die klassische Mechanik) für jeden Menschen offensichtlich. Ein geworfener Diskus hat eine Trajektorie (als Punkt ist sein Schwerpunkt gemeint), eine scharfe Energie und einen scharfen Impuls. Diese Diskrepanz zwischen Quantenmechanik und klassischer Mechanik wurde in der Kopenhagener Deutung¹ der Quantenmechanik durch eine formale Vorschrift aufgelöst: dem Quantensprung (auch Kollaps oder Reduktion des Zustandsvektors genannt). Wenige Jahre später (1932) übersetzte J. Neumann diese Idee in ein mathematisches Modell [11]: Die Dynamik des Zustandsvektors eines Quantensystems wird durch die Schrödingergleichung² determiniert, solange es keine Störung von außen gibt, d.h. solange keine Wechselwirkung mit einem weiteren System stattfindet. Die Messung einer Trajektorie, der Energie oder des Impulses ist aber eine Störung von außen, nämlich eine Wechselwirkung mit einem Messapparat. Dabei kollabiert die Wellenfunktion in einen der Eigenzustände der Observable, welche die Messapparatur im quantenmechanischen Formalismus repräsentiert. Damit sind zwar die Begriffe wie Ort, Energie oder Impuls auch in der Quantenmechanik zu finden, allerdings konnte die Messung diese Eigenschaften nicht aus dem Quantensystem „herauslesen“ sondern hat sie erst durch die Wechselwirkung mit dem System bzw. durch die Störung des Systems erzeugt (ohne das man davon sprechen kann, das diese Eigenschaften vorher schon existiert hätten).

Den Kollaps führte Neumann als Postulat in das Modell ein. Denn bei dem Versuch eine Messung als Wechselwirkung zwischen Quantensystem und Messgerät in Rahmen eines rein quantenmechanischen Modells zu beschreiben, stieß er auf das Paradoxon, dass der Zustand des Messgerätes nach der Wechselwirkung mit dem Quantensystem in einer Superposition verschiedener Messwerte stehen kann. Der postulierte Kollaps verhindert dieses Paradoxon.

Dieser „nachträgliche Einbau“ des Messprozesses in die quantenmechanische Theorie ist also im Grunde nichts anderes als die Aussage, dass man nicht wisse was vor sich geht

¹maßgeblich formuliert durch W. Heisenberg und N. Bohr, Ende der 1920er Jahre in Kopenhagen [34].

²auf die historische Feinheit, dass im Formalismus von Heisenberg nicht die Zustandsvektoren, sondern die Operatoren zeitabhängig sind und dass es den Begriff „Schrödingergleichung“ noch nicht gab, soll hier nicht eingegangen werden.

und es daher als einen un stetigen Sprung (mathematisch wie phänomenologisch) definiert. Da man in den Naturwissenschaften gerne das „Wesen der Natur“ ergründen möchte, ist an dieser Stelle besonders Vorsicht geboten. Man kann nicht direkt von einer Naturbeschreibung (Theorie) auf das Wesen der Natur schließen. Zu behaupten die Natur mache einen Sprung (Kollaps der Wellenfunktion) ist daher nicht sinnvoll. Stattdessen sollte der Sprung alleine als bewährtes theoretisches Mittel angesehen werden, der gute quantitative Vorhersagen für Experimente liefert.

Bis heute ist eine Kombination der beiden Arten der Zeitentwicklung des Zustandsvektors (unitäre Zeitentwicklung durch die Schrödingergleichung und irreversibler Kollaps bei einer Messung) ein bewährtes und gängiges theoretisches Mittel um Messwerte vorherzusagen. Modernere Ansätze behaupten dagegen, dass der Kollaps als Postulat unnötig ist [12]. Dabei geht man davon aus, dass Quantensystem und Messapparat auch Wechselwirkung mit der Umgebung ausgesetzt sind (z.B. Moleküle aus der Luft, Photonen, etc.). Man spricht dabei von einer *Verschränkung* zwischen Quantensystem, Messapparat und Umgebung. Die reduzierte Dichtematrix von Quantensystem und Messapparat lässt sich dann als Ensemble aller möglichen Messwerte interpretieren, welche durch jeweils eine Wahrscheinlichkeit gewichtet sind. Die nicht-diagonalen Elemente dieser Dichtematrix nehmen enorm schnell ab, verschwinden nahezu und können vernachlässigt werden. Für die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeiten ist hier *ausschließlich* die Schrödingergleichung verantwortlich. Man nennt dieses Phänomen *Dekohärenz*. Der postulierte Kollaps wird hierbei als extrem schnelles Abnehmen von Überlagerungseffekten enttarnt. C. Kiefer schreibt hierzu [11]: „*Under ordinary macroscopic situations, decoherence occurs on an extremely short timescale, giving the impression of an instantaneous collapse or a quantum jump.*”

Für exakte Rechnung im Rahmen eines mathematischen Modells ist eine solche Herangehensweise allerdings enorm schwierig und wahrscheinlich in den meisten realistischen Fälle unlösbar (bzw. nicht formulierbar, denn ein wirklichkeitsnahes Einbeziehen der Umgebung stellt schon alleine eine unlösbare Aufgabe dar). Andererseits bekommt der Kollaps durch diese Dekohärenztheorie auch seine Berechtigung: Er ist eine rein phänomenologische Beschreibung des Messvorgangs. Denn der durch die Dekohärenz beschriebene Zusammenbruch aller anderen Messwahrscheinlichkeiten spielt für die Vorhersage des Messergebnisses letztendlich keine Rolle.

Wie bereits beschrieben, wird in dieser Arbeit daher ein Modell für ein *freies* instabiles Teilchen vorgestellt, welches keiner Wechselwirkung ausgesetzt ist (weder mit der Umgebung, noch mit einem konkreten Messapparat). Jede zusätzlich betrachtete Wechselwirkung (z.B. im Kapitel über den Quanten-Zeno-Effekt) bedient sich wieder am Postulat des Kollapses.

5. Zenon der Eleat

Im vierten Jahrhundert vor Christus standen sich im antiken Griechenland zwei naturphilosophische Schulen gegenüber. Die des Heraklit und die des Parmenides. Die Lehre des Heraklit ist bekannt als die These, dass sich alles in stetigem Wandel befinde. So

zitiert ihn Platon in seiner Schrift *Theaitet* [10]: „*Du kannst nicht zwei mal in dieselben Flüsse steigen, denn frische Wasser fließen immer auf dich zu.*“ Dagegen lässt sich Parmenides' These so beschreiben, dass es Veränderung nicht gebe, sie sei vielmehr als Illusion aufzufassen. Da diese These für das Pfeilparadoxon von Zeno grundlegend ist (welches 1977 namensgebend für das bereits erwähnte Quanten-Zeno-Paradoxon durch B. Misra und E. Sudarshan [9] wurde), sollen hier drei aussagekräftige Zitate von Parmenides aus seinem Lehrgedicht *Weg der Wahrheit* gegeben werden [10]:

„*Du kannst nicht wissen, was nicht ist - das ist unmöglich -, noch es auszusprechen; denn es ist dasselbe, was gedacht werden kann und was sein kann.*“

„*Wie also kann das, was ist, im Begriffe sein und Zukunft sein? Oder wie konnte es ins Dasein treten? Wenn es ins Dasein trat, ist es nicht; noch ist es, wenn es im Begriffe ist, in Zukunft zu sein. So ist das Werden ausgelöscht, und das Vergehen ist verschollen.*“

„*Das Ding, das gedacht werden kann, und jenes, um dessentwillen der Gedanke besteht, ist dasselbe, denn du kannst keinen Gedanken finden, ohne etwas, das da ist, um dessentwillen er geäußert worden ist.*“

Ob etwas *ist*, ist demnach äquivalent zur Frage, ob es gedacht werden kann. Wenn ein Ding aber *geworden* sein soll (d.h. eine Veränderung stattgefunden haben soll), so ist das nicht möglich, denn ein Gedanke an das Gewordene wäre schon früher möglich gewesen. Kurz gesagt, leitet Parmenides seine Lehre von der Sprache ab und bestreitet die Existenz von *Veränderung* und *Werden*. Offensichtlich gibt er seinen Sinneseindrücken, welche die ganze Fülle von Veränderungen auf der Welt beobachten kann, keine Bedeutung, sondern sieht in ihnen eine Illusion. Denn dies, so meint er, hat er mit Logik³ bewiesen.

Sein bekanntester Schüler war Zenon (engl. Zeno) aus Elea, einer antiken griechischen Hafenstadt. Es existieren zwar keine Schriften von ihm, jedoch wird er häufig von anderen berühmten Philosophen wie Epikur oder Aristoteles zitiert. Nach diesen Zitaten trat er vehement für Parmenides' These ein, dass jegliche Art von Veränderung und Werden eine Illusion sei. Anders als bei Parmenides sind von ihm konkretere Beispiele überliefert, welche sich auf beobachtbare Veränderungen beziehen und diese Beobachtungen mittels Logik in eine Paradoxie führen. So auch in dem berühmten Pfeilparadoxon: Man betrachte einen fliegenden Pfeil. *Fliegend* bedeutet Bewegung, d.h. *Veränderung* des Ortes. Der Pfeil befindet sich aber zu jedem *Zeitpunkt* an einem ganz konkreten Ort, ist also zu jedem Zeitpunkt in Ruhe. Wenn sich die Zeit, in welcher der Pfeil fliegt, durch alle Zeitpunkte zusammensetzt, die während dem Flug verstreichen, so befindet sich der Pfeil immer in Ruhe. Dies ist aber genau das Gegenteil von Bewegung, also ein Paradoxon. Aristoteles zitiert Zenon zum Pfeilparadoxon folgendermaßen [8]: „[...] if everything when it occupies an equal space is at rest, and if that which is in locomotion is always occupying such a space at any moment, the flying arrow is therefore motionless.“

Lässt sich das Pfeilparadoxon auflösen? Es scheint so, als ob Newton und Leibniz im 17. Jahrhundert das Paradoxon mit dem Werkzeug der Infinitesimalrechnung unbewusst aufgelöst hätten. So findet sich beispielsweise in der Newtonschen Mechanik der Begriff

³Parmenides gilt als Erfinder der Logik, wobei er eher eine auf Logik basierende Metaphysik erfunden hat [10].

der Momentangeschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ als zeitliche Ableitung des Ortes $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = \left. \frac{d}{d\tau} \mathbf{x}(\tau) \right|_{\tau=t}. \quad (1)$$

Aber dies berührt nicht die Problematik von Zenon. Mit $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{v}(t)$ lässt sich die Bewegung eines Pfeils sicherlich gut beschreiben, aber aus Sicht von Zenon wäre es nur die Beschreibung einer Illusion. Denn es wird dabei stillschweigend angenommen, dass die Zeit t eine reelle Zahl ist (im mathematischen Sinne, d.h. $t \in \mathbb{R}$). Eine moderne Formulierung von Zenons Pfeilparadoxon würde sich daher auf die Frage reduzieren, ob diese Annahme richtig ist? Erst wenn man diese Frage bejahen könnte, wäre das Pfeilparadoxon von Zeno aufgelöst.

Letztendlich bleibt also die Frage, was ein Kontinuum ist bzw. ob die Zeit durch einen kontinuierlichen Parameter t repräsentiert werden kann. In einer kontinuierlichen Zeit gäbe es keine kleinsten Zeitdifferenzen, d.h. keine „Zeitatome“, aus denen sich eine Zeitspanne zusammensetzt. Aristoteles erkannte dies Problematik bereits und kommentiert [8]: *„This is false, for time is not composed of indivisible moments any more than any other magnitude is composed of indivisibles.“* Die Problematik des Kontinuums konnte er (wie alle anderen antiken griechischen Philosophen auch) nicht lösen.

Bis heute bleibt die Frage nach der Verbindung zwischen der mathematischen Vorstellung eines Kontinuums und physikalischer Wirklichkeit offen (vergleiche mit dem Punkt *Abbildung zwischen mathematischen Objekten und physikalischen Konzepten* in Kapitel 3). Der berühmte Mathematiker Richard Courant schrieb 1954 dazu treffen: *„Die Punkte einer Geraden bilden eine dichte Punktemenge, es gibt keinen 'nächsten' Punkt, wenn man einen gewissen Punkt erreicht hat. Die intuitive Idee eines Kontinuums und eines stetigen Fließens ist völlig natürlich. Aber man kann sich nicht auf sie berufen, wenn man eine mathematische Situation aufklären will; zwischen der intuitiven Idee und der mathematischen Formulierung, welche die wissenschaftlich wichtigen Elemente unserer Intuition in präzise Ausdrücke beschreiben soll, wird immer eine Lücke bleiben. Zenos Paradoxien weisen auf diese Lücke hin.“* Es ist also nach wie vor keineswegs klar, ob Heraklit oder Parmenides recht hatte.

In der Quantenmechanik gibt es ein ähnliches Paradoxon. Beruft man sich auf die reine Theorie (mit dem Kollaps als Postulat), so folgt aus ihr, dass es Dynamik (hier auch als *Veränderung* zu verstehen) von Quantenzuständen nicht geben kann, wenn ein solcher Zustand unter ununterbrochener (kontinuierlicher) Beobachtung steht. Maßgeblich hierfür sind die Abweichungen vom exponentiellen Zerfall eines instabilen Quantenzustandes.

Teil II.
Abweichungen vom
exponentiellen Zerfallsgesetz

6. Quantenmechanik instabiler Systeme, Überlebenswahrscheinlichkeiten

6.1. Das empirische exponentielle Zerfallsgesetz

Angelehnt an ein Argument von Leslie Ballentine [23], lässt sich ein exponentielles Zerfallsgesetz folgendermaßen herleiten: $u(t)$ repräsentiere das Ereignis, dass ein instabiles System zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallen ist. Die Wahrscheinlichkeit

$$p(t, t') = \text{Prob}\{u(t) | u(t')\}, \quad t > t' \quad (2)$$

sagt aus, ob das System zum Zeitpunkt $t > t'$ noch nicht zerfallen ist, unter der Voraussetzung, dass es zum Zeitpunkt t' noch nicht zerfallen war. Die einzigen Annahmen zur Herleitung eines expliziten analytischen Ausdrucks des Zerfallsgesetzes sollen sein, dass

- $p(t, t')$ unabhängig von jeglicher Information vor t' ist und dass
- das Prinzip der Zeitinvarianz gelte, d.h. $p(t, t')$ hängt nur von der Zeitdifferenz $t - t'$ ab:

$$p(t, t') = p(t - t'). \quad (3)$$

Es sei nun $t_3 > t_2 > t_1$, dann gilt nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie

$$\text{Prob}\{P(t_3) \wedge P(t_2) | P(t_1)\} = \text{Prob}\{P(t_3) | P(t_2) \wedge P(t_1)\} \cdot \text{Prob}\{P(t_2) | P(t_1)\}, \quad (4)$$

d.h.

$$p(t_3 - t_1) = p(t_3 - t_2) \cdot p(t_2 - t_1). \quad (5)$$

Für kontinuierliche Zeiten (repräsentiert durch reelle Zahlen) erfüllt nur die Exponentialfunktion Gl. (5). Natürlich soll $p(t)$ konventionell immer kleiner oder gleich 1 sein und zum Zeitpunkt der Präparation des Systems 1 entsprechen. Dies führt nun direkt auf ein exponentielles Zerfallsgesetz:

$$p^{\text{exp}}(t) = e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0. \quad (6)$$

Häufig findet man es auch in Form einer Differentialgleichung, welche die beiden genannten Annahmen deutlich macht:

$$\frac{d}{dt} p^{\text{exp}}(t) = -\alpha p^{\text{exp}}(t), \quad \alpha > 0. \quad (7)$$

6.2. Übergang zur Quantenmechanik

Das exponentielle Zerfallsgesetz lässt sich, wie sich nun herausstellen wird, für einen von einer Messung ungestörten Quantenzustand *nicht* reproduzieren. Im Gegenteil: Man kann leicht zeigen, dass im Rahmen der Quantenmechanik ein Zerfallsgesetz nie die Form $e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, annehmen kann. Dies wird u.a. in diesem Kapitel deutlich.

Allerdings geht es in dieser Arbeit in erster Linie um instabile Systeme, die sich nicht

unter Beobachtung befinden. Der Begriff des *Zerfallsgesetzes* bezieht sich daher auf ein System, welches keinen Messungen ausgesetzt ist.

Die Postulate der Quantenmechanik werden zwar vorausgesetzt, aber einige wichtige Aspekte werden hier hervorgehoben: An einem System im Zustand $|\psi\rangle$ wird die Observable A gemessen. Die Wahrscheinlichkeit w_D , einen Wert aus dem Bereich D aus dem Spektrum von A zu erhalten ist durch

$$w_D = \langle \psi | P_D | \psi \rangle \quad (8)$$

gegeben, wobei P_D der Projektionsoperator auf den zu D gehörigen Unterraum ist. Nach einem weiteren Postulat (Projektionspostulat, Kollaps) befindet sich das System nach der Messung (das Messergebnis sei a) im Zustand

$$\frac{P_a |\psi\rangle}{\|P_a |\psi\rangle\|} \quad (9)$$

mit dem Projektionsoperator P_a auf den zu $a \in D$ gehörigen Unterraum. Der Nenner im letzten Ausdruck sorgt für die korrekte Normierung.

6.3. Definitionen und die Bestimmungsgleichung des Zerfallsgesetzes $p(t)$

Das zu untersuchende instabile System S sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|S\rangle$ präpariert. Die Präparation bedeutet, dass ein (nicht notwendigerweise vollständiger) Satz kommutierender Observablen $\{A_1, \dots, A_n\}$ gemessen wurde. Der Zustand ist dann durch die gemessenen Eigenzustände dieser Observablen charakterisiert: $|S\rangle = |a_{1S}, \dots, a_{nS}\rangle$. Die Observablen werden durch ihre Spektraldarstellung notiert:

$$A_i = \sum_{a_i} a_i |a_i\rangle \langle a_i|, \quad A_i |S\rangle = a_{iS} |S\rangle. \quad (10)$$

Es lässt sich nun eine Observable W einführen, welche einer Messung entspricht, die überprüft, ob sich das System noch im Anfangszustand befindet oder bereits zerfallen (d.h. nicht mehr im Anfangszustand) ist. Diese Observable ist nichts anderes als die gleichzeitige Messung der Observablen A_1, \dots, A_n . Die einzigen Eigenwerte von W sollen w_{udcy} (nicht zerfallen) und w_{dcy} (zerfallen) sein, wobei letzterer natürlich hochgradig entartet ist. In Spektraldarstellung nimmt W dann die Form

$$W = w_{\text{udcy}} P_{\text{udcy}} + w_{\text{dcy}} (\mathbb{1} - P_{\text{udcy}}) \quad (11)$$

an, mit $P_{\text{udcy}} = |S\rangle \langle S|$. Die Eins lässt sich darstellen, indem man $|S\rangle = |a_{1S}, \dots, a_{nS}\rangle$ zu einer Basis des Hilbertraums erweitert:

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= |a_{1S}, \dots, a_{nS}\rangle \langle a_{1S}, \dots, a_{nS}| + \sum_{a_1 \neq a_{1S}} \dots \sum_{a_n \neq a_{nS}} |a_1 \dots a_n\rangle \langle a_1 \dots a_n| \\ &=: |S\rangle \langle S| + \sum_{\mathcal{S} \neq S} |\mathcal{S}\rangle \langle \mathcal{S}| = \sum_{\mathcal{S}} |\mathcal{S}\rangle \langle \mathcal{S}|. \end{aligned} \quad (12)$$

Diese etwas kompliziert anmutende Schreibweise wird sich später noch als nützlich herausstellen.

Bemerkung: Die Präparation eines solchen Zustandes $|S\rangle$ zu einem Anfangszeitpunkt $t = 0$ ist in Bezug auf die Wirklichkeit problematisch. In der Theorie geschieht der durch das Projektionspostulat (9) verursachte Kollaps des Zustandes zwar instantan, eine wirkliche Messung im Labor wird aber sicherlich nicht instantan vonstatten gehen. Es ist daher fraglich, inwiefern der durch die Präparation festgelegte Anfangszeitpunkt wirklich ein scharfer *Zeitpunkt* ist. In der Literatur wird diese Frage häufig unterschlagen. Da später aber Fälle betrachtet werden, in denen kurz nach der Präparation erneut Messungen durchgeführt werden (d.h. extrem nahe des Anfangszeitpunktes) wird diese Unschärfe des Anfangszeitpunkt zu einem Problem. Der theoretische Limes $t_{\text{Messung}} \rightarrow t_{\text{Präparation}}$ können daher zu Absurditäten führen, die eventuell keine Entsprechung in der Wirklichkeit haben. Das später diskutierte Quanten-Zeno-Paradoxon könnte eine solche Absurdität sein. Des weiteren soll noch erwähnt werden, dass in der Argumentation mit Absicht auf die bekannte und häufig verwendete Energie-Zeit-Unschärferelation

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (13)$$

verzichtet wird. Denn es ist überhaupt nicht klar, wie Δt interpretiert werden soll. Im Rahmen der Quantenmechanik gibt es keinen Zeitoperator und es ist daher für eine exakte Herleitung bzw. Interpretation dieser Ungleichung nötig Δt genau zu definieren. In Abschnitt 7.3 wird genauer darauf eingegangen.

Ausgehend von den Postulaten, lässt sich das Zerfallsgesetz bzw. die Überlebenswahrscheinlichkeit des Systems S ganz allgemein als

$$p(t) = \langle U(t)S | P_{\text{ud}} | U(t)S \rangle = |\langle S | U(t) | S \rangle|^2 \quad (14)$$

ausdrücken, wobei $U(t)$ der Zeitentwicklungsoperator ist, der die Operator-Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t) = H(t)U(t) \quad (15)$$

mit der Anfangsbedingung $U(0) = \mathbb{1}$ erfüllt (H ist der Hamiltonoperator). Offensichtlich ist damit, wie zu erwarten, $p(0) = 1$.

Es ist zu betonen, dass sich die Wahrscheinlichkeit $p(t)$ aus Gl. (14) auf den konkreten Fall einer Messung bezieht, wobei es vorher keine Messungen gab. Mit anderen Worten: Präpariert man $N \gg 1$ Systeme S , bedeutet dies nicht, dass davon $Np(t)$ nach der Zeit t noch nicht zerfallen sind (denn ohne Messung ist der Zustand schlicht $U(t)|S\rangle$ und damit völlig unbestimmt im Hinblick auf die Eigenschaft „zerfallen“ oder „nicht zerfallen“), sondern lediglich, dass *bei einer Messung* zur Zeit t , noch $Np(t)$ Systeme im Anfangszustand $|S\rangle = |a_{1S}, \dots, a_{nS}\rangle$ vorgefunden werden. Ohne Messung lässt sich keine Aussage treffen. Der Fall frequenter Messungen wird vorerst ausgeschlossen (siehe dazu Abschnitt 6.13). Es geht also zunächst nur um das Zerfallsgesetz für *eine einzelne Messung*.

