



Johann Wolfgang Goethe–Universität  
Frankfurt am Main

Fachbereich Physik  
Institut für Theoretische Physik

Bachelorarbeit

**Phänomenologie von Axialvektor-Mesonen und  
Mischungseffekte in Kaon-Feldern**

Florian Divotgey

02.10.2012

**Erstgutachter**

Prof. Dr. Dirk H. Rischke

Institut für Theoretische Physik  
Universität Frankfurt a. M.

**Zweitgutachter**

Dr. Francesco Giacosa

Institut für Theoretische Physik  
Universität Frankfurt a. M.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, mich bei den Personen zu bedanken, die großen Anteil an dieser Arbeit haben.

Zuallererst möchte ich mich bei Prof. Dr. Dirk H. Rischke für die tolle Betreuung, die großartige Hilfestellung bei aufgetretenen Fragen und für die Vergabe dieser Bachelorarbeit bedanken. Weiterhin möchte ich mich auch für die hervorragende Vorlesung in theoretischer Physik in den vergangenen drei Jahren und für die Beantwortung zahlreicher Fragen in dieser Zeit herzlich bedanken.

Großen Dank schulde ich auch Dr. Francesco Giacosa, der mir nicht nur als Betreuer dieser Bachelorarbeit bei Fragen und Problemen stets zur Seite gestanden hat, sondern auch bei der Organisation der Tutorien der Vorlesungen "Theoretische Physik I-V" großartige Arbeit geleistet hat.

Weiterhin möchte ich auch Dr. Barbara Betz und Dr. Khaled Teilab für zahlreiche, hilfreiche Diskussionen und der gesamten "chiral group" für interessante und lehrreiche Arbeitsgruppentreffen danken.

Zu guter Letzt möchte ich auch Steffi Hartmann, meiner ganzen Familie und allen meinen Freunden für die Unterstützung und das Verständnis, dass ich in den letzten drei Monaten nicht immer verfügbar war, danken.

# Notationen

## Einheitensystem

In dieser Bachelorarbeit wird durchgehend in natürlichen Einheiten

$$\hbar = c = k_B = 1$$

gearbeitet.

## Metrik und Tensoren der speziellen Relativitätstheorie

Zunächst sei angemerkt, dass in der kompletten Ausarbeitung die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wird. Dies gilt sowohl für römische als auch griechische Indizes. Der metrische Tensor des Minkowskiraumes wird nach der folgenden Vorzeichenkonvention verwendet:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad .$$

Hierbei ist zu beachten, dass griechische Indizes stets über  $0, 1, 2, 3$  laufen. Römische Indizes hingegen laufen nur über die drei Raumrichtungen  $1, 2, 3$  beziehungsweise  $x_1, x_2, x_3$ . Weiterhin ist zu beachten, dass die Vektoren des dreidimensionalen, euklidischen Raumes stets mit fettgedruckten Buchstaben

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gekennzeichnet werden. Die ko- und kontravarianten Vier-Vektoren des Minkowskiraumes werden stattdessen mit der folgenden Notation versehen:

$$x = x^\mu = (t, \mathbf{r})^T, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\mathbf{r}) \quad .$$

## Fourier-Transformationen

In Fourier-Transformationen werden die  $2\pi$ -Faktoren stets zwischen Hin- und Rücktransformation aufgeteilt, so dass

$$f(x) = f(t, \mathbf{r}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \tilde{f}(k) \exp[-ikx] \quad ,$$
$$\tilde{f}(k) = \tilde{f}(\omega, \mathbf{k}) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2} f(x) \exp[ikx]$$

gilt.

## Diracsche $\gamma$ -Matrizen

Die Diracschen  $\gamma$ -Matrizen werden in der Diracschen Darstellungsbasis verwendet, i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & \\ & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{pmatrix},$$

wobei  $\sigma_i$  die Pauli-Matrizen bezeichnet. In der Dirac-Darstellung ergibt sich für  $\gamma_5$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & \end{pmatrix} \quad .$$

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>iv</b>
<b>2</b>	<b>Klassische Feldtheorie</b>	<b>1</b>
2.1	Lagrange-Formalismus für Felder	1
2.2	Hamilton-Formalismus für Felder	3
<b>3</b>	<b>Zeitentwicklung von Quantensystemen und Streumatrix</b>	<b>4</b>
3.1	Schrödinger-Bild	4
3.2	Heisenberg-Bild	5
3.3	Wechselwirkungsbild	5
3.4	Herleitung des Zeitentwicklungsoperators	6
3.5	Die Streumatrix	7
<b>4</b>	<b>Quantisierung des Klein-Gordon- und des Proca-Feldes</b>	<b>9</b>
4.1	Das Klein-Gordon-Feld	9
4.1.1	Die Klein-Gordon-Gleichung	9
4.1.2	Die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung	9
4.1.3	Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes	11
4.1.4	Der Hamilton-Operator des Klein-Gordon-Feldes	11
4.2	Das Proca-Feld	12
4.2.1	Die Proca-Gleichung	12
4.2.2	Die Lösung der Proca-Gleichung	13
<b>5</b>	<b>Berechnung von Zerfallsbreiten</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Das Modell</b>	<b>20</b>
6.1	Die Konstruktion des Modells	20
6.2	Die Symmetrien des Modells	21
6.2.1	Lorentz-Symmetrie	21
6.2.2	$U(N_f)_V$ -Symmetrie	23
6.2.3	CP-Symmetrie	24
6.2.3.1	Ladungskonjugation	24
6.2.3.2	Parität	25
6.3	Berechnung der Kopplungskonstanten	26
6.3.1	Die Kopplungskonstante der Axialvektor-Mesonen	26
6.3.2	Konsistenztest	30
6.3.3	Die Kopplungskonstante der Pseudovektor-Mesonen	31
6.3.4	Konsistenztest	32
6.4	Mischungseffekte in Kaon-Feldern	33
6.4.1	Die Notwendigkeit eines Mischungsterms	33
6.4.2	Mischung der Kaon-Felder	33
6.4.3	Die Massen der unphysikalischen Felder	36
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>38</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Mitte der 60er Jahre waren schon ungefähr 100 verschiedene Elementarteilchen bekannt. Aufgrund dieser enormen Anzahl war man sich sicher, dass diese Vielzahl von Teilchen nicht elementar sein kann, sondern dass noch eine Substruktur an Teilchen existieren muss. Im Jahre 1964 wurde jeweils unabhängig von Gell-Mann und Zweig ein Klassifizierungsschema der bekannten Hadronen durch drei Grundbausteine, die sogenannten Quarks, vorgeschlagen. Im Rahmen dieser Arbeit wurden zunächst nur up-, down- und das strange-Quark postuliert. Während die Existenz des up-Quark schon 1968 am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) bewiesen wurde, konnte das schwerste der sechs heute bekannten Quark-Flavor, das top-Quark, erst 1995 am Fermi National Accelerator Laboratory experimentell nachgewiesen werden. Mit der Hilfe von up-, down- und strange-Quark konnten die damals bekannten Hadronen in  $SU(3)$ -Multipletts angeordnet werden. Die Mesonen, i.e.  $q\bar{q}$ -Zustände, lassen sich durch die Kopplungsregeln der  $SU(3)$  in ein Flavor-Singlett und ein Flavor-Oktett einordnen. Baryonen, d.h.  $qqq$ -Zustände, bilden hingegen ein Singlett, zwei Oktetts und ein Dekuplett. Das Baryonen-Dekuplett beinhaltet das Iso-Quadruplett der sogenannten Delta-Resonanzen  $\Delta^-, \Delta^0, \Delta^+$  und  $\Delta^{++}$ . Da Fermionen aufgrund des Pauli-Prinzips vollständig antisymmetrische Wellenfunktionen haben müssen, stellen  $|\Delta^- \rangle = |ddd\rangle$  und  $|\Delta^{++} \rangle = |uuu\rangle$  offensichtlich einen Widerspruch dar, da deren Spin- und Flavor-Wellenfunktion vollständig symmetrisch sind. Um diesen Widerspruch aufzuklären, postulierten Greenberg, Han und Nambu einen weiteren Freiheitsgrad, die sogenannte Farbe oder Farbladung. Im Rahmen der  $SU(3)$ -Farbsymmetrie existieren drei fundamentale Farben rot, grün und blau, welche von Quarks als innerer Freiheitsgrad getragen werden können. Weiterhin sei erwähnt, dass acht Gluonen existieren, welche der adjungierten Darstellung der  $SU(3)_{\text{Farbe}}$  entsprechen.

In Anlehnung an die enormen Erfolge der lokalen  $U(1)$ -Eichtheorie des Elektromagnetismus, der sogenannten Quantenelektrodynamik (QED), wurde Anfang der 70er Jahre die Theorie der starken Wechselwirkung, die Quantenchromodynamik (QCD) in einer ähnlichen Form formuliert. Bei der Quantenchromodynamik handelt es sich um eine lokale  $SU(3)$ -Eichtheorie. Bei der Eichgruppe der QCD handelt es sich um die  $SU(3)$ -Farbsymmetrie, i.e. die Lagrange-Dichte der QCD

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu,a}F_a^{\mu\nu} + \bar{q}(i\not{D} - m)q$$

ist invariant unter lokalen  $SU(3)$ -Transformationen im Farbraum. Die Tatsache, dass die Eichgruppe  $SU(3)_{\text{Farbe}}$  der QCD im Gegensatz zur  $U(1)$  der QED nicht-abelsch ist, d.h. ihre Gruppenelemente im Allgemeinen nicht vertauschen, sorgt für die Existenz von dreier und vierer Gluon-Vertizes (Selbstwechselwirkungen der Gluonen), welche für das Photon in der Quantenelektrodynamik nicht existieren und der Quantenchromodynamik somit ganz andere physikalische Eigenschaften und Phänomene verleihen. Es stellte sich heraus, dass die mathematische Behandlung der QCD viel komplizierter ist als jene der QED. Es existieren jedoch mehrere verschiedene Möglichkeiten, die Phänomenologie der QCD zu bearbeiten. Im Hochenergiebereich beispielsweise lässt sich die QCD perturbativ behandeln. Eine weitere Möglichkeit wäre die sogenannte Gitter-QCD, bei der die Raum-Zeit auf einem vierdimensionalen, kubischen Gitter diskretisiert wird, um Berechnungen numerisch durchzuführen. Letztendlich lässt sich die QCD auch unter Verwendung sogenannter effektiver Theorien, i.e. Modelle, bei denen gebundene Zustände aus Quarks betrachtet werden, bearbeiten. Letzterer Zugang zur Phänomenologie der Quantenchromodynamik soll Gegenstand dieser Bachelorarbeit werden. In der PhD-Thesis “Quarkonium Phenomenology in Vakuum“ von Denis Parganlija [Par] wurden bereits Zwei- und Drei-Flavor-Linear-Sigma-Modelle vorgestellt. Ziel dieser Bachelorarbeit ist die Untersuchung eines vereinfachten mesonischen Drei-Flavor-Modells mit Axial- und Pseudovektor-Kopplung. Nachdem in den ersten drei Kapiteln der wichtigste Formalismus

rekapituliert wird, dient das vierte Kapitel der Erarbeitung eines Formalismus zur Berechnung von Zerfallsbreiten. Im letzten Kapitel soll das bereits erwähnte Modell untersucht werden. Dazu werden durch die Berechnung und Auswertung von Zerfallsbreiten im Axial- und Pseudovektor-Sektor zunächst die Kopplungskonstanten des Modells festgelegt. Die errechneten Werte der Kopplungskonstanten werden dann anhand weiterer Teilchenzerfälle auf ihre Konsistenz hin überprüft. Desweiteren verfügt unser Modell über einen Mischungsterm, welcher für eine Mischung unphysikalischer, im Axial- und Pseudovektor-Sektor auftretender Kaon-Felder sorgt. Durch die Einführung gedrehter, physikalischer Kaon-Felder lassen sich diese Mischterme zum Verschwinden bringen. Für die neu eingeführten Kaon-Felder,  $K_1(1270)$  und  $K_1(1400)$  ergeben sich dann Wechselwirkungsterme mit neuen Kopplungskonstanten, welche als Funktion der bereits bestimmten Kopplungskonstanten und eines Mischungswinkels angegeben werden können. Die Bestimmung des Mischungswinkels ist ein wesentlicher Bestandteil dieser Bachelorarbeit. Zur Berechnung des Mischungswinkels verwenden wir den  $K^*(892)\pi$ -Zerfallskanal von  $K_1(1270)$ . Abschließend wird der errechnete Wert anhand des  $K^*(892)\pi$ -Zerfalls von  $K_1(1400)$  auf Konsistenz hin überprüft.

## Kapitel 2

# Klassische Feldtheorie

Ziel dieses Kapitels ist es, die für die späteren Rechnungen wichtigen Begriffe der klassischen Feldtheorie in kurzem Umfang zu wiederholen. Im ersten Abschnitt des Kapitels wird daher die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder aus der Variation des Wirkungsfunktional noch einmal hergeleitet. Speziell die Angabe der Lagrange-Dichte ist für die relativistischen Quantenfeldtheorien von großer Wichtigkeit. Im zweiten Abschnitt dieses kurzen Kapitels wird dann noch der Übergang vom Lagrange- zum Hamilton-Formalismus beschrieben. Der Grund dafür liegt darin, dass später bei der Berechnung von Zerfallsbreiten aus der Streumatrix der Hamilton-Formalismus von Bedeutung sein wird.

Als Quelle für dieses Kapitel dienten [Th2] und [Gr7].

### 2.1 Lagrange-Formalismus für Felder

Beim Übergang vom klassischen Vielteilchen-Lagrange-Formalismus zur klassischen Feldtheorie werden statt der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten  $q_i(t)$ ,  $\dot{q}_i(t)$  kontinuierliche Feldgrößen  $\phi(t, \mathbf{r})$  beziehungsweise  $\dot{\phi}(t, \mathbf{r})$  verwendet, d.h.

$$q_i(t) \longrightarrow \phi(t, \mathbf{r}), \quad \dot{q}_i(t) \longrightarrow \dot{\phi}(t, \mathbf{r}) \quad . \quad (2.1)$$

Man beachte, dass nun ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden vorliegt, da die Werte des Feldes  $\phi$  nun die dynamischen Variablen des Systems sind und die  $\mathbf{r}$ -Abhängigkeit nicht länger die Bedeutung einer Ortsabhängigkeit sondern eines kontinuierlichen Indexes hat. Der Kürze halber werden im Folgenden nun die Abhängigkeiten der Felder  $\phi$  und  $\dot{\phi}$  weggelassen. Durch diese Ersetzung wird die ursprüngliche Lagrange-Funktion  $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  zu einem Funktional der Feldgröße  $\phi$  sowie seiner Zeitableitung:

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \longrightarrow L[\phi, \dot{\phi}] \quad . \quad (2.2)$$

Es sei noch einmal angemerkt, dass die  $\mathbf{r}$ -Abhängigkeit der Felder nur einen kontinuierlichen Index darstellt und das Lagrange-Funktional somit nur von den Werten der Felder und nicht von  $\mathbf{r}$  abhängt und somit als  $L(t)$  dargestellt werden kann. Nun lässt sich das Lagrange-Funktional als Raumintegral über eine zugehörige Dichte, die sogenannte Lagrange-Dichte, schreiben

$$L(t) = \int_V d^3\mathbf{r} \mathcal{L} \quad , \quad (2.3)$$

wobei  $V$  das Volumen des jeweils betrachteten Systems ist. Bei der Lagrange-Dichte handelt es sich ebenfalls um ein Funktional. Dieses kann allerdings zusätzlich auch von den räumlichen Ableitungen der Felder  $\nabla\phi$ , der Zeit  $t$  und den Raumkoordinaten  $\mathbf{r}$  abhängen, also

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu\phi, x] \quad , \quad (2.4)$$

wobei die Ableitungen bezüglich Raum und Zeit, sowie die Raum- und Zeitkoordinaten direkt in kovarianter Schreibweise verwendet werden.

Eine weitere zentrale Größe des klassischen Lagrange-Formalismus ist die Wirkung  $S$

$$\begin{aligned} S[\phi, \dot{\phi}] &= \int_{t_a}^{t_e} dt L[\phi, \dot{\phi}] = \int_{t_a}^{t_e} \int_V dt d^3\mathbf{r} \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi, x] \\ &= \int_\Omega d^4x \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi, x] \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hierbei ist  $\Omega = [t_a, t_e] \times V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  ein beliebiges Raum-Zeit-Volumen und  $d^4x$  das invariante, infinitesimale Raum-Zeit-Volumen. Die Tatsache, dass die Wirkung einer Feldtheorie stets ein Lorentz-Skalar ist, bedingt durch [2.5], dass auch die Lagrange-Dichte ein Lorentz-Skalar sein muss.

Aus dem Hamiltonschen Prinzip der stationären Wirkung erhält man nun die Bewegungsgleichungen des Systems. Es sei angemerkt, dass die Variation des Wirkungsfunktionals bei konstant gehaltenem Ort und konstant gehaltener Zeit durchgeführt wird. Das bedeutet, dass nur die Freiheitsgrade  $\phi$ ,  $\nabla\phi$  und  $\dot{\phi}$  variiert werden. Allerdings ist zu beachten, dass die Felder auf der Oberfläche  $\partial\Omega$  des Raum-Zeit-Volumens ebenfalls nicht mitvariiert werden. Unter Beachtung der Produktregel gilt also

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int_\Omega d^4x \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi, x] \\ &= \int_\Omega d^4x \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \delta (\nabla \phi)}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi}}_{(2)} \quad . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die mit (1) und (2) gekennzeichneten Terme lassen sich durch partielle Integration noch umschreiben. Für (1) erhält man

$$\begin{aligned} \int_\Omega d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \delta (\nabla \phi) &= \int_\Omega d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \nabla (\delta \phi) \\ &= \int_{t_a}^{t_e} dt \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \delta \phi \Big|_{\partial V} - \int_V d^3\mathbf{r} \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) \delta \phi \right\} \\ &= - \int_\Omega d^4x \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) \delta \phi \quad , \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei in der ersten Zeile ausgenutzt wurde, dass bei festgehaltenem Ort  $\mathbf{r}$  die Variation und die partiellen Ableitungen vertauschen. Weiterhin wurde in der letzten Zeile verwendet, dass die Variation  $\delta\phi$  auf der Oberfläche - hier der räumlichen Oberfläche  $\partial V$  - des Raum-Zeit-Volumens verschwindet. Der zweite Term lässt sich analog zu dieser Vorgehensweise auswerten:

$$\begin{aligned} \int_\Omega d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} &= \int_\Omega d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial_t (\delta \phi) \\ &= \int_V d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \phi \Big|_{t_a}^{t_e} - \int_{t_a}^{t_e} dt \partial_t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \delta \phi \right\} \\ &= - \int_\Omega d^4x \partial_t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \delta \phi \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Der Kürze halber wurde für die partielle Zeitableitung  $\partial_t$  als Notation verwendet. Nun können die Resultate [2.7] und [2.8] in [2.6] eingesetzt werden:

$$0 = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) - \partial_t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \right\} \delta \phi \quad (2.9)$$

Da nun aber die Variation  $\delta\phi(x)$  an jedem Raum-Zeit-Punkt  $x = (t, \mathbf{r})$  unabhängig ist, muss der Ausdruck in der geschweiften Klammer verschwinden. Unter Verwendung der kovarianten Notation und der Tatsache, dass das System auch  $j = 1, 2, \dots, n$  unabhängige Felder beinhalten kann, findet man schließlich die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^{(j)})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(j)}} = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (2.10)$$

## 2.2 Hamilton-Formalismus für Felder

Aus den Resultaten des vorherigen Abschnitts lässt sich der Hamilton-Formalismus für Felder ableiten. In der analytischen Mechanik wird die Hamilton-Funktion als Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion eingeführt

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^N p_j \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) \quad . \quad (2.11)$$

Dieser Formalismus lässt sich für Felder einfach übertragen. Zunächst lässt sich die Hamilton-Funktion als Raumintegral über die sogenannte Hamilton-Dichte

$$H(t) = \int_V d^3\mathbf{r} \mathcal{H}(x) \quad , \quad (2.12)$$

schreiben. Es sei beachtet, dass in der obigen Formel wieder zur kovarianten Notation übergegangen wurde. Die Hamilton-Dichte stellt nun die Legendre-Transformierte der Lagrange-Dichte dar. Für den Übergang zur Hamilton-Dichte wird jedoch zunächst ein generalisierter Impuls, die sogenannte Impuls-Dichte  $\pi(x)$  benötigt. Diese lässt sich aus der Lagrange-Dichte bestimmen

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad . \quad (2.13)$$

Nun kann die Hamilton-Dichte als

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x) \quad (2.14)$$

geschrieben werden. Einsetzen dieses Resultates in [2.12] führt auf den folgenden Ausdruck für die Hamilton-Funktion:

$$H(t) = \int_V d^3\mathbf{r} \left\{ \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x) \right\} \quad (2.15)$$

$$= \int_V d^3\mathbf{r} \left( \pi(x) \dot{\phi}(x) - L(t) \right) \quad , \quad (2.16)$$

wobei im letzten Schritt Gleichung [2.3] verwendet wurde. Um dieses Kapitel abzuschließen, sei noch erwähnt, dass sich für Felder natürlich auch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ableiten lassen und sich für zwei Funktionale auch die aus der analytischen Mechanik bekannten Poisson-Klammern

$$\{F, G\} = \int d^3\mathbf{r} \left[ \frac{\delta F}{\delta \phi} \frac{\delta G}{\delta \pi} - \frac{\delta F}{\delta \pi} \frac{\delta G}{\delta \phi} \right] \quad (2.17)$$

definieren lassen. Schon in der Teilchenmechanik waren die Poisson-Klammern der generalisierten Koordinaten und Impulse besonders interessant. Für die Felder  $\phi(t, \mathbf{r})$  und  $\pi(t, \mathbf{r})$  ergibt sich

$$\{\phi(t, \mathbf{r}), \pi(t, \mathbf{r}')\} = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad , \quad (2.18)$$

während

$$\{\phi(t, \mathbf{r}), \phi(t, \mathbf{r}')\} = \{\pi(t, \mathbf{r}), \pi(t, \mathbf{r}')\} = 0 \quad (2.19)$$

ist. Die Gleichungen [2.18] und [2.19] werden bei der kanonischen Feldquantisierung des freien ungeladenen Klein-Gordon-Feldes in Kapitel 4.1.3 eine wichtige Rolle spielen, wenn die Felder zu Operatoren erhoben werden und statt der Poisson-Klammern die Gültigkeit von Kommutator-Relationen gefordert wird. Eine ausführlichere Diskussion zum Hamilton-Formalismus, speziell zu den Hamiltonschen Gleichungen und den Poisson-Klammern, befindet sich in [Gr7].

