

**Aufgabenblatt 6**

**1.12.2011**

Aufgabe 1: Ultrarelativistisches ideales Gas im kanonischen Ensemble (10 Punkte = 4 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1)

Gegeben sei ein ultrarelativistisches ideales Gas ( $\varepsilon_i = |\vec{p}_i|c$  ist die Energie des  $i$ ten Teilchens im ultrarelativistischen Limes.).

1. Leiten Sie die Zustandssumme  $Z(T, V, N)$  im kanonischen Ensemble her.
2. Berechnen Sie daraus die freie Energie  $F(T, V, N)$ ,
3. den Druck  $p(T, V, N)$ ,
4. das chemische Potential  $\mu(T, V, N)$ ,
5. die Entropie  $S(T, V, N)$  und
6. die innere Energie  $E(T, V, N)$ .

Aufgabe 2: Fluktuationen im großkanonischen Ensemble (6 Punkte = 2 + 2 + 2)

Betrachten Sie ein System bei konstantem Volumen ( $dV = 0$ ), das im thermischen Kontakt mit einem Wärmereservoir der Temperatur  $T$  steht. Mit diesem Reservoir können Teilchen (bei gegebenem chemischen Potential  $\mu$ ) ausgetauscht werden. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen für die Fluktuationen der Teilchenzahl  $N$  und der Energie  $E$  im großkanonischen Ensemble

1.  $\langle \Delta E^2 \rangle = k_B T^2 \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right|_{\mu} + \frac{\mu}{\beta} \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu} \right|_T,$
2.  $\langle \Delta N^2 \rangle = \frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial N}{\partial \mu} \right|_T,$
3.  $\langle \Delta E \Delta N \rangle = \frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu} \right|_T,$

mit  $\Delta X \equiv X - \langle X \rangle$  und  $\beta = (k_B T)^{-1}$ .

Aufgabe 3: Ideales Gas im Schwerfeld (14 Punkte = 3 + 2 + 4 + 3 + 2)

Gegeben sei ein ideales, einatomiges Gas mit konstanter Temperatur  $T$ . Es befinde sich in einem homogenen Schwerfeld  $V_{\text{pot}} = mgz$  in einem Zylinder mit konstanter Grundfläche  $A$  (parallel zur  $xy$ -Ebene) und der Höhe  $h$ .

1. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme  $Z(T, A, h, N)$  für das Gas. Berechnen Sie den Limes  $h \rightarrow \infty$ .
2. Bestimmen Sie die mittlere Energie und die Entropie des Gases.
3. Bestimmen Sie die Anzahl von Teilchen  $n(z)dz$ , die sich zwischen den Höhen  $z$  und  $z + dz$  befinden. Bestimmen Sie daraus den Druck als Funktion der Höhe  $z$ .
4. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme  $\mathcal{Z}(T, A, h, \mu)$ . Berechnen Sie den Limes  $h \rightarrow \infty$ .
5. Bestimmen Sie die mittlere Energie und die Entropie des Gases.