Für die weitere Diskussion wird angenommen, dass der Hamiltonoperator H nicht explizit zeitabhängig ist (z.B. ein isoliertes System) und auch nicht im Satz der kommutierenden Observablen $\{A_1, \dots, A_n\}$ enthalten ist, da es sich sonst um einen stationären und damit stabilen Zustand handelt (siehe nächster Absatz). Die Lösung von (15) ist dann

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} . \quad (16)$$

Außerdem wird von einem kontinuierlichen Spektrum des Hamiltonoperators ausgegangen, dass von unten beschränkt ist, d.h.

$$H = \int_{E_0}^{\infty} dE E |E\rangle\langle E| , \quad (17)$$

Ohne die Annahme des kontinuierlichen Spektrums, gäbe es nach dem Poincaréschen Wiederkehersatz einen Zeitpunkt, in dem sich das System mit Sicherheit wieder im Ausgangszustand befindet. Für ein instabiles Teilchen ist dies offensichtlich nicht sinnvoll.

An dieser Stelle lässt sich leicht definieren, was ein stabiles System ist: Jedes System, dass sich zu Beginn in einem Eigenzustand des Hamiltonoperators befindet ist stabil, denn ein solcher Zustand ist nach (16) zugleich Eigenzustand des Zeitentwicklungsoperators $U(t)$ und es folgt $p(t) = 1 \forall t$. Nach Niels Bohr sind diese Zustände auch als *stationäre Zustände* benannt. Jedes instabile System befindet sich also nicht in einem stationären Zustand.

Entwickelt man den Anfangszustand $|S\rangle$ nach den stationären Zuständen

$$|S\rangle = \int_{E_0}^{\infty} dE \langle E|S\rangle |E\rangle \quad (18)$$

dann lässt sich das Zerfallsgesetz (14) als

$$p(t) = \left| \int_{E_0}^{\infty} dE |\langle E|S\rangle|^2 e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \right|^2 \quad (19)$$

ausdrücken. Mit der Definition

$$d_S(E) = \theta(E - E_0) |\langle E|S\rangle|^2 \quad (20)$$

entspricht es dem Betragsquadrat einer Fourier-Transformation:

$$p(t) = |(\mathcal{F} d_S)(t)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \right|^2 . \quad (21)$$

Die Funktion $d_S(E)$ ist als Energiedichte des Systems S zu interpretieren, denn es entspricht der Energiedarstellung des Zustandes $|S\rangle$. Diese Energieverteilung determiniert demnach das Zerfallsgesetz. Offensichtlich ist sie per Definition normiert:

$$\int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) = \int_{E_0}^{\infty} dE |\langle E|S\rangle|^2 = \int_{E_0}^{\infty} dE \langle S|E\rangle \langle E|S\rangle = \langle S|S\rangle = 1 . \quad (22)$$

Aus praktischen Gründen wird die Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$a(t) = \langle S|U(t)|S \rangle = (\mathcal{F}d_S)(t) = \int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad (23)$$

eingeführt, d.h.

$$p(t) = |a(t)|^2 = \bar{a}(t)a(t). \quad (24)$$

Es gilt:

$$a(-t) = \int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) e^{\frac{i}{\hbar}Et} = \overline{\int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}} = \bar{a}(t) \quad (25)$$

und damit ist $p(t)$ eine gerade Funktion der Zeit:

$$p(-t) = p(t). \quad (26)$$

Für den späteren Gebrauch soll noch kurz diskutiert werden, wie weit sich die Wahrscheinlichkeitsamplitude $a(t)$ aus gegebenem $p(t)$ rekonstruieren lässt. Sie ist zunächst bis auf einen Phasenfaktor bestimmt, denn aus Gl. (24) folgt für gegebenes $p(t)$:

$$a(t) = \sqrt{p(t)} e^{i\varphi(t)}. \quad (27)$$

Die Bedingungen (25) und (26) schränken $\varphi(t)$ allerdings auf ungerade Funktionen ein:

$$a(-t) = \sqrt{p(t)} e^{i\varphi(-t)} = \bar{a}(t) = \sqrt{p(t)} e^{-i\varphi(t)} \quad \Rightarrow \quad \varphi(-t) = -\varphi(t). \quad (28)$$

Dies wird später noch von Nutzen sein.

Interpretation von $p(t)$

Wie schon angedeutet darf $p(t)$ nicht ohne Weiteres mit den empirisch gewonnenen Zerfallsgesetzen instabiler Systeme aus dem Labor verglichen werden. Die Überlebenswahrscheinlichkeit eines instabiles Elementarteilchen, dessen Zerfall in einer Blaskammer sichtbar ist, kann schon nicht mehr durch $p(t)$ repräsentiert werden, denn es finden ständig Ortsmessungen an ihm statt. Ebenso verhält es sich z.B. bei dem Zerfall von ^{14}C in lebendigen Organismen. Man kann nicht annehmen, dass das ^{14}C keiner Wechselwirkung mit seiner Umgebung unterliegt und damit ständig Messungen ausgesetzt ist. Wenn nun im Folgenden $p(t)$ Abweichungen von einem exponentiellen Zerfall aufweist, so kann daraus nicht unbedingt geschlossen werden, dass der Zerfall eines Elementarteilchens oder von ^{14}C auch von einem exponentiellen Zerfall abweichen muss. Beide Beispiele entsprechen dem Fall frequenter Messungen, welcher im Abschnitt 6.13 besprochen wird.

6.4. Die Energiedichte d_S

Ausgehend von dem Propagator

$$G_S(E) = \langle S | \frac{1}{E - H + i\varepsilon} | S \rangle \quad (29)$$

(ε ist immer als infinitesimale Energie $\varepsilon \searrow 0$ aufzufassen) lässt sich die Energiedichte des instabilen Teilchens S als

$$d_S(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_S(E). \quad (30)$$

berechnen.

Beweis. Die Resolvente kann in der Energiebasis

$$\mathbb{1} = \int_{E_0}^{\infty} dE |E\rangle \langle E| \quad (31)$$

als

$$\frac{1}{E - H + i\varepsilon} = \int_{E_0}^{\infty} dE' \frac{1}{E - E' + i\varepsilon} |E'\rangle \langle E'| \quad (32)$$

ausgedrückt werden, sodass der Propagator die Form

$$G_S(E) = \int_{E_0}^{\infty} dE' d_S(E') \frac{1}{E - E' + i\varepsilon} \quad (33)$$

annimmt. Durch Anwendung des Sokhotski-Plemelj Theorems

$$\text{Im} \frac{1}{E - E' + i\varepsilon} = -\pi \delta(E - E') \quad (34)$$

erhält man schließlich

$$\text{Im} G_S(E) = -\pi d_S(E). \quad (35)$$

□

Dies bietet die Möglichkeit die Energiedichte des Systems bei gegebenem Hamiltonoperator zu berechnen und wird später nützlich sein.

6.5. Zerfallsprodukte verhindern exponentielles Zerfallsgesetz

Lässt sich zeigen, dass $p(t)$ die Gleichung

$$p(t_1 + t_2) = p(t_1)p(t_2) \quad (36)$$

nicht erfüllt, dann ist damit schon eine exponentielle Form widerlegt. Diese Idee stammt ursprünglich von Ersak [20] und auch Fonda, Ghirardi und Rimini [24] greifen das Argument auf. Es wird allerdings nirgends so ausgearbeitet, dass man direkt den Widerspruch zu (36) sieht. Dies soll hier nachgeholt werden:

Die Amplitude aus (23) kann bei einer Aufspaltung des Zeitarguments in $t = t_1 + t_2$ und durch Einfügen der Identität (12) folgendermaßen geschrieben werden:

$$a(t_1 + t_2) = \langle S | e^{-\frac{i}{\hbar} H t_1} \mathbb{1} e^{\frac{i}{\hbar} H t_2} | S \rangle = a(t_1)a(t_2) + \sum_{\mathcal{S} \neq S} a_{\mathcal{S} \rightarrow S}(t_1) a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t_2) \quad (37)$$

mit

$$a_{\mathcal{S} \rightarrow S}(t_1) = \langle S | e^{-\frac{i}{\hbar} H t_1} | \mathcal{S} \rangle \quad \text{und} \quad a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t_2) = \langle \mathcal{S} | e^{-\frac{i}{\hbar} H t_2} | S \rangle. \quad (38)$$

Im Speziellen ist $a_{S \rightarrow S}(t) = a(t)$ die bereits bekannte Amplitude für die Überlebenswahrscheinlichkeit. Über die Definition (24)

$$p(t_1 + t_2) = a(t_1 + t_2) \bar{a}(t_1 + t_2)$$

und die Identität

$$\sum_{\mathcal{S} \neq S} a_{\mathcal{S} \rightarrow S}(t_1) a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t_2) = \sum_{\mathcal{S} \neq S} a_{\mathcal{S} \rightarrow S}(t_2) a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t_1), \quad (39)$$

welche direkt aus einer Kombination von (25) und (37) folgt, wird daraus:

$$\begin{aligned} p(t_1 + t_2) &= p(t_1)p(t_2) + 2 \operatorname{Re} \left[a(t_1)a(t_2) \sum_{\mathcal{S} \neq S} a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(-t_1) a_{\mathcal{S} \rightarrow S}(-t_2) \right] \\ &\quad + \sum_{\mathcal{S} \neq S} \sum_{\mathcal{S}' \neq S} a_{\mathcal{S}' \rightarrow S}(t_1) a_{S \rightarrow \mathcal{S}'}(t_2) a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(-t_1) a_{\mathcal{S} \rightarrow S}(-t_2) \end{aligned} \quad (40)$$

und steht im Widerspruch zu (36). Es ist damit ausgeschlossen, dass $p(t)$ einer exponentiellen Form folgt. Verantwortlich hierfür sind die nicht verschwindenden Amplituden für den Zerfall $a_{S \rightarrow \mathcal{S}}$ und für die „Wiederauferstehung“ $a_{\mathcal{S} \rightarrow S}$ des Anfangszustandes.

Lässt sich für das Zerfallsgesetz eine Differentialgleichung ähnlich zu (7) konstruieren? Eine Abweichung davon würde ebenfalls einer exponentiellen Form widersprechen. Der Weg dorthin führt über die Schrödingergleichung. Der Zustand nach der Präparation ist durch $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |S\rangle$ gegeben. Eine Entwicklung in der \mathcal{S} -Basis (12) liefert:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\mathcal{S}} a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t) |\mathcal{S}\rangle = a(t)|S\rangle + \sum_{\mathcal{S} \neq S} a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t) |\mathcal{S}\rangle. \quad (41)$$

Einsetzen von (41) in die Schrödingergleichung und Skalarproduktbildung mit $\langle S |$ ergibt:

$$i\hbar \dot{a}(t) = \sum_{\mathcal{S}} a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t) \langle S | H | \mathcal{S} \rangle \quad (42)$$

und analog

$$-i\hbar \dot{\bar{a}}(t) = \sum_{\mathcal{S}} \bar{a}_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t) \langle S | H | \mathcal{S} \rangle. \quad (43)$$

Nach Gl. (24) ist die zeitliche Ableitung der Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\dot{p}(t) = \dot{\bar{a}}(t)a(t) + \bar{a}(t)\dot{a}(t). \quad (44)$$

Einsetzen von (42) und (43) ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= \frac{i}{\hbar} a(t) \sum_{\mathcal{S}} \bar{a}_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t) \langle S|H|\mathcal{S} \rangle - \frac{i}{\hbar} \bar{a}(t) \sum_{\mathcal{S}} a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t) \langle S|H|\mathcal{S} \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \sum_{\mathcal{S}} \left(a(t) \bar{a}_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t) - \bar{a}(t) a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t) \right) \langle S|H|\mathcal{S} \rangle.\end{aligned}\quad (45)$$

Betrachtet man in der Summe (bzw. Integral) der letzten Gleichung den Summand mit $\mathcal{S} = S$, so verschwindet dieser, denn $a(t) \bar{a}_{S \rightarrow S}(t) - \bar{a}(t) a_{S \rightarrow S}(t) = p(t) - p(t) = 0$. Dies wiederum bedeutet, dass die rechte Seite nicht von $p(t)$ selbst abhängt. Da außerdem $\dot{p}(t)$ reell sein muss, lässt sich nun schreiben:

$$p(t) = -\frac{1}{\hbar} \operatorname{Im} \sum_{\mathcal{S} \neq S} \left(a(-t) a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t) - a(t) a_{\mathcal{S} \rightarrow S}(-t) \right) \langle S|H|\mathcal{S} \rangle,\quad (46)$$

im Gegensatz zu (7)

$$\dot{p}^{\text{exp}}(t) = -\frac{1}{\hbar} \Gamma^{\text{exp}} p^{\text{exp}}(t), \quad \Gamma^{\text{exp}} > 0.$$

Die Änderung der Überlebenswahrscheinlichkeit (46) hängt demnach von den Amplituden der „Wiederauferstehung“ des Anfangszustandes in der Vergangenheit $a_{\mathcal{S} \rightarrow S}(-t)$, von der Amplitude der Zerfälle $a_{S \rightarrow \mathcal{S}}(t)$ und von der Amplitude des Überlebens $a(t)$ und $a(-t)$ ab. Im Gegensatz zur Differentialgleichung des exponentiellen Zerfalls (7) gibt es hier also Faktoren, welche die Vergangenheit des System repräsentieren. Ein exponentieller Zerfall kann unmöglich eine Lösung sein. Damit ist auch klar, welche Annahme bei der heuristischen Herleitung des exponentiellen Zerfalls in Abschnitt 6.1 nicht korrekt war.

6.6. Verhalten von $p(t)$ für kleine Zeiten

Eine Entwicklung von $a(t)$ um $t = 0$ liefert:

$$a(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \langle H \rangle_S t - \frac{1}{\hbar^2} \langle H^2 \rangle_S t^2 + \mathcal{O}(t^3),\quad (47)$$

woraus folgt:

$$p(t) = 1 - \left(\frac{\Delta_S E}{\hbar} \right)^2 t^2 + \mathcal{O}(t^3), \quad \Delta_S E = \sqrt{\langle H^2 \rangle_S - \langle H \rangle_S^2}.\quad (48)$$

Die Varianz $\Delta_S E$ kann natürlich auch über die Energiedichte ausgedrückt werden:

$$\Delta_S E = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) E^2 - \left(\int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) E \right)^2}.\quad (49)$$

Ein exponentielles Zerfallsgesetz verhält sich dagegen für kleine Zeiten wie

$$e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t} = 1 - \frac{\Gamma}{\hbar} t + \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{\hbar^2} t^2 + \mathcal{O}(t^3).\quad (50)$$

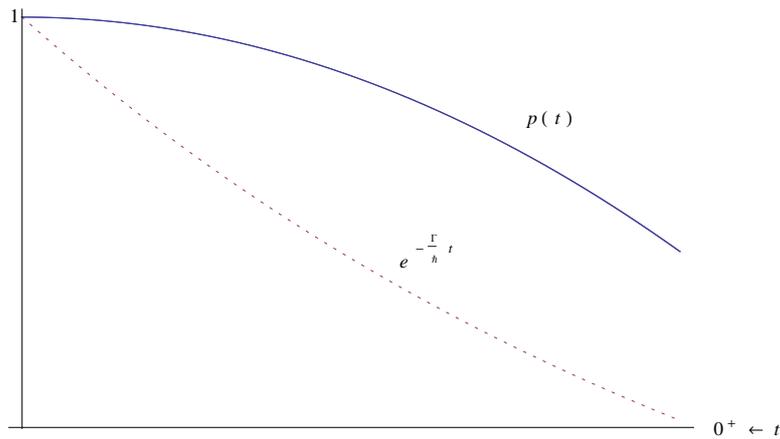


Abbildung 1: Für sehr kleine Zeiten t ist $p(t)$ immer größer als ein exp. Zerfallsgesetz

Für kleine Zeiten $t \rightarrow 0^+$ ist $p(t)$ demnach größer als ein exponentielles Zerfallsgesetz und kann daher mit diesem nicht übereinstimmen (siehe Abb. 1):

$$p(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{>} e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t}, \quad (51)$$

denn

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(\Delta_S E)^2}{\hbar^2} t^2 + \mathcal{O}(t^3) &\underset{t \rightarrow 0^+}{>} 1 - \frac{\Gamma}{\hbar} t + \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{\hbar^2} t^2 + \mathcal{O}(t^3) \\ &\Leftrightarrow \\ 1 &\underset{t \rightarrow 0^+}{>} 1 - \frac{\Gamma}{\hbar} t & (52) \\ &\Leftrightarrow \\ t &\underset{t \rightarrow 0^+}{>} 0. \end{aligned}$$

Eine weitere Abweichung ist die Tatsache, dass die Zeitableitung bei $t = 0$ verschwindet:

$$\dot{p}(0) = \overline{\dot{a}}(0)a(0) + \overline{a}(0)\dot{a}(0) = \dot{a}(-0) + \dot{a}(0) = 0. \quad (53)$$

im Gegensatz zu

$$\left. \frac{d}{dt} e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t} \right|_{t=0} = -\frac{\Gamma}{\hbar} \neq 0. \quad (54)$$

6.7. Verhalten von $p(t)$ für große Zeiten

Mit Hilfe des Riemann-Lebesgue Lemmas zeigten Krylov und Fock [18], dass die Wahrscheinlichkeitsamplitude für $t \rightarrow \infty$ verschwindet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0 \quad (55)$$

und damit natürlich auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0. \quad (56)$$

Das Paley-Wiener Theorem kann dazu benutzt werden, um zu zeigen, dass sich $p(t)$ für $t \rightarrow \infty$ dennoch nicht nach einem exponentiellen Gesetz verhält, siehe z.B. L. A. Khalfin [26]. Das Argument lautet: Wenn die Funktion $d_S : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ für $E < E_0$ verschwindet, dann erfüllt ihre Fourier-Transformation $a(t) = (\mathcal{F}d_S)(t)$:

$$\int_{\mathbb{R}} dt \frac{|\log |a(t)||}{1+t^2} < \infty. \quad (57)$$

Wegen $|a(t)| = \sqrt{p(t)}$ ist dies äquivalent zu

$$\int_0^\infty dt \frac{|\log p(t)|}{1+t^2} < \infty, \quad (58)$$

wobei $p(t) = p(-t) > 0 \forall t$ ausgenutzt wurde. Für die Konvergenz dieses Integrals bedeutet dies, dass $|\log p(t)|$ für $t \rightarrow \infty$ höchstens einer Potenz t^α mit $\alpha < 1$ folgen darf. Das wiederum ist Äquivalent zu

$$p(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\beta t^\alpha}, \quad \alpha < 1, \quad \beta > 0. \quad (59)$$

Demnach ist

$$p(t) \underset{t \rightarrow \infty}{>} e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t}, \quad (60)$$

denn

$$e^{-\beta t^\alpha} \underset{t \rightarrow \infty}{>} e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t} \Leftrightarrow \beta t^\alpha \underset{t \rightarrow \infty}{<} \frac{\Gamma}{\hbar} t \Leftrightarrow t^{\alpha-1} \underset{t \rightarrow \infty}{<} \frac{\Gamma}{\hbar \beta}. \quad (61)$$

L. Fonda, G.C. Ghirardi und A. Rimini schreiben hierzu in [24]: „*In particular it can be shown that in practical cases $p(t)$ exhibits a power law of the type t^{-n} for large times.*“

6.8. Das exponentielle Zerfallsgesetz als Näherung von $p(t)$

Wie bereits angedeutet wäre es kein Widerspruch, wenn $p(t)$ nicht annähernd mit einer exponentiell abfallenden Form übereinstimmt, denn die empirische Evidenz des exponentiellen Zerfallsgesetzes beruht auf dem Fall frequent beobachteter Systeme (wie z.B. ein Elementarteilchen in der Blaskammer oder ^{14}C Atome). Bemerkenswert ist aber, dass auch $p(t)$ unter gewissen Annahmen (die allen vorherigen Annahmen nicht widersprechen) eine annähernd exponentiell abfallende Form annimmt. Nämlich dann wenn ein stationäres (stabiles) System durch eine schwache Wechselwirkung gestört wird. Diese Ähnlichkeit kann mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie gezeigt werden. Das Argument ist ähnlich zu Fermis Goldener Regel. Auf die Rechnung soll hier allerdings nicht im Detail eingegangen werden (für eine genauere Rechnung siehe [30]). Hier die wesentlichen Argumente und Schritte:

Man zerlegt den Hamiltonoperator in einen ungestörten und einen störenden Anteil: $H(t) = H_0 + V(t)$, wobei der Anfangszustand $|S\rangle$ Lösung der stationären Schrödingergleichung des ungestörten Anteils mit der Energie E_S sei: $H_0|S\rangle = E_S|S\rangle$, analog $H_0|\mathcal{L}\rangle =$

$E_{\mathcal{S}}|\mathcal{S}\rangle$. Der Zustand $|S\rangle$ ist also ohne Störung ein stationärer und damit stabiler Zustand. Das störende Potential $V(t)$ wird bei $t = -\infty$ adiabatisch eingeschaltet, d.h. $V(t) = V e^{\frac{\varepsilon}{\hbar}t}$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$. Die Zeitabhängigkeit wird also künstlich eingeführt um zeitabhängige Störungstheorie anwenden zu können. Letztendlich ist das Potential durch den Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ zeitunabhängig und erfüllt damit die anfangs gestellte Bedingung, nur zeitunabhängige Hamiltonoperatoren zu betrachten. Eine Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsamplitude im Wechselwirkungsbild um schwache Störungen V wird damit zu

$$a(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_S + \Sigma_S)t} \quad (62)$$

mit der komplexen Selbstenergie

$$\Sigma_S = \langle S|V|S\rangle + \prod_{\mathcal{S} \neq S} \frac{|\langle \mathcal{S}|V|S\rangle|^2}{E_S - E_{\mathcal{S}} + i\varepsilon} + \mathcal{O}(V^3). \quad (63)$$

Im Rahmen dieser Genauigkeit beläuft sich der Imaginärteil der Selbstenergie auf

$$\text{Im} \Sigma_S \approx -\pi \prod_{\mathcal{S} \neq S} |\langle \mathcal{S}|V|S\rangle|^2 \delta(E_S - E_{\mathcal{S}}). \quad (64)$$

Mit der Definition einer Zerfallsbreite

$$\Gamma^{\text{exp}} = -2\text{Im} \Sigma_S \quad (65)$$

wird das Zerfallsgesetz in der gesetzten Genauigkeit zu

$$p(t) \approx e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{\hbar}t} \quad (66)$$

und hat annähernd exponentielle Form.

Die Überlebenswahrscheinlichkeit $p(t)$ ist demnach bei einer Entwicklung um das störende Potential V in führender Ordnung exponentiell.