## Kapitel 3

# Zeitentwicklung von Quantensystemen und Streumatrix

In diesem Kapitel geht es ausschließlich um die Dynamik, d.h. die Zeitentwicklung von Quantensystemen. Im ersten Abschnitt wird der Vollständigkeit halber das Schrödinger-Bild der Zeitentwicklung betrachtet. Dieses spielt später eine eher untergeordnete Rolle, da dann die meisten Probleme im Heisenberg- und im Wechselwirkungs-Bild betrachtet werden. Daher werden diese beiden Bilder auch direkt im Anschluss an das Schrödinger-Bild wiederholt. Weiterhin soll der sogenannte Zeitentwicklungsoperator im Rahmen des Wechselwirkungsbildes explizit hergeleitet werden. Zum Abschluss des Kapitels wird eine der wichtigsten Größen in der Quantenfeldtheorie betrachtet, die sogenannte Streumatrix.

Als Quellen für dieses Kapitel dienten [PSc], [Gr7] und [Th4].

### 3.1 Schrödinger-Bild

Im Schrödinger-Bild sind die Zustandsvektoren eines quantenmechanischen Systems zeitabhängig, während die Operatoren, abgesehen von einer expliziten Zeitabhängigkeit, zeitunabhängig sind. Daher wird nun für die folgende Diskussion ein reiner Zustand, i.e. ein Eigenzustand zu einem vollständigen Satz von Operatoren zum Zeitpunkt  $t_0$ , betrachtet. Die Zeitentwicklung dieses Zustandes geschieht nun durch die Anwendung eines unitären Zeitentwicklungsoperators

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad . \quad (3.1)$$

Wie schon erwähnt, wird die explizite Form des Zeitentwicklungsoperators im Rahmen der Diskussion des Wechselwirkungsbildes hergeleitet. Jedoch kann man aus einfachen Überlegungen schon einige wichtige Eigenschaften dieses Operators ableiten. Aus der Forderung, dass die Norm des zur Zeit  $t_0$  definierten Zustandes erhalten bleibt, folgt die Unitarität des Zeitentwicklungsoperators, denn

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle \quad (3.2)$$

bedingt, dass

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1} \quad (3.3)$$

ist. Aus Gleichung [3.3] folgt sofort die Unitarität. Betrachtet man nun die Entwicklung des Zustandes vom Zeitpunkt  $t_0$  bis zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  und zurück, so muss

$$\hat{U}(t_0, t) \hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1} \quad (3.4)$$

gelten, da sich das System nicht entwickelt hat. Aus dieser Eigenschaft folgt direkt, dass

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t_0, t) \quad (3.5)$$

ist. Zum Abschluss dieses kurzen Abschnitts sei noch erwähnt, dass sich die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung durch eine infinitesimale Entwicklung des Zeitentwicklungsoperators ableiten lässt. Dazu entwickelt man den Zeitentwicklungsoperator nach Taylor und benutzt zusätzlich die Tatsache, dass sich eine beliebige, infinitesimale, unitäre Transformation  $\hat{U}$  immer in der Form

$$\hat{U} = \mathbb{1} + i\lambda \hat{H} + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (3.6)$$

schreiben lässt. In der obigen Formel entspricht  $\hat{H}$  einem beliebigen, hermiteschen Operator. Im vorliegenden Fall würde dieser Operator dann dem Hamilton-Operator entsprechen. Weitere Details zum Schrödinger-Bild und zur Herleitung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung siehe [Th4].

## 3.2 Heisenberg-Bild

Ganz im Gegensatz zum Schrödinger-Bild sind die Zustände des betrachteten quantenmechanischen Systems im Heisenberg-Bild stationär, was bedeutet, dass sich diese Zustände als

$$|\psi_H\rangle = \hat{U}(t_0, t) |\psi(t)\rangle \quad (3.7)$$

schreiben lassen. Bei stationären Zuständen muss die Zeitentwicklung also von den Operatoren getragen werden. Um die Gestalt der Operatoren im Heisenberg-Bild zu verdeutlichen, wird zunächst der beliebige Operator  $\hat{O}$  betrachtet. Unter Verwendung der vorhergehenden Gleichung gilt für dessen Erwartungswert

$$\langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle = \langle \psi_H | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{O} \hat{U}(t, t_0) | \psi_H \rangle \quad . \quad (3.8)$$

Dieses Resultat definiert einen sogenannten Heisenberg-Operator

$$\hat{O}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{O} \hat{U}(t, t_0) \quad . \quad (3.9)$$

Diese Heisenberg-Operatoren erfüllen die Heisenbergsche Bewegungsgleichung, welche man erhält, indem man die Zeitableitung eines beliebigen Heisenberg-Operators bildet:

$$i \frac{d}{dt} \hat{O}_H = \left[ \hat{O}_H, \hat{H}_H \right]_- + i \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}_H \quad . \quad (3.10)$$

Eine explizite Herleitung der Heisenbergschen Bewegungsgleichung findet man ebenfalls in [Th4].

## 3.3 Wechselwirkungsbild

Das letzte zu betrachtende Darstellungsbild für die zeitliche Entwicklung von Quantensystemen ist das sogenannte Wechselwirkungsbild (vgl. dazu auch [Th4] und [Gr7]). Dieses ist für die Betrachtung von Systemen prädestiniert, deren Hamilton-Operator in einen freien, zeitunabhängigen Teil  $\hat{H}_0$  und einen wechselwirkenden, zeitabhängigen Teil  $\hat{H}^I$ , welcher für  $t \rightarrow \pm\infty$  verschwindet, separiert werden kann

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}^I(t) \quad . \quad (3.11)$$

Aus eben diesem Grund ist das Wechselwirkungsbild bei der Berechnung von Zerfallsbreiten und generell in der gesamten Quantenfeldtheorie von großer Bedeutung. Die zugrundeliegende Idee ist nun, dass sich die Zustände  $|\psi_{Int}\rangle$  im Wechselwirkungsbild in Abhängigkeit des wechselwirkenden Teils des Hamilton-Operators  $\hat{H}^I$  entwickeln. Die Operatoren hingegen entwickeln sich unter dem Einfluss des freien Hamilton-Operators  $\hat{H}_0$ . Ausgehend von dieser Idee lässt sich zeigen, dass die Bewegungsgleichung für Operatoren  $\hat{O}_{Int}$  im Wechselwirkungsbild gerade die Form der Heisenbergschen Bewegungsgleichung [3.10] hat. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass hier nur der freie Teil  $\hat{H}_0$  des Hamilton-Operators vorkommt

$$i \frac{d}{dt} \hat{O}_{Int} = \left[ \hat{O}_{Int}, \hat{H}_0 \right]_- + i \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}_{Int} \quad , \quad (3.12)$$

wobei für Operatoren im Wechselwirkungsbild

$$\hat{O}_{Int} = \exp \left[ i \hat{H}_0 (t - t_0) \right] \hat{O} \exp \left[ -i \hat{H}_0 (t - t_0) \right] \quad (3.13)$$

gilt. Ebenfalls lässt sich zeigen, dass die Zustände  $|\psi_{Int}\rangle$  im Wechselwirkungsbild die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für den wechselwirkenden Hamilton-Operator erfüllen

$$i \frac{d}{dt} |\psi_{Int}(t)\rangle = \hat{H}_{Int}^I(t) |\psi_{Int}(t)\rangle \quad . \quad (3.14)$$

### 3.4 Herleitung des Zeitentwicklungsoperators

In diesem Abschnitt soll der Zeitentwicklungsoperator  $\hat{U}_{Int}(t, t_0)$  des Wechselwirkungsbildes hergeleitet werden. Zunächst verwendet man Gleichung [3.14] und setzt darin die Zeitentwicklung der Wechselwirkungszustände  $|\psi_{Int}(t)\rangle$  ein, also

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_{Int}(t, t_0) |\psi_{Int}(t_0)\rangle = \hat{H}_{Int}^I(t) \hat{U}_{Int}(t, t_0) |\psi_{Int}(t_0)\rangle \quad . \quad (3.15)$$

Da die Wahl des Zustandes  $|\psi_{Int}(t_0)\rangle$  aber völlig beliebig war, kann dieser in der obigen Gleichung einfach weggelassen werden, da sie für alle Zustände gelten muss. Diese Überlegung liefert nun gerade die Entwicklungsgleichung für den Zeitentwicklungsoperator

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_{Int}(t, t_0) = \hat{H}_{Int}^I(t) \hat{U}_{Int}(t, t_0) \quad . \quad (3.16)$$

Die so entstandene Differentialgleichung für den Operator  $\hat{U}_{Int}(t, t_0)$  lässt sich unter Verwendung von Gleichung [3.4] als Anfangsbedingung in eine sogenannte Volterrasche Integralgleichung für den Zeitentwicklungsoperator umschreiben

$$\hat{U}_{Int}(t, t_0) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_{Int}^I(t_1) \hat{U}_{Int}(t_1, t_0) \quad . \quad (3.17)$$

Diese Integralgleichung kann nun iterativ gelöst werden. Dazu wird zunächst  $\hat{U}_{Int}(t_1, t_0)$  bestimmt

$$\hat{U}_{Int}(t_1, t_0) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}^I(t_2) \hat{U}_{Int}(t_2, t_0) \quad (3.18)$$

und in Gleichung [3.17] eingesetzt. Wiederholt man diesen Vorgang iterativ, so findet man die sog. von Neumann-Reihe

$$\hat{U}_{Int}(t, t_0) = \mathbb{1} + \sum_{j=1}^{\infty} (-i)^j \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{j-1}} dt_j \hat{H}_{Int}^I(t_1) \dots \hat{H}_{Int}^I(t_j) \quad . \quad (3.19)$$

Dieses unhandliche Resultat lässt sich noch weiter vereinfachen. Dazu macht man sich zunächst klar, dass für die Operatoren in Gleichung [3.19] eine Zeitordnung gelten muss, da die Operatoren, welche zu früherer Zeit wirken, rechts von den Operatoren, die zu späterer Zeit wirken, stehen müssen. Um diese Zeitordnung mathematisch zu beschreiben, führt man das sogenannte zeitgeordnete Produkt beziehungsweise den Zeitordnungsoperator ein

$$\hat{T} \left\{ \hat{A}(t_1) \hat{A}(t_2) \hat{A}(t_3) \dots \right\} = \hat{A}(t_1) \hat{A}(t_2) \hat{A}(t_3) \dots \quad , \text{ für } t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \quad . \quad (3.20)$$

wobei  $\hat{A}$  ein beliebiger Operator ist. Es sei noch angemerkt, dass gleiche Zeitargumente keine Schwierigkeiten bereiten, da der Operator ja gerade mit sich selbst kommutiert und die Reihenfolge dann sowieso keine Rolle spielt. Zur Vereinfachung der von Neumann-Reihe betrachtet man nun exemplarisch den zweiten Term der Reihe, dieser hat die folgende Form

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}^I(t_1) \hat{H}_{Int}^I(t_2) \quad . \quad (3.21)$$

Graphisch lässt sich das Integrationsvolumen von [3.21] gemäß Abbildung 3.1 darstellen. Nun ist aber auch klar, dass es völlig unerheblich ist, ob man zuerst über  $t_2$  und dann über  $t_1$  integriert, was der Integration entlang der blauen Streifen entspräche oder ob man zuerst über  $t_1$  und dann über  $t_2$  integriert, was der Integration entlang der roten Streifen entspräche. Diese Überlegung führt zu folgender Umformung von Gleichung [3.21]

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}^I(t_1) \hat{H}_{Int}^I(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 \hat{H}_{Int}^I(t_1) \hat{H}_{Int}^I(t_2) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \hat{H}_{Int}^I(t_2) \hat{H}_{Int}^I(t_1) \quad , \quad (3.22)$$

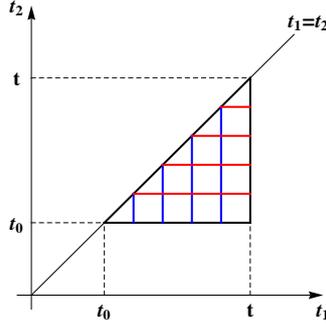


Abbildung 3.1: Darstellung der zwei Möglichkeiten das Integrationsvolumen aufzuintegrieren.

wobei im letzten Schritt die Variablen einfach ineinander umbenannt wurden:  $t_1 \longleftrightarrow t_2$ . Also kann Gleichung [3.21] auch als

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}^I(t_1) \hat{H}_{Int}^I(t_2) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{Int}^I(t_1) \hat{H}_{Int}^I(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \hat{H}_{Int}^I(t_2) \hat{H}_{Int}^I(t_1) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \left\{ \hat{H}_{Int}^I(t_1) \hat{H}_{Int}^I(t_2) \Theta(t_1 - t_2) \right. \\
 &\quad \left. + \hat{H}_{Int}^I(t_2) \hat{H}_{Int}^I(t_1) \Theta(t_2 - t_1) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{T} \left( \hat{H}_{Int}^I(t_1) \hat{H}_{Int}^I(t_2) \right)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

geschrieben werden, wobei im letzten Schritt die Definition des zeitgeordneten Produkts verwendet wurde. Wendet man diese Überlegungen nun auf weitere Terme der von Neumann-Reihe an, so erhält man beispielsweise für den dritten Term ein Dreifachintegral mit dem Vorfaktor  $1/3$  und der Zeitordnung von drei Wechselwirkungs-Hamilton-Operatoren für die Zeiten  $t_1, t_2$  und  $t_3$ . Schließlich erhält man durch konsequente Anwendung dieses Rechenvorgangs

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_{Int}(t, t_0) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-i)^j \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{j-1}} dt_j \hat{H}_{Int}^I(t_1) \dots \hat{H}_{Int}^I(t_j) \\
 &= 1 + \hat{T} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_j \hat{H}_{Int}^I(t_1) \dots \hat{H}_{Int}^I(t_j) \\
 &= \hat{T} \exp \left[ -i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_{Int}^I(t') \right]
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$= \hat{T} \exp \left[ -i \int d^4x \mathcal{H}_{Int}^I(t') \right] \tag{3.25}$$

die zeitgeordnete Exponentialfunktion für die Wechselwirkungs-Hamilton-Dichte.

### 3.5 Die Streumatrix

Nachdem in den ersten drei Abschnitten dieses Kapitels die Dynamik von Quantensystemen in den verschiedenen Darstellungsbildern rekapituliert wurde, soll es in diesem Abschnitt ebenfalls um eine Größe gehen, welche die Entwicklung von quantenmechanischen Systemen charakterisiert, die Streumatrix. Die Streumatrix stellt die Übergangsamplitude eines Anfangszustandes  $|i; in\rangle$  in einen Endzustand  $|f; out\rangle$  unter dem Einfluss einer Wechselwirkung dar und ist somit eine zentrale und wichtige Größe in der Quantenfeldtheorie. Aus eben diesem Grund bietet es sich an, im Wechselwirkungsbild zu arbeiten. Die

$|in\rangle$  und  $|out\rangle$  Zustände gehen im Limes  $t \rightarrow -\infty$  beziehungsweise  $t \rightarrow \infty$  aus dem Zustandsvektor  $|\phi(x)\rangle$  hervor

$$|i; in\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} |\phi(x)\rangle, \quad |f; out\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(x)\rangle \quad . \quad (3.26)$$

Dabei sind die  $|in\rangle$  und  $|out\rangle$  Zustände auf den zwei verschiedenen Fock-Räumen  $\mathcal{F}_{in}$  beziehungsweise  $\mathcal{F}_{out}$  definiert. Die  $\hat{S}$ -Matrix spielt nun die Rolle der invertierbaren Transformation, welche den Übergang zwischen den beiden Darstellungsbasen verwirklicht. Daher gilt also

$$|\varphi; in\rangle = \hat{S} |\varphi; out\rangle, \quad |\varphi; out\rangle = \hat{S}^{-1} |\varphi; in\rangle \quad . \quad (3.27)$$

Die Übergangsamplitude von  $|i; in\rangle$  und  $|f; out\rangle$  ist nun durch

$$\langle f; out | i; in \rangle = \langle f; out | \hat{S} | i; out \rangle \equiv \hat{S}_{fi} \quad (3.28)$$

gegeben, wobei das Übergangsmatrixelement durch  $\hat{S}_{fi}$  definiert wurde. Nun ist es möglich, dieses Matrixelement durch den Zeitentwicklungsoperator  $\hat{U}(t, t_0)$  auszudrücken, denn es gilt

$$\hat{S}_{fi} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow \infty}} \langle f | \hat{U}(t, t_0) | i \rangle \quad . \quad (3.29)$$

Somit ist  $\hat{S}$  gerade  $U(\infty, -\infty)$  und es gilt unter Verwendung von [3.24] beziehungsweise [3.25]

$$\hat{S} = \hat{T} \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{H}_{Int}^I(t') \right] = \hat{T} \exp \left[ -i \int d^4x \mathcal{H}_{Int}^I(t') \right] \quad . \quad (3.30)$$

## Kapitel 4

# Quantisierung des Klein-Gordon- und des Proca-Feldes

Dieses Kapitel dient der Diskussion des freien Klein-Gordon- und des Proca-Feldes, da diese bei der Beschreibung von skalaren und Vektormesonen eine große Rolle spielen. Den Anfang macht das freie ungeladene Klein-Gordon-Feld. Zunächst wird ganz im Rahmen der relativistischen Quantenmechanik aus der Lagrange-Dichte die Bewegungsgleichung, die sog. Klein-Gordon-Gleichung, abgeleitet und deren allgemeine Lösung bestimmt. Erst dann wird der Übergang zur Quantenfeldtheorie, also zu Feldoperatoren, gemacht und gezeigt, dass diese Operatoren nach wie vor die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen. Um das Kapitel abzuschließen, werden noch die wichtigsten Resultate des Proca-Feldes wiederholt.

Als Quellen für dieses Kapitel dienten [Th6], [Gr7] und [PSc].

### 4.1 Das Klein-Gordon-Feld

#### 4.1.1 Die Klein-Gordon-Gleichung

Die Lagrange-Dichte für ein freies, reelles, skalares Feld  $\phi(x)$  mit  $x = (t, \mathbf{r})$  für Teilchen der Masse  $m$  lautet

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad . \quad (4.1)$$

Auf den ersten Blick ist klar, dass es sich bei der obigen Lagrange-Dichte um einen Lorentz-Skalar handelt. Nun kann unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung abgeleitet werden. Man findet

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial (\partial_\alpha \phi)}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\beta \phi) + (\partial_\alpha \phi) \frac{\partial (\partial_\alpha \phi)}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right\} g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \delta_\alpha^\mu (\partial_\beta \phi) + (\partial_\alpha \phi) \delta_\beta^\mu \right\} g^{\alpha\beta} = \partial^\mu \phi \quad (4.2)$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \quad . \quad (4.3)$$

Setzt man diese beiden Resultate nun in [2.10] ein, so erhält man die Klein-Gordon-Gleichung

$$\{\partial_\mu \partial^\mu + m^2\} \phi(x) = 0 \quad . \quad (4.4)$$

#### 4.1.2 Die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung

Nun soll die allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung berechnet werden. Dazu transformiert man das reelle Feld  $\phi(x)$  aus Gleichung [4.4] zunächst in den Impulsraum

$$\phi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(k) \exp[-ikx] \quad , \quad (4.5)$$

wobei  $k = (k^0, \mathbf{k})^T$  der Vierer-Impuls ist. Da man im vorherigen Abschnitt mit einem reellen Feld  $\phi(x)$  gestartet ist, ergibt sich aus  $\phi = \phi^*$  die Tatsache, dass

$$\tilde{\phi}^*(k) = \tilde{\phi}(-k) \quad (4.6)$$

sein muss. Setzt man nun die Entwicklung in [4.4] ein, so ergibt sich

$$0 = \{\partial_\mu \partial^\mu + m^2\} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(k) \exp[-ikx] = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(k) (-k^2 + m^2) \exp[-ikx] \quad (4.7)$$

Dieser Ausdruck liefert sofort die Bedingung, dass

$$\tilde{\phi}(k) (-k^2 + m^2) = 0 \quad (4.8)$$

sein muss. Die erste Möglichkeit, dies zu erreichen, wäre natürlich der Trivialfall  $\tilde{\phi}(k) = 0$ . Da dieser aber uninteressant ist, bleibt nur der Fall  $k^2 = m^2$ . Da nun aber  $\tilde{\phi}(k)$  beliebig ist, kann dafür der Ansatz

$$\tilde{\phi}(k) = \tilde{\phi}'(k) \delta(-k^2 + m^2) = \tilde{\phi}'(k) \delta(k^2 - m^2) \quad (4.9)$$

gemacht werden. Der Träger der Delta-Distribution ist nun die sogenannte Massenschale. Bei der Massenschale handelt es sich um einen zweischaligen Hyperboloiden, auf dessen Oberfläche die möglichen Energien eines Teilchens der Masse  $m$  liegen können. Die negativen Energien auf der unteren Schale entsprechen den Antiteilchen. Es sei noch angemerkt, dass jede relativistische Wellengleichung diese Antiteilchenlösungen enthält. Doch zunächst muss nun die Delta-Distribution aus [4.9] ausgewertet werden. Dies geschieht unter Verwendung einer nützlichen Eigenschaft der Delta-Distribution, denn es ist:

$$\delta[f(x)] = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|f'(x_j)|} \quad (4.10)$$

wobei  $f(x_j) = 0$  und  $f'(x_j) \neq 0$  gilt, es sich bei den  $x_j$  also um einfache Nullstellen der Funktion  $f(x)$  handelt. Die Anwendung dieser Formel auf [4.9] liefert schließlich

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \{\delta(k^0 - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(k^0 + \omega_{\mathbf{k}})\} \quad (4.11)$$

wobei

$$\omega_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (4.12)$$

die relativistische Energie-Impuls-Beziehung ist. Nun kann man die Resultate [4.9] und [4.11] kombinieren, in Gleichung [4.5] einsetzen und die Integration über die  $k^0$ -Komponente ausführen, man findet

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(k) \exp[-ikx] &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \{\delta(k^0 - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(k^0 + \omega_{\mathbf{k}})\} \tilde{\phi}'(k^0, \mathbf{k}) \exp[-ikx] \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ \tilde{\phi}'(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \mathbf{r})] + \tilde{\phi}'(-\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) \exp[i(\omega_{\mathbf{k}} t + \mathbf{k} \mathbf{r})] \right\} \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ \tilde{\phi}'(\mathbf{k}) \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \mathbf{r})] + \tilde{\phi}'(-\mathbf{k}) \exp[i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \mathbf{r})] \right\} \quad (4.13) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass die Fourier-Koeffizienten  $\tilde{\phi}'$  durch die Beziehung [4.12] nur von  $\mathbf{k}$  abhängen. Unter Verwendung der Überlegungen von Gleichung [4.6] und den Identifikationen

$$\tilde{\phi}'(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{a}_{\mathbf{k}}, \quad \tilde{\phi}'(-\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{a}_{\mathbf{k}}^* \quad (4.14)$$

wobei die Impulsabhängigkeit von  $\tilde{a}$  und  $\tilde{a}^*$  als Index angegeben wird, findet man schließlich

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \{\tilde{a}_{\mathbf{k}} \exp[-ikx] + \tilde{a}_{\mathbf{k}}^* \exp[ikx]\} \quad (4.15)$$

Da es sich bei späteren Rechnungen als vorteilhaft erweisen wird, schreibt man das obige Resultat auch häufig in der Form

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \{a_{\mathbf{k}} \exp[-ikx] + a_{\mathbf{k}}^* \exp[ikx]\} \quad (4.16)$$

### 4.1.3 Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes

Da nun die allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung bekannt ist, kann der Übergang zur Quantenfeldtheorie gemacht werden. Dabei werden die Felder der Theorie, bei denen es sich wie in Gleichung [4.16] noch um Wellenfunktionen handelt, zu Operatoren erhoben. Diese Operatoren sollen analog zur klassischen Theorie die kanonischen, gleichzeitigen Vertauschungsrelationen erfüllen. Beim Übergang zum Operator wird Gleichung [4.16] zu

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp[-ikx] + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \exp[ikx] \right\} . \quad (4.17)$$

Der Operatorcharakter des Feldoperators wird nun von den bosonischen Erzeuger- und Vernichterooperatoren  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  und  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  getragen. Diese erfüllen die aus der Bose-Einstein-Statistik bekannten Kommutator-Relationen

$$\left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \right]_- = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad , \quad (4.18)$$

$$\left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'} \right]_- = \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \right]_- = 0 \quad . \quad (4.19)$$

Um die kanonischen Vertauschungsrelationen für die Feldoperatoren anzugeben, bietet es sich nun erst einmal an, die zu  $\hat{\phi}(x)$  zugehörige Impulsdichte  $\hat{\pi}(x)$  zu berechnen. Für das reelle Klein-Gordon-Feld [4.1] erhält man schließlich unter Verwendung von [2.13]

$$\hat{\pi}(x) = \dot{\hat{\phi}}(x) = (-i) \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp[-ikx] - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \exp[ikx] \right\} . \quad (4.20)$$

Wie sich mit der Hilfe einiger kurzer Rechnungen und der Verwendung der Kommutator-Relationen [4.18] zeigen lässt, findet man tatsächlich die bei der kanonischen Feldquantisierung geforderte gleichzeitige Vertauschungsrelation

$$\left[ \hat{\phi}(t, \mathbf{r}), \hat{\pi}(t, \mathbf{r}') \right]_- = i\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad . \quad (4.21)$$

Diese Relation ist schon durch den Kommutator von Orts- und Impulsoperator aus der Quantenmechanik oder bis auf den Phasenfaktor  $i$  aus der klassischen Feldtheorie [2.18] bekannt. Streng genommen bleibt nun noch zu zeigen, dass die Operatoren [4.17] und [4.20] auch wirklich die Bewegungsgleichung [4.4] erfüllen. Dies lässt sich unter Verwendung der Heisenbergschen Bewegungsgleichung [3.10] zeigen, jedoch wird dafür zunächst einmal der Hamilton-Operator der Theorie benötigt.

