

Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Bachelorarbeit

im Fachbereich Physik - Institut für Theoretische Physik

**Phänomenologie der Pseudovektormesonen
und Mischung mit Axialvektormesonen im
kaonischen Sektor**

Lisa I. Olbrich

Frankfurt am Main, September 2012

Betreuer

Prof. Dr. Dirk H. Rischke

Institut für Theoretische Physik
Universität Frankfurt a. M.

Zweitgutachter

Dr. Francesco Giacosa

Institut für Theoretische Physik
Universität Frankfurt a. M.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Moderne Teilchenphysik und die Relevanz von Symmetrien	5
1.2	Ziel der Bachelorarbeit	5
1.3	Verwendete Konventionen und Notationen	5
2	Einführung in die Quantenfeldtheorie	9
2.1	Klassische Feldtheorie	9
2.1.1	Lagrange- und Hamilton-Formalismus für Felder	9
2.1.2	Klassische skalare Felder - die Klein-Gordon-Gleichung	12
2.1.3	Klassische massenbehaftete Vektorfelder - die Proca-Gleichung	13
2.2	Kanonische Feldquantisierung	15
2.2.1	Quantisierung und Lösung der Klein-Gordon-Felder	16
2.2.2	Normalordnung	20
2.2.3	Quantisierung und Lösung der Proca-Gleichung	21
2.2.4	Fock-Raum und Teilchenzahl-Zustände	22
3	Wechselwirkungen und S-Matrix	25
3.1	Wechselwirkungsbild und Zeitentwicklungsoperator	25
3.2	Die Streu- bzw. S -Matrix	26
3.3	Das Wicksche Theorem	27
4	Berechnung der Zerfallsbreite eines Zerfalls der Form $A \rightarrow VP$	29
5	Konstruktion von Mesonen-Nonets mit drei Flavours	37
5.1	Quarks und Mesonen	37
5.2	Konstruktion eines Mesonen-Modells	38
5.3	CP - Symmetrietransformationen	40
6	Lagrange-Dichte von Mesonenzerfällen der Art $A(\text{oder } B) \rightarrow VP$	45
6.1	Symmetrien der Lagrange-Dichte	45
6.1.1	Chirale und Farb-Symmetrie	45
6.1.2	Lorentz-Symmetrie	46
6.1.3	CPT-Symmetrie	46
6.1.4	$U(N_f = 3)$ -Flavor-Symmetrie	46
6.2	Die explizite Form der vollen Lagrange-Dichte \mathcal{L}_{int}	47
6.3	Bestimmung der Kopplungskonstanten b	48
6.4	Bestimmung der Kopplungskonstanten a	50

7	Mischung der Kaonenfelder	51
7.1	Notwendigkeit einer Mischung	51
7.2	Mischungsterm \mathcal{L}_{mix}	51
7.3	Bestimmung des Mischungswinkels aus der Zerfallsbreite $\Gamma_{K_1(1270) \rightarrow K^* \pi}$	52
7.4	Diagonalisierung der Lagrange-Dichte	54
8	Zusammenfassung	57
9	Danksagungen	59

1 Einleitung

1.1 Moderne Teilchenphysik und die Relevanz von Symmetrien

Lange Zeit glaubte man, dass Elektronen, Neutronen und Protonen die elementaren Teilchen sind, aus denen sämtliche Materie aufgebaut ist. Hochenergie-Experimente brachten jedoch immer mehr neue Teilchen zutage und die Physiker standen vor der Aufgabe, Ordnung in diesen riesigen „Teilchenzoo“ zu bringen. Daraus entstand das sogenannte „Standardmodell“ der Elementarteilchenphysik, welches in der Lage ist, alle bekannten Elementarteilchen und die Wechselwirkungen zwischen ihnen zu beschreiben. Die Wechselwirkungen werden in diesem Modell durch die Eichsymmetrien $U(1)_Y$, $SU(2)_I$ und $SU(3)_C$, mit den Quantenzahlen Hyperladung Y , Isospin I und Farbladung C beschrieben. Aus diesen Eichgruppen ergeben sich die schwache Wechselwirkung, die starke Wechselwirkung und die elektromagnetische Wechselwirkung. Die zwölf Bausteine der Materie sind die sechs Quarks up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b), top (t) und die sechs Leptonen Elektron (e), Elektron-Neutrino (ν_e), Muon (μ), Muon-Neutrino (ν_μ), Tau (τ) und Tau-Neutrino (ν_τ). Hinzu kommen noch die jeweiligen Antiteilchen und das Higgs-Teilchen, welches erst kürzlich am LHC gefunden wurde. Dieses Higgs-Feld verleiht den Elementarteilchen ihre Massen. Mit der Entwicklung des Standardmodells wurde die große Relevanz von Symmetrien in der Physik deutlich, da sie die Existenz der Wechselwirkungen und ihrer „Kraftteilchen“, den Vektorbosonen, erklären kann.

1.2 Ziel der Bachelorarbeit

Die Kenntnis von Symmetrien ermöglicht es uns, auch Lagrange-Funktionen für bestimmte Systeme zu konstruieren. In dieser Arbeit wollen wir eine Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte untersuchen, die nur mittels Symmetrietransformationen aufgestellt wurde. Sie soll die Zerfälle von Axialvektormesonen bzw. Pseudovektormesonen in Vektormesonen und pseudoskalare Mesonen beschreiben. Nach der Bestimmung von Kopplungskonstanten werden wir mit ihr auch die Mischung von Kaonenfeldern untersuchen können und so die Gültigkeit der Lagrange-Dichte überprüfen.

1.3 Verwendete Konventionen und Notationen

Wie generell in der Hochenergiephysik üblich, verwenden wir in dieser Arbeit natürliche Einheiten. Hier werden das Plancksche Wirkungsquantum \hbar und die Lichtgeschwindigkeit c gleich 1 und dimensionslos gewählt,

$$\hbar = c = 1 \tag{1.1}$$

Daraus folgt, dass in diesem System die physikalischen Größen wie etwa Länge, Zeit und Masse die Dimension Energie oder deren Inverses besitzen. Insbesondere hat die Masse die Dimension Energie;

d.h. die Ruheenergie eines Teilchens kann mit dessen Masse gleich gesetzt werden.

Um 4-Vektoren von 3-Vektoren zu unterscheiden, wurde die Konvention gewählt, dass ein 4-Vektor durch kleine Buchstaben dargestellt wird und ein 3-Vektor immer einen Vektorpfeil trägt.

$$x^\mu = (x^0, \vec{x})^T = (t, \vec{x})^T \quad (1.2)$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\vec{x}) = (t, -\vec{x}) \quad (1.3)$$

Hier ist zu beachten, dass in obiger Gleichung und in der gesamten Arbeit die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wird. Das bedeutet, dass über doppelt vorkommende Indizes immer summiert wird. Griechische Indizes laufen dabei über die Werte 0, 1, 2, 3 bzw. t, x, y, z ; lateinische dagegen nur über die drei räumlichen Indizes: 1, 2, 3 bzw. x, y, z . Des Weiteren bezeichnet $g_{\mu\nu}$ den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Unter Verwendung dieser Konventionen lässt sich beispielsweise das Skalarprodukt zweier 4-Impulse $p^\mu = (E, \vec{p})^T$ folgendermaßen schreiben:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = p^\mu g_{\mu\nu} p^\nu = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 \quad (1.5)$$

Diese Gleichung ist die relativistische Energie-Impuls-Beziehung.

Mit den quantenmechanischen Beziehungen $\hat{E} = i\partial_0$ und $\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$ wird der 4-Impuls-Operator (bzw. der Ableitungsoperator in vier Dimensionen) auf die folgende Weise definiert:

$$\hat{p}^\mu = (\hat{E}, \hat{\vec{p}})^T = (i\partial_0, -i\vec{\nabla})^T = i\partial^\mu \quad (1.6)$$

Der Feldstärketensor ist ein antisymmetrischer Tensor vom Rang 2:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.7)$$

Dabei hängt der vierdimensionale Vektor $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ mit \vec{E} und \vec{B} durch folgende Beziehung zusammen:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} A_0 - \partial_0 \vec{A} \quad (1.8)$$

Aus dem Feldstärketensor lässt sich ein Lorentz-Skalar bilden:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}F^{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \quad (1.9)$$

Wir werden die Diracschen γ -Matrizen in der Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

verwenden, wobei $\hat{\sigma}_i$ die Paulimatrizen

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

darstellen. Des Weiteren ist γ^5 definiert durch

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Die Diracschen Gamma-Matrizen und γ^5 erfüllen noch folgende wichtige Eigenschaften:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (1.13)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4 \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad \forall \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (1.14)$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}_4 \quad (1.15)$$

2 Einführung in die Quantenfeldtheorie

Die ersten Kapitel dieser Arbeit dienen der Zusammenfassung typischer und für die spätere Rechnung relevanter Themen der klassischen Feldtheorie und Quantenfeldtheorie. Im Wesentlichen beziehe ich mich dabei auf die Bücher [1], [2], [3], [4] und [5]. Dabei versuche ich, die Themen so zusammenzustellen, dass ich gleichzeitig einen kurzen Überblick über die für ein erstes Verständnis der Quantenfeldtheorie und Berechnung von Zerfallsraten wichtigen Themen geben, aber gleichzeitig auch alle Rechnungen möglichst ausführlich aufzeigen kann.

2.1 Klassische Feldtheorie

In diesem ersten Abschnitt wollen wir zunächst die wichtigsten Aspekte der klassischen Feldtheorie zusammenfassen, um sie danach in die für diese Arbeit relevante Quantenfeldtheorie zu überführen.

2.1.1 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für Felder

Lagrange-Formalismus für (klassische) Felder

Bei dem Übergang von einem System diskreter Massenpunkte $q_i(t)$ zu den feldtheoretischen Betrachtungen nimmt der Positionsindex i kontinuierliche Werte an und wir können ihn durch den Ortsvektor \vec{x} (als kontinuierlichen Index) ersetzen,

$$q_i(t) \longrightarrow \Phi(t, \vec{x}) = \Phi(x). \quad (2.1)$$

Das hat zur Folge, dass anstatt des Satzes diskreter Koordinaten $q_i(t)$ nun die Felder $\Phi(x)$ die dynamischen Variablen der Theorie sind, welche jetzt kontinuierlich unendlich viele Freiheitsgrade besitzen. Da sich alle bekannten Feldtheorien mittels lokaler Lagrange-Dichten ausreichend genau beschreiben lassen, können wir die Lagrange-Funktion auch als räumliches Integral über die Lagrange-Dichte \mathcal{L} schreiben.

$$L(t) = \int d^3\vec{x} \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) \quad (2.2)$$

Nach dem Hamiltonschen Prinzip verläuft die Bewegung eines Systems zwischen zwei Zeitpunkten von einer Anfangskonfiguration zu einer Endkonfiguration immer derart, dass die Wirkung $S = \int L(t) dt =$

$\int \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) d^4x$ entlang des Weges durch den Konfigurationsraum stationär ist, d.h.

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S & (2.3) \\
 &= \int \delta L(t) dt = \delta \int dt \int d^3\vec{x} \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \\
 &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta (\partial_\mu \Phi) \right\} \\
 &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \delta \Phi \right\} \\
 &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \right\} \delta \Phi + \oint_{\mathbb{R}^4} d^3F \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right).
 \end{aligned}$$

Dabei wurde von der zweiten zur dritten Zeile verwendet, dass $\delta(\partial_\mu \Phi) = \partial_\mu \delta \Phi$ ist. Im Schritt von der vorletzten zur letzten Zeile schrieben wir den mittleren Term mittels des Gaußschen Integralsatzes in ein Oberflächenintegral über die vier-dimensionale Raum-Zeit um. Dieses verschwindet allerdings, da die Variation des Feldes $\delta \Phi$ dort aufgrund der festgelegten Anfangs- und Endkonfiguration gleich Null ist. Da das Integral nun für beliebiges $\delta \Phi$ verschwinden soll, muss gelten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) = 0 \tag{2.4}$$

Damit haben wir die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder hergeleitet. Sie sieht der Bewegungsgleichung für diskrete Teilchen sehr ähnlich. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Lagrange-Funktion durch die Lagrange-Dichte ersetzt wird. Sollte die Lagrange-Dichte von mehr als nur einem Feld abhängen, so lässt sich durch analoge Rechnung zeigen, dass jedes Feld einzeln die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen muss.

Hamilton-Formalismus für (klassische) Felder

Aus dem letzten Abschnitt ist zu ersehen, dass beim Übergang von diskreten Systemen zu Feldern die Lagrange-Dichte an die Stelle der Lagrange-Funktion tritt. Um auf einen Hamilton-Formalismus für Felder zu kommen, liegt es aus diesem Grund nahe, einen kanonisch konjugierten Impuls (bzw. ein kanonisch konjugiertes Feld¹) $\pi(x)$ mittels der Lagrange-Dichte zu definieren.

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}(x)} \tag{2.5}$$

Es handelt sich hier allerdings nicht wirklich um einen Impuls, sondern die Bezeichnung wird nur analog zur Bezeichnung aus der Dynamik von Punktteilchen gewählt. Die Hamilton-Funktion $H(t)$ lässt sich ganz gewöhnlich als negative Legendre-Transformation von $L(t)$ bezüglich der Ableitung des

¹Beide Bezeichnungen sind in der Literatur üblich.

Feldes $\dot{\Phi}(x)$ konstruieren.

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \int d^3\vec{x} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}(x)} \left(\int d^3\vec{y} \mathcal{L}(y) \right) \dot{\Phi}(x) \right] - L \\
 &= \int d^3\vec{x} \left[\left(\int d^3\vec{y} \frac{\partial \mathcal{L}(y)}{\partial \dot{\Phi}(x)} \right) \dot{\Phi}(x) \right] - L \\
 &= \int d^3\vec{x} \left[\left(\int d^3\vec{y} \pi(y) \delta(y-x) \right) \dot{\Phi}(x) \right] - L \\
 &= \int d^3\vec{x} \left(\pi(x) \dot{\Phi}(x) \right) - L(t) \\
 &= \int d^3\vec{x} \left(\pi(x) \dot{\Phi}(x) - \mathcal{L}(x) \right) = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}(x)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dabei haben wir im dritten Schritt ausgenutzt, dass die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(y)$ lokal ist und deshalb nicht von den Werten der Felder an Punkten $x \neq y$ abhängt. In der letzten Zeile ist die Hamilton-Dichte $\mathcal{H}(x)$ eingeführt worden;

$$\mathcal{H}(\Phi(x), \pi(x), \vec{\nabla}\Phi(x), \vec{\nabla}\pi(x)) = \pi(x)\dot{\Phi}(x) - \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu\Phi(x)) \tag{2.7}$$

wobei $\dot{\Phi} = \dot{\Phi}(\Phi(x), \pi(x), \vec{\nabla}\Phi(x))$ ist. Da die Hamilton-Funktion die negative Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion bezüglich $\dot{\Phi}$ ist, hängt sie nur von den Feldern $\Phi(x)$, des Gradienten der Felder $\vec{\nabla}\Phi(x)$ und den kanonisch konjugierten Impulsen $\pi(x)$ ab. Die Hamilton-Dichte dagegen kann zusätzlich von den räumlichen Ableitungen der Impulse $\vec{\nabla}\pi$ abhängen. Das bedeutet, wir können die Variation der Hamilton-Funktion $H(t)$ folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
 \delta H &= \int d^3\vec{x} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \delta \pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\vec{\nabla}\Phi)} \delta(\vec{\nabla}\Phi) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\vec{\nabla}\pi)} \delta(\vec{\nabla}\pi) \right) \\
 &= \int d^3\vec{x} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\vec{\nabla}\Phi)} \right) \delta \Phi + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\vec{\nabla}\pi)} \right) \delta \pi \right]
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Wir haben bei dieser Rechnung ausgenutzt, dass $\delta(\vec{\nabla}\Phi) = \vec{\nabla}\delta\Phi$ ist, haben die letzten beiden Terme der ersten Zeile partiell integriert und dabei gefordert, dass die Felder oder ihre Ableitungen an der Oberfläche ausreichend schnell gegen Null gehen. Andererseits können wir die Variation der Hamilton-Dichte auch unter Ausnutzung von Gl.(2.7) schreiben als:

$$\begin{aligned}
 \delta H &= \int d^3\vec{x} \left(\pi \delta \dot{\Phi} + \dot{\Phi} \delta \pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \delta \dot{\Phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\Phi)} \delta(\vec{\nabla}\Phi) \right) \\
 &= \int d^3\vec{x} \left[\dot{\Phi} \delta \pi - \dot{\pi} \delta \Phi + \left(\vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\Phi)} \right) \delta \Phi - \left(\vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\Phi)} \right) \delta \Phi \right]
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung (2.4) haben wir $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Phi}$ ersetzt durch $\partial_0(\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Phi}) - \vec{\nabla}[\partial \mathcal{L} / \partial(\vec{\nabla}\Phi)]$ und dann die Definition des kanonisch konjugierten Impulses $\pi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Phi}$ ausgenutzt. Mit den gleichen

Forderungen wie in voriger Rechnung wurde der letzte Term in der ersten Zeile partiell integriert. Durch Vergleich der Gleichungen (2.8) und (2.9) erhalten wir die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} + \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\vec{\nabla} \Phi)}, \quad \dot{\Phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\vec{\nabla} \pi)} \quad (2.10)$$

Mit Blick auf die spätere Quantisierung wird es sich als nützlich erweisen, dieses Ergebnis noch etwas weiter umzuformen. Dazu definieren wir zunächst die Variation eines Funktionals $F(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ als

$$\delta F(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \int d^3 \vec{x} \sum_{i=1}^n \frac{\delta F(\phi_i)}{\delta \phi_i(\vec{x})} \delta \phi_i(\vec{x}), \quad (2.11)$$

wobei $\delta F(\phi)/\delta \phi(\vec{x})$ die Funktionalableitung des Funktionals $F(\phi)$ an der Stelle \vec{x} ist. Durch Vergleich von Gl.(2.11) und (2.9) erkennen wir, dass sich die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auch folgendermaßen schreiben lassen als

$$\dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta \Phi} = \{\pi, H\}_{PK} \quad \dot{\Phi} = \frac{\delta H}{\delta \pi} = \{\Phi, H\}_{PK} \quad (2.12)$$

unter Verwendung der Poisson-Klammern, welche für zwei Funktionale $F(\Phi, \pi)$ und $G(\Phi, \pi)$ definiert sind als

$$\{F, G\}_{PK} = \int d^3 \vec{x} \left(\frac{\partial F}{\partial \Phi(x)} \frac{\partial G}{\partial \pi(x)} - \frac{\partial F}{\partial \pi(x)} \frac{\partial G}{\partial \Phi(x)} \right). \quad (2.13)$$

Insbesondere ist leicht zu zeigen, dass die Poisson-Klammern speziell für Felder und kanonisch konjugierte Impulse

$$\{\Phi(t, \vec{x}), \Phi(t, \vec{y})\}_{PK} = 0, \quad \{\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})\}_{PK} = 0, \quad \{\Phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})\}_{PK} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.14)$$

lauten. Zur Anwendung der hergeleiteten Euler-Lagrange- und Hamiltonschen Bewegungsgleichungen werden wir im Folgenden die Bewegungsgleichungen zweier verschiedener zunächst klassischer Felder untersuchen.

2.1.2 Klassische skalare Felder - die Klein-Gordon-Gleichung

Mit der hergeleiteten Euler-Lagrange-Gleichung (2.4) sind wir alsdann in der Lage, aus der Lagrange-Dichte der Klein-Gordon-Gleichung für reelle Felder $\Phi(x)$

$$\mathcal{L}_{KG}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi(x)) (\partial^\mu \Phi(x)) - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2(x), \quad (2.15)$$

welche neutrale Teilchen mit Spin 0 und Masse m beschreibt, die relativistische Bewegungsgleichung reeller Skalarfelder zu berechnen.

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \Phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\partial_\mu \Phi g^{\mu\sigma} \partial_\sigma \Phi)}{\partial(\partial_\nu \Phi)} + m^2 \Phi \\ &= \frac{1}{2} (g^\nu_\mu g^{\mu\sigma} \partial_\sigma \Phi + \partial_\mu \Phi g^{\mu\nu} g_\sigma^\nu) + m^2 \Phi \end{aligned}$$

Werten wir noch die metrischen Tensoren aus und benennen den Index ν in μ um, so erhalten wir die folgende Bewegungsgleichung:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi(x) = (\square + m^2) \Phi(x) = 0 \quad (2.16)$$

Dies ist die bekannte Klein-Gordon-Gleichung (für klassische Felder). Es sei angemerkt, dass sie auch heuristisch hergeleitet werden kann, indem man die relativistische Energie-Impulsbeziehung verwendet. Mit dem daraus folgenden (in \hat{E} und \hat{p} quadratischen) Ansatz $\hat{H}^2 = \hat{p}^2 + m^2$ und der Beziehung $\hat{p}^0 = \hat{E} = i\partial_t$ erhält man sofort die obige Klein-Gordon-Gleichung.

Die Hamilton-Funktion für skalare Felder berechnet sich unter Verwendung von Gl.(2.6) zu

$$\begin{aligned} H(t) &= \int d^3\vec{x} \left(\pi^2 - \frac{1}{2} \partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right) \\ &= \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left(\pi^2 + (\vec{\nabla} \Phi)^2 + m^2 \Phi^2 \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Wobei für das kanonisch konjugiert Feld $\pi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Phi} = \dot{\Phi}$ gilt und wir der Übersichtlichkeit halber die x -Abhängigkeiten der Felder $\Phi(x)$ und der kanonisch konjugierten Felder $\pi(x)$ nicht mehr ausgeschrieben haben.