6.9. Stetigkeit von $p(t)$ in d_S

Fonda, Ghirardi und Rimini [24] zeigten, dass das Zerfallsgesetz (21)

$$p(t) = |(\mathcal{F}d_S)(t)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \right|^2$$

als stetig in d_S angesehen werden kann, dass also kleine Änderungen von d_S nur kleine Änderungen von $p(t)$ zur Folge haben: Betrachtet man eine Energieverteilung $\tilde{d}_S(E)$, welche nur sehr gering von $d_S(E)$ abweicht, d.h. $\tilde{d}_S(E) = d_S(E) + \varepsilon(E)$ mit $\varepsilon(E)$ sehr klein $\forall E$, dann lässt sich die Abweichung im Zerfallsgesetz folgendermaßen abschätzen:

$$|\tilde{p}(t) - p(t)| \leq 2 \int_{\mathbb{R}} dE |\varepsilon(E)| \quad (67)$$

mit

$$\tilde{p}(t) = |(\mathcal{F}\tilde{d}_S)(t)|^2. \quad (68)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
|\tilde{p}(t) - p(t)| &= |\tilde{\alpha}(t)^2 - \alpha(t)^2| = |\tilde{\alpha}(t) - \alpha(t)| \cdot |\tilde{\alpha}(t) + \alpha(t)| \leq 2|\tilde{\alpha}(t) - \alpha(t)| \\
&\leq 2|\tilde{\alpha}(t) - \alpha(t)| = 2 \left| \int_{\mathbb{R}} dE \varepsilon(E) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \right| \leq 2 \int_{\mathbb{R}} dE |\varepsilon(E)|
\end{aligned} \tag{69}$$

□

Die Umkehrung ist allerdings nicht impliziert: Die Ähnlichkeit zweier Zerfallsgesetze lässt nicht auf die Ähnlichkeit der Energiedichten rückschließen, welche sie determinieren. Findet man beispielsweise eine Energieverteilung, die ein Zerfallsgesetz determiniert, das sehr ähnlich zu einem experimentell gemessenen Zerfallsgesetz ist, bedeutet dies nicht, dass die wirkliche Energieverteilung ähnlich zu dieser sein muss.

6.10. Welche Energiedichten d_S führen auf ein exponentielles Zerfallsgesetz?

Diese Frage muss sich auf eine rein mathematische reduzieren. Physikalisch ist die Antwort bereits klar: keine, denn ein exponentielles Zerfallsgesetz weicht (wie gezeigt) von $p(t)$ ab.

D.h. jede Funktion d_S , welche auf ein exponentielles Zerfallsgesetz führt, muss unphysikalisch sein (d.h. z.B. negative Wahrscheinlichkeiten oder keine untere Schranke). Eventuell liegt es daran, dass diese Frage in einer solchen allgemeinen Form in der Literatur nicht beantwortet wird. Der Grund, warum die Frage dennoch sinnvoll ist, ist folgender: Lässt sich eine solche unphysikalische Energiedichte durch kleine Änderungen physikalisch machen, so wird das daraus resultierende Zerfallsgesetz nur sehr gering von einem exponentiellen abweichen (gemäß Abschnitt 6.9). Und wegen der experimentellen Evidenz des exponentiellen Zerfallsgesetz als gute Näherung, kommt der so gefundenen Energiedichte möglicherweise eine physikalische Bedeutung zu.

Es wird dazu zunächst die Umkehrung von Gl. (21) bestimmt:

$$\begin{aligned}
d_S(E) &= (\mathcal{F} \sqrt{p(t)} e^{i\varphi(t)})(E) \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dt \sqrt{p(t)} e^{i\left(\frac{E}{\hbar}t + \varphi(t)\right)} \\
&= \frac{1}{\pi\hbar} \int_0^\infty dt \sqrt{p(t)} \cos\left(\frac{E}{\hbar}t + \varphi(t)\right)
\end{aligned} \tag{70}$$

mit einer ungeraden Phase $\varphi(t)$, siehe (28). Mit dieser Bedingung lassen sich nun unter Variation von $\varphi(t)$ beliebig viele d_S^{exp} finden, welche mathematisch auf ein exponentielles Zerfallsgesetz führen:

$$d_S^{\text{exp}}(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_0^\infty dt e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{2\hbar}t} \cos\left(\frac{E}{\hbar}t + \varphi(t)\right). \tag{71}$$

Es folgen ein paar Beispiele:

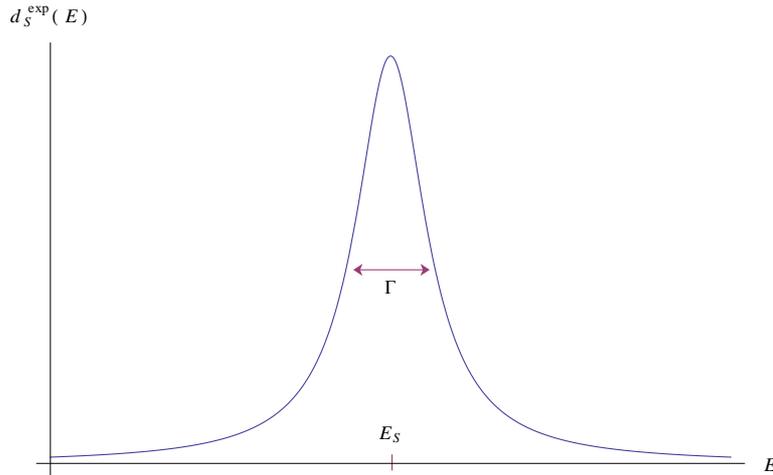


Abbildung 2: Breit-Wigner-Verteilung

1. Wähle $\varphi(t) = -\frac{E_S}{\hbar}t$ mit E_S konstant. Mittels partieller Integration findet man:

$$d_S^{\text{exp}}(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_0^\infty dt e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{2\hbar}t} \cos\left(\frac{E - E_S}{\hbar}t\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma^{\text{exp}}}{(E - E_S)^2 + (\Gamma^{\text{exp}})^2/4}, \quad (72)$$

erhält also die bekannte Breit-Wigner-Verteilung (Abb. 2). Diese ist unphysikalisch, da sie nicht von unten beschränkt ist und die Momente divergieren:

$$\langle E^k \rangle = \int_{\mathbb{R}} dE E^k \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma^{\text{exp}}}{(E - E_S)^2 + (\Gamma^{\text{exp}})^2/4} \longrightarrow \infty \quad \forall k \geq 1. \quad (73)$$

Um die Breit-Wigner-Verteilung physikalisch zu machen, könnte künstlich eine oberer und unterer Cut-Off mitsamt einem Normierungsfaktor eingeführt werden. Diese Idee stammt von F. Giacosa und G. Pagliara [15] und wird später noch eine Rolle spielen. Ist der Cut-Off weit genug von E_S entfernt, ändert sich kaum etwas an der Energiedichte und damit auch kaum etwas am Zerfallsgesetz, welches dann sehr ähnlich zu einem exponentiellen wird.

2. Wähle $\varphi(t) = -\frac{E_S}{\hbar}t - \sin(\alpha t)$ mit E_S und α konstant. Analytisch ist $d_S^{\text{exp}}(E)$ nicht berechenbar. Abbildung 3 zeigt dafür eine numerische Auswertung. Die Energiedichte ist optisch sehr ähnlich zu einer Breit-Wigner-Verteilung. Das Maximum ist leicht nach rechts verschoben und liegt bei einem Wert größer E_S . Auch eine vertikale Achse durch das Maximum wäre hier (im Gegensatz zum Breit-Wigner Fall) keine Symmetrieachse, wie man durch genaues hinsehen feststellen kann.

Dass es sich um eine unphysikalische Energiedichte handelt liegt wieder an der fehlenden unteren Schranke und den divergierenden Momenten $\langle E^k \rangle$, $k > 0$. Dies ist zwar nicht aus Abb. 3 zu erkennen, folgt aber ganz allgemein aus Gl. (71):

$$\langle E^k \rangle = \int_{\mathbb{R}} dE E^k d_S^{\text{exp}}(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_0^\infty dt e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{2\hbar}t} \int_{\mathbb{R}} dE E^k \cos\left(\frac{E}{\hbar}t + \varphi(t)\right) \longrightarrow \infty. \quad (74)$$

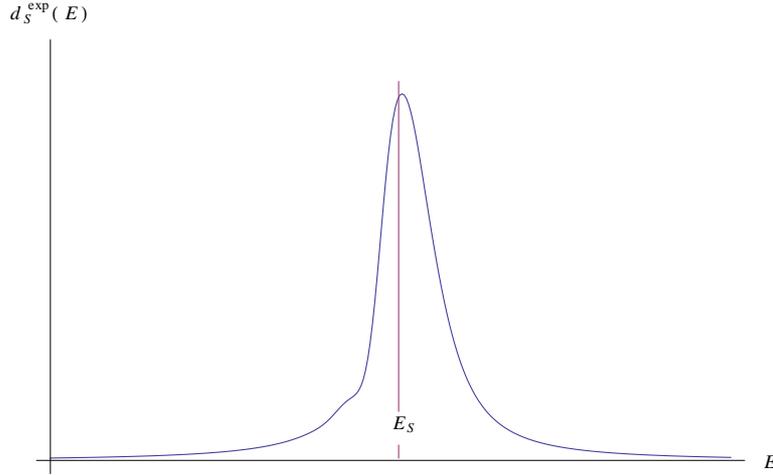


Abbildung 3: Numerisches Ergebnis für $\varphi(t) = -\frac{E_S}{\hbar}t - \sin(\alpha t)$ mit $\hbar = 1$, $E_S = 4$, $\Gamma^{\text{exp}} = 0.5$ und $\alpha = 0.1$

Die fehlende untere Schranke lässt sich leicht per Widerspruchsbeweis zeigen.

Beweis. Angenommen es existiert eine untere Schranke bei E_{Cut} . Dann muss für alle $E \leq E_{\text{Cut}}$ die Energiedichte verschwinden: $d_S^{\text{exp}}(E) = 0$. Wähle nun $\tilde{E} < E_{\text{Cut}}$ und $\Delta = E_{\text{Cut}} - \tilde{E}$. Es muss nun gelten $d_S^{\text{exp}}(\tilde{E}) = d_S^{\text{exp}}(E_{\text{Cut}}) = 0$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn nach (71) gilt:

$$\begin{aligned}
 d_S^{\text{exp}}(\tilde{E}) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_0^\infty dt e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{2\hbar}t} \cos\left(\frac{E_{\text{Cut}} - \Delta}{\hbar}t + \varphi(t)\right) \\
 &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{E_{\text{Cut}}}{\Delta - E_{\text{Cut}}} \int_0^\infty d\tau e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{2\hbar}\tau} \cos\left(\frac{E_{\text{Cut}}}{\hbar}\tau + \varphi(\tau)\right) \\
 &\neq \frac{1}{\pi\hbar} \int_0^\infty d\tau e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{2\hbar}\tau} \cos\left(\frac{E_{\text{Cut}}}{\hbar}\tau + \varphi(\tau)\right) = d_S^{\text{exp}}(E_{\text{Cut}}),
 \end{aligned} \tag{75}$$

wobei hier an einer Stelle $\tau = \frac{E_{\text{Cut}} - \Delta}{E_{\text{Cut}}}t$ substituiert wurde. Es kann also keine untere Schranke geben. \square

Auch hier bietet ein künstlicher Cut-Off die Möglichkeit, die Energiedichte physikalisch zu machen.

- Die weitere Suche über verschiedene ungerade Phasen $\varphi(t)$ ergab leider immer Energiedichten mit negativen Anteilen, welche daher zu verwerfen sind. Beispielsweise sind die numerischen Berechnungen von $d_S^{\text{exp}}(E)$ für $\varphi(t) = -t - t^3 - t^5$ und $\varphi(t) = \sin(t)$ in Abb. 4 zu sehen. Ein Kriterium für $\varphi(t)$, welches $d_S^{\text{exp}}(E)$ rein positiv werden lässt, konnte leider nicht gefunden werden.

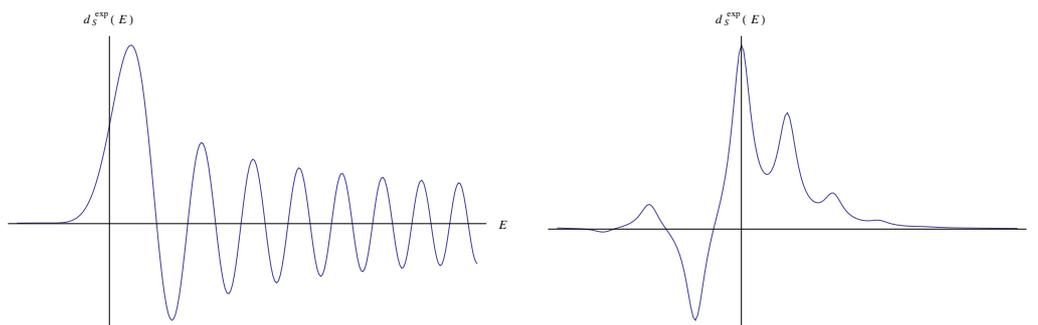


Abbildung 4: Numerisches Ergebnis für $\varphi(t) = -t - t^3 - t^5$ links und $\varphi(t) = \sin(t)$ rechts

6.11. Gemessener nicht-exponentieller Zerfall durch den Tunneleffekt

Der erste experimentelle Nachweis für einen nicht-exponentiellen Zerfall eines Quantenzustandes gelang M. Raizen et. al. [28] im Jahr 1997. Dabei wurden ultra-kalte Natrium-Atome in einem optischen Potential gefangen. Das Potential wird dabei beschleunigt, d.h. die Mulden und Maxima des Potentials beschleunigen in eine feste Richtung. Durch den Tunneleffekt können die Atome aus den Potentialmulden ins Kontinuum entweichen. Der Zustand eines solchen Atoms ist daher ein instabiler Quantenzustand. Die Überlebenswahrscheinlichkeit eines solchen Quantenzustandes entspricht dem Verhältnis aus der Anzahl der noch gefangenen Natrium-Atome nach einer Beschleunigungsphase des Potentials zu der anfänglichen Anzahl der gefangenen Natrium-Atome. Abbildung 5 zeigt, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit erst deutlich von einer exponentiell abfallenden Form abweicht (kleine t), dann aber (für größere t) scheinbar einem exponentiellen Abfall sehr ähnlich wird.

Diese Daten erfüllen exakt das in Abschnitt 6.6 diskutierte Verhalten von $p(t)$ für kleine t . Der quadratische Abfall ist deutlich zu erkennen (auch bei einer logarithmischen Skala entspricht dies einem quadratisch-aussehenden Abfall). Das Verhalten von $p(t)$ für Zeiten „zwischen“ den Limiten $t \rightarrow 0$ und $t \rightarrow \infty$ wurde zwar hier nicht diskutiert, jedoch lässt sich eine Analyse in dem bereits zitierten Review von L. Fonda, G. Ghirardi und A. Rimini [24] finden: Das Kapitel 6 mit dem Titel „*The decay law at intermediate times*“ wird dort mit dem Satz „*We now want to show that the quantum-mechanical decay law is approximately exponential for intermediate times, [...]*“ eingeleitet, und dann auch mathematisch bewiesen.

Die von Raizen et al. gemessenen Daten erfüllen also auch diese allgemeine theoretische Vorhersage.

6.12. GSI-Anomalie: Gemessene Oszillationen im Zerfallsgesetz

Im Jahr 2008 veröffentlichten Litvinov et. al. ein Artikel mit dem Titel *Observation of Non-Exponential Orbital Electron Capture Decays of Hydrogen-Like ^{140}Pr and ^{142}Pm Ions* [36]. Dort finden sich die in Abb. 6 gezeigten Daten für den Zerfall von ^{142}Pm durch

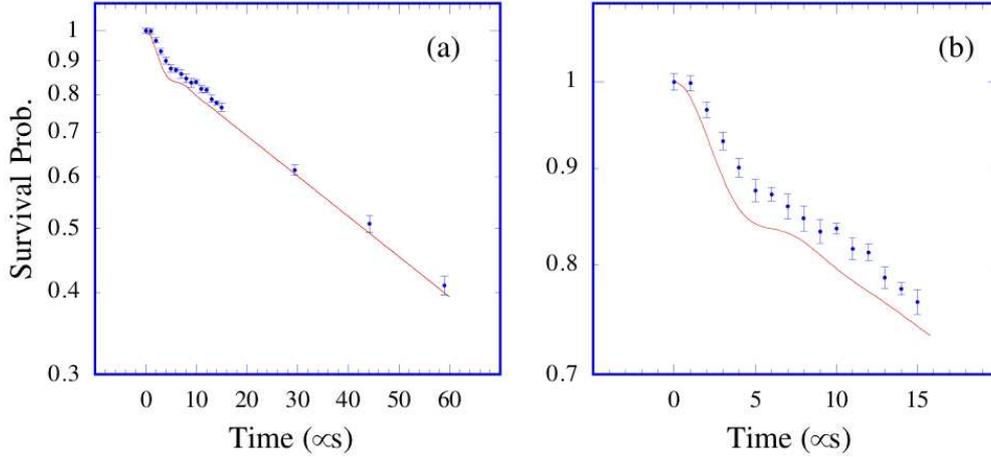


Abbildung 5: Überlebenswahrscheinlichkeit eines Natrium-Atoms im beschleunigten optischen Potential (entnommen aus [28], dort Fig. 3). Die Zeitachse gibt an, wie lange das Potential beschleunigt wurde. Die rote Linie entspricht den numerischen Ergebnissen eines einfachen theoretischen Modells, das ebenfalls in der Veröffentlichung vorgestellt wird. Die gemessenen Werte haben Fehlerbalken, welche einer Standardabweichung entsprechen. Zu beachten ist die logarithmische vertikale Achse.

Elektroneneinfang (electron capture, EC). In der hiesigen Notation entsprechen die Daten einer Messung von $-N\dot{p}(t)$, d.h. der Anzahl der Zerfälle pro Zeit, wobei N die Anzahl der ^{142}Pm -Ionen zur Zeit $t = 0$ ist. Die Messdaten wurden mit der Funktion

$$-N\dot{p}(t) = Ne^{-\lambda t} \lambda_{\text{EC}} (1 + \cos(\omega t + \Phi)), \quad (76)$$

$$N_0 \lambda_{\text{EC}} = 46, \quad \lambda = 0.0224, \quad a = 0.23, \quad \omega = 0.89.$$

gefitet. Zur theoretischen Reproduktion dieses Phänomens kann die bereits in Abschnitt 6.10 erwähnte Idee von F. Giacosa und G. Pagliara [15] angewendet werden: D.h. man geht von einer Breit-Wigner-Verteilung mit künstlich eingefügtem Cut-Off aus

$$d_S(E) = M \frac{\Gamma}{E^2 + \Gamma^2/4} \Theta(E - \Lambda_{\text{left}}) \Theta(\Lambda_{\text{right}} - E) \quad (77)$$

und berechnet darüber die Größe

$$-\dot{p}(t) = -\frac{d}{dt}(\mathcal{F}d_S)(t), \quad (78)$$

welche bis auf den Faktor N mit der Messgröße des GSI Experiments verglichen werden kann. Als Zahlenwerte werden $\Gamma = 0.0224$ und $\Lambda_{\text{right}} = -\Lambda_{\text{left}} = 40\Gamma$ gewählt, der Normierungsfaktor wird damit zu $M = 0.160432$. Das Ergebnis für $-\dot{p}(t)$ ist in Abb. 7 zu sehen. Die Oszillationen sind ähnlich zu den gemessenen. Das Zerfallsgesetz $p(t)$ weicht kaum sichtbar aber dennoch eindeutig von einer exponentiellen Form ab, wie in Abb. 8

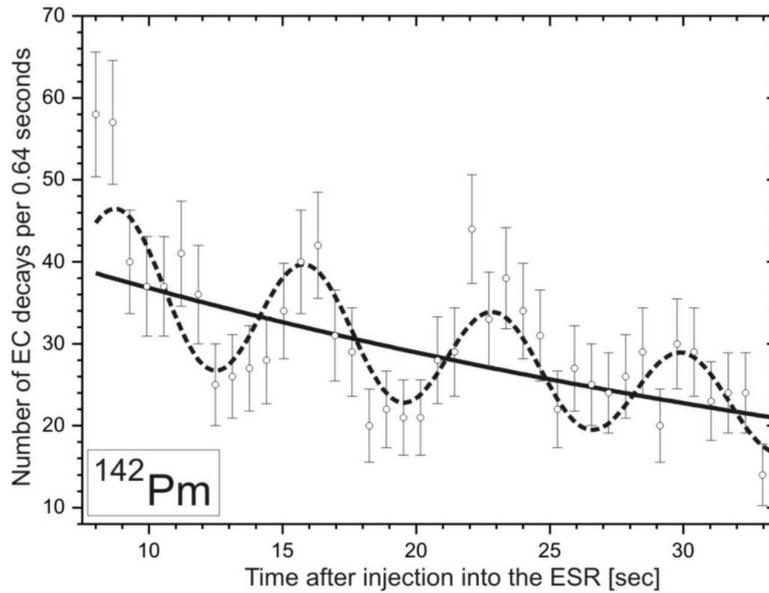


Abbildung 6: Ausschnitt aus den ersten 33 Sekunden des Zerfalls von ^{142}Pm durch Elektroneneinfang. Entnommen aus [36], dort Fig. 5.

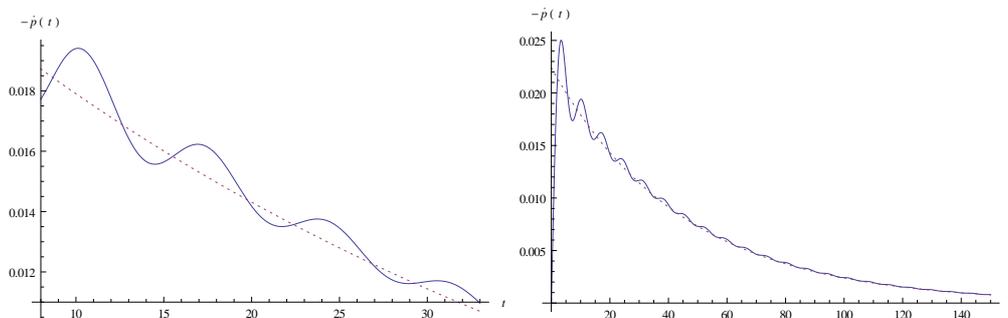


Abbildung 7: Theoretisches Ergebnis der Zerfälle pro Zeit im Verhältnis zur Teilchenzahl für den Zeitraum $t = 8 - 33\text{ s}$ und $t = 0 - 150\text{ s}$. Gepunktete Linie: Exponentieller Graph $-\frac{d}{dt}e^{-\Gamma t}$ als Vergleich.