### 4.1.4 Der Hamilton-Operator des Klein-Gordon-Feldes

Um den Hamilton-Operator des reellen Klein-Gordon-Feldes zu berechnen, bedient man sich nun des in Kapitel 2 wiederholten Formalismus. Zunächst erhält man für die Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H} = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \pi^2(x) + (\nabla\phi(x))^2 + m^2\phi^2(x) \right\} . \quad (4.22)$$

Wobei ab sofort die Hütchen zur Kennzeichnung der Operatorwertigkeit weggelassen werden können, da nun keine Verwechslungsgefahr mehr besteht. Anwendung von Gleichung [2.12] liefert letztendlich den gesuchten Hamilton-Operator

$$H = \int d^3\mathbf{r} \frac{1}{2} \left\{ \pi^2(x) + (\nabla\phi(x))^2 + m^2\phi^2(x) \right\} . \quad (4.23)$$

Es sei angemerkt, dass dieser Hamiltonoperator durch Einsetzen der expliziten Ausdrücke der Feldoperatoren  $\hat{\phi}$  und  $\hat{\pi}$  auch in Form von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren geschrieben werden kann, dies soll an dieser Stelle allerdings nicht gezeigt werden. Um zu zeigen, dass die Feldoperatoren tatsächlich die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, benutzt man, wie schon erwähnt, die Heisenbergsche Bewegungs-

gleichung [3.10]. Für den Operator  $\phi(x)$  erhält man

$$\begin{aligned}
 i\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, \mathbf{r}) &= \left[ \phi(t, \mathbf{r}), \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{2} \left\{ \pi^2(t, \mathbf{r}') + (\nabla_{\mathbf{r}'}\phi(t, \mathbf{r}'))^2 + m^2\phi^2(t, \mathbf{r}') \right\} \right]_- \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' [\phi(t, \mathbf{r}), \pi^2(t, \mathbf{r}')]_- \\
 &= \int d^3\mathbf{r}' i\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \pi(t, \mathbf{r}') \\
 &= i\pi(t, \mathbf{r}) \quad ,
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

wobei die Kommutator-Relationen  $[A, BC]_- = [A, B]_- C + B [A, C]_-$  und [4.21] benutzt wurden. Die Rechnung für das Feld  $\pi(x)$  ist ein wenig aufwendiger. Dazu schreibt man zunächst mit Hilfe des Green-schen Theorems

$$\int_V d^3\mathbf{r} \nabla\phi\nabla\psi = \oint_{S(V)} d\mathbf{s} (\nabla\psi)\phi - \int_V d^3\mathbf{r} \phi\Delta\psi \tag{4.25}$$

und der Forderung, dass die Feldoperatoren an der Oberfläche des Volumens  $V$  hinreichend schnell verschwinden, den Hamilton-Operator [4.23] in

$$H = \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{2} \left\{ \pi^2(t, \mathbf{r}') + \phi(t, \mathbf{r}') [-\Delta + m^2] \phi(t, \mathbf{r}') \right\} \tag{4.26}$$

um. Man erhält schließlich

$$\begin{aligned}
 i\frac{\partial}{\partial t}\pi(t, \mathbf{r}) &= \left[ \pi(t, \mathbf{r}), \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{2} \left\{ \pi^2(t, \mathbf{r}') + \phi(t, \mathbf{r}') [-\Delta + m^2] \phi(t, \mathbf{r}') \right\} \right]_- \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' [\pi(t, \mathbf{r}), \phi(t, \mathbf{r}') [-\Delta + m^2] \phi(t, \mathbf{r}')]_- \\
 &= \int d^3\mathbf{r}' (-i)\delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) [-\Delta + m^2] \phi(t, \mathbf{r}') \\
 &= [\Delta - m^2] \phi(t, \mathbf{r}) \quad ,
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

wobei erneut die Kommutator-Relationen der vorherigen Rechnung und das Greensche Theorem

$$\int_V d^3\mathbf{r} \{\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi\} = \oint_{S(V)} d\mathbf{s} \{\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\} \tag{4.28}$$

unter der Annahme an der Oberfläche  $S(V)$  hinreichend schnell verschwindender Felder verwendet wurde. Die Kombination der Resultate [4.24] und [4.27] liefert schließlich die Klein-Gordon-Gleichung

$$\{\partial_\mu\partial^\mu + m^2\} \phi(x) = 0 \quad . \tag{4.29}$$

Somit wäre gezeigt, dass auch die Operatoren nach der kanonischen Feldquantisierung noch die ursprünglich abgeleitete Bewegungsgleichung des klassischen Feldes erfüllen.

## 4.2 Das Proca-Feld

### 4.2.1 Die Proca-Gleichung

Die Lagrange-Dichte des freien, neutralen Proca-Feldes lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu \quad , \tag{4.30}$$

wobei  $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  der zum massiven Spin-1-Vektorfeld  $A^\mu$  zugehörige Feldstärketensor ist. Da in diesem Abschnitt das freie Proca-Feld betrachtet wird, enthält die obige Lagrange-Dichte auch keinen Kopplungsterm  $\sim j_\mu A^\mu$  an externe Ströme  $j_\mu$ . Vergleicht man [4.30] mit der freien Lagrange-Dichte der Elektrodynamik, fällt auf, dass lediglich ein Massenterm  $\sim A_\mu A^\mu$  ergänzt wurde. Dieser rührt natürlich daher, dass die obige Lagrange-Dichte, wie schon erwähnt, massive Vektorbosonen beschreiben soll, während das elektromagnetische Feld masselose Vektorbosonen wie das Photon beschreibt. Es wird sich allerdings zeigen, dass gerade dieser Massenterm die Eichinvarianz des Proca-Feldes bricht. Zunächst

soll allerdings die Proca-Gleichung abgeleitet werden. Dies geschieht völlig analog zur Klein-Gordon-Gleichung, nämlich durch Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung auf die gegebene Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (F_{\alpha\beta} F_{\sigma\rho}) g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} F_{\sigma\rho} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial (\partial_\sigma A_\rho - \partial_\rho A_\sigma)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right\} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} \\
 &= -\frac{1}{4} \{F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}\} \\
 &= -F^{\mu\nu} \quad , \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

wobei in der ersten Zeile die Indizes des Feldstärketensors  $\mu \rightarrow \alpha$  und  $\nu \rightarrow \beta$  umbenannt wurden und im letzten Schritt die vollständige Antisymmetrie des Feldstärketensors verwendet wurde. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= \frac{m^2}{2} \frac{\partial}{\partial A_\nu} \{A_\alpha A_\lambda\} g^{\alpha\lambda} \\
 &= \frac{m^2}{2} \left\{ \frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\nu} A_\lambda + A_\alpha \frac{\partial A_\lambda}{\partial A_\nu} \right\} g^{\alpha\lambda} \\
 &= m^2 A^\nu \quad , \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

wobei in der ersten Zeile erneut  $\mu \rightarrow \alpha$  umbenannt wurde. Setzt man nun die Resultate [4.31] und [4.32] in Gleichung [2.10] ein und verwendet die Definition des Feldstärketensors, so erhält man die sog. Proca-Gleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0 \quad . \tag{4.33}$$

Bildet man nun die 4-Divergenz von [4.33], so erhält man

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_\nu \{ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) + m^2 A^\nu \} \\
 &= \partial_\nu A^\nu \quad , \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass sich die beiden ersten Terme gegenseitig wegheben. Wendet man das Resultat [4.34] auf [4.33] an, so vereinfacht sich die Proca-Gleichung zu

$$\{ \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \} A^\mu = 0 \quad . \tag{4.35}$$

Gleichung [4.35] zeigt, dass jede Komponente des massiven Spin-1-Feldes  $A^\mu$  separat die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt und unabhängig davon auch Gleichung [4.34] erfüllt sein muss.

Abschließend kann nun noch das Verhalten der Lagrange-Dichte [4.30] unter der Eichtransformation

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi(x) \tag{4.36}$$

betrachtet werden, hierbei sei  $\chi(x)$  ein hinreichend oft stetig differenzierbares, Lorentz-skalares Raum-Zeit-Feld. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4} \{ \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu \chi) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu \chi) \} \{ \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \chi) \} \\
 &\quad + \frac{m^2}{2} (A_\mu - \partial_\mu \chi) (A^\mu - \partial^\mu \chi) \\
 &= -\frac{1}{4} \{ \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \} \{ \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \} + \frac{m^2}{2} \{ A_\mu A^\mu - 2A_\mu \partial^\mu \chi + (\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) \} \\
 &\neq \mathcal{L} \quad , \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile verwendet wurde, dass  $\chi(x)$  per Definition hinreichend oft stetig differenzierbar ist. Das obige Resultat zeigt, dass das Auftreten des Massenterms des Vektorfeldes die Eichinvarianz des Proca-Feldes bricht.

## 4.2.2 Die Lösung der Proca-Gleichung

Zum Abschluss dieses Kapitels wird nun noch die Lösung der Proca-Gleichung angegeben. Aufgrund von [4.35] ist klar, dass das massive Spin-1-Feld von der gleichen Struktur wie das skalare Feld sein muss, also

durch eine Superposition ebener Wellen dargestellt werden kann und [4.12] erfüllt sein muss. In Analogie zur Lösung des freien neutralen Spin-0-Feldes [4.16] gilt

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda=1}^3 \left\{ \epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k},\lambda} \exp[-ikx] + \epsilon^{*\mu}(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k},\lambda}^* \exp[ikx] \right\} . \quad (4.38)$$

Die in [4.38] auftauchenden 4-Vektoren  $\epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda)$  sind die sog. Polarisationsvektoren des massiven Spin-1-Feldes. Sie sind mit den Dirac-Spinoren  $u(\mathbf{k}, s)$  bzw.  $v(\mathbf{k}, s)$  der Dirac-Theorie vergleichbar. Ganz im Gegensatz zum masselosen Vektorfeld besitzt das massive Feld drei physikalische Polarisationsfreiheitsgrade, zwei davon transversal, einer longitudinal. Der vierte, zeitartige Polarisationsfreiheitsgrad wird durch die Zusatzbedingung [4.34] eliminiert. Die Polarisationsvektoren erfüllen auch eine Art Vollständigkeitsrelation, es gilt nämlich

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^{*\nu}(\mathbf{k}, \lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} . \quad (4.39)$$

Im Rahmen der zweiten Quantisierung kann nun auch das  $A^\mu$ -Feld zum Feldoperator erhoben werden

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda=1}^3 \left\{ \epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} \exp[-ikx] + \epsilon^{*\mu}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \exp[ikx] \right\} . \quad (4.40)$$

Erneut wird der Operatorcharakter von den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren getragen.

## Kapitel 5

# Berechnung von Zerfallsbreiten

Eine weitere, wichtige physikalische Größe ist die sogenannte Zerfallsbreite  $\Gamma$ . Ihre Wichtigkeit begründet sich darin, dass die Zerfallsbreite proportional zur Lebensdauer eines physikalischen Teilchens ist und eben somit einen experimentellen Zugang zur Bestimmung der Lebensdauer der betrachteten Teilchen bietet. Da die Bestimmung mesonischer Zerfallsbreiten ein zentraler Punkt dieser Arbeit ist, dient dieses Kapitel der Untersuchung bzw. Berechnung von Zerfallsbreiten skalarer Teilchen. Diese Berechnungen werden allerdings nur in führender Ordnung der Kopplungskonstanten durchgeführt. Dazu wird das folgende Spielmodell betrachtet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi) (\partial^\mu \chi) - \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1) (\partial^\mu \varphi_1) - \frac{m_{\varphi_1}^2}{2} \varphi_1^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2) (\partial^\mu \varphi_2) - \frac{m_{\varphi_2}^2}{2} \varphi_2^2 + g \chi \varphi_1 \varphi_2 \quad , \quad (5.1)$$

wobei  $g$  die Kopplungskonstante des Systems ist. Weiterhin wird angenommen, dass der Zweiteilchenzerfall  $\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2$  überhaupt kinematisch erlaubt ist, also  $m_\chi > m_{\varphi_1} + m_{\varphi_2}$  gilt.

Wie in Kapitel 3.5 gesehen, wird die Entwicklung eines Anfangszustandes  $|i\rangle$  in einen Endzustand  $|f\rangle$  durch das Streumatrixelement  $S_{fi}$  [3.29] beschrieben. Daher liegt es nahe, die Zerfälle von Teilchen mit Hilfe des Streumatrixelementes zu beschreiben. Zunächst bietet es sich allerdings noch an, einige Formalien zu klären. Da das betrachtete System [5.1] die Wechselwirkung von Spin-0-Teilchen beschreibt, erfüllen die Feldoperatoren  $\chi(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  und  $\varphi_2(x)$  die Klein-Gordon-Gleichung und lassen sich in der Form [4.17] schreiben. Für spätere Zwecke erweist es sich als nützlich, die Feldoperatoren in zwei Teile zu zerlegen, einen Teil proportional zum Vernichtungsoperator und einen Teil proportional zum Erzeugungsoperator. Für die Zerlegung von  $\chi(x)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} \left\{ a_{\mathbf{p}'} \exp[-ip'x] + a_{\mathbf{p}'}^\dagger \exp[ip'x] \right\} \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} a_{\mathbf{p}'} \exp[-ip'x] + \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \exp[ip'x] \\ &= \chi_{\mathbf{p}'}^{(-)} + \chi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \quad , \end{aligned} \quad (5.2)$$

wobei der zum Vernichter  $a_{\mathbf{p}'}$  proportionale Term mit  $\chi^{(-)}$  und dementsprechend der zum Erzeuger  $a_{\mathbf{p}'}^\dagger$  proportionale Term mit  $\chi^{(+)}$  bezeichnet wird. Die gleiche Methodik kann nun bei  $\varphi_1(x)$  und  $\varphi_2(x)$  angewandt werden, so dass

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}'_1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'_1}}} \left\{ b_{\mathbf{k}'_1} \exp[-ik'_1 x] + b_{\mathbf{k}'_1}^\dagger \exp[ik'_1 x] \right\} \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}'_1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'_1}}} b_{\mathbf{k}'_1} \exp[-ik'_1 x] + \int \frac{d^3 \mathbf{k}'_1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'_1}}} b_{\mathbf{k}'_1}^\dagger \exp[ik'_1 x] \\ &= \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(-)} + \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)} \quad , \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}'_2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'_2}}} \left\{ c_{\mathbf{k}'_2} \exp[-ik'_2 x] + c_{\mathbf{k}'_2}^\dagger \exp[ik'_2 x] \right\} \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}'_2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'_2}}} c_{\mathbf{k}'_2} \exp[-ik'_2 x] + \int \frac{d^3 \mathbf{k}'_2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'_2}}} c_{\mathbf{k}'_2}^\dagger \exp[ik'_2 x] \\ &= \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(-)} + \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

gilt. Da das Streumatrixelement  $S_{fi}$  den Zeitentwicklungsoperator und somit die Wechselwirkungs-Hamilton-Dichte  $\mathcal{H}_{Int}$  enthält, muss diese auch bestimmt werden. Der wechselwirkende Teil der Lagrange-Dichte des Systems  $\mathcal{L}_{Int}$  enthält allerdings keine Ableitungskopplungen, somit gilt

$$\mathcal{H}_{Int} = -\mathcal{L}_{Int} = -g\chi\varphi_1\varphi_2 \quad . \quad (5.5)$$

Um das Matrixelement  $S_{fi}$  angeben zu können, müssen nun lediglich noch  $|i\rangle$  und  $|f\rangle$  aus Gleichung [3.29] bestimmt werden. Der Anfangszustand  $|i\rangle$  beschreibt beim vorliegenden Zerfall natürlich das eingehende Teilchen  $\chi$ . Entsprechend Gleichung [5.2] wird vereinbart, dass das skalare Teilchen  $\chi$  den 4-Impuls  $p$  trage, so dass sich der Anfangszustand gemäß

$$|i\rangle = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \quad (5.6)$$

durch den Vakuumzustand  $|0\rangle$  beschreiben lässt. Der Vorfaktor  $\sqrt{(2\pi)^3/V}$  stammt aus der Normierung des Anfangszustandes, denn es gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \langle i|i\rangle = |N|^2 \langle 0|a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle = |N|^2 \langle 0|\delta^{(3)}(0) + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}|0\rangle = |N|^2 \delta^{(3)}(0) \\ &= |N|^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{p}\mathbf{x}] \Big|_{\mathbf{p}=0} \\ &= |N|^2 \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V}{(2\pi)^3} \quad , \end{aligned} \quad (5.7)$$

so dass

$$N = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \quad , \quad (5.8)$$

wobei im zweiten Schritt die Kommutator-Relation von bosonischen Erzeuger- und Vernichtoperatoren [4.18] und im vierten Schritt die Vollständigkeitsrelation verwendet wurde. Der Endzustand des betrachteten Zerfalls besteht dann aus einem Produktraumzustand der Teilchen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ . Es wird vereinbart, dass diese Teilchen die 4-Impulse  $k_1$  und  $k_2$  tragen. In Analogie zu [5.6] lässt sich der Endzustand auch durch den Vakuumzustand angeben

$$|f\rangle = \frac{(2\pi)^3}{V} c_{\mathbf{k}_2}^\dagger b_{\mathbf{k}_1}^\dagger |0\rangle \quad , \quad (5.9)$$

wobei der Vorfaktor  $(2\pi)^3/V$  erneut der Normierung des Zustandes dient. Die Bestimmung dieser Normierung erfolgt analog zu [5.7].