Möchte man diese Theorie auf Teilchen erweitern, die Ladung tragen, so muss man komplexe Felder $\Phi \neq \Phi^*$ zulassen. Die Lagrange-Dichte, die natürlich reell sein muss, kann dann folgendermaßen gewählt werden:

$$\mathcal{L}_{KG, \text{geladen}} = \partial^\mu \Phi^* \partial_\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \quad (2.18)$$

Löst man die daraus folgende Bewegungsgleichung, so wird man zwangsläufig auf ein Dublett von Teilchen und Anti-Teilchen geführt. Aber das soll an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden.

2.1.3 Klassische massenbehaftete Vektorfelder - die Proca-Gleichung

Eine Lagrange-Dichte für massive Vektorfelder, welche Teilchen mit Spin 1 und Masse m beschreibt, erhalten wir, indem wir zu der Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes (welches masselose Spin-1-Teilchen beschreibt) einen zusätzlichen Massenterm in Analogie zur Lagrange-Dichte der Klein-Gordon-Gleichung addieren.

$$\mathcal{L}_{Proca} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu \quad (2.19)$$

Dabei beschreibt A^μ ein reelles und damit neutrales Spin-1-Feld, j^μ ist ein äußerer Strom und $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ der Feldstärketensor. Die zu dieser Lagrange-Dichte gehörende Euler-Lagrange-Gleichung

(2.4) berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\sigma} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\sigma)} = \frac{\partial (\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu)}{\partial A_\sigma} - \frac{\partial (j_\mu A^\mu)}{\partial A_\sigma} + \frac{1}{4} \partial_\rho \frac{\partial (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}{\partial (\partial_\rho A_\sigma)} \\
 &= \frac{1}{2} m^2 \frac{\partial (A_\mu g^{\mu\nu} A_\nu)}{\partial A_\sigma} - j_\mu g^{\mu\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial A_\sigma} + \frac{1}{4} \partial_\rho \frac{\partial (F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\rho A_\sigma)} \\
 &= \frac{1}{2} m^2 (g^\sigma{}_\mu g^{\mu\nu} A_\nu + A_\mu g^{\mu\nu} g_\nu{}^\sigma) - j_\mu g^{\mu\nu} g_\nu{}^\sigma + \frac{1}{4} \partial_\rho \left[(g^\rho{}_\mu g_\nu{}^\sigma - g^\rho{}_\nu g_\mu{}^\sigma) g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} + \right. \\
 &\quad \left. + F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (g^\rho{}_\alpha g_\beta{}^\sigma - g^\rho{}_\beta g_\alpha{}^\sigma) \right] \\
 &= \frac{m^2}{2} (2A^\sigma) - j^\sigma + \frac{1}{4} \partial_\rho \left[(g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} - g^{\rho\beta} g^{\sigma\alpha}) F_{\alpha\beta} + F_{\mu\nu} (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu}) \right],
 \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass für die Ableitung der Vektorfeldkomponente A_μ nach der Vektorfeldkomponente A_ν gilt $\partial A_\mu / \partial A_\nu = g^\nu{}_\mu$, für die Ableitung der Komponente der Ableitung der Vektorfeldkomponente $\partial_\nu A_\mu$ nach der Komponente der Ableitung der Vektorfeldkomponente $\partial_\rho A_\sigma$ gilt $\partial(\partial_\nu A_\mu) / \partial(\partial_\rho A_\sigma) = g^\nu{}_\rho g^\sigma{}_\mu$ und für die metrischen Tensoren $g^\mu{}_\nu = g_\nu{}^\mu$ ist. Fassen wir schließlich die metrischen Tensoren im letzten Term zusammen und benennen die Indizes ρ in μ und σ in ν um, so erhalten wir die Bewegungsgleichung des massiven Spin-1-Vektorfeldes A^ν :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) + m^2 A^\nu = j^\nu \quad (2.20)$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt die bekannte und oben erwähnte Definition des Feldstärketensors eingesetzt. Die errechnete Feldgleichung (2.20) ist bekannt unter dem Namen Proca-Gleichung. Um die Bewegungsgleichung noch ein wenig umzuformen, bilden wir die Vier-Divergenz der Proca-Gleichung (2.20). Die ersten beiden Terme heben sich gegenseitig weg und es bleibt für nicht verschwindende Massen $m \neq 0$:

$$\partial_\nu A^\nu = \frac{1}{m^2} \partial_\nu j^\nu. \quad (2.21)$$

Für die folgenden Betrachtungen nehmen wir an, dass entweder die Kopplung an externe Ströme j^ν vernachlässigbar ist oder der Strom der Quelle erhalten ist: $\partial_\nu j^\nu = 0$. Damit vereinfacht sich die vorige Bedingung zu

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (2.22)$$

Das bedeutet, dass wir im Fall der Proca-Gleichung zwangsläufig immer eine Lorentz-Eichbedingung vorliegen haben und keine Eichfreiheit mehr existiert. In der Tat ist aufgrund der Eichinvarianz von $F^{\mu\nu}$ zu erkennen, dass der Massenterm in der Proca-Gleichung die Eichinvarianz explizit bricht. Gleichzeitig stellt Gl.(2.22) eine Bedingung an die vier Komponenten von A^ν , so dass nur drei unabhängige Komponenten existieren. Diese Erkenntnis wird später noch wichtig werden. Setzen wir die Bedingung (2.22) in die Proca-Gleichung (2.20) ein, so vereinfacht sich diese zu

$$(\square + m^2) A^\nu = 0 \quad (2.23)$$

Jede Komponente des 4-Vektors A erfüllt demnach für sich die Klein-Gordon-Gleichung und genügt somit der relativistischen Energie-Impuls-Erhaltung. Es ist aber unbedingt zu beachten, dass die Komponenten von A auch die Nebenbedingung (2.22) erfüllen müssen!

Um die Hamiltonfunktion zur Proca-Gleichung nach (2.6) zu berechnen, benötigen wir zunächst den kanonisch konjugierten Impuls, welcher natürlich genau wie A^μ ein 4-Vektor ist.

$$\begin{aligned}\pi^\sigma &= \frac{\partial \mathcal{L}_{Proca}}{\partial(\partial_0 A_\sigma)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\sigma)} \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right] \\ &= -\frac{1}{4} [(g_\mu^0 g_\nu^\sigma - g_\mu^\sigma g_\nu^0) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) g^{\mu\rho} g^{\nu\tau} (g_\rho^0 g_\tau^\sigma - g_\rho^\sigma g_\tau^0)] \\ &= -F^{0\sigma}\end{aligned}\tag{2.24}$$

Daraus folgt $\pi^0 = 0$ und $\pi^i = E^i$. Es existiert zu A^0 also kein kanonisch konjugierter Impuls und damit auch für die spätere Quantisierung keine kanonische Kommutationsrelation. Dies ist allerdings nicht weiter problematisch, da wir bereits gesehen haben, dass A^μ nur drei unabhängige Komponenten besitzt. Das heißt, wir können A^0 bei bekanntem \vec{A} und \vec{E} aus der Proca-Gleichung (2.20)² bestimmen:

$$A^0 = -\frac{1}{m^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\tag{2.25}$$

Die unabhängigen dynamischen Variablen der Theorie sind damit \vec{A} und $\vec{\pi} = \vec{E}$ und die Hamiltonfunktion berechnet sich demnach zu

$$\begin{aligned}H_{Proca} &= \int d^3\vec{x} \left(\pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L}_{Proca} \right) = \int d^3\vec{x} \left(-F_{0\mu} \dot{A}^\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right) \\ &= \int d^3\vec{x} \left[-\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}} - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{1}{2} m^2 (A_0^2 - \vec{A}^2) \right] \\ &\equiv \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left[\vec{E}^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + m^2 \vec{A}^2 + \frac{1}{m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 \right]\end{aligned}\tag{2.26}$$

Hierbei benutzten wir (2.25), die Matrixdarstellung des Feldstärketensors, sowie den Zusammenhang³ zwischen \vec{E} , \vec{B} und A^μ .

2.2 Kanonische Feldquantisierung

Wie wir im vorausgehenden Abschnitt gesehen haben, übernehmen in der Feldtheorie die Felder $\Phi(x)$ die Rolle, welche in der Theorie diskreter Massenpunkte die Koordinaten inne hatten. Außerdem führten wir auch einen kanonisch konjugierten Impuls $\pi(x)$ ein. Um nun von den abgeleiteten Feldtheorien zur Quantenfeldtheorie zu gelangen, gehen wir analog zu dem Übergang von klassischer Punktmechanik zur Quantenmechanik vor. Zunächst quantisieren wir unsere dynamischen Variablen, d.h. wir machen aus den beiden Größen $\Phi(x)$ und $\pi(x)$ Operatoren.

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\longrightarrow \hat{\Phi}(x) \\ \pi(x) &\longrightarrow \hat{\pi}(x)\end{aligned}$$

²Beachte, dass wir die Kopplung an äußere Ströme vernachlässigen: $j^\mu = 0$.

³Siehe verwendete Konventionen und Notationen.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass es sich bei diesen Operatoren um Heisenberg-Operatoren handelt, da sie aufgrund der relativistischen Formulierung eine Zeitabhängigkeit besitzen.

Der nächste Schritt der Quantisierung ist eine Einführung von gleichzeitigen⁴ Kommutationsrelationen⁵ zwischen diesen beiden Operatoren.

$$\left[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y}) \right] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.27)$$

$$\left[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Phi}(t, \vec{y}) \right] = [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = 0 \quad (2.28)$$

Diese Relationen sind wiederum in völliger Analogie zur Quantenmechanik gewählt: $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$ und $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$. Selbstverständlich wurde bei diesem Übergang aus dem Kronecker-Delta eine Dirac-Delta-Funktion. Vergleichen wir die Kommutationsrelationen zwischen $\hat{\Phi}$ und $\hat{\pi}$ mit den Poissonklammern für Φ und π (siehe Gl.(2.14)), so erkennen wir ein „Korrespondenzprinzip“ bei der Quantisierung.

$$\{A, B\}_{PK} \longrightarrow \frac{1}{i} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (2.29)$$

Die Poisson-Klammern werden durch den Kommutator ersetzt. Dieses Korrespondenzprinzip können wir zusammen mit Gl.(2.13) verwenden, um die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für Quantenfelder zu erhalten. Dabei ist zu beachten, dass die Hamilton-Dichte \mathcal{H} eine Funktion der Felder $\Phi(x)$ und $\pi(x)$ ist und damit auch operatorwertig wird.

$$\dot{\hat{\pi}} = -\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \hat{\Phi}} + \vec{\nabla} \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial(\vec{\nabla} \hat{\Phi})} \equiv -i [\hat{\pi}, \hat{H}], \quad \dot{\hat{\Phi}} = \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \hat{\pi}} - \vec{\nabla} \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial(\vec{\nabla} \hat{\pi})} \equiv -i [\hat{\Phi}, \hat{H}] \quad (2.30)$$

Wir erkennen, dass diese Gleichungen den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für zeitabhängige Heisenberg-Operatoren entsprechen. Offensichtlich erhalten wir mit unseren Annahmen recht schlüssige Zusammenhänge. Damit haben wir alle allgemeinen Vorschriften zum Übergang von einer klassischen Feldtheorie zur Quantenfeldtheorie zusammengestellt und können jetzt das Klein-Gordon- und Proca-Feld quantisieren.

2.2.1 Quantisierung und Lösung der Klein-Gordon-Felder

Um die klassische Theorie für Klein-Gordon-Felder zu quantisieren, ersetzen wir, wie im vorigen Abschnitt bereits besprochen, die dynamischen Variablen $\Phi(x)$ und $\pi(x)$ durch Operatoren, welche den obigen Kommutationsrelationen genügen. Anschließend bestimmen wir die Eigenwerte und -vektoren des Hamiltonoperators, um die Felder zu finden, welche die Klein-Gordon-Gleichung lösen. Wir werden sehen, dass uns die bekannten Lösungen des harmonischen Oszillators als Analogon helfen können. Zunächst sollten wir aber prüfen, ob die von uns aufgestellten „Regeln“ quantisierten Felder⁶ tatsächlich

⁴Die korrekt kovariante Verallgemeinerung der Kommutationsrelationen liefert sog. Propagatoren. Deren Ableitung ist nicht Teil dieser Arbeit, kann aber in allen typischen Büchern zur Quantenfeldtheorie nachgelesen werden.

⁵Später (im Abschnitt über Fock-Raum-Zustände) werden wir sehen, dass diese Wahl nur im Fall von Bosonen zutrifft. Möchten wir Fermionen beschreiben, müssen wir Antikommutationsrelationen einführen. Da aber im Folgenden nur Bosonen mit entweder Spin 0 oder Spin 1 betrachtet werden, genügen uns die Kommutationsrelationen.

⁶, welche wir im Folgenden als Feldoperatoren bezeichnen werden.

noch immer die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen. Dazu gehen wir von der quantisierten Hamilton-Funktion⁷

$$\hat{H} = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left(\hat{\pi}^2 + (\vec{\nabla}\hat{\Phi})^2 + m^2\hat{\Phi}^2 \right) \quad (2.31)$$

aus. Mit den Kommutationrelationen (2.27) und (2.28) berechnen sich die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (2.30) zu:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Phi}}(x) &= -i \left[\hat{\Phi}(x), \hat{H} \right] = -i \frac{1}{2} \int d^3\vec{y} \left[\hat{\Phi}(x), \hat{\pi}^2(y) \right] \\ &= -i \frac{1}{2} \int d^3\vec{y} \left(\hat{\pi}(y) \left[\hat{\Phi}(x), \hat{\pi}(y) \right] + \left[\hat{\Phi}(x), \hat{\pi}(y) \right] \hat{\pi}(y) \right) = \hat{\pi}(x) \\ \dot{\hat{\pi}}(x) &= -i \frac{1}{2} \int d^3\vec{y} \left(\left[\hat{\pi}(x), (\vec{\nabla}_{\vec{y}}\hat{\Phi}(y))^2 \right] + m^2 \left[\hat{\pi}(x), \hat{\Phi}^2(y) \right] \right) \\ &= -i \frac{1}{2} \int d^3\vec{y} \left(\vec{\nabla}_{\vec{y}}\hat{\Phi}(y) \vec{\nabla}_{\vec{y}} \left[\hat{\pi}(x), \hat{\Phi}(y) \right] + \vec{\nabla}_{\vec{y}} \left[\hat{\pi}(x), \hat{\Phi}(y) \right] \vec{\nabla}_{\vec{y}}\hat{\Phi}(y) + \right. \\ &\quad \left. + m^2\hat{\Phi}(y) \left[\hat{\pi}(x), \hat{\Phi}(y) \right] + m^2 \left[\hat{\pi}(x), \hat{\Phi}(y) \right] \hat{\Phi}(y) \right) \\ &= -i \frac{1}{2} \int d^3\vec{y} \left[\vec{\nabla}_{\vec{y}}\hat{\Phi}(y) \left(-i\vec{\nabla}_{\vec{y}}\delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{x}) \right) + \left(-i\vec{\nabla}_{\vec{y}}\delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{x}) \right) \vec{\nabla}_{\vec{y}}\hat{\Phi}(y) \right] - m^2\hat{\Phi}(x) \\ &= \left(\vec{\nabla}^2 - m^2 \right) \hat{\Phi}(x) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dabei ist zu beachten, dass $x^0 = y^0 = t$ und $[\hat{\Phi}, \hat{\pi}] = -[\hat{\pi}, \hat{\Phi}]$. Zwischen der vorletzten und letzten Zeile wurde partiell integriert und ausgenutzt, dass der Gradient der Felder auf der Oberfläche des \mathbb{R}^3 ausreichend schnell gegen Null geht. Leitet man nun Gl.(2.32) ein weiteres Mal nach der Zeit ab und setzt Gl.(2.33) ein, so erhält man die Klein-Gordon-Gleichung.

$$\ddot{\hat{\Phi}}(x) = (\Delta - m^2) \hat{\Phi}(x) \quad (2.34)$$

Wir sehen, dass auch die Feldoperatoren die ursprüngliche Klein-Gordon-Gleichung erfüllen. Dies muss (laut [2]) unbedingt immer überprüft werden, da die quantisierten Felder (Feldoperatoren) nicht notwendigerweise dieselben Bewegungsgleichungen wie die klassischen Felder erfüllen.

Um die Bewegungsgleichung für skalare Teilchen nun zu lösen, halten wir uns an das Vorgehen wie es z.B. auch in [2] zu finden ist. Zunächst entwickeln wir den Feldoperator $\hat{\Phi}(\vec{x}, t)$ nach ebenen Wellen⁸.

$$\hat{\Phi}(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{p} N_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}(t) \quad (2.35)$$

Dabei sind die $\hat{a}_{\vec{p}}$ zeitabhängige operatorwertige Koeffizienten und N_p eine Normierungskonstante, welche wir später noch genauer festlegen werden. Dieser Ansatz erfüllt die Bedingung unendlich vieler

⁷, welche wir im Folgenden immer als Hamiltonoperator bezeichnen werden.

⁸Analog verwendet man bei Lösung der klassischen Klein-Gordon-Gleichung häufig den Ansatz ebener Wellen.

Freiheitsgrade unseres Feldes, indem wir annehmen, dass jede Fourier-Mode des (freien) Feldes einem Teilchen bzw. einer ebenen Welle entspricht. Setzen wir diesen Ansatz in die Klein-Gordon-Gleichung (2.34) ein, so erhalten wir eine Differentialgleichung zur Bestimmung von $\hat{a}_{\vec{p}}(t)$:

$$\ddot{\hat{a}}_{\vec{p}}(t) = -(\vec{p}^2 + m^2) \hat{a}_{\vec{p}}(t) \quad (2.36)$$

Diese Gleichung entspricht der Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Frequenz $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Ganz offensichtlich ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch

$$\hat{a}_{\vec{p}}^{allg.Lsg}(t) = \hat{a}_{\vec{p}}^{(1)} e^{-i\omega_p t} + \hat{a}_{\vec{p}}^{(2)} e^{+i\omega_p t} \quad (2.37)$$

mit den zeitunabhängigen Operatoren $\hat{a}_{\vec{p}}^{(1)}$ und $\hat{a}_{\vec{p}}^{(2)}$ als „Koeffizienten“ und $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = E_p$, gegeben. Wir haben dabei erkannt, dass es sich bei ω_p um die relativistische Energie-Impuls-Beziehung handelt und $\omega_p = E_p$ sein muss. Bei der relativistischen Betrachtung zu Beginn sind wir von reellen Feldern ausgegangen, d.h. $\Phi = \Phi^*$. Übertragen wir dies auf unsere Feldoperatoren, müssen diese hermitesch sein: $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}^\dagger$. Um diese Bedingung zu erfüllen, gilt für die beiden zeitunabhängigen Operatoren $(\hat{a}_{\vec{p}}^{(1)})^\dagger = \hat{a}_{-\vec{p}}^{(1)} \equiv \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$. Damit erhalten wir für die Feldoperatoren

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(x) &= \int d^3\vec{p} N_p \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - E_p t)} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - E_p t)} \right) = \int d^3\vec{p} N_p \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right) \\ &= \int d^3\vec{p} N_p e^{-ip\cdot x} \left(\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(x) &= \dot{\hat{\Phi}}(x) = \int d^3\vec{p} N_p (-iE_p) \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right) \\ &= \int d^3\vec{p} N_p e^{-ip\cdot x} \left(\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (2.39)$$

wobei wir zur Bestimmung des kanonisch konjugierten Impulses Gl. (2.32) verwendet haben. In dem jeweils letzten Schritt nutzen wir aus, dass die Integration über \vec{p} von $(-\infty)^3$ bis $(+\infty)^3$ geht und wir deshalb \vec{p} in $-\vec{p}$ umbenennen dürfen. Nun sollen die beiden Feldoperatoren $\hat{\Phi}$ und $\hat{\pi}$ aber auch die Kommutationsrelationen (2.27) und (2.28) erfüllen. Aus dieser Bedingung lässt sich die Normierungskonstante N_p bestimmen. Erinnern wir uns zunächst noch einmal an die Lösung des harmonischen Oszillators mittels Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (\hat{a}^\dagger und \hat{a}) in der Quantenmechanik. Dort ließen sich Orts- und kanonisch konjugierter Impulsoperator als eine Linearkombination dieser Stufenoperatoren ausdrücken: $\hat{q} = 1/\sqrt{2\omega}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ und $\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$ mit der Kommutationsrelation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Vergleichen wir diese Gleichungen mit (2.38) und (2.39), liegt die Vermutung sehr nahe, dass unsere Operatoren $\hat{a}_{\vec{p}}$ und $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ ebenso Stufenoperatoren sein könnten oder zumindest die für Stufenoperatoren typischen Kommutationsrelationen erfüllen:

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.40)$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = 0 \quad (2.41)$$

Um diese Annahme nachzuprüfen, berechnen wir den gleichzeitigen (d.h. $x^0 = y^0 = t$) Kommutator unserer Feldoperatoren

$$\begin{aligned} \left[\hat{\Phi}(x), \hat{\pi}(y) \right] &= \int d^3\vec{p} \int d^3\vec{p}' N_p N_{p'} (-iE_{p'}) \left([\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] e^{-i(p \cdot x + p' \cdot y)} - [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] e^{-i(p \cdot x - p' \cdot y)} + \right. \\ &\quad \left. [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}] e^{i(p \cdot x - p' \cdot y)} - [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] e^{i(p \cdot x + p' \cdot y)} \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Setzen wir anschließend noch unsere vermuteten Kommutationsrelationen zwischen den vermeintlichen Stufenoperatoren (2.40) und (2.41) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \left[\hat{\Phi}(x), \hat{\pi}(y) \right] &= \int d^3\vec{p} \int d^3\vec{p}' N_p N_{p'} iE_{p'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \left(e^{-i(p \cdot x - p' \cdot y)} + e^{i(p \cdot x - p' \cdot y)} \right) \\ &= i \int d^3\vec{p} N_p^2 E_p \left(e^{ip \cdot (x-y)} + e^{-ip \cdot (x-y)} \right) \\ &= i \int d^3\vec{p} N_p^2 E_p 2e^{ip \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt ausgenutzt, dass die Integration über p von $-\infty$ nach $+\infty$ geht und wir deshalb im zweiten Term die Variable p in $-p$ umbenennen können. Setzen wir die Normierungskonstante

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}, \quad (2.44)$$

erhalten wir das gewünschte Ergebnis (vergleiche (2.27))

$$\left[\hat{\Phi}(x), \hat{\pi}(y) \right] = i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x-y)} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.45)$$

Ganz analog kann nun auch die Kommutationsrelation (2.28) nachgewiesen werden. Damit sind (2.38) und (2.39) mit der Normierungskonstante (2.44) die gesuchten Feldoperatoren, welche die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen und damit skalare Spin-0-Teilchen beschreiben. Die auftretenden „Koeffizienten“ $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ und $\hat{a}_{\vec{p}}$ müssen dabei die Kommutationsrelationen (2.40) und (2.41) erfüllen. Um schließlich noch zu zeigen, dass es sich bei $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ und $\hat{a}_{\vec{p}}$ tatsächlich um Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren handelt, wollen wir zunächst den Hamiltonoperator (2.31) durch diese beiden Operatoren ausdrücken.