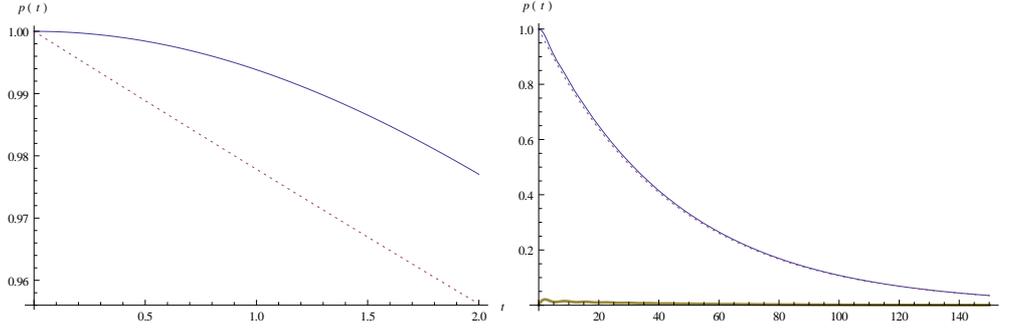


Abbildung 8: Theoretisches Ergebnis des Zerfallsgesetzes $p(t)$ (durchgezogene Linie) für $t = 0 - 2\text{s}$ und $t = 0 - 150\text{s}$. Gepunktete Linie: Exponentieller Graph $e^{-\Gamma t}$ als Vergleich. Dicke Linie: Differenz beider: $p(t) - e^{-\Gamma t}$.

zu sehen ist. Die stärksten Abweichungen lassen sich für kleine t finden, wie es für den allgemeinen Fall schon in Abb. 1 zu sehen war. Wie man an der Ableitung $-\dot{p}(t)$ erkennen kann sind die nennenswerten Abweichungen die Oszillationen und das Verschwinden von $-\dot{p}(0)$. Eine Messung für t nahe bei 0 könnte dieses Modell verifizieren. Der Cut-Off ist nicht willkürlich gewählt, sondern steht höchstwahrscheinlich im Zusammenhang mit der Wechselwirkung zwischen den ^{142}Pm -Ionen und dem Detektor (siehe [16] für Details). Damit bekäme dieses Modell auch eine tiefere physikalische Bedeutung und würde nicht allein der theoretischen Reproduktion des gemessenen Phänomens dienen, wie zu Beginn behauptet.

Die Ursache der Oszillationen in Neutrinooszillationen zu suchen [5] wird hier als widerlegt angesehen [4].

Ergänzend soll hier noch eine intuitiv, mathematische Ursache für die Oszillationen im theoretisch berechneten Zerfallsgesetz gegeben werden: Die Cut-Offs Λ_{left} und Λ_{right} bieten die Möglichkeit das Integral der Fourier-Transformation (21) als abzählbare Summe von Flächeninhalten im riemannschen Sinne zu interpretieren:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \left| \int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \right|^2 = \left| \int_{\Lambda_{\text{left}}}^{\Lambda_{\text{right}}} dE d_S(E) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \right|^2 \\
 &\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \left| \varepsilon \sum_{l=0}^{\frac{\Lambda_{\text{right}} - \Lambda_{\text{left}}}{\varepsilon}} d_S(\Lambda_{\text{left}} + l\varepsilon) e^{-\frac{i}{\hbar}(\Lambda_{\text{left}} + l\varepsilon)t} \right|^2 \\
 &= \varepsilon^2 \sum_{l, l'=0}^{\frac{\Lambda_{\text{right}} - \Lambda_{\text{left}}}{\varepsilon}} d_S(\Lambda_{\text{left}} + l\varepsilon) d_S(\Lambda_{\text{left}} + l'\varepsilon) e^{-\frac{i}{\hbar}(l-l')\varepsilon t} \\
 &\stackrel{p(t) \in \mathbb{R}}{=} \varepsilon^2 \sum_{l, l'=0}^{\frac{\Lambda_{\text{right}} - \Lambda_{\text{left}}}{\varepsilon}} d_S(\Lambda_{\text{left}} + l\varepsilon) d_S(\Lambda_{\text{left}} + l'\varepsilon) \cos\left(\frac{l-l'}{\hbar}\varepsilon t\right).
 \end{aligned} \tag{79}$$

Diese *abzählbare* Superposition von Kosinus-Funktionen hat sicherlich immer Oszillationen zu bieten. Man erkennt Ähnlichkeiten zur Berechnung von Rabi-Oszillationen, sodass

(79) in Kombination mit Abb. 7 und 8 veranschaulicht, dass $p(t)$ neben der annähernd exponentielle Form noch zusätzlich „aufgesetzte Rabi-Oszillationen“ aufweist.

6.13. Der Fall frequenter Messungen

Eine Messung, ob das System S zerfallen ist, hat Einfluss auf die weitere Überlebenswahrscheinlichkeit des Systems [29]. Dies ist eine Konsequenz aus dem Projektionspostulat, Gl. (9). Als Beispiel soll hier die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, ob das System nach der Zeit t , in der N Messungen des Operators W durchgeführt wurden (siehe Gl. (11)), noch immer im Anfangszustand vorzufinden ist. D.h. es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass alle N Messungen von W den Wert w_{udcy} (nicht zerfallen) ergeben haben. Nach der ersten Messung zur Zeit $\tau = t/N$ wurde der Zustand also auf

$$\frac{P_{\text{udcy}}U(\tau)|S\rangle}{\|P_{\text{udcy}}U(\tau)|S\rangle\|} = \frac{\langle S|U(\tau)|S\rangle |S\rangle}{\|\langle S|U(\tau)|S\rangle |S\rangle\|} = |S\rangle, \quad (80)$$

d.h. wieder auf den Anfangszustand projiziert. Der Zustand *nach* der ersten Messung entspricht also genau dem der Präparation: Es ist sozusagen ein Reset des Systems. Die Wahrscheinlichkeiten für solche Messungen entsprechen jeweils $p(\tau)$ und sind unabhängig. D.h. die Wahrscheinlichkeit das System nach N Messungen zur Zeit t noch immer als nicht-zerfallen vorzufinden ist

$$p(\tau)^N = p(t/N)^N. \quad (81)$$

Dies unterscheidet sich offenbar i.A. von der Wahrscheinlichkeit $p(t)$, die angibt, ob das System nach *einer* Messung noch nicht zerfallen ist. Frequente Messungen haben daher Einfluss auf die Überlebenswahrscheinlichkeit.

Für den Fall vieler Messungen N wird τ sehr klein und es kann die Entwicklung von Gl. (48) übernommen werden:

$$p(\tau) \approx 1 - \left(\frac{\Delta_S E}{\hbar}\right)^2 \tau^2. \quad (82)$$

Damit kann man schreiben:

$$p(\tau)^N = e^{N \ln[p(t/N)]} \approx e^{N \ln\left[1 - \left(\frac{\Delta_S E}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{t}{N}\right)^2\right]}. \quad (83)$$

Entwickelt man noch den Logarithmus um kleine t

$$\ln\left[1 - \left(\frac{\Delta_S E}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{t}{N}\right)^2\right] \approx -\left(\frac{\Delta_S E}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{t}{N}\right)^2, \quad (84)$$

so kann man mit Hilfe der Definition einer effektiven Zerfallsbreite

$$\gamma(\tau) = \frac{(\Delta_S E)^2}{\hbar} \tau \quad (85)$$

die Überlebenswahrscheinlichkeit nach N frequenten Messungen in der Zeit t ($\tau = t/N$ klein) näherungsweise als

$$e^{-\frac{\gamma(\tau)}{\hbar} t} \quad (86)$$

ausdrücken und bekommt eine exponentielle Form.

Fazit: Für den Fall hochfrequenter Messungen (Messintervall τ klein), kann das Zerfallsgesetz als exponentielles Zerfallsgesetz (86) genähert werden. Allerdings lässt sich ein kleines τ beliebig wählen, wodurch in einem gewissen Rahmen beliebige Zerfallsgesetze konstruiert werden können. Im Rahmen der Quantenmechanik ist demnach das Zerfallsgesetz nichts naturgegebenes bzw. Beobachter-unabhängiges, sondern wird erst durch den Beobachter erzeugt.

7. Quanten-Zeno-Paradoxon und Quanten-Zeno-Effekt

7.1. Das Quanten-Zeno-Paradoxon: Einfrieren der Zeitentwicklung

„A watched pot never boils.“
Englisches Sprichwort

Die bis zu dieser Stelle entwickelte Theorie bietet nun die Möglichkeit das in Kapitel 1 phänomenologisch beschriebenen Quanten-Zeno-Paradoxon mathematisch im Rahmen der Quantenmechanik herzuleiten:

Führt man formal den Limes $\tau \rightarrow 0$ bzw. $N \rightarrow \infty$ für die in Abschnitt 6.13 hergeleitete Überlebenswahrscheinlichkeit $e^{-\frac{\gamma(\tau)}{\hbar}t}$ bei frequenten Messungen mit Messintervallen τ durch, so lässt sich dies als „kontinuierliche Messung“ interpretieren, bei der die Überlebenswahrscheinlichkeit gegen 1 konvergiert:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} e^{-\frac{\gamma(\tau)}{\hbar}t} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\frac{\gamma(N)}{\hbar}t} = 1. \quad (87)$$

Das Überleben des Anfangszustandes wird damit zum sicheren Ereignis, das System ist sozusagen „eingefroren“. Dies ist nicht allein eine Folge aus dem Projektionspostulat, sondern auch aus dem Verhalten von $p(t)$ für kleine Zeiten (Gl. 48) und damit von der Zeitentwicklung eines Zustandes, welcher durch die Schrödingergleichung determiniert wird. Das Projektionspostulat alleine hätte bei einem anderen Verhalten von $p(t)$ nicht zwingend ein Einfrieren des Systems zur Folge, z.B. nicht bei der Annahme eines exponentiellen Zerfalls, denn ein solches fällt für kleine t zu schnell ab. Man kann dies auch so verdeutlichen, dass sich zwei benachbarte Zustände im Hilbertraum „ähnlich“ sind oder mit den Worten von A. Peres [7]: Zwei benachbarte Zustände im Hilbertraum „ähneln“ sich stärker, als klassisch erwartet. Formal lässt sich dies über die Ungleichung

$$|\langle \psi | \phi \rangle|^2 \geq 1 - \|\psi - \phi\|^2 \quad (88)$$

ausdrücken, wobei $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ zwei beliebige normierte Zustände sind.

Beweis. Dieser fehlt in [7] und wird daher hier nachgeholt.

$$\begin{aligned} \|\psi - \phi\|^2 &= \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \psi | \phi \rangle \geq 2 - 2|\langle \psi | \phi \rangle| \\ \Rightarrow |\langle \psi | \phi \rangle|^2 &\geq \left(1 - \frac{1}{2}\|\psi - \phi\|^2\right)^2 = 1 - \|\psi - \phi\|^2 + \frac{1}{4}\|\psi - \phi\|^4 \geq 1 - \|\psi - \phi\|^2. \end{aligned} \quad (89)$$

□

Ebenfalls nicht in [7] zu finden ist die direkte Anwendung der Ungleichung (88) für das Zerfallsgesetz (14):

$$p(t) = |\langle S | e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} | S \rangle|^2 \geq 1 - \left\| S - e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} S \right\|^2 = 2 \operatorname{Re} \alpha(t) - 1. \quad (90)$$

Entwickelt man dies um kleine t , folgt

$$p(t) \geq 1 - 2 \frac{\langle H^2 \rangle_S}{\hbar^2} t^2 + \mathcal{O}(t^3). \quad (91)$$

Dies beweist erneut, dass $p(t)$ von einer exponentiellen Form abweichen muss und eine Ursache des Quanten-Zeno-Paradoxons die „starke Ähnlichkeit“ benachbarter Quantenzustände und der daraus resultierende langsame Abfall von $p(t)$ für kleine t ist.

Dass nicht das Projektionspostulat alleine Schuld an dem Quanten-Zeno-Paradoxon hat, soll an dieser Stelle erneut betont werden. Als Gegenbeweis soll hier das exponentielle Zerfallsgesetz $p^{\text{exp}}(t) = e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{\hbar}t}$ herangezogen werden. Werden nun wieder N Messungen in der Zeit t durchgeführt, so lässt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit (wie in Abschnitt 6.13) über

$$p^{\text{exp}}(\tau)^N = e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{\hbar}\tau N} = e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{\hbar}t}, \quad \tau = \frac{t}{N}. \quad (92)$$

berechnen. Offensichtlich ist der Limes $\tau \rightarrow 0$ bzw. $N \rightarrow \infty$ hier völlig wirkungslos. Das Quanten-Zeno-Paradoxon bleibt aus.

Das Quanten-Zeno-Paradoxon ist strikt vom Quanten-Zeno-Effekt zu unterscheiden. Letzterer wird in Abschnitt 7.4 beschrieben.

7.2. Interpretation des Quanten-Zeno-Paradoxons

Die Frage ist, ob der mathematischen Limes $\tau \rightarrow 0$ physikalisch sinnvoll ist? Eine Messung selbst nimmt sicherlich Zeit in Anspruch und geht nicht instantan von statten. Dies beschränkt τ experimentell von unten. Theoretisch stellt dies den Gültigkeitsrahmen des Projektionspostulats, Gl. (9), in Frage, welches einen *instantanen* Kollaps des Zustandes verursacht (siehe dazu auch Kapitel 4 oder für eine tiefere Analyse [22]).

Ein starkes Argument gegen die wirkliche Existenz des Quanten-Zeno-Paradoxons bzw. gegen die Verwirklichung eines „eingefrorenen“ Quantensystems lieferten Nakazato et. al. [17]. Sie zeigten, dass der mathematische Limes $\tau \rightarrow 0$ unphysikalisch ist, indem sie ein Experiment vorschlugen, bei dem dieser Limes eine quantenmechanische Unschärferelation verletzt. Dies bedeutet zwar nicht, dass es kein Experiment für die Verwirklichung des Quanten-Zeno-Paradoxons geben kann, lässt aber stark vermuten, dass der Limes $\tau \rightarrow 0$ immer Unschärferelationen verletzt und damit unphysikalisch ist.

Für die Herleitung des Quanten-Zeno-Paradoxons war entscheidend, dass der Hamiltonoperator als explizit zeitunabhängig angenommen wurde. Wie im letzten Abschnitt beschrieben, folgt das Paradoxon aber nur aus dem daraus resultierenden Zerfallsgesetz *in Kombination* mit dem Projektionspostulat. Dies lässt die Vermutung zu, dass offene Quantensysteme (mit zeitabhängigen Hamiltonians) andere Zerfallsgesetze erzeugen, welche auch im Grenzfall der kontinuierlichen Beobachtung kein Quanten-Zeno-Paradoxon ergeben. Dass die prinzipiell möglich ist, wurde ebenfalls im letzten Abschnitt gezeigt.

7.3. Quanten-Zeno-Paradoxon und Energie-Zeit-Unschärfe

Inspiziert durch das Argument von Nakazato et. al. soll nun eine Untersuchung mit der Energie-Zeit-Unschärfe folgen. Wie in Abschnitt 6.3 angedeutet, ist es nicht rigoros Δt in einer Ungleichung $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ als Messintervalle zu interpretieren. In der Quantenmechanik gibt es keinen Zeitoperator, daher kann eine solche Ungleichung mit dieser

Interpretation nicht hergeleitet werden. Man könnte argumentieren, dass die Erzeugung des Quanten-Zeno-Paradoxons im Labor (unabhängig von sonstigen Problemen der Realisierbarkeit) mit einer Zerstörung des einzufrierenden Systems einhergehen müsse, da

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta t} \rightarrow \infty. \quad (93)$$

Dieses Argument ist nicht richtig, da es auf einer Ungleichung beruht, die mit dieser Bedeutung nicht aus der Quantenmechanik gewonnen werden kann. Ein solcher ungenauer Umgang mit der Energie-Zeit Unschärfe ist jedoch bekanntermaßen nicht unüblich. Dennoch muss die Schlussfolgerung nicht falsch sein, nur weil das Argument falsch ist. Es soll daher nun eine ähnliche aber quantenmechanisch exakte Ungleichung hergeleitet werden.

Als Vorbild dient die Idee von L. Mandelstam und I. Tamm [25]. Dabei wird auf den Operator W zurückgegriffen, der in Abschnitt 6.3 als Observable eingeführt und über die der instabile Zustand $|S\rangle$ präpariert wurde:

$$W = w_{\text{decay}}|S\rangle\langle S| + w_{\text{decay}}(\mathbb{1} - |S\rangle\langle S|).$$

Der zeitabhängige Zustand wird als $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|S\rangle$ notiert. Als Zeitunschärfe Δt_W wird nun die Zeit definiert, in der sich der Erwartungswert $\langle W \rangle_\psi$ um eine Standardabweichung $\Delta_\psi W$ ändert (d.h. es handelt sich eigentlich um eine Zeitspanne):

$$\left| \frac{d}{dt} \langle W \rangle_\psi \right| \Delta t_W = \Delta_\psi W. \quad (94)$$

Über das Ehrenfest-Theorem

$$\frac{d}{dt} \langle W \rangle_\psi = \frac{i}{\hbar} \langle [H, W] \rangle_\psi \quad (95)$$

und der allgemeinen Unschärferelation für Operatoren

$$\Delta_\psi H \Delta_\psi W \geq \frac{1}{2} |\langle [H, W] \rangle_\psi| \quad (96)$$

erhält man damit direkt

$$\Delta E \Delta t_W \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{bzw.} \quad \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta t_W}, \quad (97)$$

wobei natürlich die Notation $\Delta_\psi H = \Delta E$ verwendet wurde. Man könnte nun versucht sein zu glauben, dass damit ein Weg gefunden ist, die Behauptung (93) zu rechtfertigen. Dies ist allerdings nicht der Fall, wie im Folgenden gezeigt wird.

Die Zeitspanne Δt_W ist selbst zeitabhängig und kann über die Überlebenswahrscheinlichkeit ausgedrückt werden:

$$\Delta t_W = \frac{\Delta_\psi W}{\left| \frac{d}{dt} \langle W \rangle_\psi \right|} = \frac{\sqrt{p(t) - p^2(t)}}{|\dot{p}(t)|}. \quad (98)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt} \langle W \rangle_\psi \right| &= \left| \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | W | \psi(t) \rangle \right| & (99) \\
&= \left| \frac{d}{dt} \left[w_{\text{udcy}} \langle S | e^{\frac{i}{\hbar} H t} | S \rangle \langle S | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | S \rangle + w_{\text{dcy}} - w_{\text{dcy}} \langle S | e^{\frac{i}{\hbar} H t} | S \rangle \langle S | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | S \rangle \right] \right| \\
&= |\dot{p}(t)(w_{\text{udcy}} - w_{\text{dcy}})|
\end{aligned}$$

Durch analoge Rechnung folgt:

$$\begin{aligned}
\Delta_\psi W &= \sqrt{\langle W^2 \rangle_\psi - \langle W \rangle_\psi^2} & (100) \\
&= \sqrt{p(t)(w_{\text{udcy}}^2 - w_{\text{dcy}}^2) - 2p(t)(w_{\text{udcy}} - w_{\text{dcy}})w_{\text{dcy}} - p^2(t)(w_{\text{udcy}} - w_{\text{dcy}}) - 2w_{\text{dcy}}^2}.
\end{aligned}$$

Durch die freie Wahl der Eigenwerte $w_{\text{udcy}} = 1$ und $w_{\text{dcy}} = 0$ folgt direkt die Behauptung. \square

Interessant ist nun die Frage, ob Δt_W zu bestimmten Zeiten verschwindet. Denn für die Energieunschärfe folgt dann nach (97) $\Delta E \geq \infty$. Gleichung (98) zeigt aber, dass dies nie der Fall sein kann, denn

$$\frac{\sqrt{p(t) - p^2(t)}}{|\dot{p}(t)|} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(t) = 1 \quad \wedge \quad |\dot{p}(t)| \neq 0 \quad (101)$$

hat keine Lösung. Die Behauptung (93) kann also wieder nicht begründet werden. Auch sonst sind dem Autor keine korrekten Argumentationen bekannt, welche auf einer Energie-Zeit-Unschärfe beruhen und dem Quanten-Zeno-Paradoxon widersprechen. Als Argumente gegen das Quanten-Zeno-Paradoxon verbleiben also nur die in Abschnitt 7.2 genannten.

Im Gegensatz dazu gibt es unter Annahme eines exponentiellen Zerfallsgesetzes sehr wohl einen solchen Zeitpunkt:

$$\frac{\sqrt{e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t} - e^{-\frac{2\Gamma}{\hbar}t}}}{\frac{\Gamma}{\hbar}e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0. \quad (102)$$

Abbildung 9 zeigt einen Vergleich zwischen einem exponentiellen Zerfallsgesetz und dem Zerfallsgesetz aus dem Cut-Off Modell (Abschnitt 6.12) bezüglich der Ungleichung (97).

7.4. Zeno Regime und Heraklit Regime

Wenn man von einem exponentiellen Zerfallsgesetz im Sinne der Näherung (66) ausgeht, bietet sich die Frage an, ob es möglich, ist ein konkretes Messintervall $\tilde{\tau}$ zu finden, welches ein gleiches Zerfallsgesetz bei frequenten Messungen mit $\tilde{\tau}$ im Sinne von (86) erzeugt? Zerfällt ein System also näherungsweise exponentiell mit der Zerfallsbreite Γ^{exp} aus Gl. (65), dann soll das gesuchte Messintervall $\tilde{\tau}$ folgende Gleichung $\forall t$ erfüllen:

$$e^{-\frac{\gamma(\tilde{\tau})}{\hbar}t} = e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{\hbar}t}, \quad (103)$$

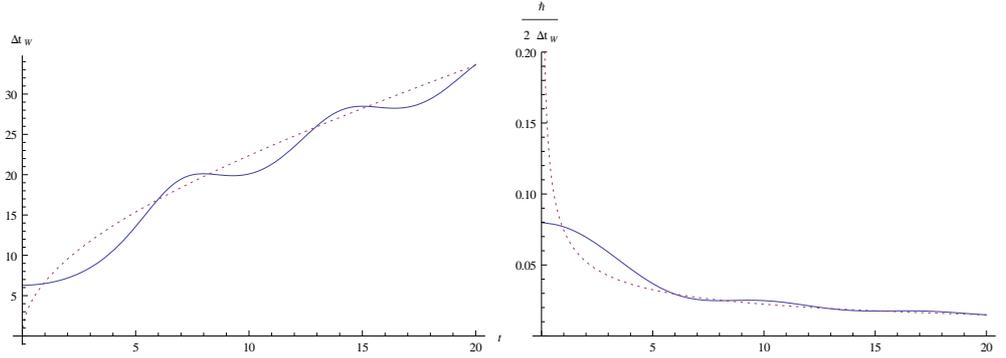


Abbildung 9: Links: Δt_W für ein exponentielles (gepunktet) und ein nicht-exponentielles (durchgezogen) Zerfallsgesetz aus dem Kapitel der GSI Anomalie. Rechts: untere Schranke für ΔE für ein exponentielles (gepunktet) und ein nicht-exponentielles Zerfallsgesetz (durchgezogen) aus dem Kapitel der GSI Anomalie.

wobei diese Gleichung nur Sinn ergibt, wenn $\tilde{\tau}$ wirklich klein ist, damit die Näherung gilt. Sie ist daher weniger als Bestimmungsgleichung für $\tilde{\tau}$ aufzufassen, sondern vielmehr als Identität, *falls* ein solches $\tilde{\tau}$ existiert. Äquivalenzumformung ergibt:

$$\tilde{\tau} = \frac{\hbar \Gamma^{\text{exp}}}{(\Delta_S E)^2}. \quad (104)$$

Die Existenz von $\tilde{\tau}$ hängt also von der Zerfallsbreite Γ^{exp} und von der Energieunschärfe $\Delta_S E$ ab, bzw. davon, ob der Quotient der rechten Seite klein genug ist.