Wie schon erwähnt, soll die Berechnung der Zerfallsbreite  $\Gamma_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}$  nur in führender Ordnung der Kopplungskonstanten  $g$  durchgeführt werden. Die Entwicklung des Matrixelementes  $S_{fi}$  erster Ordnung in  $g$  lautet dann im Allgemeinen

$$S_{fi}^{(1)} = \langle f|S^{(1)}|i\rangle = \langle f| -ig \int d^4x T \{ \mathcal{H}_{Int} \} |i\rangle \quad . \quad (5.10)$$

Einsetzen der bisherigen Resultate [5.5], [5.6] und [5.9] in Gleichung [5.10] liefert schließlich

$$S_{fi}^{(1)} = ig \left( \frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{3/2} \int d^4x \langle 0| b_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_2} T \{ \chi(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \quad (5.11)$$

als Streumatrixelement erster Ordnung. Um einen Ausdruck für die Zerfallsbreite  $\Gamma_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}$  zu erhalten, gilt es nun dieses Matrixelement weiter zu vereinfachen. Das zeitgeordnete Produkt der Feldoperatoren  $\chi(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  und  $\varphi_2(x)$  lässt sich gemäß des Wickschen Theorems in normalgeordnete Produkte zerlegen, d.h. in Produkte, in denen die Erzeugeroperatoren stets links von den Vernichtoperatoren stehen. Man

erhält schließlich

$$\begin{aligned}
 T \{ \chi \varphi_1 \varphi_2 \} &= : \chi \varphi_1 \varphi_2 : + : \chi \varphi_1 \varphi_2 : + : \chi \varphi_1 \varphi_2 : + : \chi \varphi_1 \varphi_2 : \\
 &= : \left( \chi_{\mathbf{p}'}^{(-)} + \chi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \right) \left( \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(-)} + \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)} \right) \left( \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(-)} + \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)} \right) : \\
 &= : \chi_{\mathbf{p}'}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(-)} + \chi_{\mathbf{p}'}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)} + \chi_{\mathbf{p}'}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(-)} + \chi_{\mathbf{p}'}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)} \\
 &+ \chi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(-)} + \chi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)} + \chi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(-)} + \chi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)} : \\
 &= \chi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)} + \chi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(-)} + \chi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(-)} + \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)} \chi_{\mathbf{p}'}^{(-)} \\
 &+ \chi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(-)} + \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)} \chi_{\mathbf{p}'}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(-)} + \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)} \chi_{\mathbf{p}'}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(-)} + \chi_{\mathbf{p}'}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(-)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(-)} \quad , \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die Zerlegungen der Felder [5.2], [5.3] und [5.4] eingesetzt und im letzten Schritt das normalgeordnete Produkt aufgelöst wurde. Die so entstandenen acht Terme können nun wieder in den Vakuumerwartungswert [5.11] eingesetzt werden. Man stellt jedoch fest, dass nur einer dieser Terme einen von Null verschiedenen Beitrag liefert. Dabei handelt es sich um den Term

$$\varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)} \varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)} \chi_{\mathbf{p}'}^{(-)} \quad . \quad (5.13)$$

Die restlichen Terme liefern keinen Beitrag, da sie eine ungleiche Anzahl von Erzeuger- und Vernichteroperatoren enthalten und somit proportional zu beispielsweise  $c_{\mathbf{k}'_1} |0\rangle$  oder  $\langle 0| a_{\mathbf{p}}^\dagger$  sind. Das Streumatrixelement  $S_{fi}$  aus [5.11] wird damit zu

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(1)} &= ig \left( \frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{3/2} \int d^4x \frac{d^3\mathbf{p}' d^3\mathbf{k}'_1 d^3\mathbf{k}'_2}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{(2\pi)^3}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'_1}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'_2}}} \langle 0| b_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}'_1}^\dagger c_{\mathbf{k}'_2}^\dagger a_{\mathbf{p}'}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\
 &\times \exp[-i(p' - k'_1 - k'_2)x] \quad , \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

wobei hier direkt die expliziten Ausdrücke für  $\varphi_{\mathbf{k}'_1}^{(+)}$ ,  $\varphi_{\mathbf{k}'_2}^{(+)}$  und  $\chi_{\mathbf{p}'}^{(-)}$  eingesetzt wurden. Das entstandene Integral lässt sich jedoch durch die Berechnung des Vakuumerwartungswertes enorm vereinfachen. Denn aufgrund der Kommutatorrelationen der Erzeuger- und Vernichteroperatoren der verschiedenen Teilchenfelder lässt sich der Vakuumerwartungswert als Produkt von Delta-Distributionen schreiben, welche schließlich dazu führen, dass die Integrale über den Impulsen  $\mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{k}'_1$  und  $\mathbf{k}'_2$  zusammenbrechen. Man findet

$$\begin{aligned}
 \langle 0| b_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}'_1}^\dagger c_{\mathbf{k}'_2}^\dagger a_{\mathbf{p}'}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle &= \langle 0| b_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}'_1}^\dagger c_{\mathbf{k}_2} c_{\mathbf{k}'_2}^\dagger \left\{ \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \right\} |0\rangle \\
 &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_2) \quad , \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

wobei in der ersten Zeile ausgenutzt wurde, dass der Vernichtungsoperator  $c_{\mathbf{k}_2}$  und der Erzeugungsoperator  $b_{\mathbf{k}'_1}^\dagger$  kommutieren. Setzt man dieses Resultat nun in Gleichung [5.14] ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(1)} &= ig \left( \frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{3/2} \int d^4x \frac{d^3\mathbf{p}' d^3\mathbf{k}'_1 d^3\mathbf{k}'_2}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'_1}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'_2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^9} \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_2) \\
 &\times \exp[-i(p' - k'_1 - k'_2)x] \\
 &= \left( \frac{1}{V} \right)^{3/2} \frac{ig}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}}} \int d^4x \exp[-i(p - k_1 - k_2)x] \\
 &= \left( \frac{1}{V} \right)^{3/2} \frac{ig}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \quad . \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt die Integration über die drei Impulse ausgeführt und anschließend im letzten Schritt die Vollständigkeitsrelation ausgenutzt. Die so entstandene vierdimensionale Delta-Distribution sichert die Energie-Impuls-Erhaltung an jedem Vertex. Um eine Wahrscheinlichkeitsaussage treffen zu können, muss nun das Betragsquadrat des Streumatrixelementes betrachtet werden. Dies führt jedoch zu einem nicht unerheblichen mathematischen Problem, dem Quadrat einer Delta-Distribution. Um diesen Ausdruck auszuwerten, schreibt man das Quadrat der Delta-Distribution mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation um, verwendet ein endliches Raumzeit-Volumen  $\Omega = [0, t] \times V$ , welches

später im Limes nach  $\infty$  gehen wird und benutzt die Vierer-Impulserhaltung. Man erhält dann für das Betragsquadrat des Streumatrixelementes [5.16]

$$\begin{aligned}
 \left| \langle f | S^{(1)} | i \rangle \right|^2 &= \frac{1}{V^3} \frac{|-i\mathcal{M}_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}|^2}{2\omega_{\mathbf{p}} 2\omega_{\mathbf{k}_1} 2\omega_{\mathbf{k}_2}} (2\pi)^8 \left[ \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{V^3} \frac{|-i\mathcal{M}_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}|^2}{2\omega_{\mathbf{p}} 2\omega_{\mathbf{k}_1} 2\omega_{\mathbf{k}_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \int_{\Omega} d^4x \exp[-i(p - k_1 - k_2)x] \\
 &= \frac{1}{V^3} \frac{|-i\mathcal{M}_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}|^2}{2\omega_{\mathbf{p}} 2\omega_{\mathbf{k}_1} 2\omega_{\mathbf{k}_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \int_{\Omega} d^4x \\
 &= \frac{1}{V^3} \frac{|-i\mathcal{M}_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}|^2}{2\omega_{\mathbf{p}} 2\omega_{\mathbf{k}_1} 2\omega_{\mathbf{k}_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) Vt \quad , \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

wobei  $|ig|^2 \equiv |-i\mathcal{M}_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}|^2$  als Betragsquadrat der invarianten Zerfallsamplitude  $\mathcal{M}$  identifiziert wurde. Haben die Teilchen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  nun Impulse im Intervall  $[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 + d\mathbf{k}_1]$  beziehungsweise  $[\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2 + d\mathbf{k}_2]$ , so erhält man als Zerfallswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} V^2 \left| \langle f | S^{(1)} | i \rangle \right|^2 &= \int \frac{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \frac{|-i\mathcal{M}_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}|^2}{2\omega_{\mathbf{p}} 2\omega_{\mathbf{k}_1} 2\omega_{\mathbf{k}_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) t \\
 &= \Gamma_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2} t \quad , \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Zerfallsbreite  $\Gamma_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}$  als

$$\Gamma_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2} = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \frac{|-i\mathcal{M}_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}|^2}{2\omega_{\mathbf{p}} 2\omega_{\mathbf{k}_1} 2\omega_{\mathbf{k}_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \tag{5.19}$$

definiert wurde. Für die explizite Berechnung dieser Zerfallsbreite bietet es sich nun an, das Ruhesystem von  $\chi$  zu betrachten. Dann erhält man für die Vierer-Impulse

$$p = (m_{\chi}, 0)^T, \quad k_1 = (\omega_{\mathbf{k}_1}, \mathbf{k}_1)^T, \quad k_2 = (\omega_{\mathbf{k}_2}, \mathbf{k}_2)^T \quad . \tag{5.20}$$

Als nächsten Schritt schreibt man unter Berücksichtigung dieser Resultate die vierdimensionale Delta-Distribution aus [5.19] in

$$\delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) = \delta(m_{\chi} - \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \tag{5.21}$$

um und integriert über  $d^3\mathbf{k}_2$ . Durch die dreidimensionale Delta-Distribution aus der obigen Formel bricht schließlich das Integral über  $d^3\mathbf{k}_2$  zusammen und man erhält für [5.19]

$$\Gamma_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2} = \frac{1}{8(2\pi)^2} \int d^3\mathbf{k}_1 \frac{|-i\mathcal{M}_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}|^2}{m_{\chi} \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m_{\varphi_1}^2} \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m_{\varphi_2}^2}} \delta\left(m_{\chi} - \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m_{\varphi_1}^2} - \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m_{\varphi_2}^2}\right) \quad . \tag{5.22}$$

Die Delta-Distribution lässt sich nun unter Verwendung von Formel [4.10] auswerten, man findet

$$\delta\left(m_{\chi} - \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m_{\varphi_1}^2} - \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m_{\varphi_2}^2}\right) = \frac{\sqrt{k_f^2 + m_{\varphi_1}^2} \sqrt{k_f^2 + m_{\varphi_2}^2}}{k_f m_{\chi}} \delta(|\mathbf{k}_1| - k_f) \quad , \tag{5.23}$$

wobei

$$k_f = \sqrt{\frac{m_{\varphi_1}^4 + (m_{\varphi_2}^2 - m_{\chi}^2)^2 - 2m_{\varphi_1}^2(m_{\varphi_2}^2 + m_{\chi}^2)}{4m_{\chi}^2}} \tag{5.24}$$

der Impuls der auslaufenden Teilchen ist. Damit wird [5.22] zu

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2} &= \frac{1}{8(2\pi)^2} \int d^3 \mathbf{k}_1 \frac{|-i\mathcal{M}_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}|^2}{m_\chi \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m_{\varphi_1}^2} \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m_{\varphi_2}^2}} \frac{\sqrt{k_f^2 + m_{\varphi_1}^2} \sqrt{k_f^2 + m_{\varphi_2}^2}}{k_f m_\chi} \\
 &\quad \times \delta(|\mathbf{k}_1| - k_f) \\
 &= \frac{1}{8(2\pi)^2} \int d|\mathbf{k}_1| d\Omega |\mathbf{k}_1|^2 \frac{|-i\mathcal{M}_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}|^2}{m_\chi \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m_{\varphi_1}^2} \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m_{\varphi_2}^2}} \frac{\sqrt{k_f^2 + m_{\varphi_1}^2} \sqrt{k_f^2 + m_{\varphi_2}^2}}{k_f m_\chi} \\
 &\quad \times \delta(|\mathbf{k}_1| - k_f) \\
 &= \frac{|-i\mathcal{M}_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}|^2}{8\pi} \frac{k_f}{m_\chi^2} \quad , \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt sphärische Koordinaten eingeführt wurden. Setzt man nun das Betragsquadrat der Zerfallsamplitude ein, so findet man den finalen Ausdruck für die Zerfallsbreite  $\Gamma_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2}$

$$\Gamma_{\chi \rightarrow \varphi_1 \varphi_2} = \frac{g^2}{8\pi} \frac{k_f}{m_\chi^2} \quad . \tag{5.26}$$

## Kapitel 6

# Das Modell

Nun wird ein effektives Modell der Quantenchromodynamik zur Beschreibung mesonischer Zustände betrachtet. Dieses Modell beruht auf der Basis dreier Quark-Flavors und enthält die Kopplung von Axial- und Pseudovektor-Mesonen an Vektor-Mesonen und pseudoskalare Mesonen, sowie einen Mischungsterm. Letzterer sorgt für die Mischung anfänglich unphysikalischer Kaon-Felder. Zunächst soll die Konstruktion der Lagrange-Dichte des Modells aus sogenannten Nonets kurz erläutert und deren Symmetrien diskutiert werden. Desweiteren sollen die Kopplungskonstanten des Modells durch die Zerfälle bestimmter Teilchen im Axial- und Pseudovektor-Sektor bestimmt und durch die Zerfallsbreiten anderer Teilchen auf Konsistenz hin überprüft werden. Der letzte Punkt dieses Kapitels ist die Betrachtung von Mischungseffekten in den Kaonen-Feldern, welche durch den Mischungsterm in der Lagrange-Dichte induziert werden. Von zentraler Bedeutung wird dabei die Bestimmung des Mischungswinkels der physikalischen Teilchenfelder sein.

### 6.1 Die Konstruktion des Modells

Das Modell soll eine effektive Beschreibung von Mesonen auf der Grundlage der Quantenchromodynamik darstellen. Daher muss das Modell die wichtigsten Eigenschaften der QCD, wie beispielsweise deren Symmetrien, beinhalten, um eine korrekte Beschreibung der Mesonen zu gewährleisten. Das zentrale Konzept bei der Konstruktion eines solchen Modells ist die Definition von Nonets, i.e. Matrizen, welche die - in diesem Fall mesonischen - Teilchenfelder beinhalten. Wie schon angesprochen, beinhaltet das Modell Axialvektor-, Pseudovektor-, Vektor- sowie Pseudoskalar-Mesonen, daher sollte für jede Sorte der Mesonen ein Nonet konstruiert werden. Die Konstruktion solcher Nonets erfolgt durch Quark-Ströme. Die in diesem Modell verwendeten Nonets entstammen der Doktorarbeit von Denis Parganlija [Par] und sind daher schon bekannt. Diese Nonets sind schon so konstruiert, dass die Symmetrien der QCD erfüllt sind. So hat etwa das Pseudoskalar-Nonet die folgende Gestalt

$$P_{ij} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i \gamma_5 q_i, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\eta_N + \pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{\eta_N - \pi^0}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \eta_S \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Für das Vektor-Nonet gilt

$$V_{ij}^\mu \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i, \quad V^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\omega_N^\mu + \rho^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & \rho^{\mu+} & K^{\mu*+} \\ \rho^{\mu-} & \frac{\omega_N^\mu - \rho^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K^{\mu*0} \\ K^{\mu*-} & \bar{K}^{\mu*0} & \omega_S^\mu \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Für die Axial- und Pseudovektor-Nonets erhält man schließlich

$$A_{ij}^\mu \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu \gamma_5 q_i, \quad A^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{f_{1N,A}^\mu + a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & a_1^{\mu+} & K_{1,A}^{\mu+} \\ a_1^{\mu-} & \frac{f_{1N,A}^\mu - a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K_{1,A}^{\mu 0} \\ K_{1,A}^{\mu-} & \bar{K}_{1,A}^{\mu 0} & f_{1S,A}^\mu \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

$$B_{ij}^\mu \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_j \gamma_5 \partial^\mu q_i - (\partial^\mu \bar{q}_j) \gamma_5 q_i], \quad B^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{f_{1N,B}^\mu + b_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & b_1^{\mu +} & K_{1,B}^{\mu +} \\ b_1^{\mu -} & \frac{f_{1N,B}^\mu - b_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K_{1,B}^{\mu 0} \\ K_{1,B}^{\mu -} & \bar{K}_{1,B}^{\mu 0} & f_{1S,B}^\mu \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

wobei für die Felder  $f_{1N,A}, f_{1S,A}, f_{1N,B}$  und  $f_{1S,B}$  die folgenden Identifikationen mit physikalischen Teilchen gelten:

$$\begin{aligned} f_{1N,A} &\equiv f_1 (1285), & f_{1N,B} &\equiv h_1 (1170) \quad , \\ f_{1S,A} &\equiv f_1 (1420), & f_{1S,B} &\equiv h_1 (1380) \quad . \end{aligned} \quad (6.5)$$

Zusätzlich beschreiben die Felder  $a_1^\mu$  und  $b_1^\mu$ , das  $a_1$  (1260)- beziehungsweise das  $b_1$  (1235)-Meson, während die Kaonen-Felder  $K_{1,A}$  und  $K_{1,B}$  vorerst keinen physikalischen Teilchen zugeordnet werden. Für die Kopplung der verschiedenen Nonets wird die möglichst einfachste Form verwendet, welche die Symmetrien der Quantenchromodynamik erhält

$$\mathcal{L} = ia \operatorname{Tr} \{A_\mu [V^\mu, P]_-\} + b \operatorname{Tr} \{B_\mu [V^\mu, P]_+\} + \mathcal{L}_{mix} \quad . \quad (6.6)$$

Hierbei sind  $a$  und  $b$  die Kopplungskonstanten der Axialvektor- bzw. Pseudovektor-Kopplung. Eine weitere Kopplungskonstante ist im Mischungsterm  $\mathcal{L}_{mix}$  enthalten. Dieser hat die folgende Form

$$\mathcal{L}_{mix} = ic \operatorname{Tr} \left\{ \Delta [A_\mu, B^\mu]_- \right\} \quad , \quad (6.7)$$

wobei die imaginären Faktoren vor dem ersten Term und dem Mischungsterm eingeführt wurden, um die Hermitizität dieser Terme sicherzustellen und  $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_u, \delta_d, \delta_s) \sim \operatorname{diag}(m_u^2, m_d^2, m_s^2)$  eine Diagonalmatrix beschreibt, welche zu dem Quadrat der Quark-Massen proportionale Größen  $\delta_u, \delta_d$  und  $\delta_s$  enthält (vgl. dazu auch [Par]). Es wird sich noch zeigen, dass gerade die nicht-verschwindende Massendifferenz von Up-, Down- und Strange-Quark für eine Mischung der unphysikalischen Kaonen-Felder des Axialvektor- und des Pseudovektor-Nonets sorgt.

## 6.2 Die Symmetrien des Modells

Die Theorie der starken Wechselwirkung, die sogenannte Quantenchromodynamik (QCD), ist eine sehr reichhaltige Theorie mit vielen Symmetrien. Aus eben diesem Grund sollte ein effektives Modell der QCD diese Fülle an Symmetrien ebenfalls vorweisen. Daher beschäftigt sich dieser Abschnitt ausschließlich mit den Symmetrien des Modells [6.6]. Die wohl wichtigste Symmetrie der QCD ist die  $SU(N_c)_{Farbe}$ -Symmetrie. Dabei handelt es sich um eine lokale Eichsymmetrie im Farbraum, dies bedeutet, dass die Lagrange-Dichte der QCD invariant unter lokalen, i.e. von der Raum-Zeit abhängigen, Transformationen im Farbraum ist. Die Elemente der  $SU(N_c)_{Farbe}$  lassen sich als

$$U = \exp(-ig\alpha(x)_a T_a), \quad a = 1, \dots, N_c^2 - 1 \quad (6.8)$$

darstellen. Der nicht-abelsche Charakter der  $SU(3)$  sorgt letztendlich dafür, dass in der QCD Dreier- und Vierer- Gluon-Vertices existieren. Da das in dieser Arbeit betrachtete Modell allerdings Mesonen, also farblose Zustände, betrachtet, ist diese Symmetrie nicht im Modell enthalten.

### 6.2.1 Lorentz-Symmetrie

Die Invarianz einer Theorie unter Lorentz-Transformationen ist eine der wichtigsten Symmetrien der Physik und muss in einem Modell enthalten sein, damit dieses als fundamental gelten kann. Da die QCD eine fundamentale Theorie ist, ist die Lorentz-Symmetrie natürlich in ihr enthalten und somit sollte auch das Modell [6.6] invariant unter Lorentz-Transformationen sein. Im Folgenden werden ausschließlich eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformationen, d.h. Transformationen mit  $\det(\Lambda) = +1$  und  $\Lambda_0^0 > 0$  betrachtet. Lorentz-Transformationen, die diese Einschränkungen erfüllen, sind Lorentz-Boosts und Drehungen in drei Dimensionen. Die Größen in [6.6] setzen sich aus Quark-Spinoren zusammen, daher wird nun eine Spinor-Darstellung der eigentlichen Lorentz-Transformationen benötigt, diese lautet

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \quad , \quad (6.9)$$

wobei  $\omega_{\mu\nu}$  die Gruppenparameter beinhaltet und  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_-$  ist. Um festzustellen, ob die Lagrange-Dichte aus [6.6] invariant unter Lorentz-Transformationen ist, muss das Transformationsverhalten der Nonets [6.1] - [6.4] überprüft werden. Nun transformiert der Quark-Spinor  $q(x)$  gemäß

$$q(x) \xrightarrow{LT} q'(x') = S(\Lambda) q(\Lambda^{-1}x) \quad , \quad (6.10)$$

während der Dirac-adjungierte Quark-Spinor als

$$\bar{q}(x) \xrightarrow{LT} \bar{q}'(x') = \bar{q}(\Lambda^{-1}x) S^{-1}(\Lambda) \quad (6.11)$$

transformiert. Unter Verwendung dieser beiden Transformationsregeln gilt für das Pseudoskalar-Nonet  $P$

$$P \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i \gamma_5 q_i \xrightarrow{LT} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j S^{-1}(\Lambda) i \gamma_5 S(\Lambda) q_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i \gamma_5 q_i \doteq P \quad , \quad (6.12)$$

wobei verwendet wurde, dass  $\gamma^\mu$  und  $\gamma_5$  antikommutieren und somit beim Vertauschen von  $S(\Lambda)$  und  $\gamma_5$  ein doppelter Vorzeichenwechsel stattfindet. Wie man an [6.12] erkennen kann, weist das Nonet das korrekte Transformationsverhalten unter den kontinuierlichen Lorentz-Transformationen auf. Auch das Vektor-Nonet  $V^\mu$  transformiert wie erwartet, denn es gilt

$$V^\mu \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i \xrightarrow{LT} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) q_i = \Lambda^\mu_\nu \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\nu q_i \right) \doteq \Lambda^\mu_\nu V^\nu \quad . \quad (6.13)$$

Hierbei wurde der aus dem Transformationsgesetz der Dirac-Gleichung bekannte Zusammenhang  $S^{-1} \gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$  verwendet. Die gleichen Zusammenhänge kann man nun auch bei der Transformation der Axial- und Pseudovektor-Nonets verwenden, so dass

$$A^\mu \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu \gamma_5 q_i \xrightarrow{LT} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu \gamma_5 S(\Lambda) q_i = \Lambda^\mu_\nu \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\nu \gamma_5 q_i \right) \doteq \Lambda^\mu_\nu A^\nu \quad (6.14)$$

und

$$\begin{aligned} B^\mu \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_j \gamma_5 \partial^\mu q_i - (\partial^\mu \bar{q}_j) \gamma_5 q_i] &\xrightarrow{LT} \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_j S^{-1}(\Lambda) \gamma_5 \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu S(\Lambda) q_i - (\Lambda^\mu_\nu \partial^\nu \bar{q}_j S^{-1}(\Lambda)) \gamma_5 S(\Lambda) q_i] \\ &= \Lambda^\mu_\nu \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_j \gamma_5 \partial^\nu q_i - (\partial^\nu \bar{q}_j) \gamma_5 q_i] \right\} \doteq \Lambda^\mu_\nu B^\nu \end{aligned} \quad (6.15)$$

gilt. Es sei noch erwähnt, dass das Transformationsverhalten von Pseudoskalar-, Axial- und Pseudovektor-Nonet unter uneigentlichen Lorentz-Transformationen, wie beispielsweise der Raumspiegelung, noch einen zusätzlichen Vorzeichenwechsel beinhaltet, daher auch die Bezeichnung „pseudo“ beziehungsweise „axial“. Der Grund dafür wird sich im Abschnitt über die CP-Symmetrie zeigen. Allgemein transformieren Pseudoskalar, Pseudovektor und Axialvektor also wie folgt

$$P \xrightarrow{LT} \det(\Lambda) P, \quad A^\mu \xrightarrow{LT} \det(\Lambda) \Lambda^\mu_\nu A^\nu, \quad B^\mu \xrightarrow{LT} \det(\Lambda) \Lambda^\mu_\nu B^\nu \quad , \quad (6.16)$$

wobei verwendet wurde, dass für uneigentliche Lorentz-Transformationen  $\det(\Lambda) = -1$  gilt. Nun, da das Verhalten der verschiedenen Nonets unter Lorentz-Transformationen feststeht, können die Resultate [6.12]-[6.15] verwendet werden, um zu zeigen, dass [6.6] tatsächlich wie ein Lorentz-Skalar transformiert. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\xrightarrow{LT} ia \operatorname{Tr} \left\{ (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu A_\alpha \left[ \Lambda^\mu_\beta V^\beta, P \right]_- \right\} + b \operatorname{Tr} \left\{ (\Lambda^{-1})^\kappa_\mu B_\kappa \left[ \Lambda^\mu_\lambda V^\lambda, P \right]_+ \right\} \\ &+ ic \operatorname{Tr} \left\{ \Delta \left[ (\Lambda^{-1})^\rho_\mu A_\rho, \Lambda^\mu_\sigma B^\sigma \right]_- \right\} \\ &= ia \operatorname{Tr} \left\{ (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu A_\alpha \Lambda^\mu_\beta \left[ V^\beta, P \right]_- \right\} + b \operatorname{Tr} \left\{ (\Lambda^{-1})^\kappa_\mu B_\kappa \Lambda^\mu_\lambda \left[ V^\lambda, P \right]_+ \right\} \\ &+ ic \operatorname{Tr} \left\{ \Delta \left( \Lambda^{-1} \right)^\rho_\mu \Lambda^\mu_\sigma \left[ A_\rho, B^\sigma \right]_- \right\} \\ &= ia \operatorname{Tr} \left\{ A_\alpha g^\alpha_\beta \left[ V^\beta, P \right]_- \right\} + b \operatorname{Tr} \left\{ B_\kappa g^\kappa_\lambda \left[ V^\lambda, P \right]_+ \right\} + ic \operatorname{Tr} \left\{ \Delta g^\rho_\sigma \left[ A_\rho, B^\sigma \right]_- \right\} \\ &= \mathcal{L} \quad , \end{aligned} \quad (6.17)$$

wobei verwendet wurde, dass die Massenquadrate, welche in  $\Delta$  enthalten sind, ohnehin Lorentz-skalar sind.