Dazu setzen wir (2.38) und (2.39) in den Hamiltonoperator ein.

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left(\hat{\pi}^2 + (\vec{\nabla}\hat{\Phi})^2 + m^2\hat{\Phi}^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \int \frac{d^3\vec{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{-i(p+p')\cdot x} \left[-E_p E_{p'} \left(\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \right) \left(\hat{a}_{\vec{p}'} - \hat{a}_{-\vec{p}'}^\dagger \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (-\vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2) \left(\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \right) \left(\hat{a}_{\vec{p}'} + \hat{a}_{-\vec{p}'}^\dagger \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \iint \frac{d^3\vec{p} d^3(-\vec{p})}{\sqrt{4E_p E_{-p}}} \left[-E_p E_{-p} \left(\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \right) \left(\hat{a}_{-\vec{p}} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \right) + (\vec{p} \cdot \vec{p} + m^2) \left(\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \right) \left(\hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \right) \right] \\
 &= \int d^3\vec{p} \left[\frac{E_p}{4} \left(\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{p}} \right) \right] \\
 &= \int d^3\vec{p} E_p \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] \right) = \int d^3\vec{p} E_p \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \right) \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

Wir haben dabei von der zweiten auf die dritte Zeile $\int d^3\vec{x} 1/(2\pi)^2 \exp\{-i(p+p')\} = \delta(\vec{p}+\vec{p}')$ eingesetzt und von der dritten auf die vierte Zeile ausgenutzt, dass wir aufgrund der symmetrischen Integrationsgrenzen $(-\infty$ und $+\infty)$ $-\vec{p}$ durch \vec{p} ersetzen dürfen und $\vec{p}^2 + m^2 = E_p^2$ ist. In der letzten Zeile benutzten wir schließlich noch die Kommutationsrelation (2.40). Gl.(2.46) zeigt durch Vergleich mit dem Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators aus der Quantenmechanik $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)$ sofort auf, dass es sich bei unseren Operatoren $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ und $\hat{a}_{\vec{p}}$ tatsächlich ebenfalls um Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren handelt. Explizites Nachprüfen findet statt, indem man wie in der Quantenmechanik vorgeht; d.h. den Besetzungszahl(dichten)-Operator $\hat{n}_{\vec{p}} = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$ einführt, ausnutzt, dass \hat{H} und $\hat{n}_{\vec{p}}$ ein gemeinsames System von Eigenzuständen besitzen und Stufenoperatoren und Besetzungszahl(dichten)-Operator unter Benutzung von Kommutatoren dieser beiden Operatoren auf Eigenzustände $|n_{\vec{p}}\rangle$ wirken lässt. Betrachten wir den Hamiltonoperator noch etwas genauer, so stellen wir fest, dass der letzte Term in (2.46) proportional zu $\delta(0)$ ist, das heißt, einer unendlichen Summe über die Energien E_p entspricht und damit unendlich groß ist. Zunächst ist diese Unendlichkeit etwas überraschend, doch wenn wir uns daran erinnern, dass wir uns das Feld als unendlich viele harmonische Oszillatoren vorgestellt haben, dann ist dieser Beitrag in der Gesamtenergie bzw. Hamiltonoperator völlig klar. Er entspricht der Summe über alle Nullpunktsenergien E_p der harmonischen Oszillatoren. Diese unendliche Vakuumsenergie ist eine von vielen in der Quantenfeldtheorie auftretenden Unendlichkeiten. Glücklicherweise stellt es aber keine größere Schwierigkeit dar, mit ihr umzugehen, denn physikalisch können wir schließlich nur Energiedifferenzen messen. Das heißt wir können diese Unendlichkeit einfach ignorieren bzw. einen renormierten Hamiltonoperatoren einführen, welche dem Ursprünglichen minus der unendlichen Vakuumsenergie E_0 entspricht: $\hat{H}_R = \hat{H} - E_0$. Diese Renormierung lässt sich durch die Einführung eines normalgeordneten Produkts (oft auch einfach Normalprodukt) automatisieren.

2.2.2 Normalordnung

Um in der Quantenfeldtheorie unendlich große Beträge in Feldoperatoren zu vermeiden bzw. sofort korrekt renormierte Operatoren zu erhalten, führt man das normalgeordneten Produkt ein. Dazu spaltet

man den Feldoperator zunächst in Anteile mit positiver und negativer Frequenz auf

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}^{(+)}(x) + \hat{\varphi}^{(-)}(x). \quad (2.47)$$

Der erste Teil enthält Vernichtungs- und der zweite Erzeugungsoperatoren (vergleiche z.B. Gl.(2.38)). Das normalgeordnete Produkt⁹ zweier Operatoren $\hat{\varphi}$ und $\hat{\chi}$ ist definiert durch:

$$: \hat{\varphi} \hat{\chi} := \hat{\varphi}^{(-)} \hat{\chi}^{(-)} + \hat{\varphi}^{(-)} \hat{\chi}^{(+)} + \hat{\chi}^{(-)} \hat{\varphi}^{(+)} + \hat{\varphi}^{(+)} \hat{\chi}^{(+)} \quad (2.48)$$

Das heißt, die Anteile negativer Frequenz werden immer links von den Anteilen positiver Frequenz geschrieben.

Wenden wir dieses Normalprodukt z.B. auf den Hamiltonoperator der Klein-Gordon-Gleichung an

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} : \left(\hat{\pi}^2 + (\vec{\nabla} \hat{\Phi})^2 + m^2 \hat{\Phi}^2 \right) : \\ &= \int d^3\vec{p} E_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p, \end{aligned} \quad (2.49)$$

dann stehen Erzeuger immer vor Vernichtern und der Kommutator in (2.46), welcher für die oben diskutierte Divergenz sorgt, tritt gar nicht erst auf.

2.2.3 Quantisierung und Lösung der Proca-Gleichung

Bei der Quantisierung der Proca-Gleichung gehen wir genauso vor wie im Fall der Klein-Gordon-Gleichung. Zunächst werden die dynamischen Variablen des Systems zu Operatoren $A^i(x) \rightarrow \hat{A}^i(x)$ und $\pi^i(x) = E^i(x) \rightarrow \hat{E}^i(x)$, welche die gleichzeitigen (d.h. $x^0 = y^0 = t$) Kommutationsrelationen

$$\left[\hat{A}^i(x), \hat{E}^j(y) \right] = -i \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.50)$$

$$\left[\hat{A}^i(x), \hat{A}^j(y) \right] = \left[\hat{E}^i(x), \hat{E}^j(y) \right] = 0 \quad (2.51)$$

erfüllen. Diese Relationen entsprechen den zu Beginn eingeführten Kommutationsrelationen bis auf den Unterschied δ_{ij} . Dieses Kronecker-Delta mussten wir zusätzlich einführen, um die Unabhängigkeit der drei räumlichen Komponenten der Feldoperatoren zu gewährleisten. Unsere nächste Aufgabe besteht darin zu zeigen, dass die Operatoren noch immer dieselbe Proca-Gleichung erfüllen. Dazu ziehen wir die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für Operatoren (2.30) und die quantisierte Hamilton-Funktion

$$\hat{H}_{Proca} = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left[\hat{E}^2 + (\vec{\nabla} \times \hat{A})^2 + m^2 \hat{A}^2 + \frac{1}{m^2} (\vec{\nabla} \cdot \hat{E})^2 \right] \quad (2.52)$$

zu Hilfe und erhalten unter Verwendung der obigen Kommutationsrelationen

$$\dot{\hat{A}}^i(x) = -i \left[\hat{A}^i(x), \hat{H}_{Proca}(y) \right] = -\hat{E}^i(x) + \frac{1}{m^2} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{E}(x) \right) \quad (2.53)$$

$$\dot{\hat{E}}(x) = -i \left[\hat{E}^i(x), \hat{H}_{Proca}(y) \right] = -\vec{\nabla}^2 \hat{A}(x) + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{A}(x) \right) + m^2 \hat{A}(x). \quad (2.54)$$

⁹Dargestellt durch einen Doppelpunkt vor und nach den Operatoren im Produkt.

Die Rechenschritte entsprechen dabei im Wesentlichen denen bei den Berechnungen zum Klein-Gordon-Feld und wurden deshalb nicht noch einmal ausführlich ausgeschrieben. Lösen wir dieses gekoppelte Differentialgleichungssystem, erhalten wir wiederum die alt bekannte Proca-Gleichung auch für unsere Feldoperatoren.

Zur Lösung der Proca-Gleichung gehen wir analog wie bei der Klein-Gordon-Gleichung vor und halten uns wiederum mit der Vorgehensweise an [2]. Die Entwicklung der (hermiteschen) Feldoperatoren lautet im Fall von Spin-1-Teilchen:

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2E_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^3 \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda} \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \epsilon^{\mu*}(\vec{k}, \lambda) e^{ik \cdot x} \right) \quad (2.55)$$

Genau wie im Fall der Spin-0-Teilchen entsprechen die $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$ Vernichtungs- und die $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ Erzeugungsoperatoren. Dies kann durch die Berechnung des kanonisch konjugierten Impulses mittels $\hat{\vec{E}}(x) = -\partial_0 \hat{\vec{A}} - \vec{\nabla} \hat{A}_0$ und weitere Vorgehensweise wie im Kapitel „Quantisierung der Klein-Gordon-Gleichung“ aufgezeigt werden.

Der einzige Unterschied zu dem Klein-Gordon-Feldoperator ist der eingeführte vierdimensionale Polarisationsvektor $\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)$, welchen wir aufgrund der Vierdimensionalität von A^μ benötigen. Für die allgemeine Lösung müssen wir natürlich über alle Einstellmöglichkeiten dieses Polarisationsvektors summieren. Da A^μ drei unabhängige Komponenten hat, existieren auch nur drei Einstellmöglichkeiten. Laut [2] kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit gefordert werden, dass die Polarisationsvektoren ein vierdimensionales Orthonormalsystem bilden; wobei:

$$\epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon^\mu(\vec{k}, \sigma) = g_{\lambda\sigma} \quad (2.56)$$

Ein weiterer wichtiger Punkt dieser Polarisationsvektoren ist, dass die drei räumlichen bzw. physikalischen Vektoren mathematisch nicht vollständig sind:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} k_\mu k_\nu \right). \quad (2.57)$$

Die explizite Herleitung dieser Relation ist z.B. in [2] auf den Seiten 178 bis 190 zu finden.

2.2.4 Fock-Raum und Teilchenzahl-Zustände

Wir wissen bereits aus der Quantenmechanik, wie wir eine vollständige Basis von Energie-Eigenzuständen zu dem harmonischen Oszillator konstruieren können. Da wir auch unsere Feldgleichungen bereits auf eine Oszillator-Algebra zurückgeführt haben, gehen wir nun ganz analog vor. Dazu definieren wir zunächst einen normierten Vakuumszustand $|0\rangle$ zur niedrigsten Energie, d.h. in dem keine Teilchen (bzw. Wellen) vorhanden sind.

$$\langle 0|0\rangle = 1 \qquad \hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p} \quad (2.58)$$

Des Weiteren konstruieren wir einen Ein-Teilchen-Zustand $|\vec{p}\rangle$, welcher durch Einwirkung eines Erzeugungsoperators auf den Vakuumszustand entsteht.

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \qquad \langle \vec{p}| = \langle 0| \hat{a}_{\vec{p}} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \quad (2.59)$$

Den Faktor $\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}}$ mussten wir an dieser Stelle einführen, um zu gewährleisten, dass \hat{A}^μ (vgl. Gl.(2.55)) die richtige Dimension besitzt. Benutzen wir den Kommutator für unsere Stufenoperatoren (2.40) und (2.58), finden wir für die Normierung der Zustände

$$\frac{(2\pi)^3}{V} \langle \vec{p} | \vec{k} \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger | 0 \rangle = \frac{(2\pi)^3}{V} \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] | 0 \rangle + \frac{(2\pi)^3}{V} \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} | 0 \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{k}) \frac{(2\pi)^3}{V}. \quad (2.60)$$

Genauso fahren wir fort, um höher besetzte Zustände zu konstruieren. Der n -Teilchen-Zustand würde dann wie folgt aussehen:

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{\frac{n}{2}} \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\vec{p}_n}^\dagger | 0 \rangle \quad (2.61)$$

Wir mussten hier den Vorfaktor $1/\sqrt{n!}$ setzen, um dieselbe Normierung wie für die Ein-Teilchen-Zustände zu erhalten. Betrachten wir jetzt den Zwei-Teilchen-Zustand etwas genauer und benutzen die Kommutationsrelation (2.41) für unsere Stufenoperatoren, so erhalten wir

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(2\pi)^3}{V} \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(2\pi)^3}{V} \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger | 0 \rangle = |\vec{p}_2, \vec{p}_1\rangle. \quad (2.62)$$

Wir können also Teilchen vertauschen, ohne dass dabei ein Vorzeichenwechsel auftritt. Das bedeutet wiederum, dass es sich um Bosonen handelt. Dieses Verhalten würde sich abrupt ändern, hätten wir anstatt der Kommutationsrelationen Antikommutationsrelationen aufgestellt. Dann würde bei dem Vertauschen je zweier Teilchen ein Minuszeichen auftauchen und unsere Teilchen somit Fermionen beschreiben. Genau genommen sind unsere obigen „Quantisierungs-Regeln“ unter Verwendung der Kommutationsrelationen also nur für Bosonen zutreffend.

3 Wechselwirkungen und S -Matrix

Nachdem wir zwei exakt lösbare, freie Feldgleichungen besprochen haben, wenden wir uns dem interessanteren Fall wechselwirkender Felder zu¹, um später auch Streuungen und Zerfälle zu studieren. Mathematisch binden wir in unsere Theorie eine Wechselwirkung ein, indem wir zu der freien Lagrange-Dichte \mathcal{L}_0 einen weiteren nichtlinearen (Wechselwirkungs-)Term \mathcal{L}_{int} hinzufügen.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad (3.1)$$

Dieser zusätzliche Term wird eine Kopplung verschiedener Teilchen bzw. Fourier-Moden, welche diese Teilchen beschreiben, hervorrufen. Dazu sollte er entweder aus höheren Potenzen eines Feldoperators bestehen (dies würde dann eine Selbstwechselwirkung oder eine Wechselwirkung zwischen gleichen Teilchen beschreiben) oder aus Produkten verschiedener Feldoperatoren (um eine Wechselwirkung zwischen verschiedenen Teilchen zu betrachten). Um die Kausalität aufrecht zu erhalten, sollten die Felder im Wechselwirkungsterm aber alle am selben Raumzeitpunkt lokalisiert sein. Der Wechselwirkungsterm enthält also zumindest bei den in dieser Arbeit betrachteten Wechselwirkungen keine Ableitungen von Feldern. Daher lautet der Wechselwirkungsterm der Hamilton-Funktion einfach

$$H_{int} = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}_{int} = - \int d^3\vec{x} \mathcal{L}_{int}. \quad (3.2)$$

Für die folgenden Rechnungen werden wir vom Heisenbergbild ins Wechselwirkungsbild, welches oft auch als Dirac-Bild bezeichnet wird, übergehen, da wir es bei Streuungen oder Zerfällen nicht nur mit zeitabhängigen Operatoren, sondern auch mit zeitabhängigen Zuständen zu tun haben werden.

3.1 Wechselwirkungsbild und Zeitentwicklungsoperator

Wir gehen davon aus, dass Heisenberg- sowie Wechselwirkungsbild bekannt sind und geben an dieser Stelle nur eine kurze Zusammenfassung. Nehmen wir an, dass sich der betrachtete Hamiltonoperator in zwei Teile aufspalten lässt:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \quad (3.3)$$

Dabei beschreibt \hat{H}_0 ein System freier und \hat{H}_{int} ein System wechselwirkender Felder. Der Zusammenhang zwischen Operatoren im Heisenbergbild $\hat{\phi}$ und solchen im Wechselwirkungsbild $\hat{\phi}_I$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_I &= e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \hat{\phi} e^{i\hat{H}(t-t_0)} e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \\ &\equiv \hat{U}(t, t_0) \hat{\phi}_H \hat{U}^\dagger(t, t_0), \end{aligned} \quad (3.4)$$

¹Auch in diesem Kapitel halte ich mich im Wesentlichen an die Bücher [1] und [2].

wobei wir den unitären Operator

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (3.5)$$

eingeführt haben. Er entspricht dem Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild. Außerdem nahmen wir in obiger Gleichung an, dass zum beliebig gewählten Zeitpunkt $t = t_0$ die Felder bzw. Zustände in beiden Bildern übereinstimmen. Durch Ableiten des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t, t_0)$ sehen wir, dass dieser die folgende Schrödinger-Gleichung erfüllen muss:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) &= e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \left(\hat{H} - \hat{H}_0 \right) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \left(\hat{H}_{int} \right) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \\ &= e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \left(\hat{H}_{int} \right) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \\ &\equiv \hat{H}_I \hat{U}(t, t_0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Um diese Bewegungsgleichung zu lösen, integrieren wir sie formal unter Ausnutzung der Anfangsbedingung $\hat{U}(t_0, t_0) = 1$ und setzen unter dem auftauchenden Integral iterativ die formale Lösung ein. Dadurch erhalten wir schließlich eine von-Neumann-Reihe, welche uns einen expliziten Ausdruck für den Zeitentwicklungsoperator liefert²:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I(t') \right] \quad (3.7)$$

wobei wir den sog. Zeitordnungsoperator \hat{T} eingeführt haben, welcher dafür sorgt, dass ein Produkt von Operatoren so angeordnet wird, dass die zu früheren Zeiten gehörenden Operatoren rechts von denen zu späteren Zeiten gehörenden stehen. Vor der Exponentialfunktion stehend induziert dieser Operator eine Taylorentwicklung der e -Funktion mit zeitgeordneten Produkten.

Bei der folgenden Behandlung von Wechselwirkungen werden wir immer im Wechselwirkungsbild arbeiten und schreiben deshalb im Weiteren die Indizes I an Operatoren und Zuständen nicht explizit aus.

3.2 Die Streu- bzw. S -Matrix

Wollen wir Zerfälle oder Streuungen berechnen, so interessieren wir uns für die Wahrscheinlichkeitsamplitude eines Übergangs von einem gewissen Anfangszustand in einen bestimmten Endzustand. Wir nehmen dazu an, dass die Felder der Teilchen lange vor und lange nach dem Moment der Wechselwirkung, welche zum Zeitpunkt t stattfinden soll, sich frei und unabhängig voneinander bewegen. Für eine Streuung von Teilchen im Zustand A in Teilchen in einem Zustand B können wir also einen Anfangszustand und einen Endzustand folgendermaßen definieren:

$$|\Phi_A\rangle_{in} = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{U}(t, -T) |\Phi_A\rangle \quad (3.8)$$

$$|\Phi_B\rangle_{out} = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{U}(t, T) |\Phi_B\rangle \quad (3.9)$$

²Siehe dazu z.B. [1], Seite 84f. oder [2], Seite 250 bis 252.