Jede Wahl eines Messintervalls $\tau < \tilde{\tau}$ wird dann ein langsamer abfallendes Zerfallsgesetz als $e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{\hbar} t}$ zur Folge haben und jede Wahl von $\tau > \tilde{\tau}$ ein schneller abfallendes (wobei τ nicht zu groß werden darf, damit die Näherung (86) noch gilt).

Facchi und Pascazio [29] definierten daher:

- $\tau < \tilde{\tau}$: Zeno-Regime, Verlangsamung des Zerfalls (Quanten-Zeno-Effekt).
- $\tau > \tilde{\tau}$: Heraklit-Regime, Beschleunigung des Zerfalls (Anti-Zeno-Effekt).

Der QZE und das Zeno-Regime sind immer zu erreichen, da hier die Näherung per Definition gilt. Eine Beschleunigung der Zerfalls im Heraklit-Regime ist dagegen nur dann erreichbar, wenn $\tilde{\tau}$ so klein ist, dass es noch $\tau > \tilde{\tau}$ gibt, für welche diese Näherung ebenfalls gilt.

7.5. Experimenteller Nachweis

Nach einer Idee von R. J. Cook [31] führten W. M. Itano et al. 1990 [35] ein Experiment durch, bei dem der Quanten-Zeno-Effekt (d.h. eine Verlangsamung des Zerfalls eines Quantenzustandes) als messbarer Effekt auftauchte. Die instabilen Zustände waren

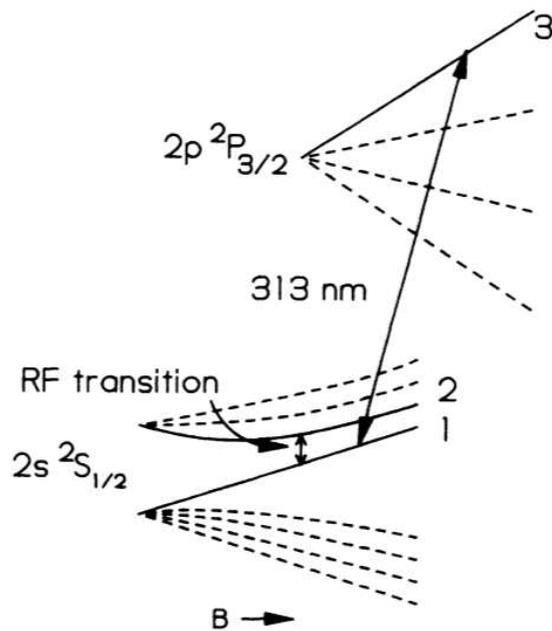


Abbildung 10: Schematische Darstellung der Hyperfeinstruktur eines ${}^9\text{Be}^+$ Ions im Magnetfeld B . Die drei relevanten Energieniveaus sind mit 1, 2 und 3 gekennzeichnet. Entnommen aus [35], dort Fig. 2.

durch hyperfeinstruktur grundzustands-Energieniveaus von ${}^9\text{Be}^+$ Ionen in einer Penning-Falle gegeben. Es ist zu betonen, dass es sich dabei um einen Fall handelt, der in dieser Bachelorarbeit nicht besprochen wird, da offensichtlich kein kontinuierliches Energiespektrum vorliegt. Dessen ungeachtet wurden die Elektronen dieser Ionen in instabile Zustände gebracht, in dem man sie durch Lichtpulse in eine Superposition zweier Energieniveaus anregte. Der Zerfall ist dann der Übergang in jeweils einen der beiden konkreten Zustände der Superposition.

Um den Zerfall zu messen, bediente man sich eines dritten angeregten Zustandes. Mit 1, 2 und 3 seien die drei Energieniveaus in energetisch aufsteigender Reihenfolge bezeichnet, siehe Abb. 10. Durch eingestrahelte Photonen mit Energie der Differenz von 2 zu 1 konnte ein Elektron in eine instabile Superposition aus 1 und 2 gebracht werden. Nach Präparation dieses Zustandes konnte durch einen Lichtpuls, der ein Elektron ausschließlich von 1 nach 3 anheben kann, geprüft werden, ob sich das Elektron noch in dieser Superposition befindet. Denn das Niveau 3 ist so gewählt, dass der einzig mögliche spontane Zerfall von $3 \rightarrow 1$ deutlich schneller passiert als $2 \rightarrow 1$. Durch Messung eines Photons der Energiedifferenz $3 \rightarrow 1$ kollabiert die Wellenfunktion des Elektrons also in den Zustand 1 und befindet sich nicht mehr in der instabilen Superposition aus 1 und 2.

Jeder Lichtpuls für $1 \rightarrow 3$ stellte also mitsamt dem Erwarten eines Photons der Energie von $3 \rightarrow 1$ eine Messung der instabilen Superposition aus 1 und 2 dar. Erhöht man die Anzahl der Lichtpulse, so ist dies eine Erhöhung der Messfrequenz, wie sie in Abschnitt 6.13

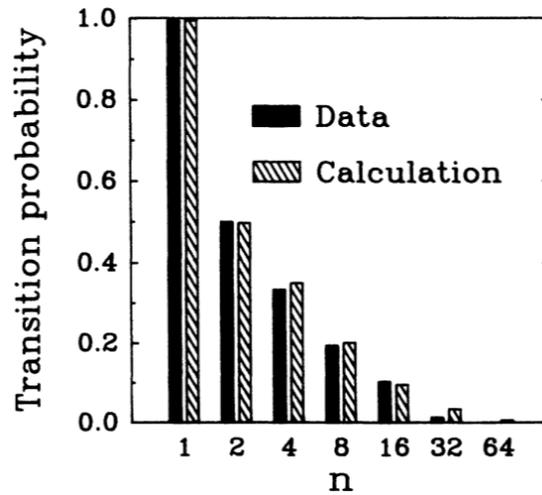


Abbildung 11: Zerfallswahrscheinlichkeit der Superposition aus 1 und 2 in Abhängigkeit der Anzahl von Lichtpulsen n für $1 \rightarrow 3$ in einer festen Zeit. Entnommen aus [35], dort Fig. 4.

diskutiert wurde. Abbildung 11 zeigt die Überlebenswahrscheinlichkeit der Superposition aus 1 und 2 in Abhängigkeit der Anzahl dieser Lichtpulse. Der Quanten-Zeno-Effekt ist deutlich zu erkennen.

Dies war der erste Nachweis des Quanten-Zeno-Effekts.

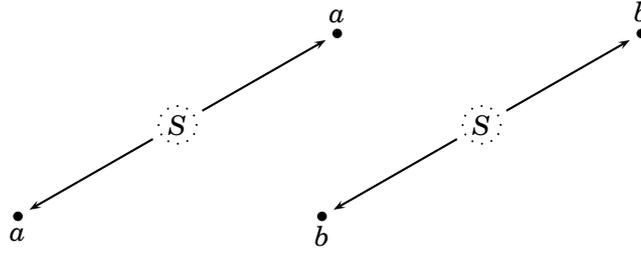


Abbildung 12: Zerfall von Teilchen S in zwei Kanäle a und b

8. Teilchenzerfall in zwei Kanäle: Modell mit Lee-Hamiltonian

In diesem Kapitel soll als instabiles quantenmechanisches System der konkrete Fall eines Teilchens S betrachtet werden, welches auf zwei Arten in Tochterteilchen, d.h. in zwei Kanäle (Teilchen a und Teilchen b) zerfallen kann (Abb. 8). Es ist allerdings problematisch den Fall eines instabilen Teilchens in der Quantenmechanik zu behandeln. Denn der Zerfall soll nicht ein „Zerbrechen“ des Teilchens in Bruchstücke, sondern ein komplettes Verschwinden des Teilchens bedeuten, gefolgt vom plötzlichen Auftauchen von Tochterteilchen (in diesem Fall a - oder b -Teilchen). Dieses Verschwinden lässt die Schrödingergleichung jedoch nicht zu, folgt doch aus ihr die Kontinuitätsgleichung für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens: die Wahrscheinlichkeit, das zu Beginn vorhanden Teilchen, zu irgendeinem Zeitpunkt irgendwo zu finden ist 1, d.h. das Teilchen kann nicht verschwinden. Per Konstruktion der Quantenmechanik, soll im Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ alle zugängliche Information über das System stecken. Wenn aber das Teilchen selbst das System ist, so ist die Frage nach seinem Verschwinden sinnlos, denn es können nur Fragen innerhalb des Systems beantwortet werden.

8.1. Der Lee-Hamiltonian

Die Lösung des Problems bietet eine andere Interpretation der Zustände bzw. eine andere Interpretation dessen, was das System sein soll. Das System soll nun aus dem ruhenden instabilen Teilchen selbst und unendlich vielen Tochterteilchen a und b mit verschiedenen Impulsen bestehen. Jeder Vektor $|S\rangle$, $|a_{\mathbf{k}}\rangle$ oder $|b_{\mathbf{k}}\rangle$ aus dem Hilbertraum \mathcal{H} wird als Anwesenheit eines Teilchens S , a oder b mit bestimmten Impuls \mathbf{k} interpretiert:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b \quad (105)$$

mit

$$\mathcal{H}_S = \mathcal{P}_S \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_a = \mathcal{P}_a \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_b = \mathcal{P}_b \mathcal{H} \quad (106)$$

und

$$\mathcal{P}_S = |S\rangle\langle S|, \quad \mathcal{P}_a = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k |a_{\mathbf{k}}\rangle\langle a_{\mathbf{k}}|, \quad \mathcal{P}_b = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k |b_{\mathbf{k}}\rangle\langle b_{\mathbf{k}}|, \quad (107)$$

sowie $\langle S|S\rangle = 1$, $\langle a_{\mathbf{k}}|a_{\mathbf{k}'}\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, $\langle b_{\mathbf{k}}|b_{\mathbf{k}'}\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, $\langle S|a_{\mathbf{k}}\rangle = \langle S|b_{\mathbf{k}}\rangle = \langle b_{\mathbf{k}}|a_{\mathbf{k}'}\rangle = 0$. In dieser Basis des Hilbertraums wird der Hamiltonoperator H in einen diagonalen Teil H_0 und nicht-diagonalen Teil $H_{I_a} + H_{I_b}$ aufgeteilt:

$$H = H_0 + H_I, \quad H_I = H_{I_a} + H_{I_b} \quad (108)$$

mit

$$\begin{aligned} H_0 &= \mathcal{P}_S H \mathcal{P}_S + \mathcal{P}_a H \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b H \mathcal{P}_b, \\ H_{I_a} &= \mathcal{P}_S H \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_a H \mathcal{P}_S, \\ H_{I_b} &= \mathcal{P}_S H \mathcal{P}_b + \mathcal{P}_b H \mathcal{P}_S. \end{aligned} \quad (109)$$

Die diagonalen Elemente entsprechen den Dispersionsrelationen freier Teilchen:

$$\langle S|H_0|S\rangle = E_S = m_S c^2, \quad \langle a_{\mathbf{k}}|H_0|a_{\mathbf{k}}\rangle = E_a(\mathbf{k}), \quad \langle b_{\mathbf{k}}|H_0|b_{\mathbf{k}}\rangle = E_b(\mathbf{k}). \quad (110)$$

Die Wechselwirkung, welche für die Erzeugung und Vernichtung der Teilchen verantwortlich ist, steckt im nicht-diagonalen Teil des Hamiltonians und entspricht den Formfaktoren der Teilchen a und b :

$$\begin{aligned} \langle S|H_I|a_{\mathbf{k}}\rangle &= \overline{\langle a_{\mathbf{k}}|H_I|S\rangle} = g_a f_a(\mathbf{k}), \\ \langle S|H_I|b_{\mathbf{k}}\rangle &= \overline{\langle b_{\mathbf{k}}|H_I|S\rangle} = g_b f_b(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (111)$$

wobei g_a und g_b die Kopplungskonstanten sind, sodass Stärke und Vorhandensein der Wechselwirkung kontrolliert werden kann. Zwischen a und b soll keine Wechselwirkung herrschen:

$$\langle a_{\mathbf{k}}|H_I|b_{\mathbf{k}'}\rangle = \overline{\langle b_{\mathbf{k}'}|H_I|a_{\mathbf{k}}\rangle} = 0. \quad (112)$$

Der so eindeutig festgelegte Hamiltonoperator wurde bereits von T. D. Lee [33] als effektives Modell zur Beschreibung von Teilchenzerfällen eingeführt bzw. zur Untersuchung des Renormierungsproblems. Für die hier im Vordergrund stehende Frage nach der Überlebenswahrscheinlichkeit $p(t)$ des instabilen Teilchens S , welches in zwei Kanäle zerfallen kann, wurde ein solcher Lee-Hamiltonian von F. Giacosa [14] vorgeschlagen.

Der bereits festgelegte Hamiltonoperator kann nun so aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} H_0 &= E_S S^\dagger S + \int_{\mathbb{R}^3} d^3k E_a(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3k E_b(\mathbf{k}) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}, \\ H_{I_a} &= g_a \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} f_a(\mathbf{k}) \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger S + S^\dagger a_{\mathbf{k}} \right), \\ H_{I_b} &= g_b \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} f_b(\mathbf{k}) \left(b_{\mathbf{k}}^\dagger S + S^\dagger b_{\mathbf{k}} \right), \end{aligned} \quad (113)$$

wobei hier die Identifikation

$$S^\dagger S = |S\rangle\langle S|, \quad a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} = |a_{\mathbf{k}}\rangle\langle a_{\mathbf{k}}|, \quad b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} = |b_{\mathbf{k}}\rangle\langle b_{\mathbf{k}}|, \quad S^\dagger a_{\mathbf{k}} = |S\rangle\langle a_{\mathbf{k}}|, \quad S^\dagger b_{\mathbf{k}} = |S\rangle\langle b_{\mathbf{k}}| \quad (114)$$

gemacht wurde, sodass der Hamiltonian in der üblichen Schreibweise mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren geschrieben werden kann.

Im Rahmen dieses Modells soll der Anfangszustand zur Zeit $t = 0$ durch $|S\rangle$ gegeben sein, d.h. es liegt zu Beginn nur das instabile Teilchen S vor.

8.2. Die Energiedichte des instabilen Teilchens

Wie in Abschnitt 6.4 auf S. 21 beschrieben, kann über den gegebenen Hamiltonian die Energiedichte d_S des Teilchens S berechnet werden. Der Weg führt über den dort definierten Propagator G_S , für den nun ein geeigneter Ausdruck entwickelt wird:

$$\begin{aligned} G_S(E) &= \langle S | \frac{1}{E - H + i\varepsilon} | S \rangle = \langle S | \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} \frac{1}{1 - (E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I} | S \rangle \\ &= \frac{1}{E - E_S + i\varepsilon} \langle S | \frac{1}{1 - (E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I} | S \rangle. \end{aligned} \quad (115)$$

Durch Ausnutzen der Neumann-Reihe

$$\frac{1}{1 - (E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I} = \sum_{k=0}^{\infty} [(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I]^k \quad (116)$$

lässt sich der Propagator als

$$G_S(E) = \frac{1}{E - E_S + i\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \langle S | [(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I]^k | S \rangle \quad (117)$$

ausdrücken. Für den Operator $[(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I]^k$ ist $|S\rangle$ für alle geraden k ein Eigenzustand.

Beweis. Die Wirkung von $[(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I]^2$ auf $|S\rangle$ ist exakt lösbar. Der Zustand $|S\rangle$ stellt sich als Eigenzustand heraus:

$$\begin{aligned} &[(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I]^2 |S\rangle \quad (118) \\ &= (E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I \left[g_a \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f_a(\mathbf{k})}{E - E_a(\mathbf{k}) + i\varepsilon} |a_{\mathbf{k}}\rangle + g_b \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f_b(\mathbf{k})}{E - E_b(\mathbf{k}) + i\varepsilon} |b_{\mathbf{k}}\rangle \right] \\ &= \frac{1}{E - E_S + i\varepsilon} \left[g_a \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{f_a^2(\mathbf{k})}{E - E_a(\mathbf{k}) + i\varepsilon} + g_b \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{f_b^2(\mathbf{k})}{E - E_b(\mathbf{k}) + i\varepsilon} \right] |S\rangle \sim |S\rangle. \end{aligned}$$

Jede Anwendung von $[(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I]^k$ auf $|S\rangle$ lässt sich für alle gerade k in $k/2$ Anwendungen von $[(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I]^2$ auf $|S\rangle$ aufspalten. Daraus folgt die Behauptung. \square

Dadurch stellt sich heraus, dass die Summanden $\langle S | [(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I]^k | S \rangle$ für alle ungeraden k verschwinden, denn

$$\begin{aligned} \langle S | [(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I]^{2k+1} | S \rangle &= \langle S | (E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I [(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I]^{2k} | S \rangle \\ &\sim \frac{1}{E - E_S + i\varepsilon} \langle S | H_I | S \rangle = 0. \end{aligned} \quad (119)$$

Es bleiben demnach nur noch die Summanden mit geradem k übrig, welche als

$$\langle S | [(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I]^{2k} | S \rangle =: \langle S | [(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} \widehat{\Sigma}_E]^{2k} | S \rangle \quad (120)$$

ausgedrückt werden, wobei $\widehat{\Sigma}_E = H_I(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1}H_I$ ein rekursiv auftauchender Operator ist. Nun nimmt der Propagator die Form

$$G_S(E) = \frac{1}{E - E_S + i\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \langle S | [(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} \widehat{\Sigma}_E]^k | S \rangle \quad (121)$$

an. Erneutes Ausnutzen der Neumann-Reihe liefert

$$G_S(E) = \langle S | \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} [(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} \widehat{\Sigma}_E]^k | S \rangle = \langle S | \frac{1}{E - H_0 - \widehat{\Sigma}_E + i\varepsilon} | S \rangle. \quad (122)$$

Mit der Definition der Selbstenergie

$$\Sigma_S(E) = \langle S | \widehat{\Sigma}_E | S \rangle = \langle S | H_I (E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I | S \rangle \quad (123)$$

bekommt man schlussendlich

$$G_S(E) = \frac{1}{E - E_S - \Sigma_S(E) + i\varepsilon}. \quad (124)$$

Die Selbstenergie $\Sigma_S(E)$ lässt sich in einen kompakten analytischen Ausdruck umformen, denn die dafür nötige Wirkung des Hamiltonians lässt sich berechnen und ist im letzten Beweis zu finden:

$$\Sigma_S(E) = g_a^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f_a^2(\mathbf{k})}{E - E_a(\mathbf{k}) + i\varepsilon} + g_b^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f_b^2(\mathbf{k})}{E - E_b(\mathbf{k}) + i\varepsilon}. \quad (125)$$

Das Ziel ist die Energiedichte, welche man nach Gl. 30 von S. 22 über

$$d_S(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_S(E)$$

erhält. Der Imaginärteil von $G_S(E)$ beläuft sich mit der Notation $\Sigma_S(E) = \text{Re} \Sigma_S(E) + i \text{Im} \Sigma_S(E)$, wie man leicht sieht, auf

$$\text{Im} G_S(E) = \frac{\text{Im} \Sigma_S(E)}{[E - E_S - \text{Re} \Sigma_S(E)]^2 + [\text{Im} \Sigma_S(E)]^2}, \quad (126)$$

sodass sich die Energiedichte

$$d_S(E) = -\frac{1}{\pi} \frac{\text{Im} \Sigma_S(E)}{[E - E_S - \text{Re} \Sigma_S(E)]^2 + [\text{Im} \Sigma_S(E)]^2} \quad (127)$$

ergibt. Mit der Identifikation einer Zerfallsbreite

$$\Gamma_S(E) = -2 \text{Im} \Sigma_S(E) \quad (128)$$

wird daraus

$$d_S(E) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_S(E)}{[E - E_S - \text{Re} \Sigma_S(E)]^2 + \Gamma_S^2(E)/4}. \quad (129)$$

Dies hat formale Ähnlichkeit zur Breit-Wigner-Verteilung (72) von S. 29. Jede Wahl von $E_a(\mathbf{k})$, $E_b(\mathbf{k})$, $f_a(\mathbf{k})$ und $f_b(\mathbf{k})$, welche das Spektrum des Hamiltonoperators (113) von unten beschränkt, hat natürlich auch einen unteren Cut-Off in $d_S(E)$ zur Folge. Welche mathematischen Kriterien die Formfaktoren und Dispersionsrelationen erfüllen müssen, damit die Energiedichte wirklich von unten beschränkt ist, konnte nicht herausgefunden werden. Es genügt hier die untere Schranke in einem Plot der Energiedichte sichtbar vorzufinden.

Dennoch kann wegen der Ähnlichkeit von $d_S(E)$ mit einer Breit-Wigner-Verteilung von einem Zerfallsgesetz ausgegangen werden, welches Ähnlichkeit zu einem exponentiellen Zerfallsgesetz hat (gemäß Abschnitt 6.9).