### 6.2.2 $U(N_f)_V$ -Symmetrie

Eine weitere wichtige Symmetrie der QCD-Lagrange-Dichte ist die sog. chirale Symmetrie. Für den Fall verschwindender Quark-Massen wäre diese Symmetrie exakt, da man dann durch Anwendung der rechts- und linkshändigen Projektionsoperatoren

$$P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \quad (6.18)$$

auf die QCD-Lagrange-Dichte erreichen könnte, dass eben diese in einen rechts- und einen linkshändigen Teil entkoppeln würde und somit die rechts- und die linkshändigen Quark-Spinoren separat transformiert werden könnten. Die zugehörige Symmetriegruppe wäre die Produktgruppe  $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$ . Aufgrund der nicht-verschwindenden Quark-Massen ist diese Symmetrie explizit gebrochen. Für den Fall identischer Quark-Massen wäre die Symmetriegruppe der QCD die der Vektor-Transformationen  $U(N_f)_V$ , welche eine diagonale Untergruppe der Produktgruppe  $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$  darstellt. Weiterhin gilt  $U(N_f)_V = SU(N_f)_V \times U(1)_V$ , wobei die  $U(1)_V$ -Symmetrie die Erhaltung der Quark-Zahl nach sich zieht. Die  $SU(N_f)_V$ -Symmetrie ist die sogenannte Flavor-Symmetrie der QCD. Diese Symmetrie ist je nach Quarkzahl  $N_f$  unterschiedlich stark (explizit) gebrochen. Im Falle  $N_f = 2$ , der sogenannten Isospin-Symmetrie, ist die Brechung dieser Symmetrie im Vergleich zur hadronischen Massenskala ( $\approx 1$  GeV) winzig, da der Massenunterschied zwischen Up- und Down-Quark mit ungefähr 2.5 MeV sehr klein ist. Das untersuchte Modell [6.6] enthält im Gegensatz zur QCD keine chirale Symmetrie, jedoch aber eine  $U(N_f)_V$ -Symmetrie, welche allerdings aufgrund der  $\Delta$ -Matrix (vgl. [6.7]) explizit gebrochen ist. Die Elemente der Gruppe  $U(N_f)_V$  lassen sich in der Form

$$U_V = \exp(-i\alpha_{V,a}T_a), \quad a = 0, 1, \dots, N_f^2 - 1 \quad (6.19)$$

darstellen, wobei die  $\alpha_{V,a}$  die Gruppenparameter und die  $T_a$  die Generatoren der  $U(N_f)_V$  sind. Um das Transformationsverhalten der verschiedenen Nonets [6.1]-[6.4] unter  $U(N_f)_V$ -Transformationen anzugeben, ist es zunächst sinnvoll, sich das Transformationsverhalten der einzelnen Quark-Spinoren zu betrachten. Es wird sich als vorteilhaft erweisen, das Transformationsverhalten der Quark-Spinoren in Komponentenschreibweise anzugeben, so dass

$$q_i \xrightarrow{U} U_{ik}q_k \quad (6.20)$$

und

$$\bar{q}_j \xrightarrow{U} (U_{jl}q_l)^\dagger \gamma^0 = q_l^\dagger U_{lj}^\dagger \gamma^0 = \bar{q}_l U_{lj}^\dagger \quad (6.21)$$

ist. Mit Hilfe dieser Resultate lässt sich das Transformationsverhalten der Nonets zeigen. Auch hier bietet es sich an, die Komponentenschreibweise zu wählen. Für das Pseudoskalar-Nonet gilt

$$P_{ij} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i\gamma_5 q_i \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_l U_{lj}^\dagger i\gamma_5 U_{ik} q_k = U_{ik} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_l i\gamma_5 q_k U_{lj}^\dagger \hat{=} U_{ik} P_{kl} U_{lj}^\dagger = (UPU^\dagger)_{ij} \quad (6.22)$$

Die Transformation des Vektor-Nonets  $V^\mu$  erfolgt ähnlich, denn es gilt

$$(V^\mu)_{ij} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_l U_{lj}^\dagger \gamma^\mu U_{ik} q_k = U_{ik} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_l \gamma^\mu q_k U_{lj}^\dagger \hat{=} U_{ik} (V^\mu)_{kl} U_{lj}^\dagger = (UV^\mu U^\dagger)_{ij} \quad (6.23)$$

Das Transformationsverhalten von  $A^\mu$  und  $B^\mu$  ist völlig analog zu dem der Gleichungen [6.22] und [6.23]. Für das Axialvektor-Nonet findet man

$$\begin{aligned} (A^\mu)_{ij} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu \gamma_5 q_i &\xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_l U_{lj}^\dagger \gamma^\mu \gamma_5 U_{ik} q_k = U_{ik} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_l \gamma^\mu \gamma_5 q_k U_{lj}^\dagger \hat{=} U_{ik} (A^\mu)_{kl} U_{lj}^\dagger \\ &= (UA^\mu U^\dagger)_{ij} \quad , \end{aligned} \quad (6.24)$$

während man für das Pseudovektor-Nonet

$$\begin{aligned} (B^\mu)_{ij} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_j \gamma_5 \partial^\mu q_i - (\partial^\mu \bar{q}_j) \gamma_5 q_i] &\xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_l U_{lj}^\dagger \gamma_5 \partial^\mu U_{ik} q_k - (\partial^\mu \bar{q}_l U_{lj}^\dagger) \gamma_5 U_{ik} q_k] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [U_{ik} \bar{q}_l \gamma_5 \partial^\mu q_k U_{lj}^\dagger - U_{ik} (\partial^\mu \bar{q}_l) \gamma_5 q_k U_{lj}^\dagger] \\ &= U_{ik} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_l \gamma_5 \partial^\mu q_k - (\partial^\mu \bar{q}_l) \gamma_5 q_k] \right\} U_{lj}^\dagger \\ &\hat{=} U_{ik} (B^\mu)_{kl} U_{lj}^\dagger = (UB^\mu U^\dagger)_{ij} \end{aligned} \quad (6.25)$$

erhält, wobei im zweiten Schritt verwendet wurde, dass die  $U(N_f)_V$ -Transformationen von der Form [6.19] sind und somit aus der Ableitung gezogen werden dürfen. Insgesamt transformieren die Nonets [6.1] - [6.4] also gemäß

$$P \xrightarrow{U} UPU^\dagger, \quad V^\mu \xrightarrow{U} UV^\mu U^\dagger, \quad A^\mu \xrightarrow{U} UA^\mu U^\dagger, \quad B^\mu \xrightarrow{U} UB^\mu U^\dagger \quad . \quad (6.26)$$

Wie schon zu Beginn dieses Abschnitts erwähnt, ist die  $U(N_f)_V$ -Symmetrie von [6.6] durch den Mischungsterm  $\mathcal{L}_{mix}$  explizit gebrochen. Lässt man jedoch  $\mathcal{L}_{mix}$  zunächst außer Acht, findet man eine exakte  $U(N_f)_V$ -Symmetrie der ersten beiden Terme der Lagrange-Dichte [6.6]. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &\xrightarrow{U} ia \operatorname{Tr} \left\{ UA_\mu U^\dagger [UV^\mu U^\dagger, UPU^\dagger]_- \right\} + b \operatorname{Tr} \left\{ UB_\mu U^\dagger [UV^\mu U^\dagger, UPU^\dagger]_+ \right\} \\ &= ia \operatorname{Tr} \left\{ UA_\mu U^\dagger U [V^\mu, P]_- U^\dagger \right\} + b \operatorname{Tr} \left\{ UB_\mu U^\dagger U [V^\mu, P]_+ U^\dagger \right\} \\ &= \mathcal{L}' \quad , \end{aligned} \quad (6.27)$$

wobei  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \mathcal{L}_{mix}$  ist und im letzten Schritt die zyklische Vertauschbarkeit unter der Spur verwendet wurde.

### 6.2.3 CP-Symmetrie

Zusätzlich zu den bisher vorgestellten kontinuierlichen Symmetrien besitzt die Quantenchromodynamik auch diskrete Symmetrien, d.h. Invarianzen unter Symmetriegruppen, deren Gruppenelemente nur durch diskrete Werte charakterisiert werden können. Eine solche Symmetrietransformation ist schon aus der Diskussion der Lorentz-Symmetrie bekannt, die Paritätstransformation (P). Weitere diskrete Symmetrietransformationen wären die sogenannte Ladungskonjugation (C) und die Zeitumkehr (T). Nach dem bekannten CPT-Theorem ist die Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik invariant unter CPT-Transformationen. Ziel dieses Abschnitts ist es daher, die Symmetrie von [6.6] unter Parität und unter Ladungskonjugation zu zeigen. Es sei abschließend noch erwähnt, dass die QCD über eine weitere diskrete Symmetrie verfügt: die  $Z_3$ -Symmetrie, diese soll hier allerdings nicht erläutert werden.

#### 6.2.3.1 Ladungskonjugation

Um das Verhalten von [6.6] unter Ladungskonjugation festzustellen, ist es erneut sinnvoll, zunächst das Transformationsverhalten der einzelnen Nonets zu überprüfen. Dazu wiederum wird das Transformationsverhalten der Quark-Spinoren sowie der Dirac-adjungierten Quark-Spinoren benötigt. Der ladungskonjugierte Quark-Spinor hat die folgende Gestalt

$$q(x) \xrightarrow{C} q_C(x) = -i\gamma^0 \gamma^2 \bar{q}^T(x) = C \bar{q}^T(x) \quad . \quad (6.28)$$

Der Dirac-adjungierte Spinor transformiert gemäß

$$\bar{q}(x) \xrightarrow{C} \bar{q}_C(x) = -q^T(x) i\gamma^0 \gamma^2 = q^T(x) C \quad . \quad (6.29)$$

Anwendung dieser Transformationsvorschriften auf das Pseudoskalar-Nonet liefert

$$P \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i\gamma_5 q_i \xrightarrow{C} \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T C i\gamma_5 C \bar{q}_i^T = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T i(\gamma_5)^T \bar{q}_i^T = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_i i\gamma_5 q_j \right)^T \hat{=} P^T \quad , \quad (6.30)$$

wobei zunächst erneut die Antikommutator-Relation  $[\gamma^\mu, \gamma_5]_+ = 0$  verwendet wurde. Weiterhin ist  $(\gamma_5)^T = \gamma_5$ . Der Vorzeichenwechsel im vorletzten Schritt ist eine Folge der Antivertauschungs-Relationen der Fermionen, i.e. der Quark-Spinoren. Abschließend sei noch angemerkt, dass sich das ‘‘Transponiert’’ im letzten Ausdruck auf die Matrix-Indizes des Nonets bezieht, während sich das ‘‘Transponiert’’ in den vorhergehenden Rechenschritten auf die Spinor-Indizes bezieht. Da der vorletzte Ausdruck in [6.30] allerdings in den Spinor-Indizes maximal kontrahiert ist, kann das ‘‘Transponiert’’ bezüglich der Spinor-Indizes weggelassen werden. Für das Vektor-Nonet erhält man

$$\begin{aligned} V^\mu &\hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i \xrightarrow{C} \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T C \gamma^\mu C \bar{q}_i^T = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T C \gamma^\mu C^\dagger \bar{q}_i^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T (\gamma^\mu)^T \bar{q}_i^T = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_i \gamma^\mu q_j)^T \hat{=} -(V^\mu)^T \quad . \end{aligned} \quad (6.31)$$

Bei der vorherigen Rechnung wurde verwendet, dass für die Ladungskonjugationsmatrix  $C^\dagger = C^{-1} = -C$  gilt und dass  $C\gamma^\mu C^\dagger = -(\gamma^\mu)^T$  ist. Erneut sei erwähnt, dass sich das ‘‘Transponiert‘‘ im letzten Ausdruck auf die Matrix-Indizes des Nonets bezieht. Das Axialvektor-Nonet transformiert gemäß

$$\begin{aligned} A^\mu &\hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu \gamma_5 q_i \xrightarrow{C} \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T C \gamma^\mu \gamma_5 C \bar{q}_i^T = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T C \gamma^\mu C^\dagger \gamma_5 \bar{q}_i^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T (\gamma^\mu)^T (\gamma_5)^T \bar{q}_i^T = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_i \gamma_5 \gamma^\mu q_j)^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_i \gamma^\mu \gamma_5 q_j \hat{=} (A^\mu)^T \quad . \end{aligned} \quad (6.32)$$

Letztendlich findet man für das Pseudovektor-Nonet

$$\begin{aligned} B^\mu &\hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_j \gamma_5 \partial^\mu q_i - (\partial^\mu \bar{q}_j) \gamma_5 q_i] \xrightarrow{C} \frac{1}{\sqrt{2}} [q_j^T C \gamma_5 \partial^\mu C \bar{q}_i^T - (\partial^\mu q_j^T C) \gamma_5 C \bar{q}_i^T] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} [q_j^T (\gamma_5)^T \partial^\mu \bar{q}_i^T - (\partial^\mu q_j^T) (\gamma_5)^T \bar{q}_i^T] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_i \gamma_5 \partial^\mu q_j - (\partial^\mu \bar{q}_i) \gamma_5 q_j]^T \hat{=} -(B^\mu)^T \quad . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Setzt man nun die Resultate [6.30]-[6.33] in die Lagrange-Dichte [6.6] ein, so folgt die Invarianz des Modells unter Ladungskonjugation

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\xrightarrow{C} ia \operatorname{Tr} \left\{ (A_\mu)^T \left[ -(V^\mu)^T, P^T \right]_- \right\} + b \operatorname{Tr} \left\{ -(B_\mu)^T \left[ -(V^\mu)^T, P^T \right]_+ \right\} \\ &\quad + ic \operatorname{Tr} \left\{ \Delta \left[ (A_\mu)^T, -(B^\mu)^T \right]_- \right\} \\ &= ia \operatorname{Tr} \left\{ (V^\mu P A_\mu)^T - (P V^\mu A_\mu)^T \right\} + b \operatorname{Tr} \left\{ (P V^\mu B_\mu)^T + (V^\mu P B_\mu)^T \right\} \\ &\quad + ic \operatorname{Tr} \left\{ \Delta [A_\mu, B^\mu]_-^T \right\} \\ &= \mathcal{L} \quad , \end{aligned} \quad (6.34)$$

wobei die zyklische Vertauschbarkeit unter der Spur und die Tatsache, dass  $\operatorname{Tr}(M^T) = \operatorname{Tr}(M)$  gilt, verwendet wurde.

### 6.2.3.2 Parität

Abschließend gilt es noch, das Verhalten von [6.6] unter Paritätstransformationen, also Raumspiegelungen, festzustellen. Erneut bietet es sich an, zunächst das Transformationsverhalten der einzelnen Quark-Spinoren anzugeben. Für  $q(x) = q(t, \mathbf{r})$  gilt

$$q(t, \mathbf{r}) \xrightarrow{P} \gamma^0 q(t, -\mathbf{r}) \quad , \quad (6.35)$$

während der Dirac-adjungierte Spinor gemäß

$$\bar{q}(t, \mathbf{r}) \xrightarrow{P} \bar{q}(t, -\mathbf{r}) \gamma^0 \quad (6.36)$$

transformiert. Analog zu den vorherigen Abschnitten können [6.35] und [6.36] nun auf die verschiedenen Nonets angewendet werden. Für den Pseudoskalar gilt

$$P \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i \gamma_5 q_i \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^0 i \gamma_5 \gamma^0 q_i = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i \gamma_5 q_i \hat{=} -P \quad , \quad (6.37)$$

wobei erneut die Antivertauschungs-Relation zwischen  $\gamma^\mu$  und  $\gamma_5$  verwendet wurde. Wie schon in der Diskussion nach Gleichung [6.15] erwähnt, erhält man bei der Paritätstransformation des Pseudoskalars einen Vorzeichenwechsel. Das Vektor-Nonet transformiert nun wie

$$V^\mu \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 q_i = (-1)^{(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i \hat{=} (-1)^{(\mu)} V^\mu \quad , \quad (6.38)$$

wobei im obigen Ausdruck  $(-1)^{(\mu)}$  das  $\mu$  kein Lorentz-Index ist. In dieser abkürzenden Notation ist  $(-1)^{(\mu)} = 1$  im Falle  $\mu = 0$  und  $(-1)^{(\mu)} = -1$  in den Fällen  $\mu = 1, 2, 3$ . Diese Unterscheidung rührt natürlich daher, dass im Fall  $\mu = 0$  kein Vorzeichenwechsel stattfindet. Im Fall  $\mu = 1, 2, 3$  dreht sich durch die Antikommutator-Relation  $[\gamma^i, \gamma^0]_+ = 0, i = 1, 2, 3$  das Vorzeichen. Axial- und Pseudovektor transformieren ganz ähnlich unter Paritätstransformationen, denn es gilt

$$A^\mu \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu \gamma_5 q_i \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^0 \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^0 q_i = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma_5 q_i = -(-1)^{(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu \gamma_5 q_i \doteq -(-1)^{(\mu)} A^\mu \quad (6.39)$$

und

$$\begin{aligned} B^\mu \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_j \gamma_5 \partial^\mu q_i - (\partial^\mu \bar{q}_j) \gamma_5 q_i] &\xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_j \gamma^0 \gamma_5 (-1)^{(\mu)} \partial^\mu \gamma^0 q_i - ((-1)^{(\mu)} \partial^\mu \bar{q}_j \gamma^0) \gamma_5 \gamma^0 q_i] \\ &= -(-1)^{(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{q}_j \gamma_5 \partial^\mu q_i - (\partial^\mu \bar{q}_j) \gamma_5 q_i] \doteq -(-1)^{(\mu)} B^\mu \quad , \quad (6.40) \end{aligned}$$

wobei bei der Transformation des 4-Gradienten verwendet wurde, dass sich die räumlichen Komponenten mit einem zusätzlichen Minuszeichen transformieren. Die Gleichungen [6.38], [6.39] und [6.40] enthalten alle den Faktor  $(-1)^{(\mu)}$ . Für das Verhalten der Teilchen sind letztendlich nur die räumlichen Komponenten  $\mu = 1, 2, 3$  von Interesse, so dass sich das Transformationsverhalten der Nonets unter Parität wie folgt ergibt

$$P \xrightarrow{P} -P, \quad V^\mu \xrightarrow{P} -V^\mu, \quad A^\mu \xrightarrow{P} A^\mu, \quad B^\mu \xrightarrow{P} B^\mu \quad . \quad (6.41)$$

Abschließend bleibt noch unter Verwendung von [6.41] das Transformationsverhalten von [6.6] unter Parität zu prüfen. Es gilt

$$\mathcal{L} \xrightarrow{P} ia \operatorname{Tr} \{A_\mu [-V^\mu, -P]_-\} + b \operatorname{Tr} \{B_\mu [-V^\mu, -P]_+\} + ic \operatorname{Tr} \left\{ \Delta [A_\mu, B^\mu]_- \right\} = \mathcal{L} \quad (6.42)$$

In der Regel charakterisiert man Teilchen, also auch Mesonen, nach Gesamtdrehimpuls  $J$ , Parität  $P$  und Ladungskonjugation  $C$ :  $J^{PC}$ . Mit dieser Konvention bezeichnen Pseudoskalar  $J^{PC} = 0^{-+}$  Zustände, während Vektor-Teilchen  $J^{PC} = 1^{--}$  Zuständen entsprechen. Letztendlich klassifiziert man Axialvektoren und Pseudovektoren als  $J^{PC} = 1^{++}$  und  $J^{PC} = 1^{+-}$  Zustände.

## 6.3 Berechnung der Kopplungskonstanten

Nachdem nun die Symmetrien des Modells sichergestellt sind, gilt es nun, die Kopplungskonstanten  $a$  und  $b$  aus [6.6] festzulegen. Das Konzept zur Bestimmung der Konstanten beruht auf der Berechnung der Zerfallsbreiten der Axial- und Pseudovektor-Mesonen. Die Kopplungskonstante  $a$  gehört zur Kopplung der Axialvektor-Mesonen, während  $b$  an die Pseudovektoren koppelt. Um die Konstanten zu bestimmen, wählt man daher einen experimentell gut bekannten Zerfallskanal eines Axial- beziehungsweise eines Pseudovektor-Mesons und berechnet die jeweilige Zerfallsbreite. Da diese Zerfallsbreite auch experimentell bekannt ist, erhält man einen Wert für die jeweilige Kopplungskonstante.