$|\Phi_A\rangle$ und $|\Phi_B\rangle$ sind wechselwirkungsfreie Zustände und genügen damit freien Bewegungsgleichungen. Die Zustände $|\Phi_A\rangle$ bzw. $|\Phi_B\rangle$ sind dabei durch die konkreten Impulse der Teilchen am Anfang bzw. Ende genau festgelegt. Berechnen wir den Überlapp zwischen Anfangs- und Endzustand, erhalten wir

$$\begin{aligned} {}_{out}\langle\Phi_B|\Phi_A\rangle_{in} &= \lim_{T\rightarrow\infty} \langle\Phi_B|\hat{U}^\dagger(t, T)\hat{U}(t, -T)|\Phi_A\rangle = \lim_{T\rightarrow\infty} \langle\Phi_B|\hat{U}^{-1}(t, T)\hat{U}(t, -T)|\Phi_A\rangle \\ &= \lim_{T\rightarrow\infty} \langle\Phi_B|\hat{U}(T, -T)|\Phi_A\rangle \equiv \langle\Phi_B|\hat{S}|\Phi_A\rangle \equiv S_{fi}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Wobei wir in der letzten Zeile ausgenutzt haben, dass $\hat{U}^\dagger(t, T) = \hat{U}^{-1}(t, T)$ ist und das S -Matrix-Element³ S_{fi} mit dem S -Operator

$$\hat{S} = \lim_{T\rightarrow\infty} \hat{U}(T, -T) = \hat{U}(\infty, -\infty) = \hat{T} \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{H}_{int}\right) \quad (3.11)$$

eingeführt haben. Kennen wir für eine bestimmte Streuung oder einen bestimmten Zerfall die S -Matrix-Elemente, sind wir in der Lage, daraus experimentell messbare Größen, wie Streuquerschnitte und Zerfallsbreiten zu berechnen. Im später folgenden Kapitel werden wir die Berechnung einer Zerfallsbreite aufzeigen.

3.3 Das Wicksche Theorem

Nachdem wir eine Reihenentwicklung des S -Operators abgeleitet haben, sind wir theoretisch in der Lage, die S -Matrix-Elemente bis zu beliebig hohen Ordnungen für jedes erdenkliche System mit bekanntem Wechselwirkungs-Hamiltonoperator zu berechnen. Allerdings wird man bei diesen Berechnungen vor das Problem gestellt, zeitgeordnete Produkte dieser Wechselwirkungs-Hamiltonoperatoren zu verschiedenen Zeiten auszuwerten. Um diese Rechnungen zu vereinfachen, stellten G.C.Wick und Dyson ein Theorem auf, welches wir im Folgenden ableiten wollen.

Wir betrachten zunächst das zeitgeordnete Produkt zweier Feldoperatoren $\hat{T}(\hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2))$ und nehmen an, dass $t_1 > t_2$ sei.

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)) &= \hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2) \\ &= \hat{\varphi}_A^{(+)}(x_1)\hat{\varphi}_B^{(+)}(x_2) + \hat{\varphi}_A^{(-)}(x_1)\hat{\varphi}_B^{(-)}(x_2) + \hat{\varphi}_A^{(-)}(x_1)\hat{\varphi}_B^{(+)}(x_2) + \hat{\varphi}_A^{(+)}(x_1)\hat{\varphi}_B^{(-)}(x_2), \end{aligned}$$

wobei wir die beiden Feldoperatoren wieder in einen Anteil positiver und negativer Frequenz aufgespalten haben. Als nächstes wollen wir dieses Ergebnis mit Hilfe des Normalproduktes schreiben. Da bis auf den letzten Term bereits alle Summanden normalgeordnet sind, können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)) &= : \hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2) : + \left[\hat{\varphi}_A^{(+)}(x_1), \hat{\varphi}_B^{(-)}(x_2) \right] \\ &= : \hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2) : + \langle 0 | \left[\hat{\varphi}_A^{(+)}(x_1), \hat{\varphi}_B^{(-)}(x_2) \right] | 0 \rangle \\ &= : \hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2) : + \langle 0 | \hat{\varphi}_A^{(+)}(x_1)\hat{\varphi}_B^{(-)}(x_2) | 0 \rangle \\ &= : \hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2) : + \langle 0 | \hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2) | 0 \rangle \\ &= : \hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2) : + \langle 0 | \hat{T}(\hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)) | 0 \rangle \end{aligned}$$

³Die Indizes stehen für final und initial.

Weiter haben wir dabei von der ersten zur zweiten Zeile ausgenutzt, dass der Kommutator der von uns betrachteten Feldoperatoren nicht operatorwertig ist⁴ und wir ihn deswegen mit seinem Vakuumerwartungswert gleichsetzen können. In den folgenden zwei Zeilen haben wir verwendet, dass $\hat{\varphi}^{(+)}|0\rangle = 0$ und $\langle 0|\hat{\varphi}^{(-)} = 0$ ist. Der letzte Schritt ist aufgrund unserer Annahme $t_1 > t_2$ zulässig. Wie wir aber leicht erkennen, ist dieser Zusammenhang aber auch für $t_2 > t_1$ gültig, da $: \hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2) : = : \hat{\varphi}_B(x_2)\hat{\varphi}_A(x_1) :$ ist und im zweiten Summand sowieso ein zeitgeordnetes Produkt steht. Da der Vakuumerwartungswert eines zeitgeordneten Produkts zweier Feldoperatoren in der Quantenfeldtheorie häufig auftaucht, führen wir eine weitere Definition bzw. abkürzende Schreibweise ein. Die sogenannte Kontraktion zweier Operatoren ist definiert als

$$\overline{\hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)} \equiv \langle 0|\hat{T}(\hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2))|0\rangle. \quad (3.12)$$

Unter Benutzung dieser Kontraktion lässt sich das obige Resultat für das zeitgeordnete Produkt zweier Operatoren auch schreiben als

$$\hat{T}(\hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)) = : \hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2) : + : \overline{\hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)} : \quad (3.13)$$

Dabei konnten wir auch die Kontraktion unter ein Normalprodukt schreiben, da es sich nur um eine komplexe Zahl handelt, auf welche die Normalordnung keinen Einfluss hat. Um das zeitgeordnete Produkt dreier Operatoren zu erhalten, könnten wir ganz analog vorgehen und würden schließlich folgendes Ergebnis erhalten:

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)\hat{\varphi}_C(x_3)) = & : \hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)\hat{\varphi}_C(x_3) : + : \overline{\hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)\hat{\varphi}_C(x_3)} : + \\ & + : \overline{\hat{\varphi}_A(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)}\hat{\varphi}_C(x_3) : + : \hat{\varphi}_A(x_1)\overline{\hat{\varphi}_B(x_2)\hat{\varphi}_C(x_3)} : \end{aligned} \quad (3.14)$$

Diese Umformung von zeitgeordneten Produkten in Normalprodukte und Kontraktionen lässt sich auf beliebige Produkte verallgemeinern. Dies gelang G.C.Wick und Dyson 1950/1951 zu beweisen und ist bekannt als Wicksches Theorem⁵:

Das zeitgeordnete Produkt einer Menge von Operatoren kann zerlegt werden in die Summe aller entsprechenden kontrahierten Normalprodukte. Dabei treten alle kombinatorisch möglichen Kontraktionen von Operatoren auf.

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{\varphi}_B(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)\dots\hat{\varphi}_M(x_m)) \\ = : \hat{\varphi}_B(x_1)\hat{\varphi}_B(x_2)\dots\hat{\varphi}_M(x_m) + \text{alle möglichen Kontraktionen} : \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dieses Theorem können wir verwenden, um den S -Operator in beliebiger Ordnung (der Taylorentwickelten e -Funktion) und damit die wichtigen S -Matrix-Elemente zu berechnen.

⁴Die allgemeinen Kommutatoren zu verschiedenen Zeiten entsprechen sogenannten Feynman-Propagatoren, welche nicht operatorwertig sind. Nachzulesen zum Beispiel in den Kapiteln 4.4 oder auch 5.5 von [2].

⁵Der induktive Beweis dieses Theorems findet sich zum Beispiel in [1] auf Seite 90.

4 Berechnung der Zerfallsbreite eines Zerfalls der Form $A \longrightarrow VP$

Da wir später den Zerfall eines Axialvektormesons¹ A in ein Vektormeson V und ein pseudoskalares Meson P ($A \longrightarrow VP$) betrachten werden, wollen wir an dieser Stelle die Zerfallsbreite für diesen allgemeinen Fall berechnen. Die zu einem solchen Zerfall gehörende Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte, welche den Zerfall eines neutralen Axialvektormesons in neutrale Zustände beschreibt, lässt sich schreiben als

$$\mathcal{L}_{int} = g\hat{A}\hat{V}\hat{P}. \quad (4.1)$$

Dabei ist g eine Kopplungskonstante und \hat{A} , \hat{V} und \hat{P} sind die jeweiligen Feldoperatoren der Mesonen A , V und P . Der Impuls des Axialvektormesons im Anfangszustand sei \vec{p} und die Impulse in den Endzuständen seien \vec{k}_1 des Vektormesons V und \vec{k}_2 des Pseudoskalarmesons P . Da wir es mit zwei Vektoren zu tun haben, benötigen wir auch Polarisationsvektoren. Wir ordnen dem Axialvektor die Polarisation $\epsilon_\mu(\vec{p}, \sigma)$ mit Spin σ und dem Vektormeson $\epsilon_\mu(\vec{k}_1, \lambda)$ mit Spin λ zu. Aus der Lagrange-Dichte ergibt sich der folgende Wechselwirkungs-Hamiltonoperator:

$$\hat{H}_{int} = - \int d^3\vec{x} \mathcal{L}_{int} = - \int d^3\vec{x} g\hat{A}\hat{V}\hat{P} \quad (4.2)$$

Die beiden massenbehafteten Axialvektor- und Vektormesonen A und V werden durch die allgemeine Lösung der Proca-Gleichung beschrieben. Der Übersichtlichkeit halber und zur Vereinfachung der späteren Berechnung des Normalprodukts teilen wir im Folgenden die Lösungen in die Anteile, proportional zur Frequenz (indiziert mit ⁽⁺⁾) und proportional zur negativen Frequenz (indiziert mit ⁽⁻⁾) auf.

$$\hat{A}(X) = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \sum_{\sigma} \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \epsilon_\mu(\vec{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} + \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \sum_{\sigma} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^\dagger \epsilon_\mu^*(\vec{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} \quad (4.3)$$

$$\equiv \hat{A}^{(+)} + \hat{A}^{(-)} \quad (4.4)$$

$$\hat{V}(X) = \int \frac{d^3\vec{k}_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}_1}}} \sum_{\lambda} \hat{b}_{\vec{k}_1\lambda} \epsilon_\mu(\vec{k}_1, \lambda) e^{-ik_1 \cdot x} + \int \frac{d^3\vec{k}_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}_1}}} \sum_{\lambda} \hat{b}_{\vec{k}_1\lambda}^\dagger \epsilon_\mu^*(\vec{k}_1, \lambda) e^{ik_1 \cdot x} \quad (4.5)$$

$$\equiv \hat{V}^{(+)} + \hat{V}^{(-)} \quad (4.6)$$

¹bzw. eines Pseudovektormesons. An der Rechnung verändert das nichts.

Das pseudoskalare Meson P mit Impuls \vec{k}_2 dagegen wird durch die allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung beschrieben:

$$\hat{P}(X) = \int \frac{d^3\vec{k}_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}_2}}} \hat{c}_{\vec{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} + \int \frac{d^3\vec{k}_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}_2}}} \hat{c}_{\vec{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \quad (4.7)$$

$$\equiv \hat{P}^{(+)} + \hat{P}^{(-)} \quad (4.8)$$

Bei einer kleinen Kopplung genügt es, den S -Operator (3.11) nur in erster Ordnung zu betrachten.

$$\hat{S}^{(1)} = -i \int d^4x \hat{T}(\mathcal{H}_{int}) \quad (4.9)$$

Wir vernachlässigen dabei den ersten Term der Taylorentwicklung, welcher proportional zu 1 ist, da dieser nur den Fall verschwindender Wechselwirkung beschreibt. Bei der Berechnung stoßen wir also auf das zeitgeordnete Produkt $\hat{T}(\mathcal{H}_{int})$. Mit Hilfe des Wickschen Theorems für drei Feldoperatoren (3.14) können wir dieses Produkt umformen und erhalten:

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{A}\hat{V}\hat{P}) &= : \hat{A}\hat{V}\hat{P} : + : \overline{\hat{A}\hat{V}\hat{P}} : + : \overline{\hat{A}\hat{V}\hat{P}} : + : \overline{\hat{A}\hat{V}\hat{P}} : \\ &= : \hat{A}\hat{V}\hat{P} : \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass sich die Operatoren verschiedener Felder vertauschen und innerhalb der Kontraktionen, welche Vakuumserwartungswerte darstellen, nicht abpaaren können und somit immer ein Vernichter auf einen Vakuumzustand wirkt (bzw. das adjungierte Analogon davon) - d.h. gleich Null ist. Bevor wir also zur Berechnung des S -Matrix-Elements kommen, wollen wir das normalgeordnete Produkt von $\hat{A}\hat{V}\hat{P}$ berechnen:

$$\begin{aligned} : \hat{A}\hat{V}\hat{P} : &= : [(\hat{A}^{(+)} + \hat{A}^{(-)})(\hat{V}^{(+)} + \hat{V}^{(-)})(\hat{P}^{(+)} + \hat{P}^{(-)})] : \\ &= : [\hat{A}^{(+)}\hat{V}^{(+)}\hat{P}^{(+)} + \hat{A}^{(+)}\hat{V}^{(+)}\hat{P}^{(-)} + \hat{A}^{(+)}\hat{V}^{(-)}\hat{P}^{(+)} + \hat{A}^{(+)}\hat{V}^{(-)}\hat{P}^{(-)} + \\ &\quad + \hat{A}^{(-)}\hat{V}^{(+)}\hat{P}^{(+)} + \hat{A}^{(-)}\hat{V}^{(+)}\hat{P}^{(-)} + \hat{A}^{(-)}\hat{V}^{(-)}\hat{P}^{(+)} + \hat{A}^{(-)}\hat{V}^{(-)}\hat{P}^{(-)}] : \\ &= \hat{A}^{(-)}\hat{V}^{(-)}\hat{P}^{(+)} + \hat{A}^{(-)}\hat{V}^{(-)}\hat{P}^{(-)} + \hat{A}^{(-)}\hat{P}^{(-)}\hat{V}^{(+)} + \hat{A}^{(-)}\hat{V}^{(+)}\hat{P}^{(+)} + \\ &\quad + \hat{V}^{(-)}\hat{P}^{(-)}\hat{A}^{(+)} + \hat{V}^{(-)}\hat{A}^{(+)}\hat{P}^{(+)} + \hat{P}^{(-)}\hat{A}^{(+)}\hat{V}^{(+)} + \hat{A}^{(+)}\hat{V}^{(+)}\hat{P}^{(+)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Damit ergibt sich in erster Ordnung für den S -Operator unseres Systems:

$$\begin{aligned} \hat{S}^{(1)} &= ig \int d^4x \left(\hat{A}^{(-)}\hat{V}^{(-)}\hat{P}^{(+)} + \hat{A}^{(-)}\hat{V}^{(-)}\hat{P}^{(-)} + \hat{A}^{(-)}\hat{P}^{(-)}\hat{V}^{(+)} + \hat{A}^{(-)}\hat{V}^{(+)}\hat{P}^{(+)} + \right. \\ &\quad \left. + \hat{V}^{(-)}\hat{P}^{(-)}\hat{A}^{(+)} + \hat{V}^{(-)}\hat{A}^{(+)}\hat{P}^{(+)} + \hat{P}^{(-)}\hat{A}^{(+)}\hat{V}^{(+)} + \hat{A}^{(+)}\hat{V}^{(+)}\hat{P}^{(+)} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Des Weiteren haben die für zu unserem Zerfall passenden Anfangs- und Endzustände die Form

$$\langle i | = \langle \vec{p} | = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \quad \text{und} \quad | f \rangle = |\vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = \frac{(2\pi)^3}{V} \hat{c}_{\vec{k}_2}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}_1\lambda}^\dagger | 0 \rangle. \quad (4.12)$$

Wollen wir das S -Matrix-Element $S_{fi} = \langle i | \hat{S} | f \rangle$, siehe Gl. (3.10), berechnen, erkennen wir, dass aus (4.10) nur der Term $\hat{A}^{(-)} \hat{V}^{(+)} \hat{P}^{(+)}$ einen nicht verschwindenden Beitrag leistet, da sich nur hier die Erzeuger und Vernichter genau abpaaren. Alle anderen Beiträge sind proportional zu einem Vernichter, der auf den Vakuumzustand wirkt (oder dem adjungierten Analogon dazu) - also gleich Null. Damit ergibt sich insgesamt für das S -Matrixelement in erster Ordnung:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= \langle f | \left(i \int dt \hat{H}_{int} \right) | i \rangle = ig \int d^4x \langle f | \hat{A}^{(-)} \hat{V}^{(+)} \hat{P}^{(+)} | i \rangle \\ &= ig \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{\frac{3}{2}} \int d^4x \sum_{s_1, s_2} \int \frac{d^3 \vec{q}_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_1}}} \int \frac{d^3 \vec{q}_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_2}}} \int \frac{d^3 \vec{q}_3}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_3}}} \epsilon_\mu^*(\vec{q}_1, s_1) e^{ip \cdot x} \times \\ &\quad \times \epsilon^\mu(\vec{q}_2, s_2) e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \hat{a}_{\vec{q}_1 s_1}^\dagger \hat{b}_{\vec{q}_2 s_2} \hat{c}_{\vec{q}_3} \hat{b}_{\vec{k}_1 \lambda}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}_2}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.13)$$

Den Vakuumerwartungswert können wir folgendermaßen weiter auswerten, da sich Erzeuger und Vernichter genau abpaaren müssen, um einen nicht verschwindenden Beitrag zum Vakuumerwartungswert zu leisten.

$$\langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \hat{a}_{\vec{q}_1 s_1}^\dagger \hat{b}_{\vec{q}_2 s_2} \hat{c}_{\vec{q}_3} \hat{b}_{\vec{k}_1 \lambda}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}_2}^\dagger | 0 \rangle = \delta(\vec{p} - \vec{q}_1) \delta_{\sigma s_1} \delta(\vec{q}_2 - \vec{k}_1) \delta_{\lambda s_2} \delta(\vec{q}_3 - \vec{k}_2) \quad (4.14)$$

Setzen wir dieses Ergebnis in das S -Matrix-Element ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= \frac{ig}{\sqrt{V^3}} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_{k_1} 2E_{k_2}}} \int d^4x \epsilon_\mu^*(\vec{p}, \sigma) \epsilon^\mu(\vec{k}_1, \lambda) e^{-i(k_1 + k_2 - p) \cdot x} \\ &= \frac{ig}{\sqrt{V^3}} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_{k_1} 2E_{k_2}}} \epsilon_\mu^*(\vec{p}, \sigma) \epsilon^\mu(\vec{k}_1, \lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls $A \rightarrow VP$ hängt mit dem Quadrat des Streumatrix-Elements zusammen. Dabei müssen wir bei dem Quadrieren der Polarisationsvektoren über Endzustände summieren (\sum_λ) und über Anfangszustände mitteln ($1/3 \sum_\sigma$), da uns keine festen Polarisationszustände in Anfangs- und/oder Endzuständen gegeben sind.

$$\begin{aligned} \left| \langle f | \hat{S}^{(1)} | i \rangle \right|^2 &= \frac{1}{V^3} \frac{|g|^2}{2E_p 2E_{k_1} 2E_{k_2}} \frac{1}{3} \sum_{\sigma \lambda} \left(\epsilon_\mu^*(\vec{p}, \sigma) \epsilon^\mu(\vec{k}_1, \lambda) \right) \left(\epsilon_\nu^*(\vec{p}, \sigma) \epsilon^\nu(\vec{k}_1, \lambda) \right) \times \\ &\quad \times (2\pi)^8 \left[\delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \right]^2 \\ &= \frac{1}{V^3} \frac{|g|^2}{2E_p 2E_{k_1} 2E_{k_2}} \frac{1}{3} \sum_{\sigma} \left(\epsilon_\mu^*(\vec{p}, \sigma) \epsilon_\nu^*(\vec{p}, \sigma) \right) \sum_{\lambda} \left(\epsilon^\mu(\vec{k}_1, \lambda) \epsilon^\nu(\vec{k}_1, \lambda) \right) \times \\ &\quad \times (2\pi)^8 \left[\delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \right]^2 \\ &= \frac{1}{3V^3} \frac{|g|^2}{2E_p 2E_{k_1} 2E_{k_2}} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_A^2} \right) \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k_1^\mu k_1^\nu}{m_V^2} \right) (2\pi)^8 \left[\delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \right]^2 \\ &= \frac{1}{3V^3} \frac{|g|^2}{2E_p 2E_{k_1} 2E_{k_2}} \left(g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m_A^2} g^{\mu\nu} - \frac{k_1^\mu k_1^\nu}{m_V^2} g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu k_1^\mu k_1^\nu}{m_A^2 m_V^2} \right) \times \\ &\quad \times (2\pi)^8 \left[\delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \right]^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Hier haben wir von der zweiten zur dritten Zeile die Relation (2.57) benutzt und die Ruhemassen des Axialvektormesons m_A und des Vektormesons m_V eingesetzt. Betrachten wir die einzelnen Terme in der runden Klammer zunächst getrennt: Das Produkt aus den metrischen Tensoren berechnen wir mittels der Matrixdarstellung zu

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4 \quad (4.17)$$

Benutzen wir die 4-Impuls-Erhaltung, können wir die beiden mittleren Terme wie folgt weiter auswerten:

$$-\frac{p_\mu p_\nu}{m_A^2} g^{\mu\nu} = -\frac{1}{m_A^2} p_\mu p^\mu = -\frac{1}{m_A^2} p^2 = -1 \quad (4.18)$$

$$-\frac{k_1^\mu k_1^\nu}{m_V^2} g_{\mu\nu} = -\frac{1}{m_V^2} k_1^\mu k_{1\mu} = -\frac{1}{m_V^2} k_1^2 = -1 \quad (4.19)$$

Schließlich lässt sich auch der letzte Term noch umformen in

$$\frac{p_\mu p_\nu k_1^\mu k_1^\nu}{m_A^2 m_V^2} = \frac{1}{m_A^2 m_V^2} k_1^\mu p_\mu k_1^\nu p_\nu = \frac{1}{m_A^2 m_V^2} (k_1 \cdot p)^2 \quad (4.20)$$

Betrachten wir unser quadriertes Matrixelement noch etwas genauer, sticht uns die quadrierte Delta-Funktion ins Auge. Mathematisch ergibt das keinen Sinn, aber wir können sie trotzdem sinnvoll interpretieren, indem wir eine der Delta-Funktionen wieder als Fourier-Entwicklung schreiben.

$$\begin{aligned} (2\pi)^8 \left[\delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \right]^2 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \int d^4x e^{i(p-k_1-k_2)\cdot x} \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \int d^3\vec{x} \int dt \\ &= (2\pi)^7 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) Vt \end{aligned} \quad (4.21)$$

Damit ergibt sich für das quadrierte S -Matrixelement:

$$\left| \langle f | \hat{S}^{(1)} | i \rangle \right|^2 = \frac{1}{3V^3} \frac{|g|^2}{2E_p 2E_{k_1} 2E_{k_2}} \left[2 + \frac{1}{m_A^2 m_V^2} (k_1 \cdot p)^2 \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) Vt \quad (4.22)$$

Da wir die Endimpulse nicht festlegen möchten, bzw. uns diese in den meisten Fällen nicht gegeben sind, integrieren noch über alle möglichen Ausgangsimpulse² \vec{k}_1 und \vec{k}_2 :

$$\begin{aligned} &\iint \left| \langle f | \hat{S}^{(1)} | i \rangle \right|^2 d^3\vec{k}_1 d^3\vec{k}_2 \frac{V^2}{(2\pi)^6} \\ &= \frac{1}{3(2\pi)^2} \int d^3\vec{k}_1 \int d^3\vec{k}_2 \frac{|g|^2}{2E_p 2E_{k_1} 2E_{k_2}} \left[2 + \frac{1}{m_A^2 m_V^2} (k_1 \cdot p)^2 \right] \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) t \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\equiv \Gamma_{A \rightarrow VP} t \quad (4.24)$$

²Jeweils multipliziert mit dem Faktor $V/(2\pi)^3$, um die Dimensionslosigkeit des Integrals zu gewährleisten.