8.3. Wahrscheinlichkeit für den Zerfall in einen Kanal

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen S in den Kanal a oder b zerfällt ist, analog zu Gl. (14), die Summe aller „Entstehungswahrscheinlichkeiten“

$$|\langle a_{\mathbf{k}} | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | S \rangle|^2 \quad \text{bzw.} \quad |\langle b_{\mathbf{k}} | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | S \rangle|^2, \quad (130)$$

d.h.

$$p_{S \rightarrow a}(t) = \int d^3 k |\langle a_{\mathbf{k}} | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | S \rangle|^2 \quad \text{bzw.} \quad p_{S \rightarrow b}(t) = \int d^3 k |\langle b_{\mathbf{k}} | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | S \rangle|^2. \quad (131)$$

Die Berechnung der Matrixelemente lässt sich ähnlich vollziehen, wie im letzten Abschnitt beschrieben. Man erhält:

$$\langle a_{\mathbf{k}} | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | S \rangle = g_a \frac{f_a(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E_a(\mathbf{k})t} - e^{-\frac{i}{\hbar} E t}}{E_a(\mathbf{k}) - E} \quad (132)$$

und

$$\langle b_{\mathbf{k}} | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | S \rangle = g_b \frac{f_b(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E_b(\mathbf{k})t} - e^{-\frac{i}{\hbar} E t}}{E_b(\mathbf{k}) - E}. \quad (133)$$

Die Wahrscheinlichkeiten für den Zerfall in einen Kanal werden damit zu

$$p_{S \rightarrow a}(t) = g_a^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left| f_a(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E_a(\mathbf{k})t} - e^{-\frac{i}{\hbar} E t}}{E_a(\mathbf{k}) - E} \right|^2, \quad (134)$$

$$p_{S \rightarrow b}(t) = g_b^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left| f_b(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E_b(\mathbf{k})t} - e^{-\frac{i}{\hbar} E t}}{E_b(\mathbf{k}) - E} \right|^2.$$

Offensichtlich muss gelten:

$$1 - p(t) = p_{S \rightarrow a}(t) + p_{S \rightarrow b}(t). \quad (135)$$

Beweis. Es genügen die Voraussetzungen $\langle S|S\rangle = 1$ und $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}e^{\frac{i}{\hbar}Ht} = \mathbb{1}$. Denn

$$\begin{aligned}
& \langle S|S\rangle = 1 \\
& \Leftrightarrow \\
& \langle S|e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\mathbb{1}e^{\frac{i}{\hbar}Ht}|S\rangle = 1 \\
& \Leftrightarrow \\
& \langle S|e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\left[|S\rangle\langle S| + \int d^3k|a_{\mathbf{k}}\rangle\langle a_{\mathbf{k}}| + \int d^3k|b_{\mathbf{k}}\rangle\langle b_{\mathbf{k}}|\right]e^{\frac{i}{\hbar}Ht}|S\rangle = 1 \\
& \Leftrightarrow \\
& p(t) + p_{S\rightarrow a}(t) + p_{S\rightarrow b}(t) = 1.
\end{aligned} \tag{136}$$

□

8.4. Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten und Definitionen der Zerfallsraten

Es werden zunächst die Zerfallsraten definiert:

$$h(t) = -\dot{p}(t), \quad h_{S\rightarrow a}(t) = \dot{p}_{S\rightarrow a}(t), \quad h_{S\rightarrow b}(t) = \dot{p}_{S\rightarrow b}(t). \tag{137}$$

Offensichtlich gilt

$$h(0) = h_{S\rightarrow a}(0) = h_{S\rightarrow b}(0) = 0 \quad \text{sowie} \quad h(t), h_{S\rightarrow a}(t), h_{S\rightarrow b}(t) > 0 \quad \forall t. \tag{138}$$

Letzteres ist intuitiv klar: die Überlebenswahrscheinlichkeit für S nimmt ab und die Entstehungswahrscheinlichkeiten für die Kanäle a und b nimmt zu. Ersteres weist auf den Quanten-Zeno-Effekt hin: hochfrequente Messungen können ein Zerfall von S bzw. die Entstehung von a - oder b -Teilchen verlangsamen. Außerdem zeigt es, dass auch $p_{S\rightarrow a}(t)$ und $p_{S\rightarrow b}(t)$ keine exponentielle Form haben können.

8.5. Grenzfall: exponentieller Zerfall in zwei Kanäle als Vergleich

Um die numerischen Ergebnisse des Lee-Modells mit dem Fall eines exponentiellen Zerfalls vergleichen zu können, werden hier nun die zum Vergleich relevanten Größen formal definiert:

$$\begin{aligned}
p^{\text{exp}}(t) &= e^{-\frac{1}{\hbar}\Gamma^{\text{exp}}t} \\
p_{S\rightarrow a}^{\text{exp}}(t) &= \frac{\Gamma_{S\rightarrow a}^{\text{exp}}}{\Gamma^{\text{exp}}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\hbar}\Gamma^{\text{exp}}t}\right) \\
p_{S\rightarrow b}^{\text{exp}}(t) &= \frac{\Gamma_{S\rightarrow b}^{\text{exp}}}{\Gamma^{\text{exp}}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\hbar}\Gamma^{\text{exp}}t}\right).
\end{aligned} \tag{139}$$

Dies ergibt sich aus der Näherung, wie sie in Abschnitt 6.8 erläutert wurde. Eine ausführliche Herleitung findet sich in [14]. Dort ist sie als Grenzfall der Breit-Wigner-Energiedichte

aufgefasst. Die Zerfallsraten werden zu

$$\begin{aligned}
h^{\text{exp}}(t) &= \frac{\Gamma^{\text{exp}}}{\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar} \Gamma^{\text{exp}} t} \\
h_{S \rightarrow a}^{\text{exp}}(t) &= \frac{\Gamma_{S \rightarrow a}^{\text{exp}}}{\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar} \Gamma^{\text{exp}} t} \\
h_{S \rightarrow b}^{\text{exp}}(t) &= \frac{\Gamma_{S \rightarrow b}^{\text{exp}}}{\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar} \Gamma^{\text{exp}} t}.
\end{aligned} \tag{140}$$

Zur Berechnung der genäherten Zerfallsbreiten $\Gamma^{\text{exp}} = \Gamma_{S \rightarrow a}^{\text{exp}} + \Gamma_{S \rightarrow b}^{\text{exp}}$ kann auf die Approximation (64) zurückgegriffen werden, wobei natürlich noch die Notation angepasst wurde:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\text{exp}} &\approx 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\langle a_{\mathbf{k}} | H_I | S \rangle|^2 \delta(E_S - E_a(\mathbf{k})) + 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\langle b_{\mathbf{k}} | H_I | S \rangle|^2 \delta(E_S - E_b(\mathbf{k})) \\
&= \underbrace{2\pi g_a^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |f_a(\mathbf{k})|^2 \delta(E_S - E_a(\mathbf{k}))}_{\Gamma_{S \rightarrow a}^{\text{exp}}} + \underbrace{2\pi g_b^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |f_b(\mathbf{k})|^2 \delta(E_S - E_b(\mathbf{k}))}_{\Gamma_{S \rightarrow b}^{\text{exp}}} \tag{141}
\end{aligned}$$

Für den Fall von Dispersionsrelationen $E_a(\mathbf{k})$, $E_b(\mathbf{k})$ und Formfaktoren $f_a(\mathbf{k})$, $f_b(\mathbf{k})$, die nur vom Betrag $k = |\mathbf{k}|$ abhängen, lassen sich die letzte beiden Integrale in Kugelkoordinaten exakt lösen und vereinfachen sich somit erheblich:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\text{exp}} &\approx \frac{g_a^2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 |f_a(k)|^2 \delta(E_S - E_a(k)) + \frac{g_b^2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 |f_b(k)|^2 \delta(E_S - E_b(k)) \\
&= \underbrace{\frac{g_a^2}{\pi} \tilde{k}_a^2 |f_a(\tilde{k}_a)|^2}_{\Gamma_{S \rightarrow a}^{\text{exp}}} + \underbrace{\frac{g_b^2}{\pi} \tilde{k}_b^2 |f_b(\tilde{k}_b)|^2}_{\Gamma_{S \rightarrow b}^{\text{exp}}}, \tag{142}
\end{aligned}$$

wobei \tilde{k}_a und \tilde{k}_b , wegen der Delta-Distribution, so gefunden werden muss, dass gilt:

$$E_a(\tilde{k}_a) = E_b(\tilde{k}_b) = E_S. \tag{143}$$

8.6. Algorithmus zur numerischen Berechnung der Wahrscheinlichkeiten

Der Weg zur Berechnung des Zerfallsgesetzes ist in diesem Modell nun vollständig beschrieben. Die Annahmen, welche vorweg getroffen werden müssen, betreffen:

$$m_S, m_a, m_b, g_a, g_b, E_a(\mathbf{k}), E_b(\mathbf{k}), f_a(\mathbf{k}), f_b(\mathbf{k}). \tag{144}$$

Eine analytische Herangehensweise ist jedoch in den meisten Fällen nicht möglich und hängt von den Wahl der Annahmen (144) ab. Eine numerische Berechnung hat ebenfalls gewisse Schwierigkeiten, dessen Lösungen im Folgenden beschrieben werden.

Der erste Schritt ist die Berechnung der Selbstenergie (125). Der Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ ist als vor dem Integral stehend aufzufassen, d.h.

$$\Sigma_S(E) = g_a^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{f_a^2(\mathbf{k})}{E - E_a(\mathbf{k}) + i\varepsilon} + g_b^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{f_b^2(\mathbf{k})}{E - E_b(\mathbf{k}) + i\varepsilon}.$$

Damit entziehen sich die Integrale aber der direkten numerischen Berechenbarkeit, denn ε bleibt in den Integralen immer ein nicht-numerischer Ausdruck. Zur Lösung des Problems wird eine Hilfsfunktion

$$H_E(\varepsilon) = g_a^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{f_a^2(\mathbf{k})}{E - E_a(\mathbf{k}) + i\varepsilon} + g_b^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{f_b^2(\mathbf{k})}{E - E_b(\mathbf{k}) + i\varepsilon}, \quad E \text{ fest}, \quad (145)$$

eingeführt. Es werden dann die Werte $H(\varepsilon_1), \dots, H(\varepsilon_n)$ mit sehr kleinen $\varepsilon_n > \dots > \varepsilon_1 > 0$ für ein festes E berechnet. Mit diesen Werten kann die Funktion $H_E(\varepsilon)$ im Bereich $[0, \varepsilon_n]$ gefittet werden. Für festes E ist damit das Problem gelöst:

$$\Sigma_S(E) = H_E(0). \quad (146)$$

Das Zerfallsgesetz ergibt sich dann aus (21):

$$p(t) = \left| \int_{\mathbb{R}} dE d_S(E) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \right|^2,$$

wobei die Energiedichte $d_S(E)$ aus (129) folgt. Problematisch ist die numerische Integration über ganz \mathbb{R} , da $\Sigma_S(E)$ und damit auch $d_S(E)$ nur für eine Menge von Punkten, d.h. für diskrete E berechnet werden kann (aus den oben genannten Gründen). Die Fourier-Transformation wird daher im Algorithmus durch eine diskrete Fourier-Transformation ersetzt.

Die numerische Berechnung der Integrale, welche die Wahrscheinlichkeiten für den Zerfall in einen Kanal (134) ergeben, erfolgen als Mittelwert der riemannschen Ober- und Untersumme, da $d_S(E)$ nur als Liste diskreter Werte vorliegt.

Der MATHEMATICA-Code zur Umsetzung dieses Algorithmus ist in Anhang A finden.

9. Numerische Ergebnisse des Lee-Modells

Geht man von einer wasserstoffähnlichen Ladungsverteilung aus

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad a_0 = \text{Bohrscher Radius}, \quad (147)$$

dann bekommt man einen Formfaktor der Art

$$f(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty dr r \rho(r) \sin(kr) = 8\sqrt{\frac{\pi}{a_0}} \frac{1}{(k^2 + 1/a_0^2)^2} = f(k), \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (148)$$

Die Dispersionsrelationen werden als

$$E_a(\mathbf{k}) = E_a(k) = \sqrt{m_a^2 c^4 + \hbar^2 k^2 c^2}, \quad E_b(\mathbf{k}) = E_b(k) = \sqrt{m_b^2 c^4 + \hbar^2 k^2 c^2} \quad (149)$$

gewählt. Ein nicht-relativistischer Limes der Art $mc^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ist wenig sinnvoll, da die Dispersionsrelationen bei einigen Rechnungen in Integranden stehen, welche über $\int_0^\infty dk$ integriert werden. Dies ist der einzige Grund für die Mischung der *nicht-relativistischen* Quantenmechanik in Form des Lee-Modells und den *relativistischen* Dispersionsrelationen.

Es werden folgende numerische Annahmen (in natürlichen Einheiten $\hbar = c = 1$) gemacht: Als Bezugsgröße wird die Energie $m_S c^2 = m_S$ gesetzt. Unter zusätzlicher Annahme von $m_S = 26.8173 \text{ keV}$ wird der Bohrsche Radius zu $a_0 = 1 [m_S]^{-1}$ und verschönert die Graphen und Formeln.

$$m_S = 1 [m_S], \quad m_a = 0.4 [m_S], \quad m_b = 0.3 [m_S], \quad g_a = g_b = 0.08. \quad (150)$$

Ergebnisse

- Zerfallsbreiten im Grenzfall des exponentiellen Zerfalls nach Gl. (142):

$$\Gamma^{\text{exp}} = 0.0580 [m_S], \quad \Gamma_{S \rightarrow a}^{\text{exp}} = 0.0300 [m_S], \quad \Gamma_{S \rightarrow b}^{\text{exp}} = 0.0280 [m_S]. \quad (151)$$

- Die exakte Zerfallsbreite durch die Identifikation

$$\Gamma_S(E) = -2 \text{Im} \Sigma_S(E)$$

aus Gl. (128) ist in Abb. 13 zu sehen. Man sieht deutlich einen Cut-Off, welcher auch in der Energiedichte $d_S(E)$ die untere Schranke erzeugt.

- Betrachtet man den Quotienten $h^{\text{exp}}(t)/p^{\text{exp}}(t) = \Gamma^{\text{exp}} = 0.0580 [m_S]$, so ist dieser zeitunabhängig. Der exakte Quotient $h(t)/p(t)$ ist dagegen nicht konstant, sondern oszilliert um einen Wert nahe Γ^{exp} , wie Abb. 14 zeigt.

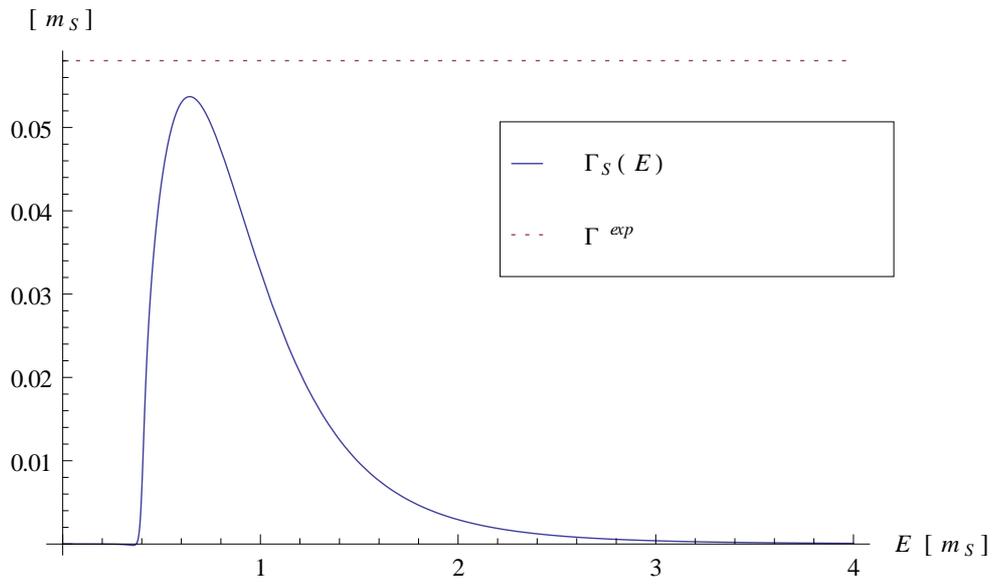


Abbildung 13: Zerfallsbreiten

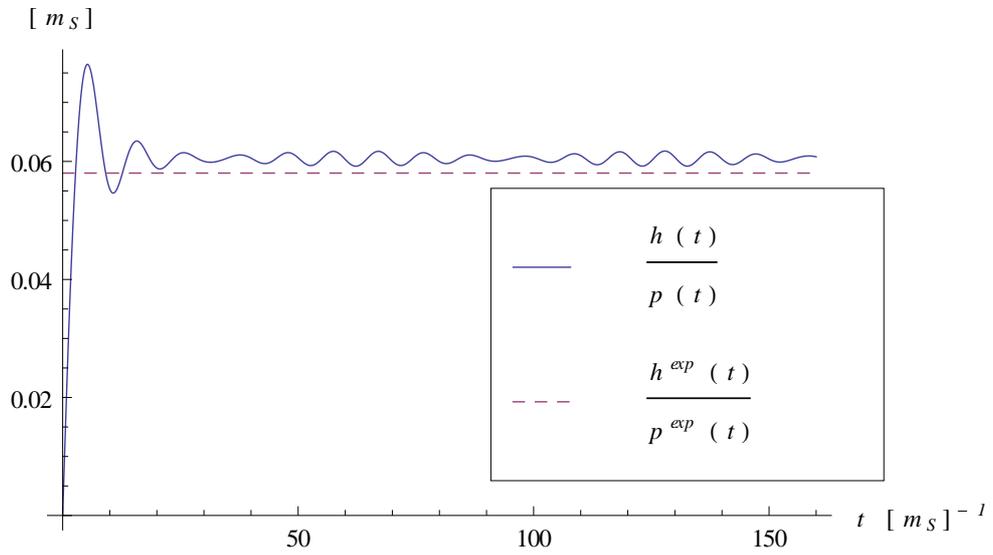


Abbildung 14: Verhältnis aus Zerfallsrate und Zerfallsgesetz

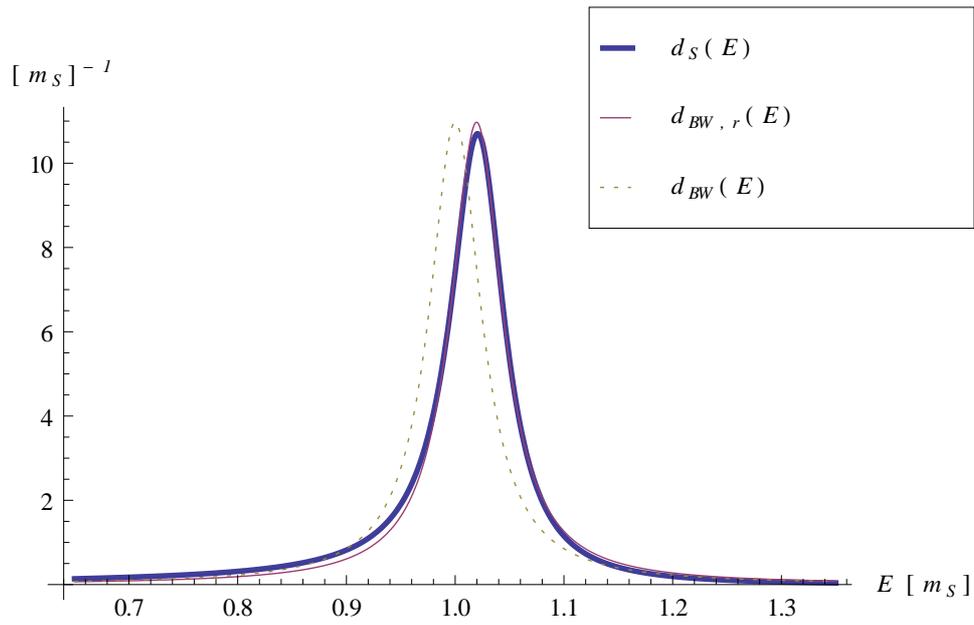


Abbildung 15: Energiedichte. Das Subskript „BW“ bedeutet Breit-Wigner. Das zusätzliche „r“ meint, dass das Maximum auf die renormalisierte Energie verschoben wurde.

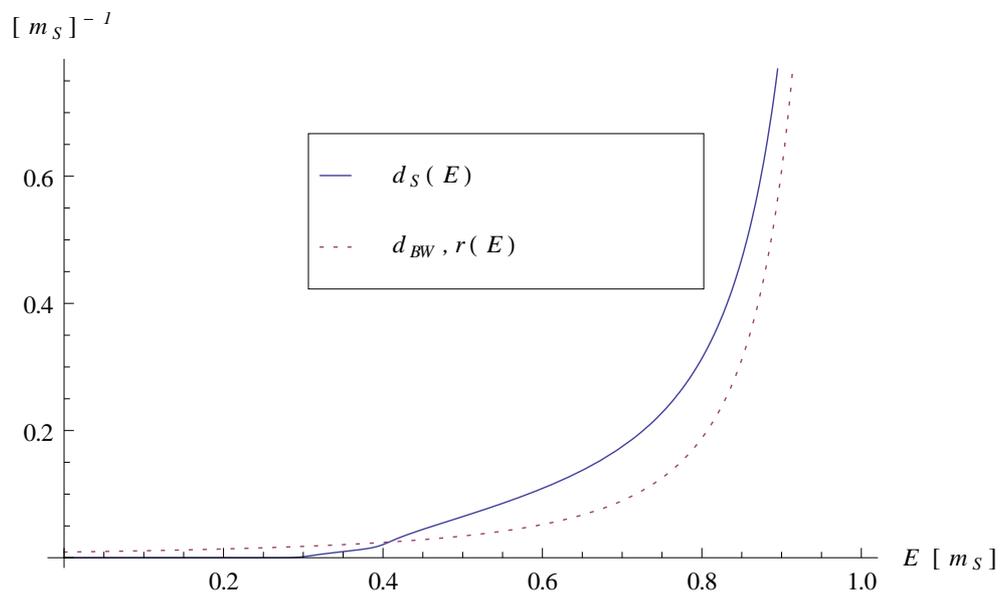


Abbildung 16: Cut-Off in der Energiedichte

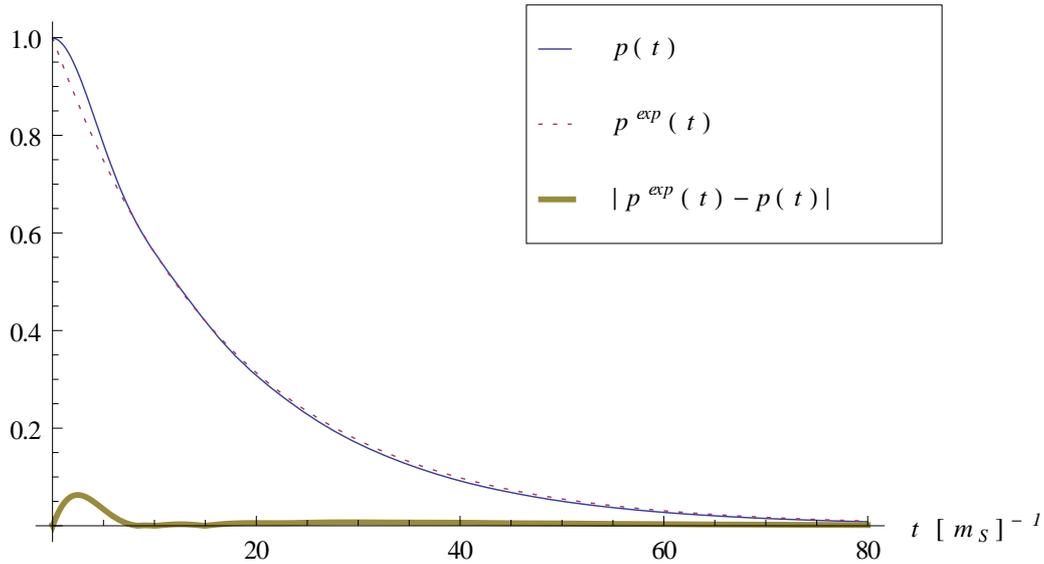


Abbildung 17: Zerfallsgesetz

- Die Energiedichte $d_S(E)$ zeigt Abb. 15. Optisch ist sie kaum von einer Breit-Wigner-Dichte zu unterscheiden. Wählt man als Vergleich eine Breit-Wigner Verteilung $d_{\text{BW},r}$, die ihr Maximum bei der renormalisierte Ruheenergie⁴ $E_{S,r}$ hat, wird diese Ähnlichkeit deutlich. Der Cut-Off ist gut in Abb. 16 zu sehen.
- Es bietet sich nun an die maximale Abweichung des Zerfallsgesetzes von einem exponentiellen Zerfallsgesetz abzuschätzen. Die Abschätzung ist bereits durch (67) aus dem Kapitel 6.9 gegeben. Mit der Breit-Wigner-Verteilung $d_{\text{BW},r}$ ergibt sich:

$$|p^{\text{exp}}(t) - p(t)| \leq 2 \int_{\mathbb{R}} dE |d_{\text{BW},r} - d_S(E)| = 23.7547\%. \quad (152)$$

Hierbei erweist sich die Abschätzung leider als viel zu grob, denn das Zerfallsgesetz hat eine deutlichere Ähnlichkeit zu $p^{\text{exp}}(t)$ (siehe nächster Punkt).

