THEORETIKUM ZUR STATISTISCHEN MECHANIK WS 2011/2012

Aufgabenblatt 2 **3.11.2011**

Aufgabe 1: Differentialgymnastik (4 Punkte)

Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f(x_1, ..., x_n)$ und $g(x_1, ..., x_n)$. Die (infinitesimale) Änderung von f bei (infinitesimaler) Variation von x_1 und konstant gehaltenen Variablen $x_2, ..., x_n$ ist durch

$$\left(\frac{df}{dx_1}\right)\Bigg|_{x_2,\ldots,x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

gegeben. Wie ändert sich f, wenn anstelle von x_2 der Wert von g konstant gehalten wird, d.h. was sind

$$\left(\frac{df}{dx_1}\right)\Bigg|_{g,x_3,\ldots,x_n} \quad \text{und} \quad \left(\frac{df}{dg}\right)\Bigg|_{x_2,\ldots,x_n} \quad ?$$

Aufgabe 2: Ergodisch oder nicht? (10 Punkte = 5 + 5)

1. Betrachten Sie die eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes im Potential

$$\begin{aligned} V(x) = {} & \theta(x_1 - x)\,\kappa(x - x_1)^2 \\ & + \theta(x - x_1)\theta(x_2 - x)\,\min_x \left\{\kappa(x - x_1)^2,\, \lambda(x - x_2)^2\right\} \\ & + \theta(x - x_2)\,\lambda(x - x_2)^2 \ , \end{aligned}$$

   wobei $x_2 > x_1$ und $\theta(x)$ die Stufenfunktion ist. Für welche Energien $E = T + V$ ist dieses System ergodisch bzw. nicht ergodisch? Diskutieren Sie in beiden Fällen die Abhängigkeit des zeitlichen Mittelwertes des Ortes von den Anfangsbedingungen.

2. Betrachten Sie ein System von N ungekoppelten harmonischen Oszillatoren mit der Gesamtenergie $E = \sum_{i=1}^{N} E_i$, wobei E_i die Energie des i-ten Oszillators ist. Zeigen Sie, daß das System nicht ergodisch ist.

Aufgabe 3: Spinsystem (16 Punkte = 3 + 3 + 3 + 3 + 4)

Betrachten Sie ein quasi-isoliertes System von N lokalisierten, aber ununterscheidbaren Teilchen mit Spin 1/2. Jedes Teilchen habe ein magnetisches Moment μ, welches sich je nach Spineinstellung parallel oder antiparallel zu einem äußeren Magnetfeld H orientiert. Sei n_1 die Zahl der Spins parallel zu H und n_2 die der Spins antiparallel zu H. Die Energie E des Systems beträgt dann

$$E = -(n_1 - n_2)\mu H \ .$$

Man betrachte nun das Energieintervall $[E, E + \Delta E]$, wobei ΔE *makroskopisch klein*, $\Delta E \ll E$, aber *mikroskopisch groß*, $\Delta E \gg \mu H$, sei.

1. Bestimmen Sie die Zahl der makroskopischen Zustände, d.h. die Zahl der Energiezustände, die sich in der Gesamtenergie E unterscheiden, im Energieintervall $[E, E + \Delta E]$.

2. Bestimmen Sie die Zahl der Mikrozustände $\Gamma(E, N)$ zu gegebener Gesamtenergie E.

3. Bestimmen Sie die Zahl der Mikrozustände $D(E, N)$ und die Zustandsdichte $\Delta(E, N)$ im Energieintervall $[E, E + \Delta E]$.

4. Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme der Stirlingschen Formel $\ln D(E, N)$ in führender Ordnung in N (d.h. unter Vernachlässigung von Termen $\sim O(1)$; dazu gehören auch Terme $\sim \ln N$).

5. Betrachten Sie den Bereich, wo eine große Anzahl Spins parallel zum Magnetfeld steht, und berechnen Sie $D(E, N)$ in führender Ordnung in $E/(N\mu H)$.