Wobei wir in der letzten Zeile die Zerfallsbreite Γ des Zerfalls $A \rightarrow VP$ als Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit definiert haben. $\Gamma_{A \rightarrow VP}$ gibt also die Wahrscheinlichkeit an, dass zur Zeit t bereits die beiden Endzustände vorliegen.

$$\Gamma_{A \rightarrow VP} = \frac{1}{3(2\pi)^2} \int d^3\vec{k}_1 \int d^3\vec{k}_2 \frac{|g|^2}{2E_p 2E_{k_1} 2E_{k_2}} \left[2 + \frac{1}{m_A^2 m_V^2} (k_1 \cdot p)^2 \right] \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \quad (4.25)$$

Schließlich können wir noch die Delta-Funktion auswerten. Hierzu spalten wir diese in den zeitlichen und den räumlichen Anteil auf und gehen in das Ruhesystem des Anfangsteilchens A (d.h. $\vec{p} = 0$).

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) &= \delta(m_A - E_{V,k_1} - E_{P,k_2}) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \\ &= \delta\left(m_A - \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_V^2} - \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_P^2}\right) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Energie-Impulsbeziehungen für die Energien eingesetzt und gleich ausgenutzt, dass aufgrund der zweiten Delta-Funktion $\vec{k}_1^2 = \vec{k}_2^2$ sein muss. Die erste Delta-Funktion können wir noch unter Benutzung des Zusammenhangs für Delta-Funktionen, die von Funktionen eines Parameters (in unserem Fall der (End-)Impuls) abhängen: $\delta(g(x)) = \sum_i 1/|g'(x_i)| \delta(x - x_i)$, wobei x_i die Nullstellen der Funktion $g(x)$ sind. Das bedeutet, wir haben die Nullstellen von $m_A - \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_V^2} - \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_P^2}$ zu finden.

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} m_A - \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_V^2} - \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_P^2} \\ m_A^2 &= \vec{k}_1^2 + m_V^2 + 2\sqrt{\vec{k}_1^2 + m_V^2} \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_P^2} + \vec{k}_1^2 + m_P^2 \\ m_A^2 &= 2\vec{k}_1^2 + m_V^2 + m_P^2 + 2\sqrt{\vec{k}_1^4 + \vec{k}_1^2 m_P^2 + \vec{k}_1^2 m_V^2 + m_V^2 m_P^2} \\ \left[(m_A^2 - m_V^2 - m_P^2) - 2\vec{k}_1^2 \right]^2 &= 4 \left(\vec{k}_1^4 + \vec{k}_1^2 m_P^2 + \vec{k}_1^2 m_V^2 + m_V^2 m_P^2 \right) \\ (m_V^2 - m_V^2 - m_P^2)^2 - 4\vec{k}_1^2 (m_V^2 - m_V^2 - m_P^2) + 4\vec{k}_1^4 &= 4 \left(\vec{k}_1^4 + \vec{k}_1^2 m_P^2 + \vec{k}_1^2 m_V^2 + m_V^2 m_P^2 \right) \\ (m_V^2 - m_V^2 - m_P^2)^2 - 4m_V^2 m_P^2 &= 4\vec{k}_1^2 m_A^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Den Betrag der Nullstellen $|\vec{k}_1|$ und $-|\vec{k}_1|$ bezeichnen wir mit k_f , da es sich hier um den physikalisch erlaubten Betrag der (finalen) Endimpulse handelt.

$$k_f = |\vec{k}_1| = \frac{1}{m_A} \sqrt{(m_A^2 - m_V^2 - m_P^2) - 4m_V^2 m_P^2} \quad (4.27)$$

Des Weiteren benötigen wir zur Umformung noch die Ableitung der Funktion $m_A = \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_V^2} + \sqrt{\vec{k}_2^2 + m_P^2}$ an der Nullstelle k_f :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial k_1} m_A \right|_{k_1=k_f} &= \frac{\partial}{\partial k_1} \left[\sqrt{\vec{k}_1^2 + m_V^2} + \sqrt{\vec{k}_1^2 + m_P^2} \right]_{k_1=k_f} \\ &= \frac{k_f}{\sqrt{k_f^2 + m_V^2}} + \frac{k_f}{\sqrt{k_f^2 + m_P^2}} = \frac{k_f \left(\sqrt{k_f^2 + m_V^2} + \sqrt{k_f^2 + m_P^2} \right)}{\sqrt{k_f^2 + m_V^2} \sqrt{k_f^2 + m_P^2}} \\ &= \frac{k_f m_A}{\sqrt{k_f^2 + m_V^2} \sqrt{k_f^2 + m_P^2}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Folglich können wir die Delta-Funktion schreiben als:

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) &= \left| \left(\left. \frac{\partial m_A}{\partial k_1} \right|_{k_1=k_f} \right)^{-1} \right| \delta(|\vec{k}_1| - k_f) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \\ &= \frac{\sqrt{k_f^2 + m_V^2} \sqrt{k_f^2 + m_P^2}}{k_f m_A} \delta(|\vec{k}_1| - k_f) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Gehen wir wieder in unsere Zerfallsbreite $\Gamma_{A \rightarrow VP}$, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Gamma_{A \rightarrow VP} &= \frac{1}{3(2\pi)^2} \int d^3\vec{k}_1 \int d^3\vec{k}_2 \frac{|g|^2}{2E_p 2E_{k_1} 2E_{k_2}} \left[2 + \frac{1}{m_A^2 m_V^2} (k_1 \cdot p)^2 \right] \frac{\sqrt{k_f^2 + m_V^2} \sqrt{k_f^2 + m_P^2}}{k_f m_A} \times \\ &\quad \times \delta(|\vec{k}_1| - k_f) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \\ &= \frac{1}{3(2\pi)^2} \frac{\sqrt{k_f^2 + m_V^2} \sqrt{k_f^2 + m_P^2}}{k_f m_A} \int d^3\vec{k}_1 \frac{|g|^2}{2E_p 2E_{V,k_1} 2E_{P,k_1}} \left[2 + \frac{1}{m_A^2 m_V^2} (k_1 \cdot p)^2 \right] \times \\ &\quad \times \delta(|\vec{k}_1| - k_f) \end{aligned} \quad (4.30)$$

In der letzten Zeile haben wir die zweite Delta-Funktion ausgewertet und die Terme, welche nicht von k_1 abhängen, vor das Integral geschrieben. Letztendlich können wir noch das Skalarprodukt der zwei 4-Vektoren $k_1 \cdot p$ mit Hilfe der 4-Impuls-Erhaltung umformen.

$$\begin{aligned} p &= k_1 + k_2 \\ k_2 &= p - k_1 \\ k_2^2 &= (p - k_1)^2 = p^2 - 2k_1 \cdot p + k_1^2 \\ m_P^2 &= m_A^2 - 2k_1 \cdot p + m_V^2 \\ k_1 \cdot p &= \frac{1}{2} (m_A^2 + m_V^2 - m_P^2) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Das Einsetzen in die Zerfallsbreite ergibt:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{A \rightarrow VP} &= \frac{1}{3(2\pi)^2} \frac{\sqrt{k_f^2 + m_V^2} \sqrt{k_f^2 + m_P^2}}{k_f m_A} \int d^3 \vec{k}_1 \frac{|g|^2}{2E_p 2E_{V,k_1} 2E_{P,k_1}} \left[2 + \frac{1}{4m_A^2 m_V^2} (m_A^2 + m_V^2 - m_P^2)^2 \right] \times \\
 &\quad \times \delta(|\vec{k}_1| - k_f) \\
 &= \frac{1}{3(2\pi)^2} \frac{\sqrt{k_f^2 + m_V^2} \sqrt{k_f^2 + m_P^2}}{k_f m_A} \left[2 + \frac{1}{4m_A^2 m_V^2} (m_A^2 + m_V^2 - m_P^2)^2 \right] \int dk_1 d\Omega \frac{|g|^2 k_1^2}{2E_p 2E_{V,k_1} 2E_{P,k_1}} \times \\
 &\quad \times \delta(|\vec{k}_1| - k_f) \\
 &= \frac{1}{3(2\pi)^2} \frac{\sqrt{k_f^2 + m_V^2} \sqrt{k_f^2 + m_P^2}}{k_f m_A} \left[2 + \frac{1}{4m_A^2 m_V^2} (m_A^2 + m_V^2 - m_P^2)^2 \right] \frac{k_1^2}{2E_p 2E_{V,k_f} 2E_{P,k_f}} \int |g|^2 d\Omega \\
 &= \frac{1}{3(2\pi)^2} \frac{\sqrt{k_f^2 + m_V^2} \sqrt{k_f^2 + m_P^2}}{k_f m_A} \left[2 + \frac{1}{4m_A^2 m_V^2} (m_A^2 + m_V^2 - m_P^2)^2 \right] \times \\
 &\quad \times \frac{2k_1^2}{2m_A^2 \sqrt{k_f^2 + m_V^2} 2\sqrt{k_f^2 + m_P^2}} |g|^2 4\pi
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Dabei sind wir in der zweiten Zeile zu Kugelkoordinaten übergegangen, haben in der dritten Zeile die Delta-Funktion ausgewertet und schließlich in der letzten Zeile die Energie-Impulsbeziehungen benutzt, um die Energien E_p , E_{V,k_f} und E_{P,k_f} zu ersetzen. Hierbei ist zu beachten, dass wir uns im Ruhesystem des Anfangsteilchens befinden und E_p damit gleich m_A ist. Weiteres Umformen ergibt schließlich:

$$\Gamma_{A \rightarrow VP} = \frac{8m_A^2 m_V^2 + (m_A^2 + m_V^2 - m_P^2)^2}{32\pi m_A^4 m_V^2} k_f |g|^2 \tag{4.33}$$

Wir haben somit eine Formel gefunden, mit deren Hilfe wir anhand der Massen der auftauchenden Teilchen und der Kopplungskonstanten die Zerfallsbreite des Zerfalls eines neutralen Axialvektormesons in ein neutrales Vektormeson und ein neutrales pseudoskalar Meson berechnen können.

5 Konstruktion von Mesonen-Nonets mit drei Flavours

Im letzten Abschnitt haben wir bereits eine Lagrange-Dichte zur Beschreibung von Zerfällen der Art $A \rightarrow VP$ kennengelernt. Im folgenden Abschnitt wollen wir aber ein sehr viel allgemeineres Modell konstruieren, womit wir gleichzeitig mehrere Zerfälle (bzw. Zerfallsbreiten oder Wirkungsquerschnitte) von Mesonen (welche aus jeweils zwei Quarks $\bar{q}q$ aufgebaut sind) in verschiedenen Ladungszuständen berechnen können. Außerdem werden wir später sehen, dass dadurch die Untersuchung von Mischungen zwischen den Feldern $K_{1,A}$ und $K_{1,B}$ möglich wird. Doch dazu später mehr. Die folgenden Rechnungen von Mesonenzerfällen würden sich wesentlich vereinfachen, wenn wir nur mit Hadronen arbeiten könnten und uns nicht um Quarks und Gluonen kümmern müssten. Dies können wir realisieren, indem wir effektive Feld-Theorien benutzen, wobei zwei mögliche Ausführungen existieren: das sogenannte lineare oder nicht-lineare Sigma-Modell. Die genauere Erläuterung dieser Theorien und ihrer Unterschiede würden jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Es sei nur angemerkt, dass wir die lineare Representation verwenden werden und uns bei der Konstruktion des Mesonen-Modells exakt an die Ausführungen in [6] halten. Doch zunächst wollen wir uns trotzdem etwas mit den elementaren Teilchen, aus denen die Mesonen aufgebaut sind, beschäftigen.

5.1 Quarks und Mesonen

Bereits im Jahre 1963 vermuteten die Physiker Gell-Mann und Zweig, dass alle Hadronen aus elementaren Teilchen namens Quarks aufgebaut sind. Dabei nannten sie die aus Quark und Antiquark aufgebauten Hadronen Mesonen und die aus drei Quarks (bzw. Antiquarks) zusammengesetzten Hadronen Baryonen (bzw. Antibaryonen). Schon damit die aus Quarks konstruierten Hadronen die richtige elektrische Ladung besitzen, vermuteten sie, dass es unterschiedliche Typen von Quarks geben muss. Mittlerweile geht man davon aus, dass sechs verschiedene Quarktypen existieren: up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) und top (t). Dabei besitzen u , c und t die elektrische Ladung $+2/3 e$ und d , s , und b $-1/3 e$. Zum Beispiel können wir das Proton dann durch die Quark-Kombination uud konstruieren. Diese sechs verschiedenen Quark-Typen werden gewöhnlich als Flavours bezeichnet. Quarks besitzen aber noch eine zweite charakterisierende Eigenschaft (Quantenzahl): Die Farbe. Diese Quantenzahl führten Han und Nambu, Greenberg und Gell-Mann aufgrund des Spin-Statistik-Problems des Δ^{++} -Teilchens mit Spin $3/2$ und Ladung $+2 e$ ein. Die Ladung des Spin $3/2$ -Teilchens könnten wir durch die Konstruktion uuu erhalten. Doch betrachten wir diesen Zustand, erkennen wir, dass er im Widerspruch zur Fermi-Statistik symmetrisch unter Vertauschung zweier Teilchen (Quarks) ist. Man führte deshalb den zweiten Freiheitsgrad der Farbe ein und postulierte, dass jedes Quark in den drei Farben rot R , grün G und blau B auftauchen kann. Womit wir einen antisymmetrischen Farb-Zustand konstruieren können, so dass der Zustand unseres problematischen Δ^{++} -Teilchens

nun doch insgesamt antisymmetrisch ist. Es ist möglich, die Farbe tragenden Quarks einer globalen $SU(3)$ -Farb-Symmetrie zuzuordnen. Unter der Annahme, dass dann alle Hadronen-Zustände invariant unter diesen $SU(3)$ -Transformationen sein müssen, ergeben sich als einzig mögliche (einfachste) Zustände die oben erwähnten Kombinationen Quark-Antiquark, Quark-Quark-Quark oder Antiquark-Antiquark-Antiquark, wobei die Quarks immer so kombiniert werden müssen, dass die Gesamtfarbe „weiß“ ist (confinement-Hypothese). Dies entspricht den Kombinationen rot-antirrot, blau-antiblau, grün-antigrün für Mesonen oder rot-grün-blau und dessen Permutationen für Baryonen.

Quarks tragen halbzahligen Spin und genügen damit der, wenn es keine Wechselwirkungen mit z.B. Gluonen gibt, freien Dirac-Gleichung. Das bedeutet, wir können eine Lagrange-Dichte für Quarks, welche durch den Spinor q dargestellt werden, mit Flavor, indiziert durch f , konstruieren:

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f . \quad (5.1)$$

Dabei ist zu beachten, dass über den Flavor-Index f summiert wird und m_f der Masse des Quark-Flavors q_f entspricht.

5.2 Konstruktion eines Mesonen-Modells

Im Folgenden interessieren uns nur die aus den drei Flavours u , d und s aufgebauten Mesonen. Die verschiedenen Mesonen, welche aus Quarks und Antiquarks aufgebaut sind, unterscheiden sich in mehreren Quantenzahlen. Dies sind der Gesamtdrehimpuls $J = L + S$ (wobei L dem relativen Drehimpuls und S dem relativen Spin der beiden Quarks entspricht), die Parität P und die Ladungskonjugation C . Der folgende Abschnitt soll die in unserem Modell verwendeten Teilchen-Nonets aufzeigen und gleichzeitig eine Idee vermitteln, wie sie konstruiert werden können. Da wir die Nonets für unsere Arbeit aus der PhD-Arbeit von Denis Parganlija [6] übernommen haben, halten wir uns in der folgenden Diskussion explizit an das dortige Vorgehen.

Der erste Schritt zur Konstruktion eines Mesonen-Modells zur Beschreibung dieser verschiedenen Mesonen ist die Definition einer Mesonen-Matrix:

$$\Phi_{ij} \hat{=} \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L} \quad (5.2)$$

Wobei die Indizes R und L kennzeichnen, ob sich das Quark rechts- oder linkshändig transformiert. Die Matrix wurde so gewählt, dass sie unter chiralen Transformationen, d.h. wobei \hat{U} Darstellungen der chiralen Gruppe sind, das Verhalten $\hat{U}_L \Phi_{ij} \hat{U}_R^\dagger$ aufweist. Aus solchen Matrizen lassen sich später bei der Konstruktion von Lagrange-Dichten einfache Terme konstruieren, die eine chirale Symmetrie aufweisen¹. Unter Verwendung der rechts- und linkshändigen Projektionsoperatoren $\mathcal{P}_{R,L}$:

$$\mathcal{P}_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \quad (5.3)$$

ergibt sich unter Ausnutzung von $\mathcal{P}_L q = q_L$, $\bar{q} \mathcal{P}_L = \bar{q}_R$ und $\mathcal{P}_{R,L}^2 = \mathcal{P}_{R,L}$ für die Mesonen-Matrix

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &\hat{=} \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} q_{i,L} = \sqrt{2} \bar{q}_j \mathcal{P}_L \mathcal{P}_L q_i = \sqrt{2} \bar{q}_j \mathcal{P}_L q_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j q_i - \bar{q}_j \gamma^5 q_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j q_i + i \bar{q}_j i \gamma^5 q_i) . \end{aligned} \quad (5.4)$$

¹Für weitere Informationen dazu siehe [6].

Aufgrund der Transformationsverhältnisse, welche wir später noch explizit nachrechnen werden, erkennen wir einen Skalar-Strom² S_{ij} , welchen wir für den Fall von drei Flavours ($i, j = u, d, s$) auch direkt in Matrixdarstellung schreiben können:

$$S_{ij} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j q_i \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_N + a_0^0}{\sqrt{2}} & a_0^+ & K_S^+ \\ a_0^- & \frac{\sigma_N - a_0^0}{\sqrt{2}} & K_S^0 \\ K_S^- & \bar{K}_S^0 & \sigma_S \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

(wobei $a_0 = a_0(1450)$) und einen Pseudoskalar-Strom für drei Flavours ($i, j = u, d, s$):

$$P_{ij} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i \gamma^5 q_i \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\eta_N + \pi_0^0}{\sqrt{2}} & \pi_0^+ & K^+ \\ \pi_0^- & \frac{\eta_N - \pi_0^0}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \eta_S \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

wobei η_N und η_S unphysikalische Felder sind, die erst durch Mischung (mit einem Mischungswinkel von -36°) die physikalischen Teilchen η und η' beschreiben. Um die Ströme für Vektoren und Axialvektoren zu erhalten, definieren wir uns eine rechtshändige Matrix

$$R_{ij}^\mu \hat{=} \sqrt{2} \bar{q}_{j,R} \gamma^\mu q_{i,R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j \gamma^\mu q_i - \bar{q}_j \gamma^5 \gamma^\mu q_i) \quad (5.7)$$

und eine linkshändige Matrix

$$L_{ij}^\mu \hat{=} \sqrt{2} \bar{q}_{j,L} \gamma^\mu q_{i,L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j \gamma^\mu q_i + \bar{q}_j \gamma^5 \gamma^\mu q_i) . \quad (5.8)$$

Bei der Umformung verwendeten wir wieder dieselben Eigenschaften der Projektionsoperatoren wie oben. Analog definieren wir auch wieder aufgrund von Transformationsverhältnissen einen Vektor-Strom (in Matrixdarstellung für drei Flavours ($i, j = u, d, s$))

$$V_{ij}^\mu \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu q_i \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\omega_N^\mu + \rho_0^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & \rho^{\mu+} & K^{*\mu+} \\ \rho^{\mu-} & \frac{\omega_N^\mu - \rho_0^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K^{*\mu 0} \\ K^{*\mu-} & \bar{K}^{*\mu 0} & \omega_S^\mu \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

wobei $K^* = K^*(892)$ und ω_N und ω_S unphysikalische Felder sind, welche erst nach Mischung die physikalischen Felder ω und Φ beschreiben. Da der Mischungswinkel aber vernachlässigbar klein ist, gehen wir im Folgenden davon aus, dass $\omega_N \equiv \omega$ und $\omega_S \equiv \Phi$ ist. Des Weiteren erhalten wir einen Axialvektor-Strom (in Matrixdarstellung für drei Flavours ($i, j = u, d, s$)):

$$A_{ij}^\mu \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^\mu \gamma^5 q_i \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{f_{1N,A}^\mu + a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & a_1^{\mu+} & K_{1,A}^{\mu+} \\ a_1^{\mu-} & \frac{f_{1N,A}^\mu - a_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K_{1,A}^{\mu 0} \\ K_{1,A}^{\mu-} & \bar{K}_{1,A}^{\mu 0} & f_{1S,A}^\mu \end{pmatrix} . \quad (5.10)$$

²Man spricht hier von Strömen, da sie auch aus dem Theorem von Noether als Erhaltungsgrößen von Symmetrietransformationen folgen.