- Die starke optische Ähnlichkeit zwischen dem Zerfallsgesetz und $p^{\text{exp}}(t)$ ist in Abb. 17 und 18 zu sehen. Die Größte Abweichung liegt bei etwa $t \approx 2.5 [m_S]^{-1}$ nach der Präparation und beträgt ungefähr 8%.
- Zum Vergleich mit einem exponentiellen Zerfall bietet sich das Verhältnis

$$p(t)/e^{-\frac{\Gamma^{\text{exp}}}{\hbar}t} \quad (153)$$

⁴Sie ist als Nullstelle von $G_S^{-1}(E)$ definiert: $E_{S,r} - E_S - \Sigma_S(E_{S,r}) = 0$

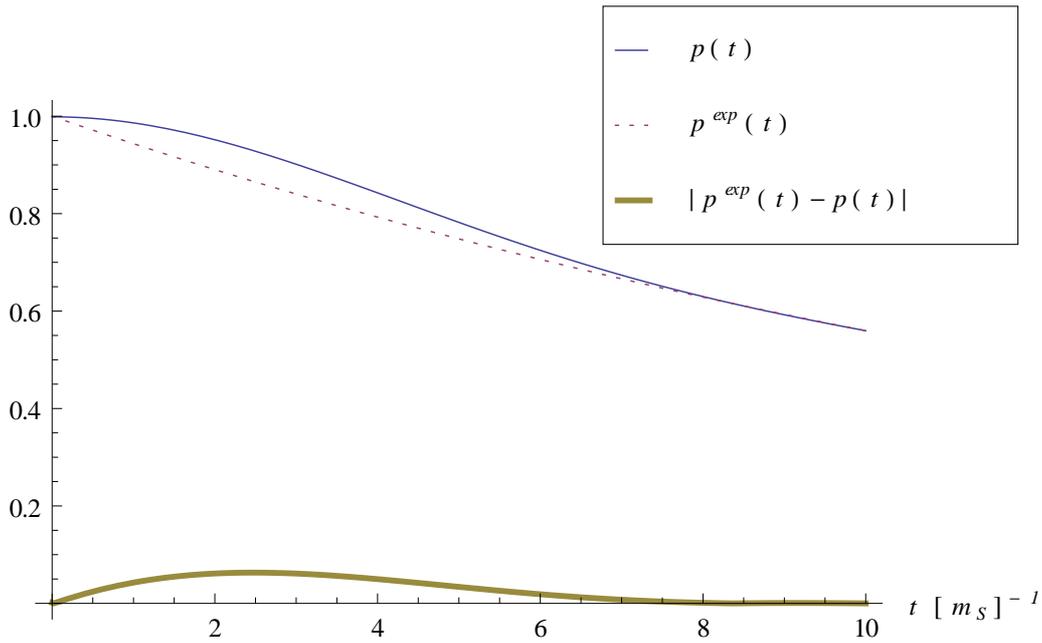


Abbildung 18: Zerfallsgesetz für kleine t

an. Die naive Vermutung, dass sich dieser Quotient um die 1 bewegt ist nicht korrekt. Stattdessen muss es für kleine t größer 1 und für große t gegen ∞ gehen. Dies wurde bereits in Abschnitt 6.6 und 6.7 ganz allgemein gezeigt.

Alternativ könnte man die Abweichungen vom exponentiellen Zerfall in einer effektiven, zeitabhängigen Zerfallsbreite $\Gamma_{\text{eff}}(t)$ unterbringen, sodass

$$\Gamma_{\text{eff}}(t) := -\hbar \frac{\ln p(t)}{t} \quad \Rightarrow \quad p(t) = e^{-\frac{\Gamma_{\text{eff}}(t)}{\hbar} t}. \quad (154)$$

Diese effektive Zerfallsbreite strebt tatsächlich gegen einen Wert nahe Γ^{exp} . All dies ist in Abb. 19 zu sehen.

- Besonderes Augenmerk soll nun auf die Zerfallsrate gelegt werden, da sich die Abweichungen von einem exponentiellen Zerfallsgesetz hier besonders deutlich zeigen. Abbildung 20 zeigt, dass es Oszillationen im Zerfallsgesetz gibt (vergleichbar mit der GSI-Anomalie aus Abschnitt 6.12). Für kleine t ist wieder die Möglichkeit des Quanten-Zeno-Effekts deutlich zu sehen.
- Die Entstehungswahrscheinlichkeiten $p_{S \rightarrow a}(t)$ bzw. $p_{S \rightarrow b}(t)$ in den Kanal a bzw. b , sowie die zugehörigen Zerfallsraten $h_{S \rightarrow a}(t)$ bzw. $h_{S \rightarrow b}(t)$ sind in Abb. 21 und 22 zu sehen. Die augenscheinliche Tatsache, dass die exponentiellen Näherungen $p_{S \rightarrow a}^{\text{exp}}(t)$ und $p_{S \rightarrow b}^{\text{exp}}(t)$ nicht gegen den gleichen Wert wie $p_{S \rightarrow a}(t)$ und $p_{S \rightarrow b}(t)$ konvergieren,

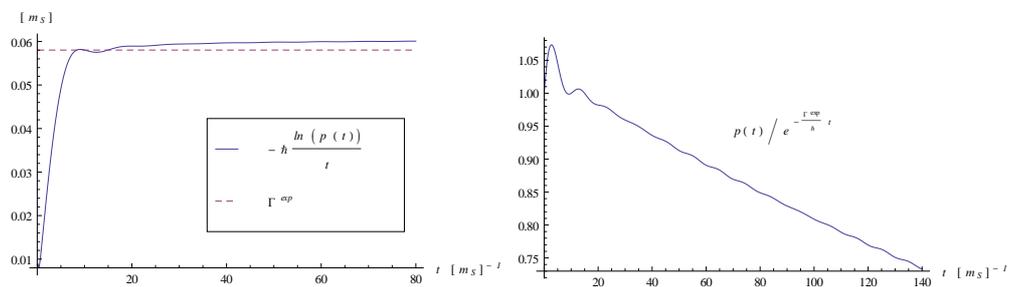


Abbildung 19: Links: Effektive Zerfallsbreite nach Gl. (154). Rechts: Verhältnis aus Zerfallsgesetz und exponentiellem Zerfall.

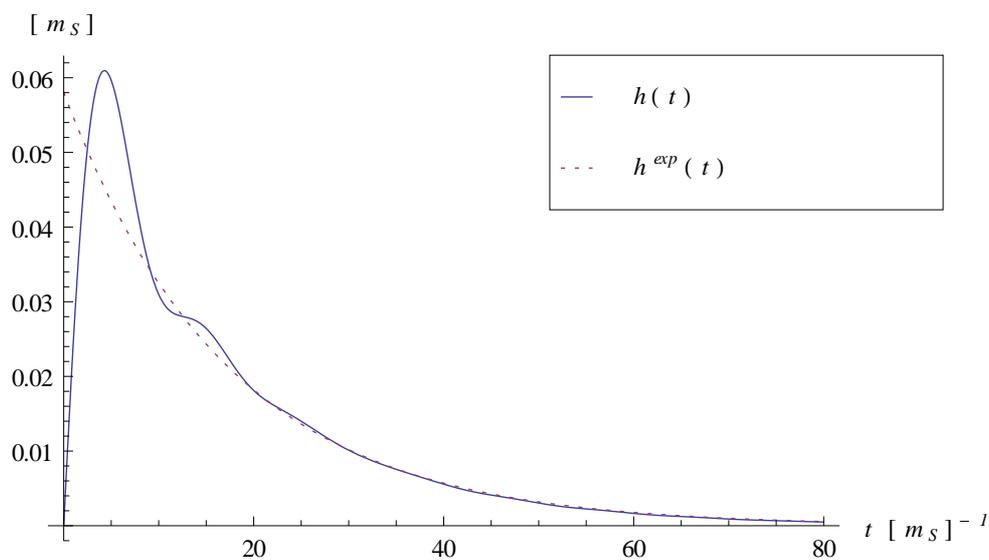


Abbildung 20: Zerfallsrate

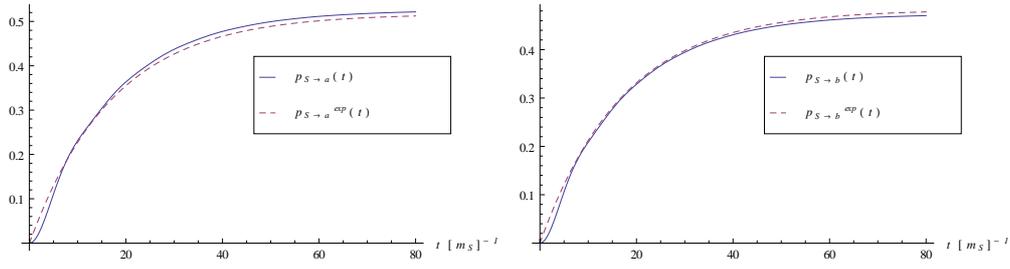


Abbildung 21: Entstehungswahrscheinlichkeiten in den Kanal α (links) und b (rechts)

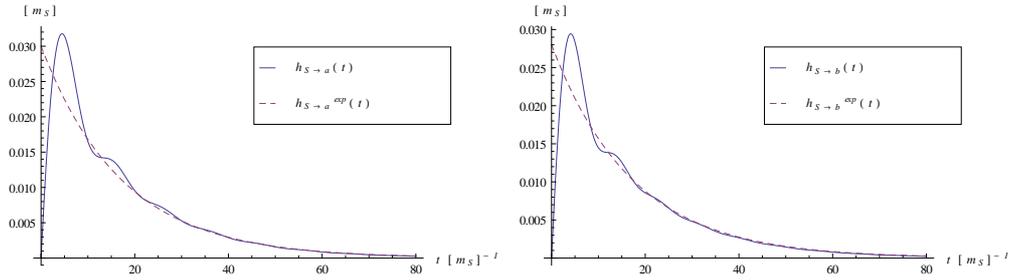


Abbildung 22: Zerfallsraten in den Kanal α (links) und b (rechts)

liegt daran, dass der Limes

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{S \rightarrow a}^{\text{exp}}(t) = \frac{\Gamma_{S \rightarrow a}^{\text{exp}}}{\Gamma^{\text{exp}}} = 0.5172, \quad (155)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{S \rightarrow b}^{\text{exp}}(t) = \frac{\Gamma_{S \rightarrow b}^{\text{exp}}}{\Gamma^{\text{exp}}} = 0.4827$$

selbst nur eine Näherung ist.

Wegen $1 - p(t) = p_{S \rightarrow a}(t) + p_{S \rightarrow b}(t)$ war anzunehmen, dass auch die Entstehungswahrscheinlichkeiten Oszillationen aufweisen. Die Zerfallsraten beweisen dies.

- Die Verhältnisse $p_{S \rightarrow a}^{\text{exp}}(t)/p_{S \rightarrow b}^{\text{exp}}(t) = h_{S \rightarrow a}^{\text{exp}}(t)/h_{S \rightarrow b}^{\text{exp}}(t) = \Gamma_{S \rightarrow a}^{\text{exp}}/\Gamma_{S \rightarrow b}^{\text{exp}} = 1.0718$ sind konstant. Die exakten Quotienten $p_{S \rightarrow a}(t)/p_{S \rightarrow b}(t)$ und $h_{S \rightarrow a}(t)/h_{S \rightarrow b}(t)$ unterscheiden sich aber und sind wiederum nicht konstant. Stattdessen oszillieren beide um den gleichen Wert nahe $\Gamma_{S \rightarrow a}^{\text{exp}}/\Gamma_{S \rightarrow b}^{\text{exp}}$. Siehe dazu Abb. 23.

Ergebnisse für eine stärkere Wechselwirkung

Zur Variation der Ergebnisse wird die Stärke der Wechselwirkung heraufgesetzt:

$$g_a = 0.25, \quad g_b = 0.15. \quad (156)$$

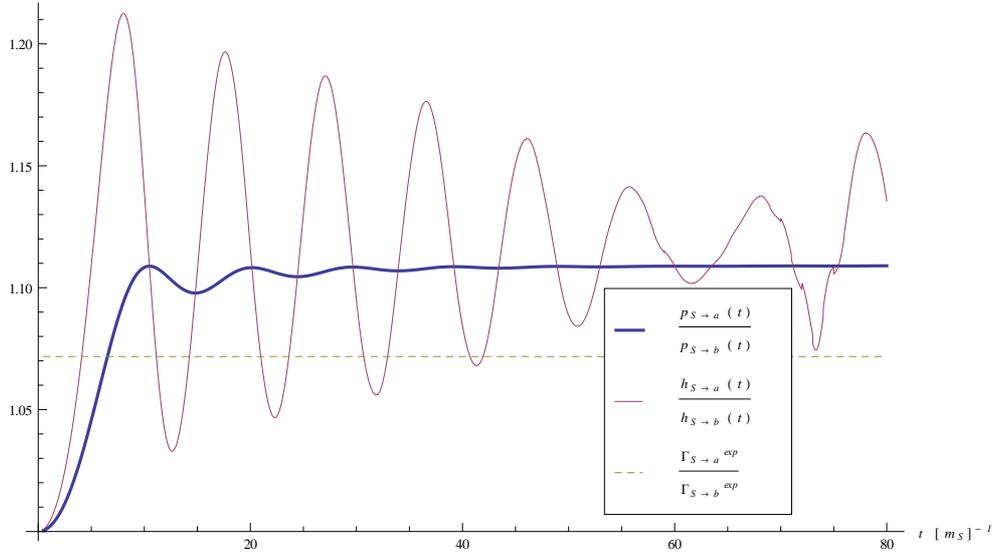


Abbildung 23: Verhältnis der Entstehungswahrscheinlichkeiten in Kanal a zu b , sowie der Zerfallsraten aus Kanal a zu b .

Alle anderen Parameter bleiben unverändert. Die genäherten Zerfallsraten werden in dem Fall zu

$$\Gamma^{\text{exp}} = 0.3916 [m_S], \quad \Gamma_{S \rightarrow a}^{\text{exp}} = 0.2931 [m_S], \quad \Gamma_{S \rightarrow b}^{\text{exp}} = 0.0985 [m_S]. \quad (157)$$

Eine Auswahl der Abbildungen des ersten numerischen Beispiels werden hier zum Vergleich mit den neuen Kopplungskonstanten wiederholt (Abb. 24 bis 29). Einige Unterschiede sind bemerkenswert:

- Die Energiedichte $d_S(E)$ hat einen deutlichen Ausschlag nahe der Ruhemassen der Tochterteilchen a und b und weicht deutlich von einer Breit-Wigner-Verteilung ab.
- Das Zerfallsgesetz $p(t)$ oszilliert sehr stark und hat sogar Stellen mit positiver Steigung. Diese Bereiche positiver Steigung müssen als Phasen interpretiert werden, in denen die Dynamik des Quantenzustandes (der für $t > 0$ immer einer Superposition aus den S , a und b Teilchen ist) so verläuft, dass die Tochterteilchen den Anfangszustand „wiederbeleben“.

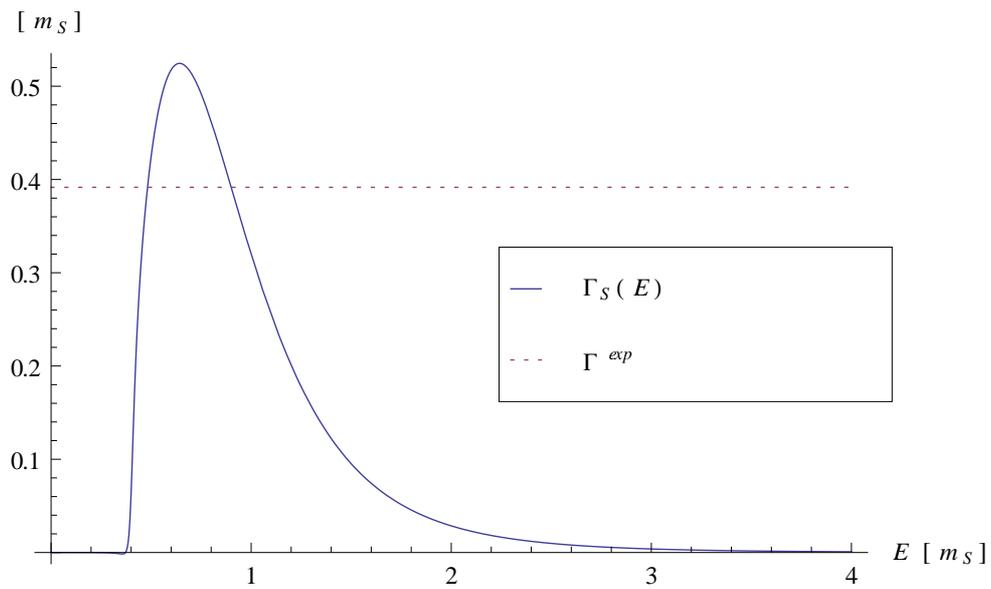


Abbildung 24: Zerfallsbreite

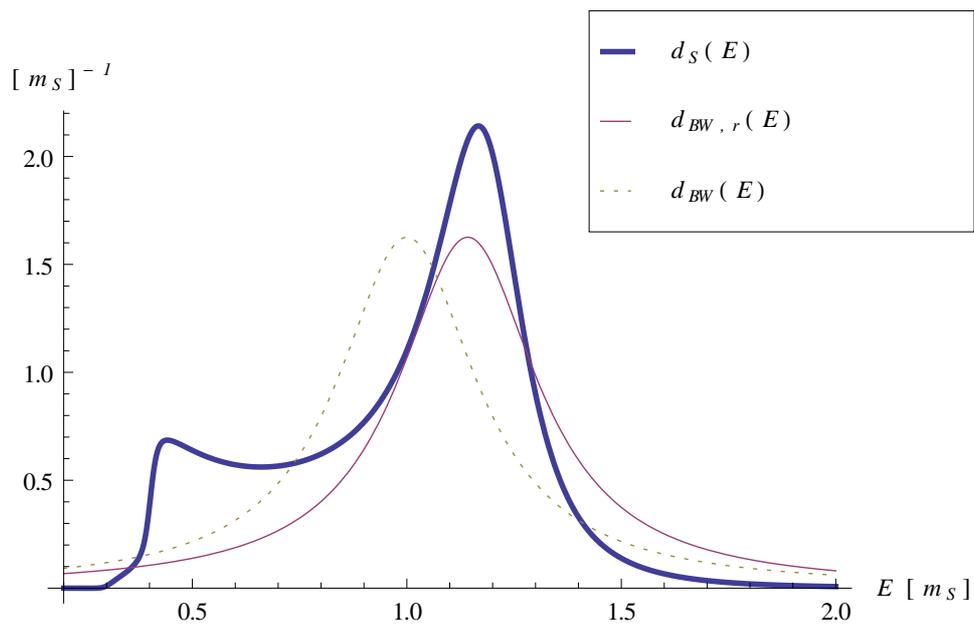


Abbildung 25: Energiedichte. Das Subskript „BW“ bedeutet Breit-Wigner. Das zusätzliche „r“ meint, dass das Maximum auf die renormalisierte Energie verschoben wurde.