### 6.3.1 Die Kopplungskonstante der Axialvektor-Mesonen

Zunächst geht es um die Bestimmung der ersten Kopplungskonstante  $a$ . Der erste Term der Lagrange-Dichte [6.6] enthält die Zerfälle der physikalischen Teilchen  $f_1(1285)$ ,  $f_1(1420)$  und  $a_1(1260)$ . Zur Festlegung der Kopplungskonstante eignet sich allerdings nur der Zerfall  $f_1(1420) \rightarrow K\bar{K}^*(892) + c.c.$ . Der Grund dafür ist zum Einen, dass es sich bei diesem Zerfall um einen dominanten Zerfallskanal des  $f_1(1420)$  handelt. Zum Anderen sind die übrigen Zerfälle von  $f_1(1285)$  und  $a_1(1260)$ , welche im Modell enthalten sind, entweder nicht beobachtet oder nicht dominant. Es ist bekannt, dass das  $K^*(892)$  in nahezu 100% der Fälle in  $K\pi$  weiter zerfällt. Daher setzt sich der dominante Zerfallskanal von  $f_1(1420)$  aus  $f_1(1420) \rightarrow K\bar{K}^*(892) + c.c.$  und  $f_1(1420) \rightarrow K\bar{K}\pi$  zusammen. Da das betrachtete Modell nur Zweiteilchen-Zerfälle enthält und somit der Zerfall in  $K\bar{K}\pi$  nicht im Modell enthalten ist, muss zunächst die Zerfallsbreite des  $K\bar{K}^*(892)$ -Zerfalls durch das Verzweungsverhältnis der beiden dominanten Zerfallsmode berechnet werden. Dazu nimmt man zunächst an, dass die Zerfallsbreite dieser dominanten Zerfallsmode der gesamten Zerfallsbreite  $\Gamma_{f_1(1420)}^{tot}$  von  $f_1(1420)$  entspricht. Die gesamte Zerfallsbreite von  $f_1(1420)$  ist experimentell wohlbekannt, in dieser Arbeit wurde der von der PARTICLE DATA GROUP angegebene Mittelwert verwendet. Dieser beträgt

$$\Gamma_{f_1(1420)}^{tot} = (54.9 \pm 2.6) \text{ MeV} \quad . \quad (6.43)$$

Das Verzweigungsverhältnis  $\Gamma_{f_1(1420) \rightarrow K\bar{K}^*(892)+c.c.} / \Gamma_{f_1(1420) \rightarrow K\bar{K}\pi}$  ist ebenfalls experimentell ermittelt. Im Archiv der PARTICLE DATA GROUP sind die Resultate zweier verschiedener Arbeitsgruppen aus dem Jahr 1980 aufgeführt (vgl. dazu [PDG], [Bro]). Für diese Arbeit wurde der Mittelwert dieser beiden Werte verwendet

$$\frac{\Gamma_{f_1(1420) \rightarrow K\bar{K}^*(892)+c.c.}}{\Gamma_{f_1(1420) \rightarrow K\bar{K}\pi}} \approx (0.81 \pm 0.07) \quad . \quad (6.44)$$

Hierbei sei angemerkt, dass  $\Gamma_{f_1(1420) \rightarrow K\bar{K}\pi}$  sowohl die Zerfallsbreite des direkten Zerfalls in  $K\bar{K}\pi$  als auch des Zerfalls in  $K\bar{K}\pi$  über den Zwischenzustand  $K\bar{K}^*(892)$  beinhaltet und nach den gemachten Annahmen somit der gesamten Zerfallsbreite  $\Gamma_{f_1(1420)}$  von  $f_1(1420)$  entspricht. Damit erhält man

$$\Gamma_{f_1(1420) \rightarrow K\bar{K}^*(892)+c.c.} = (44.5 \pm 4.2) \text{ MeV} \quad . \quad (6.45)$$

Der nächste Schritt besteht aus der Berechnung der Zerfallsbreite  $\Gamma_{K\bar{K}^*(892)+c.c.}$ . Dazu extrahiert man aus dem ersten Term der Lagrange-Dichte [6.6] die zu  $f_1(1420)$  gehörigen Wechselwirkungsterme, diese lauten

$$\frac{ia}{2\sqrt{2}} (f_{1S,A})_\mu \left\{ (K^{*-})^\mu K^+ - (K^{*+})^\mu K^- + (\bar{K}^{*0})^\mu K^0 - (K^{*0})^\mu \bar{K}^0 \right\} \quad . \quad (6.46)$$

Diese Terme entsprechen allen möglichen Zerfällen von  $f_1(1420)$  in  $K\bar{K}^*(892)$ . Für jeden dieser Terme lässt sich nun eine partielle Zerfallsbreite berechnen. Die Summe über all diese partiellen Breiten liefert letztendlich die gesamte Zerfallsbreite  $\Gamma_{K\bar{K}^*(892)+c.c.}$ . Im Gegensatz zu Kapitel 4 sollen die Zerfallsbreiten allerdings nicht aus dem Streumatrixelement  $S_{f_i}$  berechnet werden. Für diese Berechnungen existiert ein effektiver Formalismus. Zunächst gilt für den Zerfall eines Anfangszustandes in  $n$  Endzustände die folgende Formel für die differentielle Zerfallsbreite  $d\Gamma$

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_i} \left( \prod_f \frac{d^3\mathbf{k}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_f} \right) |\mathcal{M}_{m_i \rightarrow \{\mathbf{k}_f\}}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_i - \sum_f k_f \right) \quad , \quad (6.47)$$

wobei zu beachten ist, dass man sich im Ruhesystem des Ausgangsteilchens befindet. Die nun noch zu bestimmende Größe ist das invariante Matrixelement  $\mathcal{M}_{m_i \rightarrow \{\mathbf{k}_f\}}$ . Dieses erhält man aus den zu [6.46] korrespondierenden Feynman-Diagrammen. Abbildung 6.1 zeigt deutlich, dass alle vier Feynman-Diagramme

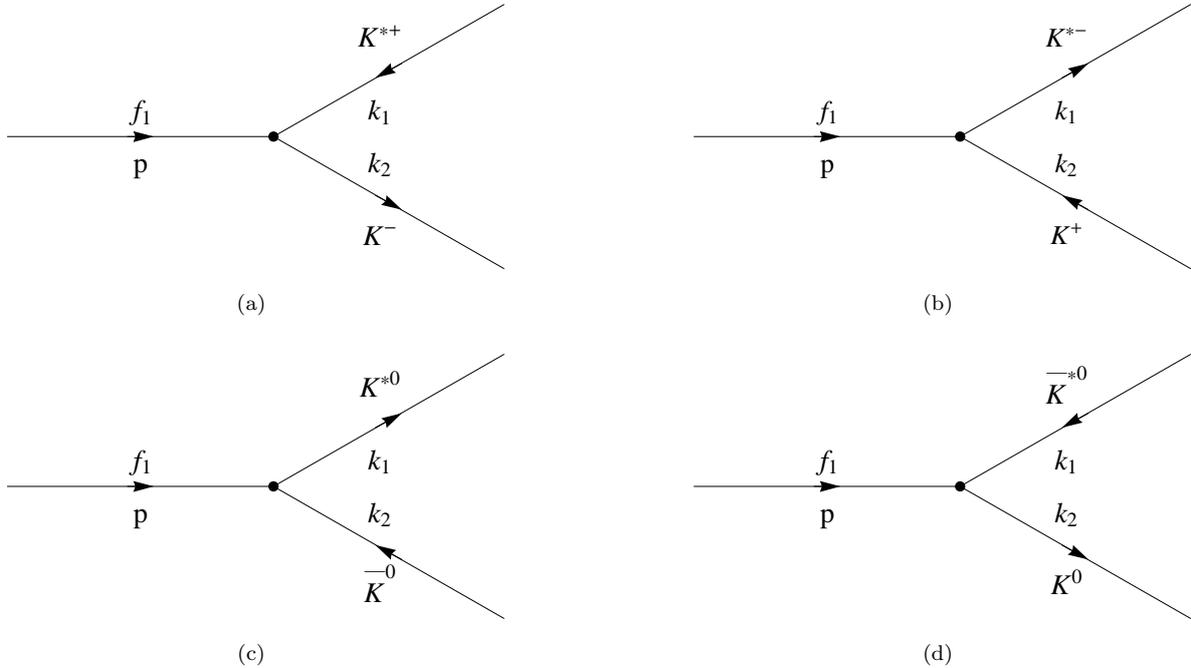


Abbildung 6.1: Die Grafiken (a)-(d) zeigen die FEYNMAN-Diagramme der führenden Ordnung in der Kopplungskonstanten  $a$  für die möglichen Zerfälle von  $f_1(1420)$  in  $K\bar{K}^*(892)$ .

von gleicher Struktur sind. Es ist daher zu erwarten, dass deshalb auch alle invarianten Matrixelemente

$\mathcal{M}$  von gleicher oder ähnlicher Gestalt sind. Aus diesem Grund bietet es sich an, das Matrixelement  $\mathcal{M}$  zunächst nur für Fall (a) aus Abbildung 6.1 zu bestimmen und das Resultat auf die übrigen Fälle (b)-(d) anzupassen. Das Feynman-Diagramm aus Abbildung 6.1 (a) enthält zwei externe, massive Vektor-Bosonen, daher erhält man als invariantes Matrixelement

$$i\mathcal{M}_{(a)} = \epsilon_\mu(p, \lambda) \left\{ -i \frac{ia}{2\sqrt{2}} \right\} \epsilon^{\mu*}(k_1, \lambda') \quad . \quad (6.48)$$

Für die Berechnung der Zerfallsbreite [6.47] wird nun allerdings das Betragsquadrat von [6.48] benötigt. An diesem Punkt steht es nun offen, die Polarisierungen der Teilchen in die Rechnung einzuarbeiten. Da in unserem Fall aber keine - etwa durch die Art des Experimentes - vorgegebene Polarisation der Teilchen vorliegt, berechnen wir die unpolarisierte Zerfallsbreite für den gegebenen Zerfall. Aus diesem Grund gilt es, den folgenden Ausdruck zu berechnen

$$\frac{1}{3} \sum_{\lambda, \lambda'} |\mathcal{M}_{(a)}|^2 \quad . \quad (6.49)$$

Unter Verwendung der Vollständigkeitsrelation der Polarisationsvektoren [4.39] ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{\lambda, \lambda'} |\mathcal{M}_{(a)}|^2 &= \frac{1}{3} \left| -i \frac{ia}{2\sqrt{2}} \right|^2 \sum_{\lambda, \lambda'} g_{\mu\nu} \epsilon^\nu(p, \lambda) \epsilon^{\mu*}(k_1, \lambda') g_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta*}(p, \lambda) \epsilon^\alpha(k_1, \lambda') \\ &= \frac{a^2}{24} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \sum_{\lambda} \epsilon^\nu(p, \lambda) \epsilon^{\beta*}(p, \lambda) \sum_{\lambda'} \epsilon^\alpha(k_1, \lambda') \epsilon^{\mu*}(k_1, \lambda') \\ &= \frac{a^2}{24} \left( -g_\mu^\beta + \frac{p_\mu p^\beta}{m_{f_1}^2} \right) \left( -g_\beta^\mu + \frac{k_{1\beta} k_1^\mu}{m_{K^{*-}}^2} \right) \\ &= \frac{a^2}{24} \left( 2 + \frac{(p \cdot k_1)^2}{m_{f_1}^2 m_{K^{*-}}^2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (6.50)$$

Der letzte Ausdruck lässt sich allerdings noch weiter vereinfachen und durch die Massen der Teilchen  $m_{f_1}$ ,  $m_{K^{*-}}$  und  $m_{K^+}$  ausdrücken. Denn es gilt

$$k_2^2 = (p - k_1)^2 = p^2 + k_1^2 - 2pk_1 \implies pk_1 = \frac{m_{f_1}^2 + m_{K^{*-}}^2 - m_{K^+}^2}{2} \quad , \quad (6.51)$$

so dass sich [6.50] als

$$\frac{a^2}{24} \left( 2 + \frac{\left( m_{f_1}^2 + m_{K^{*-}}^2 - m_{K^+}^2 \right)^2}{4m_{f_1}^2 m_{K^{*-}}^2} \right) \quad (6.52)$$

darstellen lässt. Wie schon erwähnt, ist klar, dass die invarianten Matrixelemente der Feynman-Diagramme (b), (c) und (d) die gleiche Form haben müssen und sich lediglich in den Teilchenmassen der Endzustände unterscheiden können. Für (b), (c) und (d) erhält man schließlich

$$\frac{1}{3} \sum_{\lambda, \lambda'} |\mathcal{M}_{(b)}|^2 = \frac{a^2}{24} \left( 2 + \frac{\left( m_{f_1}^2 + m_{K^{*+}}^2 - m_{K^-}^2 \right)^2}{4m_{f_1}^2 m_{K^{*+}}^2} \right) \quad , \quad (6.53)$$

$$\frac{1}{3} \sum_{\lambda, \lambda'} |\mathcal{M}_{(c)}|^2 = \frac{a^2}{24} \left( 2 + \frac{\left( m_{f_1}^2 + m_{K^{*0}}^2 - m_{K^0}^2 \right)^2}{4m_{f_1}^2 m_{K^{*0}}^2} \right) \quad , \quad (6.54)$$

$$\frac{1}{3} \sum_{\lambda, \lambda'} |\mathcal{M}_{(d)}|^2 = \frac{a^2}{24} \left( 2 + \frac{\left( m_{f_1}^2 + m_{K^{*0}}^2 - m_{K^0}^2 \right)^2}{4m_{f_1}^2 m_{K^{*0}}^2} \right) \quad . \quad (6.55)$$

Setzt man nun das invariante Matrixelement [6.52] in [6.47] ein, so erhält man den folgenden Ausdruck für die zu (a) gehörige partielle Zerfallsbreite

$$\Gamma_{(a)} = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^2} \frac{1}{8m_{f_1} \omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2}} \frac{|i\mathcal{M}_{(a)}|^2}{3} \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \quad . \quad (6.56)$$

Da durch die Verwendung von [6.47] automatisch das Ruhesystem von  $f_1$  (1420) gewählt wurde, lässt sich die vierdimensionale Delta-Distribution in der Form

$$\delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) = \delta(m_{f_1} - \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad (6.57)$$

schreiben. Aufgrund der dreidimensionalen Delta-Distribution bricht nun das Integral über  $d^3\mathbf{k}_2$  zusammen, so dass [6.56] zu

$$\Gamma_{(a)} = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{32\pi^2 m_{f_1}} \frac{1}{\sqrt{m_{K^{*-}}^2 + \mathbf{k}_1^2} \sqrt{m_{K^+}^2 + \mathbf{k}_1^2}} \frac{|i\mathcal{M}_{(a)}|^2}{3} \delta\left(m_{f_1} - \sqrt{m_{K^{*-}}^2 + \mathbf{k}_1^2} - \sqrt{m_{K^+}^2 + \mathbf{k}_1^2}\right) \quad (6.58)$$

wird. Die Delta-Distribution in der obigen Gleichung ist von der gleichen Struktur wie die Delta-Distribution in [5.20] beziehungsweise [5.21]. Da die Berechnung der Zerfallsbreiten der Feynman-Diagramme (b)-(d) - bis auf die Teilchenmassen - zu identischen Ausdrücken wie [6.58], also auch identischen Delta-Distributionen, führen wird, macht es Sinn, die Delta-Distribution in allgemeiner Art und Weise zu vereinfachen. Unter Beachtung der Diskussion und Resultate von Kapitel 5 (siehe dazu [5.21]) vereinfacht sich die Delta-Distribution zu

$$\frac{\sqrt{m_{out,1}^2 + \mathbf{k}_f^2} \sqrt{m_{out,2}^2 + \mathbf{k}_f^2}}{k_f m_{in}} \delta(|\mathbf{k}_1| - k_f) \quad (6.59)$$

Hierbei sind  $m_{out,i}$ ,  $i = 1, 2$  die Massen der Endteilchen,  $m_{in}$  die Masse des Anfangsteilchens und

$$k_f = \sqrt{\frac{m_{out,1}^4 + (m_{out,2}^2 - m_{in}^2)^2 - 2m_{out,1}^2 (m_{out,2}^2 + m_{in}^2)}{4m_{in}^2}} \quad (6.60)$$

der finale Impuls der Endzustände. Unter Verwendung dieses Resultats und durch den Übergang zu sphärischen Koordinaten erhält man letztendlich den folgenden Ausdruck für die partielle Zerfallsbreite  $\Gamma_{(a)}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{(a)} &= \int \frac{d\Omega d|\mathbf{k}_1|}{32\pi^2 m_{f_1}^2} \frac{\sqrt{m_{K^{*-}}^2 + k_{f,a}^2} \sqrt{m_{K^+}^2 + k_{f,a}^2}}{\sqrt{m_{K^{*-}}^2 + \mathbf{k}_1^2} \sqrt{m_{K^+}^2 + \mathbf{k}_1^2}} \frac{|\mathbf{k}_1|^2}{k_{f,a}} \frac{|i\mathcal{M}_{(a)}|^2}{3} \delta(|\mathbf{k}_1| - k_{f,a}) \\ &= \frac{k_{f,a}}{8\pi m_{f_1}^2} \frac{a^2}{24} \left( 2 + \frac{(m_{f_1}^2 + m_{K^{*-}}^2 - m_{K^+}^2)^2}{4m_{f_1}^2 m_{K^{*-}}^2} \right), \end{aligned} \quad (6.61)$$

wobei

$$k_{f,a} = \sqrt{\frac{m_{K^{*-}}^4 + (m_{K^+}^2 - m_{f_1}^2)^2 - 2m_{K^{*-}}^2 (m_{K^+}^2 + m_{f_1}^2)}{4m_{f_1}^2}} \quad (6.62)$$

ist. Dementsprechend erhält man

$$\Gamma_{(b)} = \frac{k_{f,b}}{8\pi m_{f_1}^2} \frac{a^2}{24} \left( 2 + \frac{(m_{f_1}^2 + m_{K^{*+}}^2 - m_{K^-}^2)^2}{4m_{f_1}^2 m_{K^{*+}}^2} \right) \quad (6.63)$$

$$\Gamma_{(c)} = \frac{k_{f,c}}{8\pi m_{f_1}^2} \frac{a^2}{24} \left( 2 + \frac{(m_{f_1}^2 + m_{K^{*0}}^2 - m_{K^0}^2)^2}{4m_{f_1}^2 m_{K^{*0}}^2} \right) \quad (6.64)$$

$$\Gamma_{(d)} = \frac{k_{f,d}}{8\pi m_{f_1}^2} \frac{a^2}{24} \left( 2 + \frac{(m_{f_1}^2 + m_{K^{*0}}^2 - m_{K^0}^2)^2}{4m_{f_1}^2 m_{K^{*0}}^2} \right) \quad (6.65)$$

für die übrigen partiellen Zerfallsbreiten, wobei

$$k_{f,b} = \sqrt{\frac{m_{K^{*+}}^4 + (m_{K^-}^2 - m_{f_1}^2)^2 - 2m_{K^{*+}}^2 (m_{K^-}^2 + m_{f_1}^2)}{4m_{f_1}^2}} \quad (6.66)$$

$$k_{f,c} = \sqrt{\frac{m_{\bar{K}^{*0}}^4 + (m_{K^0}^2 - m_{f_1}^2)^2 - 2m_{\bar{K}^{*0}}^2 (m_{K^0}^2 + m_{f_1}^2)}{4m_{f_1}^2}} \quad (6.67)$$

$$k_{f,d} = \sqrt{\frac{m_{K^{*0}}^4 + (m_{\bar{K}^0}^2 - m_{f_1}^2)^2 - 2m_{K^{*0}}^2 (m_{\bar{K}^0}^2 + m_{f_1}^2)}{4m_{f_1}^2}} \quad (6.68)$$

die finalen Impulse der jeweiligen Endzustände sind. Da nun  $\Gamma_{K\bar{K}^*(892)+c.c.}$  der Summe der  $\Gamma_i$ ,  $i = a, b, c, d$  entspricht, erhält man nun unter Verwendung dieser Tatsache und [6.45] den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} \Gamma_{K\bar{K}^*(892)+c.c.} &= \frac{a^2}{192\pi m_{f_1}^2} \left\{ k_{f,a} \left( 2 + \frac{(m_{f_1}^2 + m_{K^{*-}}^2 - m_{K^+}^2)^2}{4m_{f_1}^2 m_{K^{*-}}^2} \right) + k_{f,b} \left( 2 + \frac{(m_{f_1}^2 + m_{K^{*+}}^2 - m_{K^-}^2)^2}{4m_{f_1}^2 m_{K^{*+}}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + k_{f,c} \left( 2 + \frac{(m_{f_1}^2 + m_{\bar{K}^{*0}}^2 - m_{K^0}^2)^2}{4m_{f_1}^2 m_{\bar{K}^{*0}}^2} \right) + k_{f,d} \left( 2 + \frac{(m_{f_1}^2 + m_{K^{*0}}^2 - m_{\bar{K}^0}^2)^2}{4m_{f_1}^2 m_{K^{*0}}^2} \right) \right\} \\ &= (44.5 \pm 4.2) \text{ MeV} \quad . \end{aligned} \quad (6.69)$$

Dieser Ausdruck ermöglicht nun die Bestimmung der Kopplungskonstanten  $a$ . Die Massen der verschiedenen Teilchen sind aus dem Archiv der PARTICLE DATA GROUP bereits bekannt. Diese lauten  $m_{f_1} = (1426.4 \pm 0.9) \text{ MeV}$ ,  $m_{K^{\pm}} = (891.66 \pm 0.2) \text{ MeV}$ ,  $m_{K^{*0}, \bar{K}^{*0}} = (895.94 \pm 0.2) \text{ MeV}$ ,  $m_{K^{\pm}} = (493.677 \pm 0.01) \text{ MeV}$  und  $m_{K^0, \bar{K}^0} = (497.614 \pm 0.02) \text{ MeV}$ . Für die Kopplungskonstante  $a$  ergibt sich daraus letztendlich ein Wert von

$$a = (5.47 \pm 0.26) \text{ GeV} \quad . \quad (6.70)$$

### 6.3.2 Konsistenztest

Der im vorangegangenen Abschnitt berechnete Wert der Kopplungskonstanten kann nun anhand eines zweiten Zerfalls im Axialvektor-Sektor auf Konsistenz hin getestet werden. In der Diskussion zu Beginn des Abschnittes 6.3.1 wurde bereits erwähnt, dass neben dem Zerfall von  $f_1(1420)$  nur die Zerfälle von  $f_1(1285)$  und  $a_1(1260)$  im Axialvektor-Sektor im Modell enthalten sind. Genauer handelt es sich dabei um die Zerfälle  $f_1(1285) \rightarrow K\bar{K}^*(892)+c.c.$  und  $a_1(1260) \rightarrow \rho\pi$  sowie  $a_1(1260) \rightarrow K\bar{K}^*(892)+c.c.$ . Der  $K\bar{K}^*(892)$ -Zerfall von  $f_1(1285)$  ist nach Angaben der PARTICLE DATA GROUP bisher nicht beobachtet, so dass nur noch die  $a_1(1260)$ -Zerfälle in Frage kommen. Wir haben uns schließlich für die  $\rho\pi$ -Zerfallsmode entschieden. Das  $a_1(1260)$ -Meson verfügt über eine Vielzahl nicht dominanter Zerfallsmoden, vergleiche dazu auch [PDG]. Die gesamte Zerfallsbreite von  $a_1(1260)$  ist sehr ungenau bestimmt und liegt nach Schätzung der PARTICLE DATA GROUP bei

$$\Gamma_{a_1(1260)}^{tot} = (250 - 600) \text{ MeV} \quad (6.71)$$

Um die Konsistenz der im vorherigen Abschnitt berechneten, beziehungsweise festgelegten Kopplungskonstanten zu überprüfen, soll nun die Zerfallsbreite für den  $\rho\pi$ -Zerfall von  $a_1(1260)$  unter Verwendung von [6.72] berechnet werden. Der erste Term der Lagrange-Dichte [6.6] liefert die folgenden sechs Wechselwirkungsterme des  $a_1(1260)$ -Feldes

$$\frac{ia}{2} \left\{ (a_1^0)_\mu [(\rho^+)^{\mu} \pi^- - (\rho^-)^{\mu} \pi^+] + (a_1^+)_\mu [(\rho^-)^{\mu} \pi^0 + (\rho^0)^{\mu} \pi^-] + (a_1^-)_\mu [(\rho^0)^{\mu} \pi^+ - (\rho^+)^{\mu} \pi^0] \right\} \quad . \quad (6.72)$$