Dabei ordnen wir a_1 der $a_1(1260)$ Resonanz, $f_{1N,A} = f_1(1285)$ und $f_{1S,A} = f_1(1420)$ zu. $K_{1,A}$ wollen wir zunächst nicht weiter festlegen. Des Weiteren ist es auch noch möglich, einen Pseudovektor-Strom folgendermaßen zu konstruieren:

$$B_{ij}^\mu \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j \gamma^5 \partial^\mu q_i - (\partial^\mu \bar{q}_j) \gamma^5 q_i \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{f_{1N,B}^\mu + b_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & b_1^{\mu+} & K_{1,B}^{\mu+} \\ b_1^{\mu-} & \frac{f_{1N,B}^\mu - b_1^{\mu 0}}{\sqrt{2}} & K_{1,B}^{\mu 0} \\ K_{1,B}^{\mu-} & \bar{K}_{1,A}^{\mu 0} & f_{1B,A}^\mu \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Wir ordnen b_1 der $b_1(1235)$ Resonanz, $f_{1N,B} = h_1(1170)$ und $f_{1S,B} = h_1(1380)$ zu. $K_{1,B}$ wollen wir zunächst nicht weiter festlegen. Später werden wir sehen, dass $K_{1,A}$ und $K_{1,B}$ unphysikalische Felder sind, welche erst durch eine Mischung physikalische Teilchen beschreiben. Auch hinsichtlich des Pseudovektor-Stroms zeigen wir im nächsten Abschnitt auf, dass er sich tatsächlich richtig, wie erwartet für einen Pseudovektor, transformiert.

5.3 CP - Symmetrietransformationen

Wir wollen die Transformationsverhältnisse der oben definierten Ströme berechnen und zeigen, dass die postulierten Skalar-, Pseudoskalar-, Vektor- und Axialvektor-Ströme tatsächlich die geforderten Eigenschaften unter CP -Transformationen und die erwarteten Gesamtdrehimpulse besitzen. Bei den folgenden Symmetriebetrachtungen werden wir reichlich von verschiedenen Relationen der Diracschen Gamma-Matrizen Gebrauch machen³.

Da Quarks Fermionen sind und damit durch (Quark-)Spinoren beschrieben werden, stellt sich ihre Paritätstransformation folgendermaßen dar

$$q(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} q^P(t, \vec{x}) = \gamma^0 q(t, -\vec{x}) \quad (5.12)$$

$$q^\dagger(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \left(q^\dagger(t, \vec{x}) \right)^P = q^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0 \quad (5.13)$$

und ihre Ladungskonjugation lautet

$$q \xrightarrow{C} q^C = \hat{C} \bar{q}^T = \hat{C} \left(q^\dagger \gamma^0 \right)^T = \hat{C} (\gamma^0)^T q^* = \hat{C} \gamma^0 q^* = -i \gamma^2 \gamma^0 \gamma^0 q^* = -i \gamma^2 q^* \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{q} \xrightarrow{C} \bar{q}^C &= (q^C)^\dagger \gamma^0 = \left(\hat{C} \bar{q}^T \right)^\dagger \gamma^0 = \bar{q}^* \hat{C}^\dagger \gamma^0 = \left(q^\dagger \gamma^0 \right)^* \left(-\hat{C} \right) \gamma^0 = q^T \gamma^0 i \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \\ &= q^T i \gamma^0 \gamma^2 = q^T \hat{C}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Dabei ist $\bar{q} = q^\dagger \gamma^0$ der Dirac-adjungierte Spinor und $\hat{C} = -i \gamma^2 \gamma^0$ der Operator der Ladungskonjugation. Des Weiteren haben wir ausgenutzt, dass $(\gamma^0)^T = \gamma^0$ und $\hat{C}^\dagger = -\hat{C}$ ist. Damit können wir jetzt die Transformationsverhältnisse der Ströme nachrechnen.

³Siehe dazu auch Kapitel „Verwendete Konventionen und Notationen“.

Skalar-Strom $S_{ij} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(t, \vec{x}) q_i(t, \vec{x})$:

Der Skalar-Strom transformiert (unter Verwendung von $(\gamma^0)^2 = 1$ und der Definition des dirac-adjungierten Spinors) positiv unter Parität

$$S_{ij}^P \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 q_i(t, -\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(t, -\vec{x}) q_i(t, -\vec{x}) \quad (5.16)$$

, d.h. $S \xrightarrow{P} S$ und positiv unter Ladungskonjugation

$$S_{ij}^C \hat{=} -\frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T i \gamma^0 \gamma^2 i \gamma^2 q_i^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T \gamma^0 q_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_i q_j)^T \quad (5.17)$$

, d.h. $S \xrightarrow{C} S^T$. Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\gamma^2 \gamma^2 = -1$ ist und der Austausch zweier Fermionen (bei dem Transponieren) ein Minus-Zeichen liefert.

Pseudoskalar-Strom $P_{ij} \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(t, \vec{x}) i \gamma^5 q_i(t, \vec{x})$

Der Pseudoskalar-Strom transformiert mit $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ negativ unter Parität

$$P_{ij}^P \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^0 i \gamma^5 \gamma^0 q_i(t, -\vec{x}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(t, -\vec{x}) i \gamma^5 q_i(t, -\vec{x}), \quad (5.18)$$

, d.h. $P \xrightarrow{P} -P$ und positiv unter Ladungskonjugation

$$\begin{aligned} P_{ij}^C &\hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} i q_j^T i \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 (-i) \gamma^2 q_i^* = i \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 \gamma^2 q_i^* = -i \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T \gamma^0 \gamma^2 \gamma^2 \gamma^5 q_i^* = i \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T \gamma^0 \gamma^5 q_i^* \\ &= -i \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_i^\dagger \gamma^5 \gamma^0 q_j \right)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_i i \gamma^5 q_j)^T \end{aligned} \quad (5.19)$$

, d.h. $P \xrightarrow{C} -P^T$ wobei wir von $(\gamma^5)^T = \gamma^5$ und $(\gamma^0)^T = \gamma^0$ Gebrauch gemacht haben.

Vektor-Strom $V_{ij}^\mu \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}(t, \vec{x})_j \gamma^\mu q_i(t, \vec{x})$

Die räumlichen Komponenten des Vektor-Stroms transformieren mit $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ negativ unter Parität

$$\left(V_{ij}^\mu \right)^P \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 q_i(t, -\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}(t, -\vec{x})_j \gamma^\mu q_i(t, -\vec{x}) & , \mu = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}(t, -\vec{x})_j \gamma^\mu q_i(t, -\vec{x}) & , \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (5.20)$$

, d.h. $V^i \xrightarrow{P} -V^i$ und der gesamte Strom transformiert negativ unter Ladungskonjugation

$$\begin{aligned} \left(V_{ij}^\mu \right)^C &\hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T \hat{C} \gamma^\mu \hat{C} \bar{q}_i^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\bar{q}_i \hat{C}^T (\gamma^\mu)^T \hat{C}^T q_j \right)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\bar{q}_i \hat{C} (\gamma^\mu)^T (-\hat{C}^{-1}) q_j \right)^T \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_i \gamma^\mu q_j)^T \end{aligned} \quad (5.21)$$

, d.h. $V^\mu \xrightarrow{C} -(V^\mu)^T$. Wir haben dabei verwendet, dass $\hat{C} = \hat{C}^T = -\hat{C}^{-1}$ ist und die Relation $\hat{C} (\gamma^\mu)^T \hat{C}^{-1} = -\gamma^\mu$ gilt.

Axialvektor-Strom $A_{ij}^\mu \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(t, \vec{x}) \gamma^\mu \gamma^5 q_i(t, \vec{x})$

Die räumlichen Komponenten des Axialvektor-Stroms transformieren positiv unter Parität

$$\left(A_{ij}^\mu\right)^P \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^0 q_i(t, -\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(t, -\vec{x}) \gamma^\mu \gamma^5 q_i(t, -\vec{x}) & , \mu = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j(t, -\vec{x}) \gamma^\mu \gamma^5 q_i(t, -\vec{x}) & , \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (5.22)$$

, d.h. $A^i \xrightarrow{P} A^i$ und positiv unter Ladungskonjugation

$$\begin{aligned} \left(A_{ij}^\mu\right)^C &\hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T i \gamma^0 \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^5 (-i) \gamma^2 q_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T \gamma^0 \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^2 q_i^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T \gamma^0 \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2 \gamma^5 q_i^* \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T \gamma^0 \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^5 q_i^* & , \mu = 0, 1, 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 \gamma^5 q_i^* & , \mu = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 q_i^* & , \mu = 0, 1, 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} q_j^T \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 q_i^* & , \mu = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_i^\dagger \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^0 q_j\right)^T & , \mu = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_i^\dagger \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^0 q_j\right)^T & , \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{q}_i \gamma^5 \gamma^\mu q_j\right)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{q}_i \gamma^\mu \gamma^5 q_j\right)^T \end{aligned} \quad (5.23)$$

, d.h. $A^\mu \xrightarrow{C} (A^\mu)^T$. Von der dritten auf die vierte Zeile haben wir ausgenutzt, dass $(\gamma^0)^T = \gamma^0$, $(\gamma^1)^T = -\gamma^1$, $(\gamma^2)^T = \gamma^2$, $(\gamma^3)^T = -\gamma^3$ und $(\gamma^5)^T = \gamma^5$.

Pseudovektor-Strom $B_{ij}^\mu \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q}_j(t, \vec{x}) \gamma^5 \partial^\mu q_i(t, \vec{x}) - (\partial^\mu \bar{q}_j(t, \vec{x})) \gamma^5 q_i(t, \vec{x}))$:

Die räumlichen Komponenten des Pseudovektor-Stroms transformieren positiv unter Parität

$$\begin{aligned} \left(B_{ij}^\mu\right)^P &\hat{=} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_j^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 \partial^\mu q_i(t, -\vec{x}) - (\partial^\mu q_j^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^0) \gamma^5 q_i(t, -\vec{x})\right) & , \mu = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_j^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 \partial^\mu q_i(t, -\vec{x}) - (\partial^\mu q_j^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^0) \gamma^5 q_i(t, -\vec{x})\right) & , \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_j^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^5 \partial^\mu q_i(t, -\vec{x}) - (\partial^\mu q_j^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0) \gamma^5 q_i(t, -\vec{x})\right) & , \mu = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_j^\dagger(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^5 \partial^\mu q_i(t, -\vec{x}) - (\partial^\mu q_j^\dagger(t, -\vec{x})) \gamma^0 \gamma^5 q_i(t, -\vec{x})\right) & , \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \\ &\hat{=} \begin{cases} -B_{ji}^\mu & , \mu = 0 \\ +B_{ji}^\mu & , \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.24)$$

, d.h. $B^i \xrightarrow{P} B^i$ und der gesamte Strom transformiert negativ unter Ladungskonjugation

$$\begin{aligned}
 \left(B_{ij}^\mu\right)^C &\hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_j^T i \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 \partial^\mu (-i) \gamma^2 q_i^* - (\partial^\mu q_j^T i \gamma^0 \gamma^2) \gamma^5 (-i) \gamma^2 q_i^* \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_j^T \gamma^0 \gamma^2 \gamma^2 \gamma^5 \partial^\mu q_i^* + (\partial^\mu q_j^T) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^2 \gamma^5 q_i^* \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_j^T \gamma^0 \gamma^5 \partial^\mu q_i^* - (\partial^\mu q_j^T) \gamma^0 \gamma^5 q_i^* \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-(\partial^\mu q_i^\dagger) \gamma^5 \gamma^0 q_j + q_i^\dagger \gamma^5 \gamma^0 (\partial^\mu q_j) \right)^T \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[((\partial^\mu \bar{q}_i) \gamma^5 q_j)^T - (\bar{q}_i \gamma^5 (\partial^\mu q_j))^T \right] \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

, d.h. $B^\mu \xrightarrow{C} -(B^\mu)^T$.

Wir haben damit nun die Transformationsverhältnisse der Ströme unter Paritätstransformation und Ladungskonjugation berechnet. Es interessiert uns aber auch der Gesamtdrehimpuls, zusammengesetzt aus Spin und (Bahn-)Drehimpuls. In [7] wurde gezeigt, dass für ein System aus zwei Fermionen gilt

$$P = (-1)^{L+1} \tag{5.26}$$

$$C = (-1)^{L+S}. \tag{5.27}$$

Damit können wir für die Ströme alle Quantenzahlen bestimmen. Zum Beispiel ergibt sich für den Vektor-Strom mit $P = C = -1$, dass $L = 0$ und $S = 1$ und daher $J = L + S = 1$ sein muss. Insgesamt erhalten wir die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Quantenzahlen und haben dadurch unsere obigen Zuordnungen der Ströme bewiesen.

	S_{ij}	P_{ij}	V_{ij}^μ	A_{ij}^μ	B_{ij}^μ
J^{PC}	0 ⁺⁺	0 ⁻⁺	1 ⁻⁻	1 ⁺⁺	1 ^{+−}

6 Lagrange-Dichte von Mesonenzerfällen der Art $A(\text{oder } B) \longrightarrow VP$

Mit den oben definierten Nonets aus pseudoskalaren Mesonen, Vektormesonen, Axialvektormesonen und Pseudovektormesonen sind wir nun in der Lage, eine Lagrange-Dichte zur Berechnung von Zerfällen von Axialvektor- bzw. Pseudovektormesonen in jeweils ein pseudoskalares und ein Vektormeson aufzustellen, indem wir diese Nonets entsprechend koppeln. Wir müssen lediglich darauf achten, dass unsere Lagrange-Dichte, welche eine effektive Theorie auf der Grundlage der Quantenchromodynamik (QCD) bzw. der starken Wechselwirkung darstellt, ebenfalls alle relevanten Symmetrien dieser Theorie erfüllt. Das bedeutet, sie sollte invariant unter Lorentz-, CPT- und $SU(N_C = 3)$ -Transformationen („Farb-Confinement“) sein. Des Weiteren fordern wir, dass sie einen Teil enthält, der eine $SU(N_F = 3)$ -Flavor-Symmetrie aufweist. Der zweite Teil wird dann die $SU(N_F = 3)$ -Symmetrie brechen und die Mischung der unphysikalischen Zustände $K_{1,A}$ und $K_{1,B}$ hervorrufen. Um diese Kriterien zu erfüllen, können wir die folgende Lagrange-Dichte aufstellen:

$$\mathcal{L}_{int} = ai\text{Tr}(A_\mu [V^\mu, P]) + b\text{Tr}(B_\mu \{V^\mu, P\}) + \mathcal{L}_{mix} \quad (6.1)$$

Dabei sind a und b noch zu bestimmende (Kopplungs-)Konstanten und A_μ , V^μ , P und B_μ die oben konstruierten Mesonen-Nonets. Im ersten Term mussten wir ein i einfügen, um zu gewährleisten, dass \mathcal{L}_{int} hermitesch ist¹. Den Term \mathcal{L}_{mix} wollen wir zunächst nicht weiter definieren und für die folgenden Symmetriebetrachtungen völlig außer Acht lassen. Bei den anschließenden Berechnungen wird auch klar werden, warum wir im ersten Term einen Kommutator und im zweiten Term einen Antikommutator verwendet haben.

6.1 Symmetrien der Lagrange-Dichte

Wie bereits erwähnt, sollte unsere Lagrange-Dichte die relevanten Symmetrien der QCD erfüllen. Dies wollen wir in diesem Abschnitt überprüfen.

6.1.1 Chirale und Farb-Symmetrie

Nach dem „Color-Confinement“ treten Teilchen mit Farbladung nie isoliert auf. Das bedeutet, Teilchen wie zum Beispiel unsere Mesonen, die tatsächlich in Experimenten beobachtet werden konnten, farbneutral sind. Da wir in unserem Modell aber nur diese farblosen Mesonen betrachten, enthält dieses auch keine $SU(N_C = 3)$ -Farb-Symmetrie.

Auch weist unser Modell keine chirale Symmetrie auf, da wir keine links- oder rechtshändigen Quarks betrachten, sondern wieder nur mit Mesonen bzw. den bereits in [6] hergeleiteten Strömen arbeiten.

¹Beachte, dass die oben konstruierten Ströme allesamt hermitesch sind.

6.1.2 Lorentz-Symmetrie

Die Invarianz unter Lorentz-Transformationen ist bei der Formulierung eines Modells, welches Teilchen bei Streuungen mit relativistischen Energien beschreiben will, und auch generell bei allen relativistischen Theorien, mitunter die wichtigste Symmetrie. In dem Fall der von uns konstruierten Lagrange-Dichte ist sie leicht zu erkennen, da P ein Skalar ist und die beiden Vektoren (im Index μ) kontrahiert wurden. D.h. unsere Lagrange-Dichte besteht nur aus Lorentz-Skalaren, welche Lorentz-invariant sind.

6.1.3 CPT-Symmetrie

Aufgrund des CPT-Theorems, welches besagt, dass es nicht möglich ist, eine Lorentz-invariante QFT mit hermiteschem Hamiltonoperator, welche die CPT-Symmetrie verletzt, zu bilden², genügt es, zwei von den drei Symmetrien C, P und T zu zeigen. Die dritte ist dann nach dem CPT-Theorem automatisch auch erfüllt. Wir wollen hier die Invarianz unter Parität und Ladungskonjugation nachprüfen. Dazu benutzen wir die oben hergeleiteten Transformationsverhältnisse der Nonets und erhalten:

$$\mathcal{L}'_{int}{}^P = ai\text{Tr}(A_\mu[-V^\mu, -P]) + b\text{Tr}(B_\mu\{-V^\mu, -P\}) \equiv \mathcal{L}'_{int} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{int}{}^C &= ai\text{Tr}(A_\mu^T[-(V^\mu)^T, P^T]) + b\text{Tr}(-B_\mu^T\{-(V^\mu)^T, P^T\}) \\ &= ai\text{Tr}(-A_\mu^T(V^\mu)^T P^T + A_\mu^T P^T (V^\mu)^T) + b\text{Tr}(B_\mu^T (V^\mu)^T P^T + B_\mu^T P^T (V^\mu)^T) \\ &= ai\text{Tr}\left[-(PV^\mu A_\mu)^T + (V^\mu P A_\mu)^T\right] + b\text{Tr}\left[(PV^\mu B_\mu)^T + (V^\mu P B_\mu)^T\right] \\ &= ai\text{Tr}(-PV^\mu A_\mu + V^\mu P A_\mu) + b\text{Tr}(PV^\mu B_\mu + V^\mu P B_\mu) \\ &= ai\text{Tr}([V^\mu, P] A_\mu) + b\text{Tr}(\{V^\mu, P\} B_\mu) \equiv \mathcal{L}'_{int} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dabei haben wir die zyklische Vertauschbarkeit unter der Spur ausgenutzt und die Tatsache, dass die Spur einer transponierten Matrix gleich der Spur der Matrix selbst ist: $\text{Tr}(M^T) = \text{Tr}(M)$. Außerdem ist zu beachten, dass wir wie schon erwähnt zunächst \mathcal{L}'_{mix} vernachlässigen, d.h. $\mathcal{L}'_{int} = \mathcal{L}_{int} - \mathcal{L}_{mix}$.