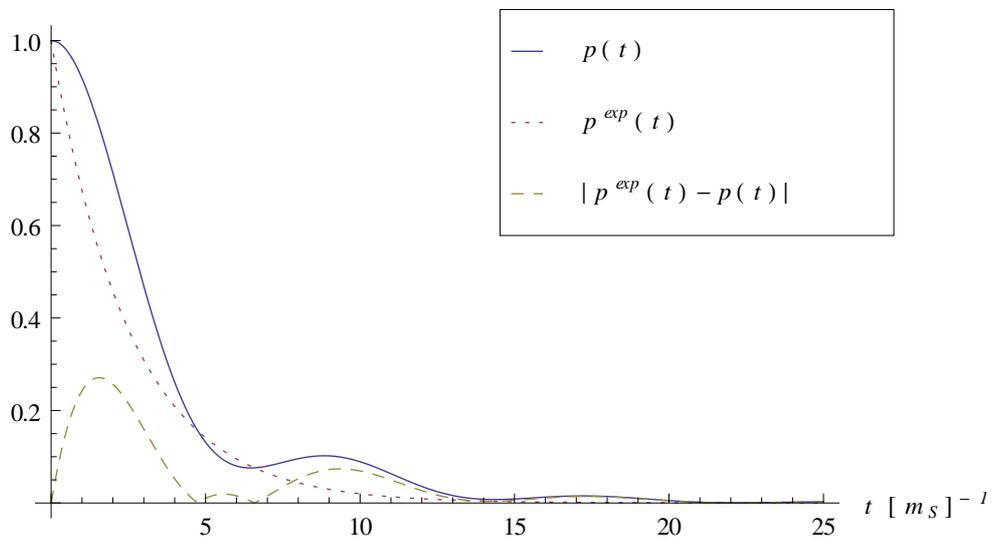


Abbildung 26: Zerfallsgesetz

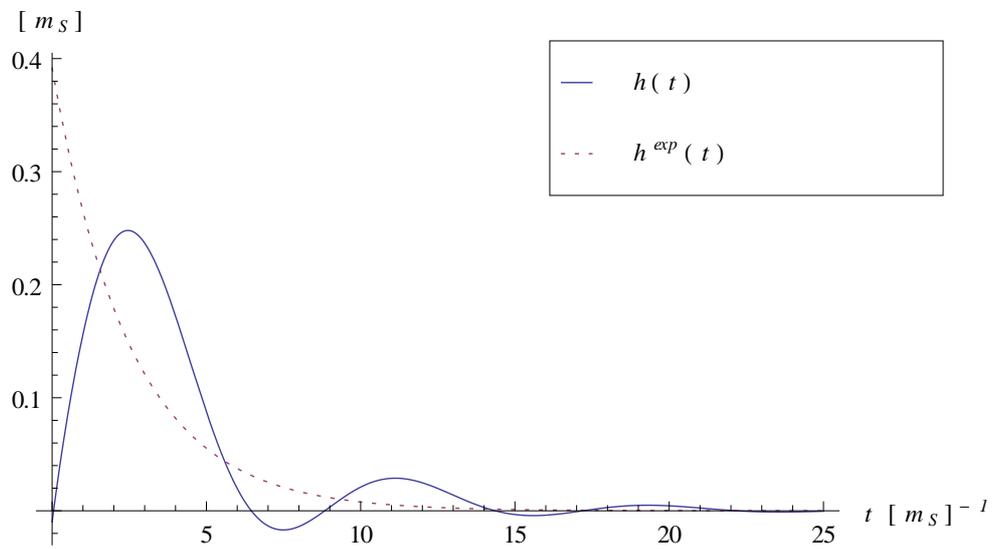


Abbildung 27: Zerfallsrate

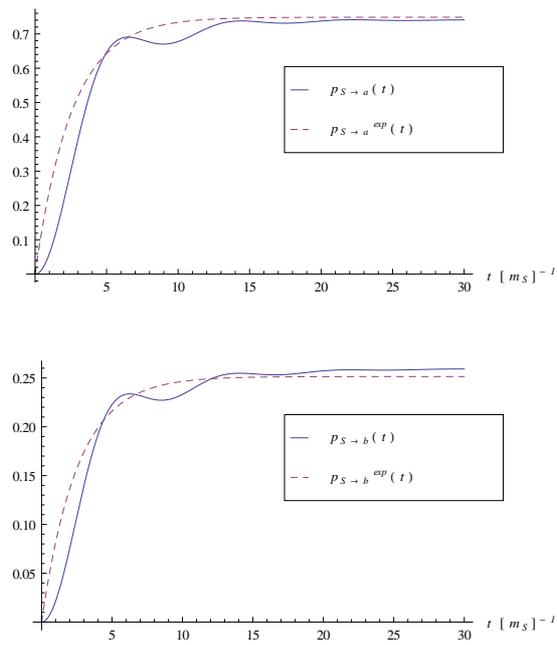


Abbildung 28: Entstehungswahrscheinlichkeiten in den Kanal a (oben) und b (unten)

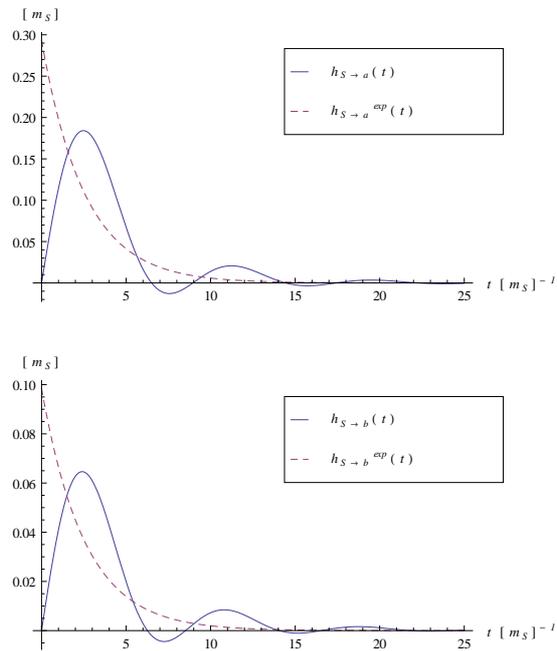


Abbildung 29: Zerfallsraten in den Kanal a (oben) und b (unten)

10. Fazit und Ausblick

Es konnte gezeigt werden, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit eines instabilen Zustandes in der Quantenmechanik zusätzlich zum „leitenden“ exponentiellen Abfall noch Oszillationen aufweist, solange nicht von Außen durch eine Messung eingegriffen wird. Mit dem feldtheoretischen Ansatz des Lee-Modells wurde ein solcher Zustand als Existenz oder nicht-Existenz (Zerfall) eines Teilchens interpretiert. Die an der GSI gemessenen Oszillationen im Zerfallsgesetz können also bereits durch ein sehr allgemeines quantenmechanisches Modell, ohne Annahmen über die Natur des Zerfalls, reproduziert werden. Das Zerfallsgesetz folgt dabei nur näherungsweise (abhängig von der Stärke der Wechselwirkung, welche den Zerfall verursacht) einem exponentiellen Verlauf. Der Begriff GSI *Anomalie* könnte daher vielleicht genauso unglücklich gewählt sein, wie z.B. der Begriff des *Anomalen* Zeeman-Effekts, wenn es sich bei ersterem nicht um eine Anomalie, sondern um eine *normalen* quantenmechanischen Effekt handeln würde, der nur vorher nicht als solcher erkannt wurde.

Bemerkenswert ist, dass im Lee-Modell die Instabilität des Teilchens erst durch die Wechselwirkung erzeugt wird, d.h. die Eigenschaft der Instabilität ist in diesem Modell nicht alleine einem Teilchen zuzusprechen, sondern vielmehr der Gesamtheit aus Teilchen und Tochterteilchen (siehe Wechselwirkungsanteil im Lee-Hamiltonian). Dies steht im Gegensatz zu dem Begriff „instabiles Teilchen“, welcher alleine dem Teilchen die Eigenschaft „instabil“ zuordnet.

Eine tiefere mathematische Herangehensweise zur Erschließung der Ursache der Oszillationen bietet sich an. Die Interpretation der aufgesetzten Rabi-Oszillationen ist sicherlich nicht falsch, allerdings mathematisch etwas dürftig.

Der Quanten-Zeno-Effekt ist die Ursache für den exponentiellen Verlauf empirisch ermittelter Zerfallsgesetze, denn die instabilen Systeme sind dabei frequenten Messungen ausgesetzt (z.B. ein Teilchen in der Blasenkammer oder Zerfall von ^{14}C in Organismen). D.h. diese empirischen Zerfallsgesetze ergeben sich aus einem ständigen Wechsel zwischen freier Zeitentwicklung nach der Schrödingergleichung und Zustandsreduktion durch die Wechselwirkung (Messung) mit der Umgebung.

Das Quanten-Zeno-Paradoxon erscheint dem Autor allerdings als nicht verwirklicht. Es handelt sich wohl eher um eine mathematische Konstruktion. Die Frage nach der Dauer einer Messung (bzw. die Dauer einer Zustandsreduktion) spielte bei der Entstehung der Quantenmechanik keine Rolle. Das Quanten-Zeno-Paradoxon als Konsequenz einer instantanen Zustandsreduktion ist daher als Überinterpretation der unvollständigen und unbefriedigenden Messtheorie in der Quantenmechanik anzusehen (siehe auch *Dekohärenztheorie* in Kapitel 4).

Eine kürzlich veröffentlichte Arbeit von S. Lloyd mit dem Titel *The quantum geometric limit* [32] sollte nicht unerwähnt bleiben. Dort wird eine Ungleichung für die Anzahl von „quantum ops“ $\#_{\text{op}}$ in einem vierdimensionalen Raum-Zeit-Volumen (Radius r und Zeitspanne t) hergeleitet:

$$\#_{\text{op}} \leq \frac{rt}{\pi l_{\text{PTP}}}, \quad (158)$$

wobei l_P und t_P die Planck-Länge und Planck-Zeit sind. Ein Zusammenhang zum Quanten-Zeno-Paradoxon wird dort nicht hergestellt. Es bietet sich aber an, diese Ungleichung als Limit für die Frequenz aufzufassen, mit der ein Apparat den Zerfall eines instabilen Zustandes in einem festen Raum-Zeit-Volumen messen kann. Dies wäre ein starkes Argument gegen das Quanten-Zeno-Paradoxon. Eine genauere Analyse dieser Verbindung aus quantum geometric limit und Quanten-Zeno-Paradoxon ist daher eine interessante Aufgabe.

Für die Zukunft ist einerseits ein konkretes, an das GSI Experiment angepasstes Modell interessant, um die Theorie mit dem Experiment direkt vergleichen zu können. Andererseits könnten an der GSI Messungen kurz nach der Präparation das theoretisch vorhergesagt Verschwinden der Zerfallsraten bestätigen (siehe Abb. 20 und 27).

Eine weitere Idee wäre ein quantenmechanisches Modell, welches neben dem instabilen Teilchen und den Zerfallsprodukten noch die Messapparatur beinhaltet, sodass eine Messung nicht als Kollaps der Wellenfunktion, sondern durch die Schrödingergleichung beschrieben wird. Der in Kapitel 4 und Abschnitt 6.12 angedeutete Einfluss des Messinstruments auf das Zerfallsgesetz wäre dann theoretisch analysierbar. Auch für den Quanten-Zeno-Effekt wäre eine Beschreibung des kombinierten Systems (instabiles System und Messapparatur) von Interesse, sodass nicht mehr das unschöne Argument der Zustandsreduktion herangezogen werden muss. Auch der Fall frequenter Messungen und ein daraus folgender exponentieller Zerfall könnten aus einem solchen Modell entspringen.

A. Mathematica Code

Definitionen

```
Clear ["Global`*"]
c := 1 (*Lichtgeschwindigkeit*)
hBar := 1
a0 := 1 (*Bohrscher Radius*)
mS := 1
ma := 0.4
mb := 0.3
ga := 0.25
gb := 0.15
EnS := mS * c ^ 2
Ena[k_] :=  $\sqrt{ma^2 * c^4 + hBar^2 * k^2 * c^2}$  (*Dispersionsrelation*)
Enb[k_] :=  $\sqrt{mb^2 * c^4 + hBar^2 * k^2 * c^2}$ 
Z := 1

$$\rho_a[r_] := \sqrt{\frac{Z^3}{\pi * a0^3} * \text{Exp}\left[-Z * \frac{r}{a0}\right]}$$
 (*Ladungsverteilung*)

$$\rho_b[r_] := \sqrt{\frac{Z^3}{\pi * a0^3} * \text{Exp}\left[-Z * \frac{r}{a0}\right]}$$

(*Formfaktoren berechnen*)
fa[k_] =  $\frac{4 \text{ Pi}}{k}$  Integrate[r *  $\rho_a[r]$  * Sin[k * r], {r, 0,  $\infty$ }, Assumptions -> {k  $\in$  Reals}]
fb[k_] =  $\frac{4 \text{ Pi}}{k}$  Integrate[r *  $\rho_b[r]$  * Sin[k * r], {r, 0,  $\infty$ }, Assumptions -> {k  $\in$  Reals}]
(*Epsilon und andere numerische Stellschrauben*)
SmallestEpsi := 0.02 (*gut 0.02*)
Epsis := Table[2 SmallestEpsi -  $\frac{\text{SmallestEpsi} * n}{100}$ , {n, 1, 100}]
PlotStart := 0
PlotEnd := 4
PlotSteps := 0.005
```

Selbstenergie und genäherte Zerfallsraten

```
(*Teilchen a*)
SigmaAFunction[x_, Epsilon_] :=
  ga^2 * (4 Pi / (2 Pi)^3) * NIntegrate[k^2 * (fa[k]^2 / (x - Ena[k] + I * Epsilon)), {k, 0, infinity}]
ImSigmaASequence[x_] := Table[{Epsis[[n]], Im[SigmaAFunction[x, Epsis[[n]]]}], {n, 1, 100}]
ImSigmaAFit[x_] := Limit[Fit[ImSigmaASequence[x], {1, y, y^2}, y], y -> 0]
ImSigmaAValues = Parallelize[Table[{x, ImSigmaAFit[x]}, {x, PlotStart, PlotEnd, PlotSteps}]];
ReSigmaASequence[x_] := Table[{Epsis[[n]], Re[SigmaAFunction[x, Epsis[[n]]]}], {n, 1, 100}]
ReSigmaAFit[x_] := Limit[Fit[ReSigmaASequence[x], {1, y, y^2}, y], y -> 0]
ReSigmaAValues = Parallelize[Table[{x, ReSigmaAFit[x]}, {x, PlotStart, PlotEnd, PlotSteps}]];
ListLinePlot[{ImSigmaAValues, ReSigmaAValues}, PlotRange -> All]

(*Teilchen b*)
SigmaBFunction[x_, Epsilon_] :=
  gb^2 * (4 Pi / (2 Pi)^3) * NIntegrate[k^2 * (fb[k]^2 / (x - Enb[k] + I * Epsilon)), {k, 0, infinity}]
ImSigmaBSequence[x_] := Table[{Epsis[[n]], Im[SigmaBFunction[x, Epsis[[n]]]}], {n, 1, 100}]
ImSigmaBFit[x_] := Limit[Fit[ImSigmaBSequence[x], {1, y, y^2}, y], y -> 0]
ImSigmaBValues = Parallelize[Table[{x, ImSigmaBFit[x]}, {x, PlotStart, PlotEnd, PlotSteps}]];
ReSigmaBSequence[x_] := Table[{Epsis[[n]], Re[SigmaBFunction[x, Epsis[[n]]]}], {n, 1, 100}]
ReSigmaBFit[x_] := Limit[Fit[ReSigmaBSequence[x], {1, y, y^2}, y], y -> 0]
ReSigmaBValues = Parallelize[Table[{x, ReSigmaBFit[x]}, {x, PlotStart, PlotEnd, PlotSteps}]];
ListLinePlot[{ImSigmaBValues, ReSigmaBValues}, PlotRange -> All]

(*Beide zusammen*)
ImSigmaValues = ImSigmaAValues + ImSigmaBValues;
ReSigmaValues = ReSigmaAValues + ReSigmaBValues;
ImSigmaValues[[All, 1]] = ImSigmaValues[[All, 1]] / 2;
ReSigmaValues[[All, 1]] = ReSigmaValues[[All, 1]] / 2;
ListLinePlot[{ImSigmaValues, ReSigmaValues}, PlotRange -> All]

(*Approximations Gamma*)
GammaApprox = 1/Pi * (ga^2 * (EnS^2 - ma^2 * c^4) / (hBar^2 * c^2) * Abs[fa[Sqrt[(EnS^2 - ma^2 * c^4) / (hBar^2 * c^2)]]]^2 +
  gb^2 * (EnS^2 - mb^2 * c^4) / (hBar^2 * c^2) * Abs[fb[Sqrt[(EnS^2 - mb^2 * c^4) / (hBar^2 * c^2)]]]^2);

GammaApproxA = 1/Pi * ga^2 * (EnS^2 - ma^2 * c^4) / (hBar^2 * c^2) * Abs[fa[Sqrt[(EnS^2 - ma^2 * c^4) / (hBar^2 * c^2)]]]^2;
GammaApproxB = 1/Pi * gb^2 * (EnS^2 - mb^2 * c^4) / (hBar^2 * c^2) * Abs[fb[Sqrt[(EnS^2 - mb^2 * c^4) / (hBar^2 * c^2)]]]^2;
```

Energiedichte

```
da = Table [
  {x, -1/Pi * ImSigmaAValues [[x/PlotSteps + 1, 2]] / ((x - EnS - ReSigmaValues [[x/PlotSteps + 1, 2]])^2 +
    ImSigmaValues [[x/PlotSteps + 1, 2]]^2)}, {x, PlotStart, PlotEnd, PlotSteps}];
db = Table [ {x, -1/Pi * ImSigmaBValues [[x/PlotSteps + 1, 2]] /
  ((x - EnS - ReSigmaValues [[x/PlotSteps + 1, 2]])^2 + ImSigmaValues [[x/PlotSteps + 1, 2]]^2)},
  {x, PlotStart, PlotEnd, PlotSteps}];
d = da + db;
d[[All, 1]] = d[[All, 1]] / 2;
```

Zerfallsgesetz

```
ZeitReihe = Abs[Fourier[d[[All, 2]]]]^2;
ZeitReihe[[All]] = ZeitReihe[[All]] * PlotSteps * PlotEnd;
TimeVals = 2 Pi / (PlotEnd * PlotSteps) Table[x, {x, PlotStart, PlotEnd, PlotSteps}];
pFunc = Interpolation[Transpose[{TimeVals, ZeitReihe}], InterpolationOrder -> 10];
```

Interpolation der Daten

```
ImSigmaAValuesFunc = Interpolation[ImSigmaAValues]
ImSigmaBValuesFunc = Interpolation[ImSigmaBValues]
ImSigmaValuesFunc = Interpolation[ImSigmaValues]
Plot[{-2 ImSigmaAValuesFunc[x], -2 ImSigmaBValuesFunc[x], -2 ImSigmaValuesFunc[x]},
  {x, 0, 4}, AxesLabel -> {Style["E", Italic], Gamma[Style["E", Italic]]}
daFunc = Interpolation[da]
dbFunc = Interpolation[db]
dFunc = Interpolation[d]
```

Entstehungswahrscheinlichkeit für die zwei Kanäle

```

PreIntegralA[k_, t_] =
  Abs[PlotSteps * Sum[d[[x + 1, 2]] * (Exp[- $\frac{I}{hBar}$  * Ena[k] * t] - Exp[- $\frac{I}{hBar}$  * (x * PlotSteps) * t]) /
    (Ena[k] - (x * PlotSteps)), {x, 0,  $\frac{PlotEnd}{PlotSteps} - 1$ }]^2;

pStoA[t_] := Parallelize[ $\frac{4 * Pi * ga^2}{(2 * Pi)^3}$  NIntegrate[k^2 * fa[k]^2 * PreIntegralA[k, t],
  {k, 0.000001,  $\infty$ }]
pStoATable = Table[{t, pStoA[t]}, {t, 0, 100, 1}];
PreIntegralB[k_, t_] = Abs[PlotSteps * Sum[ $\frac{d[[x + 1, 2]]}{Enb[k] - (x * PlotSteps)}$  *
  (Exp[- $\frac{I}{hBar}$  * Enb[k] * t] - Exp[- $\frac{I}{hBar}$  * (x * PlotSteps) * t]), {x, 0,  $\frac{PlotEnd}{PlotSteps} - 1$ }]^2;
pStoB[t_] := Parallelize[ $\frac{4 * Pi * gb^2}{(2 * Pi)^3}$  NIntegrate[k^2 * fb[k]^2 * PreIntegralB[k, t],
  {k, 0.000001,  $\infty$ }]
pStoBTable = Table[{t, pStoB[t]}, {t, 0, 100, 1}];
pStoAFunc := Interpolation[pStoATable, InterpolationOrder -> 10]
pStoBFunc := Interpolation[pStoBTable, InterpolationOrder -> 10]

```

Literatur

- [1] atom (matter). *Encyclopædia Britannica (Online Ausgabe)*.
- [2] A. Beskow, J. Nilsson. The Concept of Wave Function and the Irreducible Representations of the Poincaré Group. *Ark. Fys.*, 34:561, 1967.
- [3] A. Degasperis, L. Fonda, G.C. Ghirardi. Does the Lifetime of an Unstable System Depend on the Measuring Apparatus? *Il Nuovo Cimento*, Vol. 21 A, Nr. 3:471, 1974.
- [4] A. Gal. Neutrino magnetic moment effects in electron-capture measurements at GSI. *Nucl. Phys. A*, 842:102, 2010.
- [5] A. N. Ivanov, P. Kienle. Time Modulation of the K-Shell Electron Capture Decay Rates of H-like Heavy Ions at GSI Experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 103:062502, 2009.
- [6] A. Peres. Nonexponential decay law. *Annals of physics*, 129:33, 1980.
- [7] A. Peres. Zeno paradox in quantum theory. *Am. J. Phys.*, 48:931, 1980.
- [8] Aristoteles. *Physik*. VI:9, 239b5.
- [9] B. Misra, E. C. G. Sudarshan. The Zeno's paradox in quantum theory. *J. Math. Phys.*, 18:756, 1977.
- [10] B. Russel. *Philosophie des Abendlandes*. 1945.
- [11] C. Kiefer. On the interpretation of quantum theory - from Copenhagen to the present day. arXiv:quant-ph/0210152v1, 2002.
- [12] D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I.-O. Stamatescu, H.D. Zeh. *Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory*. Springer Berlin, 1996.
- [13] D. Novkovic, L. Nadder, A. Kandic, I. Vukanac, M. Durasevic, D. Jordanov. Testing the exponential decay law of gold ^{198}Au . *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 566:477, 2006.
- [14] F. Giacosa. Non-exponential decay in quantum field theory and in quantum mechanics: the case of two (or more) decay channels. *Found. Phys.*, 42:1262, 2012.
- [15] F. Giacosa, G. Pagliara. Oscillations in the decay law: A possible quantum mechanical explanation of the anomaly in the experiment at the GSI facility. arXiv:1110.1669v2 (Accepted for publication in *Quantum Matter*.), 2011.
- [16] F. Giacosa, G. Pagliara. (Oscillating) non-exponential decays of unstable states. arXiv:1204.1896v2 (Proceedings of the "50th International Winter Meeting on Nuclear Physics", 23-27 January 2012, Bormio, Italy), 2012.
- [17] H. Nakazato, M. Namiki, S. Pascazio, H. Rauch. On the quantum zeno effect. *Phys. Lett A*, 199:27, 1995.

- [18] H.C. Krylov, B.A. Fock. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 17:93, 1947.
- [19] I. Ersak. The number of wave functions of an unstable particle. *Soviet Journal of Nuclear Physics*, 9:263, 1969.
- [20] I. Ersak. *Yad. Fiz.*, 9:458, 1969 (engl. Übersetzung [19]).
- [21] J. Rau. Relaxation Phenomena in Spin and Harmonic Oscillator Systems. *Phys. Rev.*, 129:1880, 1963.
- [22] K. Koshino, A. Shimizu. Quantum Zeno effect by general measurements. *Phys. Rep.*, 412:191, 2005.
- [23] L. E. Ballentine. *Quantum Mechanics - A Modern Development*. World Scientific, 1998.
- [24] L. Fonda, G.C. Ghirardi, A. Rimini. Decay theory of unstable quantum systems. *Rep. Prog. Phys.*, 41:587, 1978.
- [25] L. Mandelstam, I. Tamm. The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics. *J. Phys.*, 9:249, 1945.
- [26] L.A. Khalfin. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 33:1371, 1957 (engl. Übersetzung [27]).
- [27] L.A. Khalfin. Contribution to the decay theory of a quasi-stationary state. *Soviet Physics JETP*, 6:1053, 1958.
- [28] M. G. Raizen et al. Experimental evidence for non-exponential decay in quantum tunnelling. *Nature*, 387:575, 1997.
- [29] P. Facchi, S. Pascazio. Unstable systems and quantum zeno phenomena in quantum field theory. *arXiv:quant-ph/0202127v1*, 2002.
- [30] P. Kopietz. Vorlesung der Theoretischen Physik - Quantenmechanik II. Frankfurt am Main, 2011.
- [31] R.J. Cook. What are Quantum Jumps? *Phys. Scr.*, T21, 1988.
- [32] S. Lloyd. The quantum geometric limit. *arXiv:1206.6559v3*, 2012.
- [33] T.D. Lee. Some special examples in renormalizable field theory. *Phys. Rev.*, 95:1329, 1954.
- [34] W. Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Z. Phys.*, 43:172, 1927.
- [35] W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger, D.J. Wineland. Quantum Zeno Effect. *Phys. Rev. A*, 41:2295, 1990.
- [36] Yu. A. Litvinov et al. Observation of non-exponential orbital electron capture decays of hydrogen-like ^{140}Pr and ^{142}Pm ions. *Phys. Rev. B*, 664:162, 2008.

Erklärung nach § 30 (11) Ordnung für den BA- und MA-Studiengang

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen oder aus anderen fremden Texten entnommen wurden, sind von mir als solche kenntlich gemacht worden. Ferner erkläre ich, dass die Arbeit nicht - auch nicht auszugsweise - für eine andere Prüfung verwendet wurde.