Analog zur Berechnung von  $\Gamma_{K\bar{K}^*(892)+c.c.}$  aus dem vorherigen Abschnitt ist es sinnvoll, sich zur Berechnung der invarianten Zerfallsamplitude  $\mathcal{M}$  die Feynman-Diagramme führender Ordnung deutlich zu machen. In Abbildung 6.2 sind diese in der Reihenfolge der Wechselwirkungsterme aus [6.72] anschaulich gemacht. Die Berechnung der partiellen Zerfallsbreiten (a)-(f) erfolgt völlig analog zur Rechnung aus dem

vorherigen Abschnitt. Die sechs Diagramme aus Abbildung 6.2 liefern jeweils eine Zerfallsamplitude der Form [6.48]. Das Betragsquadrat dieser Amplitude entspricht - bis auf die Teilchenmassen - dem Ausdruck [6.52]. Einsetzen des Betragsquadrates in [6.47] und Lösen der Integrale liefert letztendlich

$$\Gamma_{(a)} = \frac{k_{f,a}}{8\pi m_{a_1}^2} \frac{a^2}{12} \left( 2 + \frac{(m_{a_1}^2 + m_{\rho^+}^2 - m_{\pi^-}^2)^2}{4m_{a_1}^2 m_{\rho^+}^2} \right), \quad (6.73)$$

$$\Gamma_{(b)} = \frac{k_{f,b}}{8\pi m_{a_1}^2} \frac{a^2}{12} \left( 2 + \frac{(m_{a_1}^2 + m_{\rho^-}^2 - m_{\pi^+}^2)^2}{4m_{a_1}^2 m_{\rho^-}^2} \right), \quad (6.74)$$

$$\Gamma_{(c)} = \frac{k_{f,c}}{8\pi m_{a_1}^2} \frac{a^2}{12} \left( 2 + \frac{(m_{a_1}^2 + m_{\rho^+}^2 - m_{\pi^0}^2)^2}{4m_{a_1}^2 m_{\rho^+}^2} \right), \quad (6.75)$$

$$\Gamma_{(d)} = \frac{k_{f,d}}{8\pi m_{a_1}^2} \frac{a^2}{12} \left( 2 + \frac{(m_{a_1}^2 + m_{\rho^0}^2 - m_{\pi^+}^2)^2}{4m_{a_1}^2 m_{\rho^0}^2} \right), \quad (6.76)$$

$$\Gamma_{(e)} = \frac{k_{f,e}}{8\pi m_{a_1}^2} \frac{a^2}{12} \left( 2 + \frac{(m_{a_1}^2 + m_{\rho^-}^2 - m_{\pi^0}^2)^2}{4m_{a_1}^2 m_{\rho^-}^2} \right), \quad (6.77)$$

$$\Gamma_{(f)} = \frac{k_{f,f}}{8\pi m_{a_1}^2} \frac{a^2}{12} \left( 2 + \frac{(m_{a_1}^2 + m_{\rho^0}^2 - m_{\pi^-}^2)^2}{4m_{a_1}^2 m_{\rho^0}^2} \right), \quad (6.78)$$

wobei die finalen Impulse  $k_{f,i}$ ,  $i = a, \dots, f$  von der Form [6.60] sind. Die Summe der partiellen Zerfallsbreiten [6.74] - [6.79] liefert durch Einsetzen der Kopplungskonstanten  $a$  und der Teilchenmassen  $m_{a_1} = (1230 \pm 40)$  MeV,  $m_{\rho} = (775.49 \pm 0.3)$  MeV,  $m_{\pi^0} = (134.9766 \pm 0.0006)$  MeV und  $m_{\pi^\pm} = (139.75018 \pm 0.0003)$  MeV die Zerfallsbreite  $\Gamma_{a_1 \rightarrow \rho\pi}$

$$\Gamma_{a_1 \rightarrow \rho\pi} = (443 \pm 13) \text{ MeV} \quad . \quad (6.79)$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem Wert der PARTICLE DATA GROUP [6.71], so zeigt sich eine gute Übereinstimmung.

### 6.3.3 Die Kopplungskonstante der Pseudovektor-Mesonen

Die zweite Kopplungskonstante des Modells ist im Term der Pseudovektor-Kopplung enthalten. Auch diese Kopplungskonstante soll über die Zerfallsbreiten, in diesem Fall der Pseudovektoren, bestimmt werden. Die explizite Berechnung der Kopplungskonstante ist Gegenstand der Bachelorarbeit von Lisa Olbrich [Olb], daher werden an dieser Stelle nur die Berechnungsmethode und Resultate angegeben.

Der zweite Term von [6.6] enthält neben den unphysikalischen Zerfällen von  $K_{1,B}$  die physikalischen Zerfälle von  $b_1(1235)$ ,  $h_1(1170)$  und  $h_1(1380)$ . Zur Festlegung der Kopplungskonstanten  $b$  wurde die Zerfallsbreite der dominanten Zerfallsmode  $b_1(1235) \rightarrow \omega\pi$ , genauer der neutrale Zerfall  $b_1^0 \rightarrow \omega\pi^0$  verwendet. Der Mittelwert der PARTICLE DATA GROUP für die gesamte Zerfallsbreite  $\Gamma_{b_1}$  von  $b_1(1235)$  beträgt

$$\Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = (142 \pm 9) \text{ MeV} \quad . \quad (6.80)$$

Es sei allerdings angemerkt, dass man auch die geladenen Zerfälle von  $b_1(1235)$  hätte einbeziehen können, allerdings wäre es dann nötig gewesen, über die verschiedenen Anfangszustände  $b_1^0$ ,  $b_1^-$  und  $b_1^+$  zu mitteln. Die Berechnung der Kopplung  $b$  verläuft völlig analog zur bereits vorgestellten Rechnung der Kopplungskonstanten  $a$  aus Abschnitt 6.3.1. Zunächst schreibt man die Feynman-Diagramme führender Ordnung auf, berechnet die invariante Zerfallsamplitude  $\mathcal{M}$  und setzt deren Betragsquadrat in [6.47] ein. Anschließend bleibt das daraus resultierende Integral zu lösen. Die Summe der partiellen Zerfallsbreiten liefert schließlich den Ausdruck für die gesamte Zerfallsbreite  $\Gamma_{b_1}$ . Unter Verwendung von Gleichung [6.80] und den Teilchenmassen  $m_{b_1} = (1229.5 \pm 3.2)$  MeV,  $m_{\omega} = (782.65 \pm 0.1)$  MeV und  $m_{\pi^0} = (134.9766 \pm 0.0006)$  MeV erhält man schließlich

$$b = (7.63 \pm 0.24) \text{ GeV} \quad . \quad (6.81)$$

### 6.3.4 Konsistenztest

Auch der Wert [6.81] der zweiten Kopplungskonstante soll auf Konsistenz hin überprüft werden. Dazu wurde der Zerfall  $h_1(1170) \rightarrow \rho\pi$  untersucht. Dieser Zerfall ist nach Angabe der PARTICLE DATA GROUP der einzig bisher beobachtete und somit als dominante Zerfallsmode anzusehen. Nach Schätzung der PARTICLE DATA GROUP beträgt die Zerfallsbreite  $\Gamma_{h_1(1170)}^{tot}$   $(360 \pm 40)$  MeV. In führender Ordnung der Kopplungskonstanten  $b$  tragen drei Diagramme, entsprechend des neutralen und der beiden geladenen Zerfälle, bei. Die Auswertung dieser Feynman-Diagramme erfolgt völlig analog zu den bisher präsentierten Beispielen. Durch Einsetzen von [6.81] in die Zerfallsbreite  $\Gamma_{h_1(1170)}$  erhält man schließlich

$$\Gamma_{h_1(1170) \rightarrow \rho\pi} = (408.6 \pm 8.6) \text{ MeV} \quad . \quad (6.82)$$

Für die explizite Berechnung dieses Resultates und der Resultate des vorherigen Abschnitts sei auf die Bachelorarbeit von Lisa Olbrich verwiesen [Olb].

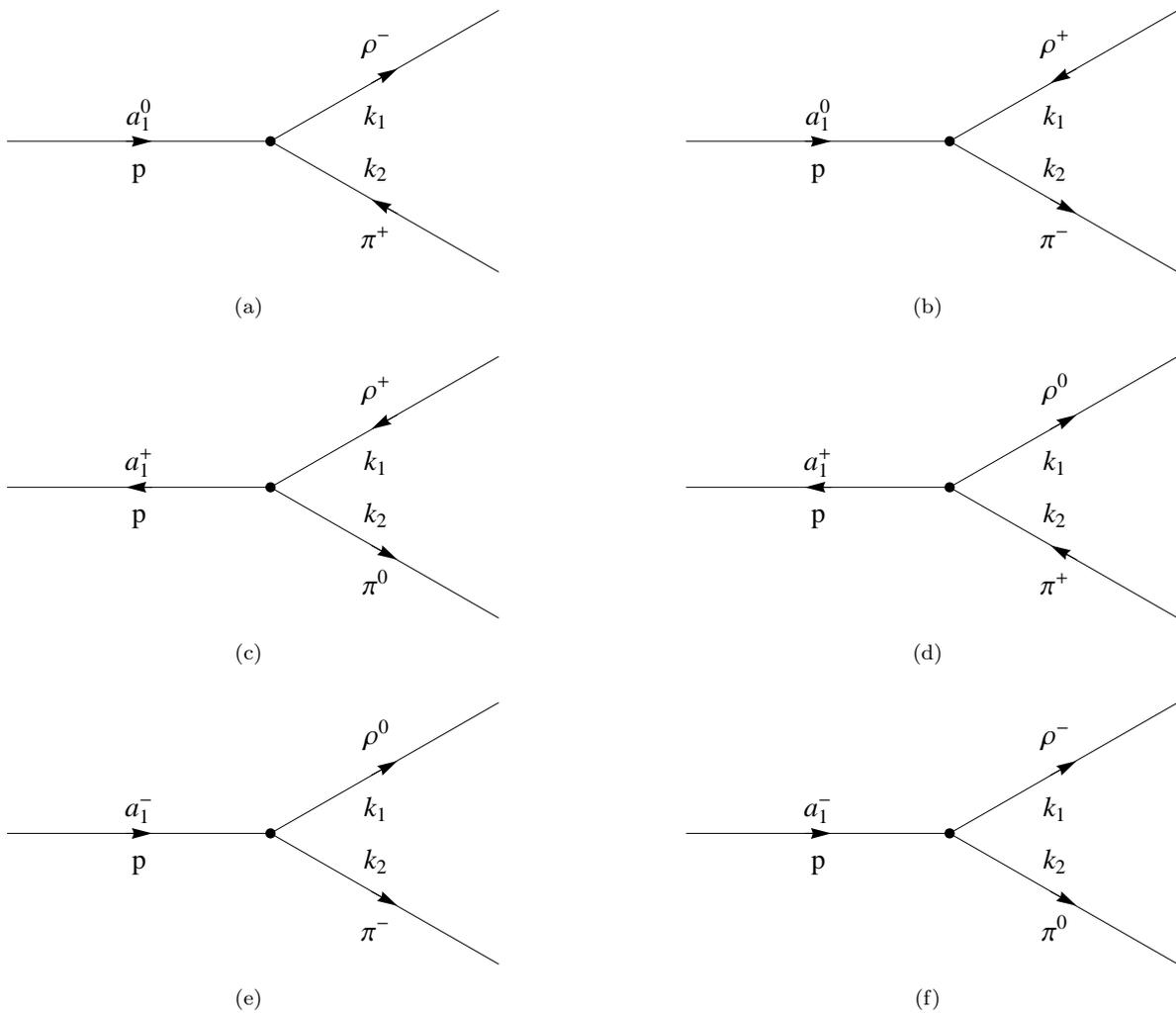


Abbildung 6.2: Die Grafiken (a)-(f) zeigen die Feynman-Diagramme führender Ordnung des  $\rho\pi$ -Zerfalls von  $a_1(1260)$ .

## 6.4 Mischungseffekte in Kaon-Feldern

### 6.4.1 Die Notwendigkeit eines Mischungsterms

Die Notwendigkeit einer Mischung der Kaonen-Felder wird bei der Berechnung der Zerfallsbreiten der Kaonen-Felder schnell klar. Dazu betrachtet man nun die Lagrange-Dichte [6.6] für den Fall  $c = 0$ , also ohne Mischungsterm  $\mathcal{L}_{mix}$ , so dass die Felder  $K_{1,A}$  und  $K_{1,B}$  mit den physikalischen Feldern  $K_1(1270)$  und  $K_1(1400)$  identifiziert werden können. Unter diesen Voraussetzungen kann der Zerfall der beiden Kaon-Felder in  $K^*(892)\pi$  berechnet werden. Für den Zerfall  $K_1(1270) \rightarrow K^*(892)\pi$  erhält man eine Breite von  $\Gamma_{K_1(1270) \rightarrow K^*(892)\pi} = 42.78$  MeV. Für den Zerfall des schwereren  $K_1(1400)$  in  $K^*(892)\pi$  erhält man eine Zerfallsbreite von  $\Gamma_{K_1(1400) \rightarrow K^*(892)\pi} = 94.27$  MeV. Vergleicht man diese Werte nun mit den experimentellen Daten der [PDG],  $\Gamma_{K_1(1270) \rightarrow K^*(892)\pi}^{exp} = (13.92 \pm 4.49)$  MeV und  $\Gamma_{K_1(1270) \rightarrow K^*(892)\pi}^{exp} = (163.56 \pm 16.07)$  MeV, so erkennt man, dass die beiden berechneten Zerfallsbreiten deutlich von den experimentell bestimmten Breiten abweichen und der Mischungsterm des Modells nicht außer Acht gelassen werden darf.

### 6.4.2 Mischung der Kaon-Felder

Nun sollen die Mischungseffekte der Kaonen-Felder untersucht werden und der Mischungswinkel  $\phi$  bestimmt werden. Wie schon gesehen, enthält sowohl das Axialvektor-Nonet  $A^\mu$  [6.3] als auch das Pseudovektor-Nonet  $B^\mu$  [6.4] noch unphysikalische Kaonen-Felder  $K_{1,A}^\mu$  und  $K_{1,B}^\mu$ . Wie in Abschnitt 6.1 bereits erwähnt, gibt es Mischungsterme dieser Teilchenfelder, welche durch den Mischungsterm [6.7] aufgrund nicht verschwindender Differenzen der Quark-Massen induziert werden. Unter der Annahme von Isospin-Symmetrie, i.e.  $\delta_u = \delta_d = \delta_N$  in  $\Delta$ , erhält man für den Mischungsterm

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mix} &= ic \operatorname{Tr} \left\{ \Delta [A_\mu, B^\mu]_- \right\} \\ &= \frac{ic}{2} (\delta_S - \delta_N) \left\{ K_{1\mu,A}^- K_{1,B}^{\mu+} - K_{1\mu,A}^+ K_{1,B}^{\mu-} + \bar{K}_{1\mu,A}^0 K_{1,B}^{\mu 0} - K_{1\mu,A}^0 \bar{K}_{1,B}^{\mu 0} \right\} \quad , \end{aligned} \quad (6.83)$$

vergleiche hierzu auch [Par]. Um diese Mischungsterme zum Verschwinden zu bringen, werden neue Kaonen-Felder  $K_{1,1270}^\mu$  und  $K_{1,1400}^\mu$  eingeführt. Diese neuen Felder stellen die physikalischen Kaonen  $K_1(1270)$  und  $K_1(1400)$  dar. Das Verschwinden der Terme [6.83] erfolgt dadurch, dass die physikalischen Felder  $K_{1,1270}^\mu$  und  $K_{1,1400}^\mu$  unter Verwendung einer Drehmatrix  $U$  gedreht werden. Da die vorhandenen Felder komplexwertig sind, muss  $U \in SU(2)$  gewählt werden. Eine mögliche Darstellung eines Elementes der speziellen unitären Gruppe  $SU(2)$  ist

$$U = \exp(-i\phi\boldsymbol{\sigma}) \quad , \quad (6.84)$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$  der Vektor der Pauli-Matrizen ist. Der Ausdruck [6.84] lässt sich allerdings wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} \exp(-i\phi\boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=0}^{\infty} (-i)^j \frac{(\phi\boldsymbol{\sigma})^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-i)^{2j} \frac{(\phi\boldsymbol{\sigma})^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} (-i)^{2j+1} \frac{(\phi\boldsymbol{\sigma})^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\phi)^{2j}}{(2j)!} \mathbb{1} - i \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\phi)^{2j+1}}{(2j+1)!} \mathbf{e}_\phi \boldsymbol{\sigma} \\ &= \cos(\phi) \mathbb{1} - i \sin(\phi) \mathbf{e}_\phi \boldsymbol{\sigma} \quad , \end{aligned} \quad (6.85)$$

wobei  $\mathbf{e}_\phi$  den Einheitsvektor in  $\phi$ -Richtung beschreibt. Wählt man nun  $\mathbf{e}_\phi = (1, 0, 0)^T$ , so erhält man unter Verwendung von [6.85]

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -i \sin(\phi) \\ -i \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad . \quad (6.86)$$

Die physikalischen Felder  $K_{1,1270}^\mu$  und  $K_{1,1400}^\mu$  ergeben sich gemäß

$$\begin{pmatrix} K_{1,1270}^\mu \\ K_{1,1400}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -i \sin(\phi) \\ -i \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{1,A}^\mu \\ K_{1,B}^\mu \end{pmatrix} \quad (6.87)$$

aus den unphysikalischen Feldern  $K_{1,A}^\mu$  und  $K_{1,B}^\mu$ . Da in der Lagrange-Dichte [6.6] ausschließlich  $K_{1,A}^\mu$  und  $K_{1,B}^\mu$  vorkommen, muss die Abbildung [6.87] invertiert werden. Ausnutzen der Unitarität von [6.86] liefert

$$\begin{pmatrix} K_{1,A}^\mu \\ K_{1,B}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & i \sin(\phi) \\ i \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{1,1270}^\mu \\ K_{1,1400}^\mu \end{pmatrix} \quad (6.88)$$

was schließlich zu

$$K_{1,A}^\mu = K_{1,1270}^\mu \cos(\phi) + i K_{1,1400}^\mu \sin(\phi) \quad , \quad (6.89)$$

$$K_{1,B}^\mu = i K_{1,1270}^\mu \sin(\phi) + K_{1,1400}^\mu \cos(\phi) \quad (6.90)$$

führt. Diese Identifikationen der unphysikalischen Felder durch  $K_{1,1270}^\mu$  und  $K_{1,1400}^\mu$  können nun in die Lagrange-Dichte eingesetzt werden, um die Mischungsterme in  $\mathcal{L}_{mix}$  zu entkoppeln. Dies führt dazu, dass die Wechselwirkungsterme von  $K_{1,A}^\mu$  und  $K_{1,B}^\mu$  mit den Vektor-Mesonen und der pseudoskalaren Mesonen eine neue gemischte Kopplungskonstante erhalten. Die neue Kopplungskonstante ist eine Funktion des Mischungswinkels  $\phi$  und der beiden bereits bestimmten Kopplungskonstanten  $a$  und  $b$  (vgl. hierzu 6.3). Die Bestimmung des Mischungswinkels erfolgt nun durch die Auswertung der Zerfallsbreiten des Zerfalls  $K_1(1270) \rightarrow K^*(892)\pi$ . Das  $K_1(1270)$ -Meson besitzt nach Angaben der PARTICLE DATA GROUP [PDG] eine Gesamtzerfallsbreite von  $(87 \pm 7)$  MeV. Der von uns gewählte Zerfallskanal besitzt ein Verzweungsverhältnis von  $(16 \pm 5)\%$ , was  $(13.92 \pm 4.49)$  MeV entspricht. Da auch die Teilchenmassen  $m_{K_1(1270)} = (1272 \pm 7)$  MeV und  $m_{K_1(1400)} = (1403 \pm 7)$  MeV und die Kopplungskonstanten [6.70] und [6.81] bekannt sind, bleibt der Mischungswinkel  $\phi$  als einziger Parameter unbestimmt. Wie schon erwähnt, haben wir uns entschieden, den Mischungswinkel über den Zerfall  $K_1(1270) \rightarrow K^*(892)\pi$  zu bestimmen. Den so erhaltenen Wert für  $\phi$  werden wir anschließend verwenden, um die Zerfallsbreite für  $K_1(1400) \rightarrow K^*(892)\pi$  zu berechnen. Da diese Zerfallsbreite experimentell bekannt ist, liefert uns dieses Verfahren direkt eine Aussage über die Güte unseres Mischungswinkels.