6.1.4 $U(N_f = 3)$ -Flavor-Symmetrie

Damit bleibt nun nur noch die Invarianz unter $U(3)$ -Transformationen der einzelnen Nonets. Mit dem Transformationsverhalten der Spinoren

$$q_i \longrightarrow \hat{U}_{ik} q_k \qquad q_i^\dagger \longrightarrow q_k^\dagger \hat{U}_{ki}^\dagger \quad (6.4)$$

(wobei \hat{U} eine Darstellung eines Elements der $U(3)$ -Transformationen ist) erhalten wir für ein Γ , welches gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ für Skalare, $\frac{1}{\sqrt{2}}i\gamma^5$ für Pseudoskalare, $\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^\mu$ für Vektoren, usw. ist:

$$\Gamma_{ij} = \bar{q}_j \Gamma q_i \longrightarrow \bar{q}_k \hat{U}_{kj}^\dagger \Gamma \hat{U}_{il} q_l = \hat{U}_{il} (\bar{q}_k \Gamma q_l) \hat{U}_{kj}^\dagger \equiv \hat{U}_{il} \Gamma_{lk} \hat{U}_{kj}^\dagger \quad (6.5)$$

²Siehe z.B. [1]

Die Nonets transformieren also wie: $A^\mu \rightarrow \hat{U}A^\mu\hat{U}^{-1}$, $B^\mu \rightarrow \hat{U}B^\mu\hat{U}^{-1}$, $V^\mu \rightarrow \hat{U}V^\mu\hat{U}^{-1}$ und $P \rightarrow \hat{U}P\hat{U}^{-1}$, wobei \hat{U} eine Darstellung eines Elements der $U(3)$ ist. Es ergibt sich für unsere Lagrange-Dichte ohne Mischungsterm, $\mathcal{L}'_{int} = \mathcal{L}_{int} - \mathcal{L}_{mix}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{int}{}^{U(3)} &= ai\text{Tr} \left(\hat{U}A^\mu\hat{U}^{-1} \left[\hat{U}V^\mu\hat{U}^{-1}, \hat{U}P\hat{U}^{-1} \right] \right) + b\text{Tr} \left(\hat{U}B^\mu\hat{U}^{-1} \left\{ \hat{U}V^\mu\hat{U}^{-1}, \hat{U}P\hat{U}^{-1} \right\} \right) \\ &= a\text{Tr} \left(\hat{U}A^\mu\hat{U}^{-1}\hat{U} [V^\mu, P] \hat{U}^{-1} \right) + b\text{Tr} \left(\hat{U}B^\mu\hat{U}^{-1}\hat{U} \{V^\mu, P\} \hat{U}^{-1} \right) \equiv \mathcal{L}'_{int}\end{aligned}\quad (6.6)$$

Die zyklische Vertauschbarkeit unter der Spur haben wir dabei ausgenutzt.

6.2 Die explizite Form der vollen Lagrange-Dichte \mathcal{L}_{int}

Nachdem wir gezeigt haben, dass unsere konstruierte Lagrange-Dichte die erforderlichen Symmetrien erfüllt, wollen wir jetzt die beiden Kopplungskonstanten a und b berechnen. Dazu müssen wir zunächst die explizite Form unserer Lagrange-Dichte durch Einsetzen der Mesonen-Nonets bestimmen. Dies ergibt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= ai\text{Tr} (A_\mu [V^\mu, P]) + b\text{Tr} (B_\mu \{V^\mu, P\}) + \mathcal{L}_{mix} \\ &= \frac{ai}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} f_{1N,A} (K^{*\mu+} K^- - K^+ K^{*\mu-} + K^{*\mu 0} \bar{K}^0 - K^0 \bar{K}^{*\mu 0}) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} a_{1\mu}^0 (2\rho^{\mu+} \pi^- - 2\rho^{\mu-} \pi^+ + K^{*\mu+} K^- - K^+ K^{*\mu-} - K^{*\mu 0} \bar{K}^0 - K^0 \bar{K}^{*\mu 0}) + \\ &\quad + a_{1\mu}^+ \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \rho^{\mu-} \pi^0 - \frac{2}{\sqrt{2}} \rho^{\mu 0} \pi^- + K^{*\mu 0} K^- - K^0 K^{*\mu-} \right) + \\ &\quad + a_{1\mu}^- \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \rho^{\mu 0} \pi^+ - \frac{2}{\sqrt{2}} \rho^{\mu+} \pi^0 + K^{*\mu+} \bar{K}^0 - K^+ \bar{K}^{*\mu 0} \right) + \\ &\quad + f_{1S,A\mu} (K^{*\mu-} K^+ - K^- K^{*\mu+} + \bar{K}^{*\mu 0} K^0 - \bar{K}^0 K^{*\mu 0}) + \\ &\quad + K_{1,A\mu}^+ \left(\omega_S^\mu K^- - \frac{1}{\sqrt{2}} K^- \omega_N^\mu - \frac{1}{\sqrt{2}} K^- \rho^{\mu 0} + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu-} \eta_N + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu-} \pi^0 - \eta_S K^{*\mu-} + \right. \\ &\quad \quad \left. + \bar{K}^{*\mu 0} \pi^- - \bar{K}^0 \rho^{\mu-} \right) + \\ &\quad + K_{1,A\mu}^0 \left(K^{*\mu-} \pi^+ - K^- \rho^{\mu+} + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \eta_N - \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \pi^0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^0 \omega_N^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^0 \rho^{\mu 0} + \right. \\ &\quad \quad \left. + \omega_S^\mu \bar{K}^0 - \eta_S \bar{K}^{*\mu 0} \right) + \\ &\quad + K_{1,A\mu}^- \left(\frac{1}{\sqrt{2}} K^+ \omega_N^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} K^+ \rho^{\mu 0} - K^+ \omega_S^\mu + K^{*\mu+} \eta_S - \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu+} \eta_N - \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu+} \pi^0 + \right. \\ &\quad \quad \left. + \rho^{\mu+} K^0 - \pi^+ K^{*\mu 0} \right) + \\ &\quad \left. + \bar{K}_{1,A\mu}^0 \left(K^+ \rho^{\mu-} - K^{*\mu+} \pi^- + \frac{1}{\sqrt{2}} K^0 \omega_N^\mu - \frac{1}{\sqrt{2}} K^0 \rho^{\mu 0} - K^0 \omega_S^\mu + K^{*\mu 0} \eta_S - \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \eta_N + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \pi^0 \right) \right\} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} f_{1n,B} (2\omega_N^\mu \eta_N + 2\rho^{\mu 0} \pi^0 + 2\rho^{\mu+} \pi^- + 2\pi^+ \rho^{\mu-} + K^{*\mu+} K^- + K^+ K^{*\mu-} + \right. \\
& \quad \left. + K^{*\mu 0} \bar{K}^0 + K^0 \bar{K}^{*\mu 0}) + \right. \\
& + f_{1S,B} (K^{*\mu-} K^+ + K^- K^{*\mu+} + \bar{K}^{*\mu 0} K^0 + \bar{K}^0 K^{*\mu 0} + 2\omega_S^\mu \eta_S) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} b_{1\mu}^0 (2\omega_n^\mu \pi^0 + 2\rho^{\mu 0} \eta_N + K^{*\mu+} K^- + K^+ K^{*\mu-} - K^{*\mu 0} \bar{K}^0 - K^0 \bar{K}^{*\mu 0}) + \\
& + b_{1\mu}^+ \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \rho^{\mu-} \eta_N + \frac{2}{\sqrt{2}} \omega_N^\mu \pi^- + K^{*\mu 0} K^- + K^0 K^{*\mu-} \right) + \\
& + b_{1\mu}^- \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \omega_N^\mu \pi^+ + \frac{2}{\sqrt{2}} \rho^{\mu+} \eta_N + K^{*\mu+} \bar{K}^0 + K^+ \bar{K}^{*\mu 0} \right) + \\
& + K_{1,B\mu}^+ \left(\omega_S^\mu K^- + \frac{1}{\sqrt{2}} K^- \omega_N^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} K^- \rho^{\mu 0} + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu-} \eta_N + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu-} \pi^0 + \eta_S K^{*\mu-} + \right. \\
& \quad \left. + \bar{K}^{*\mu 0} \pi^- + \bar{K}^0 \rho^{\mu-} \right) + \\
& + K_{1,B\mu}^0 \left(K^{*\mu-} \pi^+ + K^- \rho^{\mu+} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^{*\mu 0} \eta_N - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^{*\mu 0} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^0 \omega_N^\mu - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^0 \rho^{\mu 0} + \right. \\
& \quad \left. + \omega_S^\mu \bar{K}^0 + \eta_S \bar{K}^{*\mu 0} \right) + \\
& + K_{1,B\mu}^- \left(\frac{1}{\sqrt{2}} K^+ \omega_N^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} K^+ \rho^{\mu 0} + K^+ \omega_S^\mu + K^{*\mu+} \eta_S + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu+} \eta_N + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu+} \pi^0 + \right. \\
& \quad \left. + \rho^{\mu+} K^0 + \pi^+ K^{*\mu 0} \right) + \\
& + \bar{K}_{1,B\mu}^0 \left(K^+ \rho^{\mu-} + K^{*\mu+} \pi^- + \frac{1}{\sqrt{2}} K^0 \omega_N^\mu - \frac{1}{\sqrt{2}} K^0 \rho^{\mu 0} + K^0 \omega_S^\mu + K^{*\mu 0} \eta_S + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \eta_N - \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \pi^0 \right) \left. \right\} + \\
& + \mathcal{L}_{mix}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Beachte dabei die bereits erwahnten Zuordnungen

$$\begin{aligned}
f_{1N,A} &\equiv f_1(1285) & f_{1N,B} &\equiv h_1(1170) \\
f_{1S,A} &\equiv f_1(1420) & f_{1S,B} &\equiv h_1(1380) \\
a_1 &\equiv a_1(1260) & b_1 &\equiv b_1(1235).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Die Felder $K_{1,A}$ und $K_{1,B}$ bleiben immer noch unbestimmt, da sie erst nach Mischung physikalischen Teilchen entsprechen.

6.3 Bestimmung der Kopplungskonstanten b

Wir sind nun in der Lage, die Kopplungskonstanten a und b in unserer Lagrange-Dichte (6.1) bzw. (6.7) zu bestimmen. Wir beginnen mit der Kopplungskonstanten b , welche Pseudovektormesonen an Vektor- und Pseudoskalarmesonen koppelt. Die Lagrange-Dichte (6.7) liefert uns mehrere Zerfalle, die

die Kopplungskonstante enthalten. Diese sind:

$$\begin{array}{lll}
 h_1(1170) & \text{kann zerfallen in} & \omega_N \eta_N + \rho\pi + K^* K \\
 h_1(1380) & \text{kann zerfallen in} & \omega_S \eta_S + K^* K \\
 b_1(1235) & \text{kann zerfallen in} & \omega_N \pi + \rho \eta_N + K^* K .
 \end{array} \tag{6.9}$$

Es ist zu beachten, dass wir hier nur symbolisch die möglichen Zerfälle notiert haben und Kopplungskonstanten nicht aufgeführt sind. Zerfälle der $K_{1,B}$ -Felder können wir natürlich nicht verwenden, da diese erst mit $K_{1,A}$ gemischt werden müssen, um physikalische Teilchen zu beschreiben. Betrachten wir jedoch die Massen der Teilchen, erkennen wir, dass die Zerfälle in $\omega\eta$ und $\rho\eta$ kinematisch nicht erlaubt sind. Des Weiteren haben wir keine experimentellen Daten zu den Zerfällen in K^*K gegeben. Es bleiben also lediglich die Zerfälle $h_1(1170) \rightarrow \rho\pi$ und $b_1(1235) \rightarrow \omega_N\pi$ bzw. wir betrachten $\omega\pi$, da der Mischungswinkel zwischen ω_N und ω_S sehr klein ist und wir anstatt mit ω_N direkt mit ω rechnen können. Da der Zerfall $b_1(1235) \rightarrow \omega\pi$ laut [8] der dominante Kanal ist, eignet er sich hervorragend zur Bestimmung der Kopplungskonstanten b .

Der zu diesem Zerfall gehörende Term der Lagrange-Dichte (6.7) lautet:

$$\mathcal{L}_{b_1} = \frac{b}{2\sqrt{2}} b_{1\mu}^0 \omega^\mu \pi^0 . \tag{6.10}$$

wobei wir o.B.d.A. den neutralen Term herausgenommen haben. Analog hätten wir auch einen geladenen Term verwenden können oder aber alle drei Terme. Doch in letzterem Fall hätten wir am Ende wegen der drei unabhängigen Anfangszustände wieder über die drei Zerfälle mitteln müssen. Und da die Zerfallsbreiten der Einzelnen, aufgrund von fast gleichen Massen geladener und ungeladener Teilchen, annähernd gleich sind, erhalten wir wieder dasselbe Ergebnis. Wir können alsdann die Zerfallsbreite $\Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi}$ unter Verwendung unseres obigen Ergebnisses zur Berechnung der Zerfallsbreite $\Gamma_{A \rightarrow VP}$ (4.33) berechnen, indem wir lediglich die Konstante anpassen und die Massen der Teilchen, welche wir [8] entnehmen,

$$\begin{aligned}
 m_{\pi^0} &= (134.9766 \pm 0.0006) \text{ MeV} \\
 m_{\omega^0(782)} &= (782.65 \pm 0.12) \text{ MeV} \\
 m_{b_1(1235)} &= (1229.5 \pm 3.2) \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

einsetzen. Wir erhalten somit:

$$\Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = (2.44 \pm 0.0062) \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{MeV}} |b|^2 \tag{6.11}$$

Laut [8] (Document ID: Weidenauer 93, TECN: ASTE) sollte diese Zerfallsbreite gleich (142 ± 9) MeV sein. Verwenden wir diese Angabe können wir obige Gleichung nach b auflösen und erhalten

$$b = (7630.03 \pm 241.9) \text{ MeV} . \tag{6.12}$$

Um zu überprüfen, ob dieses Ergebnis realistisch ist, verwenden wir b aus Gl.(6.12), um die Zerfallsbreite von $h_1(1170)$ in $\rho\pi$ zu berechnen. Die zugehörigen Terme der Lagrange-Dichte sind

$$\mathcal{L}_{h_1} = \frac{a}{2} f_{1N,B} (\rho^{\mu 0} \pi^0 + \rho^{\mu+} \pi^- + \rho^{\mu-} \pi^+) \tag{6.13}$$

Diesmal müssen wir alle drei (neutrale sowie geladene) Terme verwenden, da alle aus demselben Anfangszustand $f_{1N,B}$ entstehen. Die Berechnung der Zerfallsbreiten mit geladenen Feldern läuft genauso wie im Falle neutraler Felder ab. Es treten in den geladenen Feldern zwar unterschiedliche Erzeuger und Vernichter (für Teilchen und Antiteilchen) auf. Doch müssen sich diese genau wie im Fall neutraler Felder im S -Matrix-Element genau richtig abpaaren und wir erhalten schließlich dasselbe Endresultat für die Zerfallsbreite. Einzig die Massenunterschiede zwischen geladenen und neutralen Teilchen sind zu berücksichtigen. Diese entnehmen wir wieder [8]:

$$\begin{aligned} m_{h_1(1170)} &= (1170 \pm 20) \text{ MeV} \\ m_{\pi^0} &= (134.9766 \pm 0.0006) \text{ MeV} \\ m_{\pi^\pm} &= (139.57018 \pm 0.00035) \text{ MeV} \\ m_{\rho^0(770)} &= (775.49 \pm 0.34) \text{ MeV} \\ m_{\rho^\pm(770)} &= (776.29 \pm 1.14) \text{ MeV} \end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich mit (4.33) durch Anpassung der Konstanten vor der Lagrange-Dichte und (6.12) das folgende Resultat:

$$\begin{aligned} \Gamma_{h_1(1170) \rightarrow \rho\pi} &= \Gamma_{h_1(1170) \rightarrow \rho^0\pi^0} + \Gamma_{h_1(1170) \rightarrow \rho^+\pi^-} + \Gamma_{h_1(1170) \rightarrow \rho^-\pi^+} = \\ &= (408.62 \pm 8.64) \text{ MeV} \end{aligned} \tag{6.14}$$

Nehmen wir an, der Zerfall $h_1(1170)$ in $\rho\pi$ sei der dominante Kanal und trägt 100% der gesamten Zerfallsbreite, so liefert uns [8] einen Vergleichswert von (360 ± 40) MeV. Verwenden wir 360 MeV, ergibt sich der relative Fehler unserer Rechnung zu $\Gamma_{h_1(1170) \rightarrow \rho\pi}$ zu nur 13%. Der von uns bestimmte Wert der Kopplungskonstanten b scheint damit ein recht vernünftiges Ergebnis darzustellen.

6.4 Bestimmung der Kopplungskonstanten a

Die Berechnung der Kopplungskonstanten a war Teil der Bachelorarbeit [9] meines Kommilitonen Florian Divotgey und ist dort in aller Ausführlichkeit nachzulesen. An dieser Stelle wollen wir das Vorgehen und die Resultate nur kurz zusammenfassen. Zur Bestimmung der Kopplungskonstanten a eignet sich die Berechnung der Zerfallsbreite des dominanten Zerfallskanals $f_1(1420) \rightarrow K\bar{K}^*(892) + c.c.$. Dabei ist zu beachten, dass $K^*(892)$ mit nahezu 100%-iger Wahrscheinlichkeit in $K\pi$ weiter zerfällt. Dies liefert für die Kopplungskonstante a den folgenden Wert:

$$a = (5467.96 \pm 262.85) \text{ MeV} \tag{6.15}$$

Überprüft und für realistisch befunden wurde dieser Wert durch die Berechnung der Zerfallsbreite von $a_1(1260)$ in $\rho\pi$.

7 Mischung der Kaonenfelder

7.1 Notwendigkeit einer Mischung

Betrachten wir zunächst weiterhin unsere Lagrange-Dichte (6.1) unter Vernachlässigung des Mischungsterm (d.h. $c = 0$), so könnten die beiden noch unbestimmten Felder $K_{1,A}$ und $K_{1,B}$ mit den physikalischen Feldern $K_1(1270)$ und $K_1(1400)$ identifiziert werden. Berechnen wir allerdings z.B. den Zerfall der beiden Kaonen in $K^*(892)\pi$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Gamma_{K_1(1270) \rightarrow K^*(892)\pi} &= 42.78 \text{ MeV} \\ \Gamma_{K_1(1400) \rightarrow K^*(892)\pi} &= 94.27 \text{ MeV}\end{aligned}\tag{7.1}$$

Ein Vergleich dieser Ergebnisse mit den experimentellen Daten aus [8] lässt erkennen, dass unser Modell im Fall der Kaonenfelder ohne den Mischungsterm \mathcal{L}_{mix} keine vernünftigen Ergebnisse liefern kann.

7.2 Mischungsterm \mathcal{L}_{mix}

Nachdem wir die beiden Kopplungskonstanten a und b unserer Lagrange-Dichte (6.7) bestimmt haben, wollen wir auch den bislang noch nicht weiter definierten Mischungsterm \mathcal{L}_{mix} betrachten. Diesen Term entnehmen wir ebenfalls der PhD-Arbeit von Denis Parganlija [6] und fügen lediglich ein i hinzu, um zu gewährleisten, dass \mathcal{L}_{mix} hermitesch ist:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{mix} &= ic \text{Tr} (\Delta [A_\mu, B^\mu]) \\ &\equiv \frac{ic}{2} (\delta_S - \delta_N) \left(\bar{K}_{1A,\mu}^0 K_{1B}^{\mu 0} - \bar{K}_{1B,\mu}^0 K_{1A}^{\mu 0} + K_{1A,\mu}^- K_{1B}^{\mu +} - K_{1A,\mu}^+ K_{1B}^{\mu -} \right)\end{aligned}\tag{7.2}$$

Dabei ist $\Delta = \text{diag}(\delta_u, \delta_d, \delta_s) \sim \text{diag}(m_u^2, m_d^2, m_s^2)$ (vgl. dazu auch [6]), A^μ und B^μ sind die bekannten Nonets aus Axial- bzw. Pseudovektormesonen und c ist eine noch zu bestimmende Konstante. Da die Massen von up- und down-Quark annähernd identisch sind, können wir $\delta_u = \delta_d \equiv \delta_N$ und $\delta_s \equiv \delta_S$ setzen. Damit ist $(\delta_S - \delta_N)$ proportional zur Differenz der quadratischen Massen des strange- und des up-(oder auch d-)Quarks, $m_s^2 - m_u^2$, und \mathcal{L}_{mix} bricht aufgrund der nicht verschwindenden Massendifferenz die Flavor-Symmetrie. Dies sorgt schließlich für eine Mischung der beiden Felder K_{1A} und K_{1B} und aus diesen beiden unphysikalischen Feldern ergeben sich die experimentell bekannten Felder der Teilchen $K_1(1270)$ und $K_1(1400)$.

7.3 Bestimmung des Mischungswinkels aus der Zerfallsbreite

$$\Gamma_{K_1(1270) \rightarrow K^* \pi}$$

Durch Einbeziehen des Mischungsterms \mathcal{L}_{mix} besitzt unsere Lagrange-Dichte jetzt nichtlineare Terme der Felder K_{1A} und K_{1B} . In der klassischen Mechanik ist uns die Auswirkung eines solchen Mischungsterms bewusst. Das Resultat wären gekoppelte Bewegungsgleichungen¹, welche auf den ersten Blick nicht immer einfach zu lösen sind. Tatsächlich gibt es aber einen kleinen „Trick“, der es uns ermöglicht, wieder freie Bewegungsgleichungen zu erhalten.