Zunächst ist es allerdings sinnvoll, sich die in [6.6] vorkommenden Wechselwirkungsterme von  $K_{1,A}^\mu$  beziehungsweise  $K_{1,B}^\mu$  mit  $K^*(892)\pi$  anschaulich zu machen. Diese lauten

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{ia}{2\sqrt{2}} K_{1\mu,A}^0 \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^{*\mu 0} \pi^0 + K^{*\mu-} \pi^+ \right\} + \frac{ia}{2\sqrt{2}} K_{1\mu,A}^+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu-} \pi^0 + \bar{K}^{*\mu 0} \pi^- \right\} \\ & + \frac{ia}{2\sqrt{2}} K_{1\mu,A}^- \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu+} \pi^0 - K^{*\mu 0} \pi^+ \right\} + \frac{ia}{2\sqrt{2}} \bar{K}_{1\mu,A}^0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \pi^0 - K^{*\mu+} \pi^- \right\} \\ & + \frac{b}{2\sqrt{2}} K_{1\mu,B}^0 \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^{*\mu 0} \pi^0 + K^{*\mu-} \pi^+ \right\} + \frac{b}{2\sqrt{2}} K_{1\mu,B}^+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu-} \pi^0 + \bar{K}^{*\mu 0} \pi^- \right\} \\ & + \frac{b}{2\sqrt{2}} K_{1\mu,B}^- \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu+} \pi^0 + K^{*\mu 0} \pi^+ \right\} + \frac{b}{2\sqrt{2}} \bar{K}_{1\mu,B}^0 \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \pi^0 + K^{*\mu+} \pi^- \right\} \\ & + \dots \quad . \end{aligned} \quad (6.91)$$

An dieser Stelle können nun die Gleichungen [6.89] und [6.90] für die verschiedenen Ladungszustände von  $K_{1,A}^\mu$  und  $K_{1,B}^\mu$  eingesetzt werden. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass sich die Identifikationen [6.89] und [6.90] von  $K_{1,A/B}^{\mu+}$  und  $K_{1,A/B}^{\mu-}$  beziehungsweise  $K_{1,A/B}^{\mu 0}$  und  $\bar{K}_{1,A/B}^{\mu 0}$  durch komplexe Konjugation durch ein Vorzeichen unterscheiden. Damit wird [6.91] zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) + \frac{b}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) \right) K_{\mu 1270}^0 \bar{K}^{*\mu 0} \pi^0 + i \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) + \frac{b}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) \right) K_{\mu 1270}^0 K^{*\mu-} \pi^+ \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) + \frac{b}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) \right) K_{\mu 1270}^+ K^{*\mu-} \pi^0 + i \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) + \frac{b}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) \right) K_{\mu 1270}^+ \bar{K}^{*\mu 0} \pi^- \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) + \frac{b}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) \right) K_{\mu 1270}^- K^{*\mu+} \pi^0 - i \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) + \frac{b}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) \right) K_{\mu 1270}^- K^{*\mu 0} \pi^+ \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) + \frac{b}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) \right) \bar{K}_{\mu 1270}^0 K^{*\mu 0} \pi^0 - i \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) + \frac{b}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) \right) \bar{K}_{\mu 1270}^0 K^{*\mu+} \pi^- \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) - \frac{b}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) \right) K_{\mu 1400}^0 \bar{K}^{*\mu 0} \pi^0 - \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) - \frac{b}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) \right) K_{\mu 1400}^0 K^{*\mu-} \pi^+ \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) - \frac{b}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) \right) K_{\mu 1400}^+ K^{*\mu-} \pi^0 - \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) - \frac{b}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) \right) K_{\mu 1400}^+ \bar{K}^{*\mu 0} \pi^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) - \frac{b}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) \right) K_{\mu 1400}^- K^{*\mu+} \pi^0 - \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) - \frac{b}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) \right) K_{\mu 1400}^- K^{*\mu 0} \pi^+ \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) - \frac{b}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) \right) \bar{K}_{\mu 1400}^0 K^{*\mu 0} \pi^0 - \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) - \frac{b}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) \right) \bar{K}_{\mu 1400}^0 K^{*\mu+} \pi^- \\
 & + \dots \dots
 \end{aligned} \tag{6.92}$$

Wie schon erwähnt, erhalten wir „gedrehte“ Kopplungskonstanten, welche die ursprünglichen Kopplungskonstanten  $a$  und  $b$  des Axialvektor- und Pseudovektor-Terms in [6.6] enthalten. Die oberen vier Zeilen von [6.92] enthalten nun alle Wechselwirkungsterme der verschiedenen Ladungszustände des  $K_1(1270)$ -Mesons mit denen von  $K^*(892)$  und  $\pi$ .

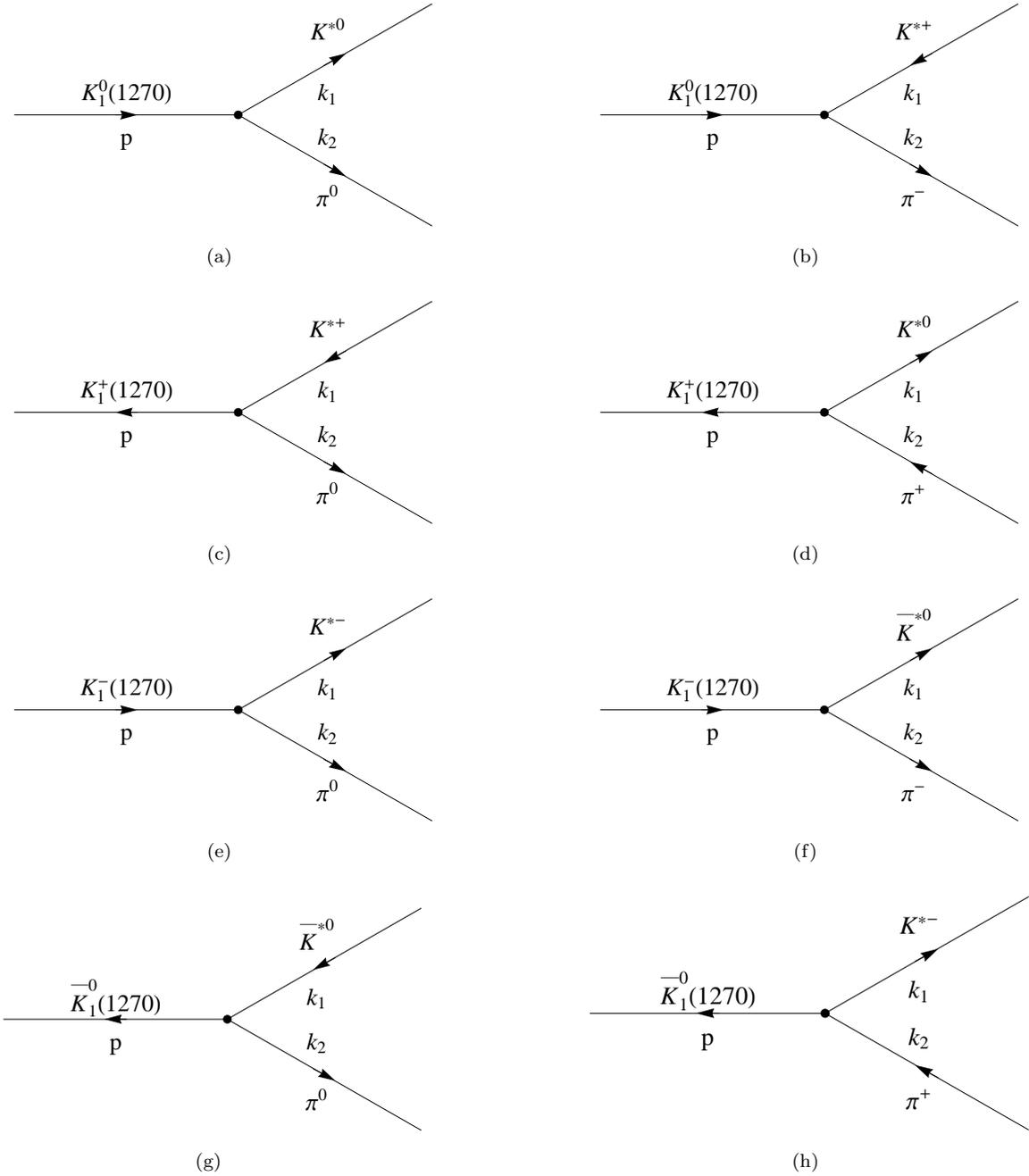


Abbildung 6.3: Die Graphen (a)/(b), (c)/(d), (e)/(f) und (g)/(h) entsprechen jeweils den möglichen Zerfallskanälen der verschiedenen Ladungszustände von  $K_1(1270)$ .

Die acht zum  $K_1(1400) \rightarrow K^*(892) \pi$ -Zerfall beitragenden Wechselwirkungsterme kann man nun durch

die zugehörigen Feynman-Diagramme ausdrücken, um daraus die invarianten Zerfallsamplituden abzuleiten und mit Hilfe von [6.47] die Zerfallsbreiten zu berechnen. Die Feynman-Graphen in führender Ordnung sind in Abbildung 6.3 dargestellt. Man erkennt, dass jeweils zwei Diagramme zum Zerfall eines Anfangszustandes beitragen. Aufgrund der Analogie der acht Graphen aus Abbildung 6.3 ist es völlig ausreichend, nur einen der Zerfälle auszuwerten und das Resultat auf die anderen Diagramme anzuwenden. Die invariante Zerfallsamplitude für den Prozess (a) ergibt sich gemäß der Feynman-Regeln zu

$$i\mathcal{M}_{(a)} = \epsilon_\mu(p, \lambda) \left\{ -i i \left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \cos(\phi) + \frac{b}{2\sqrt{2}} \sin(\phi) \right) \right\} \epsilon^{\mu*}(k_1, \lambda') \quad . \quad (6.93)$$

Für das Betragsquadrat von [6.93] ergibt sich unter Verwendung von [4.39] und [6.51]

$$\frac{1}{3} \sum_{\lambda, \lambda'} |\mathcal{M}_{(a)}|^2 = \frac{(a \cos(\phi) + b \sin(\phi))^2}{24} \left( 2 + \frac{(m_{K_1(1270)}^2 + m_{K^{*+}}^2 - m_{\pi^-}^2)^2}{4m_{K_1(1270)}^2 m_{K^{*+}}^2} \right) \quad , \quad (6.94)$$

wobei erneut über die Spineinstellungen des Anfangszustandes gemittelt und über die Endzustände summiert wurde. Einsetzen dieses Resultates in [6.47] und Ausnutzen der Rechenschritte [6.57] - [6.61] liefert schließlich

$$\Gamma_{(a)} = \frac{k_{f,a}}{8\pi m_{K_1(1270)}^2} \frac{(a \cos(\phi) + b \sin(\phi))^2}{24} \left( 2 + \frac{(m_{K_1(1270)}^2 + m_{K^{*+}}^2 - m_{\pi^-}^2)^2}{4m_{K_1(1270)}^2 m_{K^{*+}}^2} \right) \quad (6.95)$$

als Zerfallsbreite für Diagramm (a). Hierbei ist der finale Impuls  $k_{f,a}$  der Endzustände durch

$$k_{f,a} = \sqrt{\frac{m_{K^{*+}}^4 + (m_{\pi^-}^2 - m_{K_1(1270)}^2)^2 - 2m_{K^{*+}}^2 (m_{\pi^-}^2 + m_{K_1(1270)}^2)}{4m_{K_1(1270)}^2}} \quad (6.96)$$

gegeben. Für die Diagramme (d), (f) und (h) erhält man mit Ausnahme der Teilchenmassen ein mit [6.95] identisches Resultat. Die übrigen vier Diagramme (b), (c), (e) und (g) enthalten einen zusätzlichen Faktor 1/2, welcher durch den in den Wechselwirkungstermen [6.92] auftretenden Faktor  $1/\sqrt{2}$  bedingt wird. Die Gesamtbreite  $\Gamma_{K_1(1270) \rightarrow K^*(892)\pi}$  des Zerfalls  $K_1(1270) \rightarrow K^*(892)\pi$  erhält man nun durch Summation über alle Zerfallskanäle und Mittelung über die Ladungszustände von  $K_1(1270)$

$$\Gamma_{K_1(1270) \rightarrow K^*(892)\pi} = \frac{1}{4} \sum_j \Gamma_j \quad , \quad (6.97)$$

wobei  $j = a, b, \dots, h$  ist. Einsetzen der Teilchenmassen und der Zerfallsbreite  $\Gamma_{K_1(1270)} = (13.9 \pm 4.4)$  MeV liefert zwei mögliche Mischungswinkel

$$\phi_1 = (-55.03 \pm 3.63)^\circ, \quad \phi_2 = (-16.22 \pm 3.67)^\circ \quad (6.98)$$

Nun soll unter Verwendung dieser Mischungswinkel die Zerfallsbreite für den Zerfall  $K_1(1400) \rightarrow K^*(892)\pi$  berechnet werden. Nach dem Archiv der PARTICLE DATA GROUP beträgt die Gesamtbreite für den Zerfall  $\Gamma_{K_1(1400) \rightarrow K^*(892)\pi} = (163.56 \pm 16.07)$  MeV. Die zu diesem Zerfall zugehörigen Wechselwirkungsterme sind in [6.92] aufgeführt. Analog zum  $K^*\pi$ -Zerfall von  $K_1(1270)$  lassen sich die partiellen Zerfallsbreiten über die Feynman-Regeln und [6.47] berechnen. Unter Verwendung der Mischungswinkel [6.98] ergibt sich eine Gesamtbreite von

$$\Gamma_{K_1(1400) \rightarrow K^*(892)\pi} = (126.9 \pm 7.3) \text{ MeV} \quad . \quad (6.99)$$

Dieser Wert ist niedriger als der experimentell bestimmte Wert der PARTICLE DATA GROUP. Die Abweichung zum experimentellen Wert lässt sich natürlich dadurch erklären, dass wir den Mischungswinkel nur anhand des  $K_1(1270)$ -Zerfalls bestimmt haben.

### 6.4.3 Die Massen der unphysikalischen Felder

Abschließend sollen nun noch die Massen der unphysikalischen Felder  $K_{1,A}^\mu$  und  $K_{1,B}^\mu$  bestimmt werden. Dazu wird zunächst die vollständige Lagrange-Dichte des Modells betrachtet. Im wechselwirkungsfreien

Teil der Lagrange-Dichte befinden sich die Feldstärketensoren und die Massenterme der verschiedenen Teilchenfelder aus [6.6]. Die  $K_{1,A/B}$ -Terme der vollständigen Lagrange-Dichte lassen sich dann wie folgt ordnen

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \dots + m_A^2 \left\{ K_{1\mu,A}^- K_{1,A}^{\mu+} + K_{1\mu,A}^0 \bar{K}_{1,A}^{0\mu} \right\} + m_B^2 \left\{ K_{1\mu,B}^- K_{1,B}^{\mu+} + K_{1\mu,B}^0 \bar{K}_{1,B}^{0\mu} \right\} \\ + i\varepsilon \left\{ K_{1\mu,A}^- K_{1,B}^{\mu+} - K_{1\mu,A}^+ K_{1,B}^{\mu-} + \bar{K}_{1\mu,A}^0 K_{1,B}^{\mu 0} - K_{1\mu,A}^0 \bar{K}_{1,B}^{\mu 0} \right\} \quad , \end{aligned} \quad (6.100)$$

wobei in der obigen Formel nur die Massenterme und der Mischungsterm der unphysikalischen Kaonenfelder aufgeführt wurden und  $\varepsilon \equiv (c/2)(\delta_S - \delta_N)$  ist, vgl. [6.83] Diese Terme der Lagrange-Dichte lassen sich nun umschreiben. Dazu definieren wir

$$\zeta = \begin{pmatrix} K_{1\mu,A}^- \\ K_{1\mu,B}^- \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \bar{K}_{1\mu,A}^{0\mu} \\ \bar{K}_{1\mu,B}^{0\mu} \end{pmatrix} \quad (6.101)$$

sowie die hermitesche Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} m_{K_{1,A}}^2 & -i\varepsilon \\ i\varepsilon & m_{K_{1,B}}^2 \end{pmatrix} \quad . \quad (6.102)$$

Damit wird [6.100] zu

$$\mathcal{L} = \dots + \zeta^\dagger \Omega \zeta + \eta^\dagger \Omega \eta \quad . \quad (6.103)$$

Mit Hilfe der unitären Transformation  $U$  aus [6.86] lässt sich die Matrix  $\Omega$  auf Diagonalform bringen, so dass gilt

$$U \Omega U^\dagger = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad , \quad (6.104)$$

wobei  $\lambda_1 = m_{K_{1(1270)}}^2$  und  $\lambda_2 = m_{K_{1(1400)}}^2$  die Eigenwerte der Matrix  $\Omega$  darstellen. Die Gültigkeit von Formel [6.104] liefert eine Bedingung für den Mischungswinkel  $\phi$ , es folgt nämlich

$$\phi = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\varepsilon}{m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2} \right) \quad . \quad (6.105)$$

Nun lassen sich die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  noch als Funktion der Massen  $m_{K_{1,A}}, m_{K_{1,B}}$  und der Konstanten  $\varepsilon$  angeben

$$\det[\Omega - \lambda \mathbb{1}] \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{m_{K_{1,A}}^2 + m_{K_{1,B}}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2)^2}{4} + \varepsilon^2} \quad . \quad (6.106)$$

Für den Grenzfall  $(m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2)^2 \gg \varepsilon^2$  lässt sich der Ausdruck [6.106] der Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  noch vereinfachen, man findet

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{m_{K_{1,A}}^2 + m_{K_{1,B}}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2)^2}{4} + \varepsilon^2} \\ &= \frac{m_{K_{1,A}}^2 + m_{K_{1,B}}^2}{2} \pm \frac{m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2}{2} \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon^2}{(m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2)^2}} \\ &\simeq \frac{m_{K_{1,A}}^2 + m_{K_{1,B}}^2}{2} \pm \frac{m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2}{2} \pm \frac{\varepsilon^2}{m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2} \quad , \end{aligned} \quad (6.107)$$

so dass die Eigenwerte

$$m_{K_{1(1270)}}^2 = m_{K_{1,A}}^2 + \frac{\varepsilon^2}{m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2}, \quad m_{K_{1(1400)}}^2 = m_{K_{1,B}}^2 - \frac{\varepsilon^2}{m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2} \quad (6.108)$$

lauten. Unter Verwendung der Gleichungen [6.105] und [6.108] und des Mischungswinkels  $\phi_2 = (-16.22 \pm 3.67)^\circ$  lassen sich die Massen der unphysikalischen Felder  $K_{1,A}^\mu$  und  $K_{1,B}^\mu$  wie folgt bestimmen

$$m_{K_{1,A}} = 1283.52 \text{ MeV}, \quad m_{K_{1,B}} = 1392.47 \text{ MeV} \quad . \quad (6.109)$$

Es sei angemerkt, dass wir in der Berechnung der Massen  $m_{K_{1,A}}$  und  $m_{K_{1,B}}$  den Mischungswinkel  $\phi_2 = (-16.22 \pm 3.67)^\circ$  verwenden mussten, da der Mischungswinkel  $\phi_1$  zu unbestimmten Ausdrücken geführt hätte.

## Kapitel 7

# Zusammenfassung

Ziel dieser Bachelorarbeit war die Vorstellung und die Untersuchung eines effektiven, mesonischen Drei-Flavor-Modells der Quantenchromodynamik und dessen Phänomenologie. Dazu wurden zunächst die Kopplungskonstanten  $a$  und  $b$  des Modells durch die Berechnung dominanter Zerfallsbreiten der im Modell enthaltenen Axialvektor- und Pseudovektor-Mesonen festgelegt. Dabei wurde für die Festlegung der Kopplungskonstanten  $a$  der Zerfall von  $f_1(1420)$  in  $K\bar{K}^*$  (892) verwendet. Die so berechnete Kopplungskonstante wurde anschließend unter Verwendung des  $\rho\pi$ -Zerfalls von  $a_1(1260)$  auf Konsistenz geprüft. Das dadurch erhaltene Resultat von  $\Gamma_{a_1 \rightarrow \rho\pi} = (443.962 \pm 13.456)$  MeV liegt sehr gut in dem von der PARTICLE DATA GROUP angegebenen Wertebereich der Gesamtbreite von  $a_1(1260)$ . Die Festlegung und Berechnung der Kopplungskonstante  $b$  des Pseudovektor-Sektors war Gegenstand der Bachelorarbeit von Lisa Olbrich, so dass in dieser Arbeit nur die Resultate dieser Rechnung präsentiert wurden. Jedoch passen die dort erzielten Resultate auch mit guter Genauigkeit zu den experimentell bestimmten Werten der PARTICLE DATA GROUP.

Das zweite Ziel dieser Bachelorarbeit war die Untersuchung der im Modell enthaltenen Mischungseffekte der Kaonen-Felder von  $K_1(1270)$  und  $K_1(1400)$ . Zunächst waren im Axialvektor- und Pseudovektor-Nonet dieses Modells nur unphysikalische Kaonen-Felder  $K_{1,A}$  und  $K_{1,B}$  enthalten. Durch den Mischungsterm  $\mathcal{L}_{mix}$  der Lagrange-Dichte des Modells existieren allerdings Mischterme beider Felder. Diese Mischterme wurden durch die Einführung der physikalischen Felder  $K_1(1270)$  und  $K_1(1400)$ , welche durch eine  $SU(2)$ -Drehung aus den unphysikalischen Feldern hervorgehen, zum Verschwinden gebracht. Dies hat allerdings zur Folge, dass die Wechselwirkungsterme der physikalischen Felder  $K_1(1270)$  und  $K_1(1400)$  nun über eine gedrehte Kopplungskonstante koppeln. Diese gedrehte Kopplungskonstante ist eine Funktion der ursprünglich bestimmten Kopplungskonstanten  $a, b$  und eines Mischwinkels  $\phi$ . Dieser Mischungswinkel wurde von uns über den  $K^*(892)\pi$ -Zerfall von  $K_1(1270)$  festgelegt. Anschließend konnten wir unter Verwendung des so berechneten Mischungswinkels  $\phi$  die Zerfallsbreite von  $K_1(1400)$  berechnen und mit den experimentell festgelegten Daten der PARTICLE DATA GROUP vergleichen. Auch hier konnten wir eine gute Übereinstimmung unserer durch das Modell vorhergesagten Daten mit den experimentell bestimmten Werten erzielen.

# Literaturverzeichnis

- [PSc] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995,
- [MSh] Franz Mandl, Graham Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 2.Auflage 2010,
- [Gr5] Walter Greiner, Berndt Müller, *Theoretische Physik, Band 5: Quantenmechanik, Symmetrien*, Harri Deutsch, 4.Auflage 2005,
- [Gr7] Walter Greiner, Joachim Reinhard, *Theoretische Physik, Band 7a: Feldquantisierung*, Harri Deutsch, 1.Auflage 1993,
- [Th2] Dirk H. Rischke, *Theoretische Physik II: Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie*, Vorlesungsskript,
- [Th3] Dirk H. Rischke, *Theoretische Physik III: Elektrodynamik*, Vorlesungsskript,
- [Th4] Dirk H. Rischke, *Theoretische Physik IV: Quantenmechanik I*, Vorlesungsskript,
- [Th6] Dirk H. Rischke, *Theoretische Physik VI: Quantenmechanik II*, Vorlesungsskript,
- [Gia] Francesco Giacosa, *Glueball phenomenology within a nonlocal approach*, Dissertation,
- [Par] Denis Parganlija, *Quarkonium Phenomenology in Vacuum*, Dissertation,
- [Olb] Lisa Olbrich, *Phänomenologie von Pseudovektormesonen und Mischungen mit Axialvektormesonen im kaonischen Sektor*, Bachelorarbeit,
- [PDG] Particle Data Group, J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012),
- [PGR] D. Parganlija, P. Kovacs, G. Wolf, F. Giacosa and D. H. Rischke, “Meson vacuum phenomenology in a three-flavor linear sigma model with (axial-)vector mesons,” arXiv:1208.0585 [hep-ph].
- [HaY] H. Hatanaka and K. -C. Yang, “K(1)(1270)-K(1)(1400) Mixing Angle and New-Physics Effects in  $B \rightarrow_c K(1) l^+ l^-$  Decays,” Phys. Rev. D **78** (2008) 074007 [arXiv:0808.3731 [hep-ph]].
- [Bur] L. Burakovsky and J. T. Goldman, “Towards resolution of the enigmas of P wave meson spectroscopy,” Phys. Rev. D **57** (1998) 2879 [hep-ph/9703271].
- [Bro] C. Bromberg, J. Dickey, G. Fox, R. Gomez, W. Kropac, J. Pine, S. Stampke and H. Haggerty *et al.*, “Observations Of The D And E Mesons And Possible Three Kaon Enhancements In  $\pi^- p \rightarrow_c K^0 K^+ \pi^+ X$ ,  $K^0 K^+ K^- X$  At 50-gev/c And 100-gev/c,” Phys. Rev. D **22** (1980) 1513.