Für die folgenden Berechnungen verwenden wir den Zerfall von K_{1A} und K_{1B} in $K^* \pi$, da dieser experimentell gut bekannt ist. Wir betrachten dazu die volle Lagrange-Dichte für diesen Zerfall. Da beide Felder massive Vektorteilchen beschreiben, entspricht der freie Anteil der Lagrange-Dichte der Proca-Gleichung. Des Weiteren kommt noch der Mischungsterm \mathcal{L}_{mix} und die Terme des Wechselwirkungsteils \mathcal{L}_{int} hinzu, welcher den Zerfall der Felder in K_{1A} und K_{1B} in $K^* \pi$ enthält. Unter Beachtung aller möglichen Ladungsverteilungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} K_{1A,\mu\nu}^+ K_{1A}^{\mu\nu-} + m_{K_{1A}}^2 K_{1A\mu}^+ K_{1A}^{\mu-} - \frac{1}{4} K_{1A,\mu\nu}^0 \bar{K}_{1A}^{\mu\nu 0} + m_{K_{1A}} K_{1A\mu}^0 \bar{K}_{1A}^{\mu 0} + \\ & -\frac{1}{4} K_{1B,\mu\nu}^+ K_{1B}^{\mu\nu-} + m_{K_{1B}}^2 K_{1B\mu}^+ K_{1B}^{\mu-} - \frac{1}{4} K_{1B,\mu\nu}^0 \bar{K}_{1B}^{\mu\nu 0} + m_{K_{1B}}^2 K_{1B\mu}^0 \bar{K}_{1B}^{\mu 0} + \\ & + iC \left(\bar{K}_{1A\mu}^0 K_{1B}^{\mu 0} - \bar{K}_{1B\mu}^0 K_{1A}^{\mu 0} + K_{1A\mu}^- K_{1B}^{\mu+} - K_{1A\mu}^+ K_{1B}^{\mu-} \right) + \\ & + \frac{ai}{2\sqrt{2}} \left[K_{1A\mu}^0 \left(K^{*\mu-} \pi^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^{*\mu 0} \pi^0 \right) + \bar{K}_{1A\mu}^0 \left(-K^{*\mu+} \pi^- + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \pi^0 \right) + \right. \\ & \quad \left. + K_{1A\mu}^+ \left(\bar{K}^{*\mu 0} \pi^- + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu-} \pi^0 \right) + K_{1A\mu}^- \left(-K^{*\mu 0} \pi^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu+} \pi^0 \right) \right] + \\ & + \frac{b}{2\sqrt{2}} \left[K_{1B\mu}^0 \left(K^{*\mu-} \pi^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^{*\mu 0} \pi^0 \right) + \bar{K}_{1B\mu}^0 \left(K^{*\mu+} \pi^- - \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \pi^0 \right) + \right. \\ & \quad \left. + K_{1B\mu}^+ \left(\bar{K}^{*\mu 0} \pi^- + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu-} \pi^0 \right) + K_{1B\mu}^- \left(K^{*\mu 0} \pi^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu+} \pi^0 \right) \right] \end{aligned} \quad (7.3)$$

Unter Einführung der neuen Konstanten $C = \frac{g}{2}(\delta_S - \delta_N)$. Wir wählen nun den Ansatz, dass die unphysikalischen Felder K_{1A} und K_{1B} folgendermaßen mischen und sich die Felder $K_1(1270)$ und $K_1(1400)$ ergeben:

$$\begin{pmatrix} K_{1A} \\ K_{1B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & i \sin \varphi \\ i \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1(1270) \\ K_1(1400) \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Dabei ist φ der sogenannte Mischungswinkel. Wir wollen mit diesem Ansatz erreichen, dass die Lagrange-Dichte, ausgedrückt durch die Felder $K_1(1270)$ und $K_1(1400)$ frei von jeglichen Mischungstermen ist. Das bedeutet also, dass die Matrix, welche für die Mischung verantwortlich ist, ein Element der $SU(2)$ ist und die Lagrange-Dichte diagonalisieren soll. In der Tat ist das der Fall, was wir später noch zeigen werden. Setzen wir jetzt diesen Ansatz in die Lagrange-Dichte ein und berücksichtigen,

¹Ein Beispiel dazu ist in der PhD-Arbeit von Francesco Giacosa [7] vorgerechnet.

dass der Mischungsterm dabei verschwindet, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' = \text{„Proca-Anteile“} &+ \frac{i}{2\sqrt{2}} (a \cos \varphi + b \sin \varphi) K_1^0(1270) \left(K^{*\mu-} \pi^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^{\mu 0} \pi^0 \right) + \\
 &- \frac{i}{2\sqrt{2}} (a \cos \varphi + b \sin \varphi) \bar{K}_1^0(1270) \left(K^{*\mu+} \pi^- - \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \pi^0 \right) + \\
 &+ \frac{i}{2\sqrt{2}} (a \cos \varphi + b \sin \varphi) K_1^+(1270) \left(\bar{K}^{*\mu 0} \pi^- + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu-} \pi^0 \right) + \\
 &- \frac{i}{2\sqrt{2}} (a \cos \varphi + b \sin \varphi) K_1^-(1270) \left(K^{*\mu 0} \pi^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu+} \pi^0 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} (-a \sin \varphi + b \cos \varphi) K_1^0(1400) \left(K^{*\mu-} \pi^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^{*\mu 0} \pi^0 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} (-a \sin \varphi + b \cos \varphi) \bar{K}_1^0(1400) \left(K^{*\mu+} \pi^- - \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu 0} \pi^0 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} (-a \sin \varphi + b \cos \varphi) K_1^+(1400) \left(\bar{K}^{*\mu 0} \pi^- + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu-} \pi^0 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} (-a \sin \varphi + b \cos \varphi) K_1^-(1400) \left(K^{*\mu 0} \pi^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{*\mu+} \pi^0 \right) \quad (7.5)
 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass der Zerfall von $K_1(1270)$ in $K^* \pi$ die Kopplungskonstante $i/(2\sqrt{2})(a \cos \varphi + b \sin \varphi)$ und der Zerfall von $K_1(1400)$ in $K^* \pi$ die Kopplungskonstante $1/(2\sqrt{2})(-a \sin \varphi + b \cos \varphi)$ besitzt. Da die Zerfallsbreite von $K_1(1270)$ experimentell am besten bekannt ist, werden wir diesen Zerfall nutzen, um den Mischungswinkel φ zu bestimmen. Wir berechnen die Zerfallsbreite wie aus dem Kapitel „Berechnung der Zerfallsbreite eines Zerfalls der Form $A \rightarrow VP$ “ und nutzen aus, dass sie laut [8] (Document ID: MAZZUCATO, 79) gleich (14 ± 11) MeV sein muss.²

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{K_1(1270) \rightarrow K^* \pi} &= \frac{1}{4} \left(\Gamma_{K_1^0(1270) \rightarrow K^{*\mu-} \pi^+ + \bar{K}^{*\mu 0} \pi^0} + \Gamma_{\bar{K}_1^0(1270) \rightarrow K^{*\mu+} \pi^- + K^{*\mu 0} \pi^0} + \right. \\
 &\quad \left. + \Gamma_{K_1^+(1270) \rightarrow \bar{K}^{*\mu 0} \pi^- + K^{*\mu-} \pi^0} + \Gamma_{K_1^-(1270) \rightarrow K^{*\mu 0} \pi^+ + K^{*\mu+} \pi^0} \right) \\
 &= (1.43 \pm 135.61) \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{MeV}} |a \cos \varphi + b \sin \varphi|^2 \\
 &\stackrel{!}{=} (14 \pm 11) \text{ MeV} \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert zwei mögliche Werte für den Mischungswinkel:

$$\varphi_1 = (-55.09 \pm 8.1)^\circ \quad \varphi_2 = (-16.16 \pm 8.1)^\circ \quad (7.7)$$

Mit diesen Resultaten können wir nun die Zerfallsbreite von $K_1(1400) \rightarrow K^* \pi$ berechnen und erhalten für alle vier Winkel φ_i mit $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\Gamma_{K_1(1400) \rightarrow K^* \pi} = (126.84 \pm 14.7) \text{ MeV} \quad (7.8)$$

²Des Weiteren ist möglich, aus einer in [8] angegebenen Branching Ratio (Document ID: DAUM, 81c) und der Gesamtbreite einen Wert von $\Gamma_{K(1270) \rightarrow K^* \pi} = (13.92 \pm 4.49)$ MeV zu berechnen. In der Bachelorarbeit von Florian Divotgey [9] ist die Rechnung unter Verwendung dieses Wertes nachzulesen. Die berechneten Mischungswinkel unterscheiden sich nur um wenige Zehntel Grad.

In [8] finden wir einen experimentell bestimmten Wert von (117 ± 10) MeV aus dem Jahre 1977 (DOCUMENT ID: CARNEGIE). Außerdem können wir uns eine Zerfallsbreite mittels einer angegebenen Branching Ratio $\Gamma(K^*(892)\pi)/\Gamma_{total} = 0.94 \pm 0.06$ (DOCUMENT ID: DAUM, 1981) und einer gesamten Breite von $\Gamma_{total} = (174 \pm 13)$ MeV berechnen. Dies ergibt $\Gamma_{K_1(1400) \rightarrow K^*\pi} = (163.56 \pm 16.0724)$ MeV. Der Vergleich dieser Werte mit dem von uns berechneten theoretischen Wert der Zerfallsbreite lässt erkennen, dass unser Modell recht zufriedenstellende Ergebnisse liefert.

7.4 Diagonalisierung der Lagrange-Dichte

Wir wollen noch zeigen, dass die eingeführte $SU(2)$ -„Mischungsmatrix“ in unserem Ansatz (7.4) tatsächlich die Lagrangedichte diagonalisieren kann. Die sich daraus ergebende Bedingung wird uns einen Formalismus für den Mischungswinkel liefern, der es ermöglicht, diesen nur aus der Kenntnis der Konstanten vor dem Mischungsterm \mathcal{L}_{mix} und der nackten Massen von K_{1A} und K_{1B} zu bestimmen. Wir führen den folgenden Vektor κ und die Matrix Ω

$$\kappa = \begin{pmatrix} K_{1A} \\ K_{1B} \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} m_{K_{1A}}^2 & -Ci \\ Ci & m_{K_{1B}}^2 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

ein. Damit können wir (7.3) schreiben als

$$\mathcal{L} = \text{„Tensoren“} + \kappa_0^\dagger \Omega \kappa_0 + \kappa_+^\dagger \Omega \kappa_+, \quad (7.10)$$

wobei κ_0 die neutralen und κ_+ die positiv geladenen Kaonenfelder beinhaltet und die Terme mit den Tensoren nicht mehr weiter ausgeschrieben wurden, da sie in den folgenden Betrachtungen nicht weiter von Bedeutung sind. Wir leiten nun die Bedingung dafür ab, dass die Matrix aus Gl.(7.4)

$$M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & i \sin \varphi \\ i \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

die Lagrange-Dichte diagonalisiert. Es muss also gelten

$$M^\dagger \Omega M = \begin{pmatrix} m_{K_1(1270)}^2 & 0 \\ 0 & m_{K_1(1400)}^2 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

$m_{K_1(1270)}^2$ und $m_{K_1(1400)}^2$ sind die Eigenwerte der Matrix Ω , welche wir später noch bestimmen werden und gleichzeitig den quadrierten Massen der physikalischen Teilchen $K_1(1270)$ und $K_1(1400)$ entsprechen sollen. Aus der Bedingung, dass die Nichtdiagonal-Elemente von $M^\dagger \Omega M$ gleich Null sein sollen, ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem Mischungswinkel φ , den Massen und der Konstante C vor dem Mischungsterm der Lagrange-Dichte:

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2C}{m_{K_{1A}}^2 - m_{K_{1B}}^2} \right) \quad (7.13)$$

Des Weiteren bestimmen wir nun noch die Eigenwerte von Ω , um einen Zusammenhang zwischen den Massen der physikalischen und der unphysikalischen Kaonen herzustellen. Aus der Bedingung

$$\det(\lambda \mathbf{1} - \Omega) \stackrel{!}{=} 0 \quad (7.14)$$

ergeben sich folgende zwei Bedingungen:

$$m_{K_1(1270)}^2 = \frac{1}{2} \left[m_{K_{1,A}}^2 + m_{K_{1,B}}^2 + \sqrt{\left(m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2\right)^2 + 4C^2} \right] \approx m_{K_{1A}}^2 + \frac{C^2}{m_{K_{1A}}^2 - m_{K_{1B}}^2} \quad (7.15)$$

$$m_{K_1(1400)}^2 = \frac{1}{2} \left[m_{K_{1,A}}^2 + m_{K_{1,B}}^2 - \sqrt{\left(m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2\right)^2 + 4C^2} \right] \approx m_{K_{1B}}^2 - \frac{C^2}{m_{K_{1A}}^2 - m_{K_{1B}}^2} \quad (7.16)$$

Die jeweils letzte Umformung gilt für den Fall $\left(m_{K_{1,A}}^2 - m_{K_{1,B}}^2\right)^2 \gg 4C^2$. Benutzen wir (7.13) und (7.16), können wir die Konstante C und die Massen der unphysikalischen Kaonenfelder K_{1A} und K_{1B} bestimmen. Es ergeben sich für den Mischungswinkel von $\varphi = (-16.162 \pm 8.13371)^\circ$:

$$C = 92374.6 \text{ MeV} \quad (7.17)$$

$$m_{K_{1A}} = 1283.4 \text{ MeV} \quad (7.18)$$

$$m_{K_{1B}} = 1392.5 \text{ MeV} \quad (7.19)$$

Der anderen oben berechnete mögliche Mischungswinkel $\varphi_1 = (-55.09 \pm 8.1)^\circ$ liefert (momentan noch) kein Ergebnis für C und damit auch nicht für die Massen.³

Wir vergleichen unsere Resultate der Massen von K_{1A} und K_{1B} z.B. mit den Resultaten von [10]. Burakovsky und Goldman verwendeten dort ein nicht-relativistisches Modell und fanden für einen Mischungswinkel von ca. 37° für die Massen $m_{K_{1A}} = 1322 \text{ MeV}$ und $m_{K_{1B}} = 1356 \text{ MeV}$ und für einen Mischungswinkel von ca. 45° $m_{K_{1A}} = m_{K_{1B}} = 1339 \text{ MeV}$. Die Ergebnisse unseres Modells stimmen somit sehr gut mit schon bekannten Ergebnissen überein.

³In einer später folgenden Arbeit werden wir sehen, dass wir auch für diesen Winkel Massen bestimmen können.

8 Zusammenfassung

Wir haben nun alle unbekannt Konstanten unseres Modells bestimmt und zunächst durch die Berechnung verschiedener Zerfallsbreiten überprüft, dass dieses Modell tatsächlich recht zufriedenstellende Ergebnisse liefern kann. Des Weiteren haben wir die Mischung der Kaonenfelder K_{1a} und K_{1B} untersucht, was uns eine weitere Bestätigung des Modells aufzeigen konnte. An dieser Stelle ist nun abschließend eine kurze Zusammenfassung unserer Resultate angebracht.

Die Lagrange-Dichte unseres Modells zur Beschreibung von Axial- bzw. Pseudovektormesonen, die in Vektor- und pseudoskalare Mesonen zerfallen, und zur Untersuchung der Mischung von Kaonenfeldern lautet

$$\mathcal{L}_{int} = ai\text{Tr}(A_\mu[V^\mu, P]) + b\text{Tr}(B_\mu\{V^\mu, P\}) + \mathcal{L}_{mix}, \quad (8.1)$$

wobei der Mischungsterm

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mix} &= ic\text{Tr}(\Delta[A_\mu, B^\mu]) \\ &\equiv \frac{ic}{2}(\delta_S - \delta_N) \left(\bar{K}_{1A,\mu}^0 K_{1B}^{\mu 0} - \bar{K}_{1B,\mu}^0 K_{1A}^{\mu 0} + K_{1A,\mu}^- K_{1B}^{\mu +} - K_{1A,\mu}^+ K_{1B}^{\mu -} \right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

ist und wir die Konstanten a , b und c bestimmt haben zu

$$\begin{aligned} a &= (5467.96 \pm 262.8) \text{ MeV} \\ b &= (7630.03 \pm 241.9) \text{ MeV} \\ C &= \frac{c}{2}(\delta_S - \delta_N) = 92374.6 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Mischungsterms und unter Benutzung des Ansatzes

$$\begin{pmatrix} K_{1A} \\ K_{1B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & i \sin \varphi \\ i \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1(1270) \\ K_1(1400) \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

war es uns möglich, den Mischungswinkel der Kaonenfelder mittels der Zerfallsbreite von $K_1(1270)$ in $K^*\pi$ zu

$$\varphi_1 = (-55.09 \pm 8.1)^\circ \qquad \varphi_2 = (-16.16 \pm 8.1)^\circ$$

zu bestimmen. Bei der näheren Betrachtung der Diagonalisierung, welche es uns ermöglichte, die Konstante $C = \frac{c}{2}(\delta_S - \delta_N)$ und die Massen der unphysikalischen Kaonenfelder K_{1A} und K_{1B} zu berechnen, erkannten wir, dass nur der Winkel

$$\varphi = (-16.162 \pm 8.13371)^\circ \quad (8.4)$$

ein lösbares Gleichungssystem und damit ein Resultat lieferte. Allerdings werden wir in einer späteren Arbeit versuchen auch für den anderen Mischwinkel Kaonen-Massen zu bestimmen, da dies prinzipiell möglich sein sollte. Die Massen der Felder K_{1A} und K_{1B} berechneten sich zu

$$m_{K_{1A}} = 1283.4 \text{ MeV}$$

$$m_{K_{1B}} = 1392.5 \text{ MeV}$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass selbst mit dem in dieser Arbeit verwendeten, stark vereinfachten, Drei-Flavor-Modell der QCD gute und interessante Ergebnisse erzielt werden können.

9 Danksagungen

Ich möchte mich für die Unterstützung während der Erstellung meiner Bachelorarbeit bedanken bei

- Prof. Dr. Dirk H. Rischke als Betreuer dieser Arbeit. Für Fragen war er stets offen und gab hilfreiche Antworten und Erklärungen, die für mein Verständnis des Themas wichtig waren. Außerdem bin ich ihm sehr dankbar für seine hervorragenden Einführungsvorlesungen in die Theoretische Physik (*Theoretische Physik I - VI, 2009 - 2012*), welche immer gleichzeitig Spaß gemacht haben und unheimlich lehrreich waren.
- Dr. Francesco Giacosa als Betreuer dieser Arbeit und erste Anlaufstelle bei Problemen und Fragen. Ich danke ihm für die vielen „Informations-Häppchen“, ohne die die Anfertigung dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre.
- Florian Divotgey, meinem Kommilitonen, mit dem ich jegliche Probleme, die während der Arbeit auftauchten, diskutieren konnte und der mir den Einstieg in die Quantenfeldtheorie sehr erleichtert hat.
- den Kollegen in meinem Büro für die nette Atmosphäre und die Beantwortung kleiner Fragen.
- der Arbeitsgruppe, für das Hinterfragen meiner Arbeit.
- meinen Freunden, die immer Verständnis dafür hatten, wenn ich aufgrund der Bachelorarbeit nicht viel Zeit hatte.
- meiner Familie: Meinem Vater, meiner Schwester und besonders meiner Mutter für die orthografischen Korrekturen und ihr jederzeit offenes Ohr. Meinem „Stiefvater“, der mir klar machte, dass jede Herausforderung eine Chance darstellt.
- meinem Freund für das Diktieren des langen „Formel-Kauderwelschs“ und dem Auffinden orthografischer Fehler. Am meisten danke ich ihm aber dafür, dass er mir immer wieder Kraft gegeben hat, auch in den scheinbar verzweifeltsten Situationen weiter zu machen.

Literaturverzeichnis

- [1] Michael E. Peskin und Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press)
- [2] Walter Greiner und Joachim Reinhardt, *Theoretische Physik Band 7a: Feldquantisierung* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)
- [3] Franz Mandl und Graham Shaw, *Quantum Field Theory* - 2nd ed. (John Wiley & Sons, Ltd.)
- [4] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory* - 2nd ed. (Cambridge University Press)
- [5] Franz Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory* (John Wiley & Sons, Inc.)
- [6] Denis Parganlija, *Quarkonium Phenomenology in Vacuum* (PhD thesis), Fachbereich Physik der Johann Wolfgang von Goethe-Universität in Frankfurt am Main (2011)
- [7] Francesco Giacosa. *Glueball phenomenology within a nonlocal approach* (PhD thesis), Faculty for Mathematics and Physics of Tübingen Universität (2005)
- [8] Particle Data Group, *Review of Particle Physics*, Volume 37, Number 7A, July 2010, Article 075021, Journal of Physics G - Nuclear and Particle Physics, IOP Publishing (<http://pdg.lbl.gov>)
- [9] Florian Divotgey, *Phänomenologie von Axialvektor-Mesonen und Mischungseffekte in Kaon-Feldern* (Bachelorarbeit), Fachbereich Theoretische Physik der Johann Wolfgang von Goethe-Universität Frankfurt am Main (2012)
- [10] L. Burakovsky and J. T. Goldman, *Towards resolutions of the enigmas of P wave meson spectroscopy*, Phys. Rev. D 57, 2879 (1998) [arXiv:hep-ph/9703271]
- [11] H.Hatanaka and K.-C. Yang *$K(1)(1270)$ - $K(1)(1400)$ Mixing Angle and New-Physics Effects in $B^- K(1)1+ 1-$ Decays*, Phys. Rev. D 78 (2008) 074007 [arXiv:0808.3731 [hep-ph]]
- [12] C. Bromberg, J. Dickey, G. Fox, R. Gomes, W. Kropac, J. Pine, S. Stampke and H. Haggerty *et al.*, *Preservation Of The D And E Mesons And Possible Three Kaon Enhancements In $Pi^- P^- K^0 K^+ K^- X$ At 50-gev/c And 100-gev/c*, Phys. Rev. D 22 (1980) 1513.

Erklärung nach §30 (11) Ordnung für den Bachelor-Studiengang

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen oder aus anderen fremden Texten entnommen wurden, sind von mir als solche kenntlich gemacht worden. Ferner erkläre ich, dass die Arbeit nicht - auch nicht auszugsweise - für eine andere Prüfung verwendet wurde.

Frankfurt am Main, September 2012