WIEDERHOLUNGSKLAUSUR ZUR QUANTENMECHANIK SS 2011

14.10.2011

Aufgabe 1: Interferenz (16 Punkte)

1. Theoretischer Teil (5 = 2 + 3 Punkte).

   (a) Gegeben sei ein Teilchen mit Masse m und Geschwindigkeit v. Wie lautet die entsprechende De Broglie-Wellenlänge λ_D? Welche physikalische Bedeutung hat sie?

   (b) Erklären Sie, warum im Rahmen der Quantenmechanik Interferenzphänomene stattfinden können und was man darunter versteht.

2. Rechenaufgabe (Beugung am Spalt) (11 = 5 + 3 + 3 Punkte).

   (a) Ein Strahl mit vielen Elektronen mit Geschwindigkeit v trifft auf einen Spalt der Länge d. Die Elektronen, die durch den Spalt fliegen, landen später auf einem Schirm, der weit hinter dem Spalt positioniert ist (sei L die Distanz Spalt-Schirm). Die Elektronen werden als kleine Flecken auf dem Schirm gemessen. Erklären Sie, welches Muster auf dem Schirm beobachtet wird. Bestimmen sie insbesondere die Punkte auf dem Schirm, wo kein Elektron zu finden ist, und die Punkte auf dem Schirm, wo die meisten Elektronen den Schirm getroffen haben. (Benutzen Sie dafür das heuristische Argument).

   (b) Diskutieren Sie den Limes $\lambda_D \ll d$, wobei λ_D die De Broglie-Wellenlänge eines Elektrons ist.

   (c) Diskutieren Sie den Limes $\lambda_D \gg d$.

Aufgabe 2: Schrödinger-Gleichung (25 Punkte)

1. Theoretischer Teil (8 = 2 + 3 + 3 Punkte).

   (a) Geben Sie die Schrödinger-Gleichung für den Fall $V(\vec{r}) = 0$ an. Wie muss $\omega(\vec{k})$ aussehen, damit

   $$\psi(t, \vec{r}) = N e^{-i\left[\omega(\vec{k})t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right]} \tag{1}$$

   eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist?

   (b) Gegeben seien die Wellenfunktionen $\psi_1(t, \vec{r})$ und $\psi_2(t, \vec{r})$, die die Schrödinger-Gleichung mit Potential $V(\vec{r})$ lösen. Ist die Funktion $\psi(t, \vec{r}) = \alpha\psi_1(t, \vec{r}) + \beta\psi_2(t, \vec{r})$, wobei α und β beliebige komplexe Zahlen sind, eine Lösung der Schrödinger-Gleichung? Begründen Sie die Antwort.

   (c) Sei die eindimensionale Wellenfunktion $\psi(t, x)$ gegeben, die eine bestimmte Schrödinger-Gleichung löst. Geben Sie die Ausdrücke für die Varianzen Δx und Δp an. Was weiß man über das Produkt $\Delta x \cdot \Delta p$? (Keine explizite Rechnung durchführen, aber die Bedeutung erklären.)

2. Rechenaufgabe (17 = 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 Punkte).

   Gegeben sei die Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$

   $$\psi(t = 0, \vec{r}) = \frac{N}{r^2}\theta(r - a)\theta(b - r) \ , \tag{2}$$

   wobei $|\vec{r}| = r$, $\theta(r)$ die Stufenfunktion und $0 < a < b$ ist.

   (a) Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf der Funktion.

   (b) Bestimmen Sie N so, dass die Funktion normiert ist. (Achtung: es handelt sich um eine 3d-Integration.)

(c) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei einer Ortsmessung zwischen $\alpha < r < \beta$ zu finden? (Sei $\alpha > a$ und $\beta < b$.)

(d) Berechnen Sie den Mittellwert $\langle r \rangle$.

(e) Berechnen Sie $\langle r^2 \rangle$ und Δr.

(f) Ohne Rechungen durchzuführen, erklären Sie welche Schritte notwendig sind, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, das Teilchen bei einer Impulsmessung zwischen $\vec{p}$ und $\vec{p} + d^3\vec{p}$ zu finden.

Aufgabe 3: Hilbert-Raum (19 Punkte)

1. Theoretischer Teil (7 = 1 + 4 + 2 Punkte).

   (a) Geben Sie den Zeitentwicklungsoperator an, unter der Annahme, dass H keine explizite t-Abhängigkeit hat.

   (b) Sei H der Hamilton-Operator eines Systems. Bestimmen Sie im Heisenberg-Bild die Bewegungsgleichung für den Operator A_H. Zu diesem Zweck muss dA_H/dt im Heisenberg-Bild bestimmt werden.

   (c) Sei $A = H^n$. Bestimmen Sie dA/dt unter der Annahme, dass H keine explizite t-Abhängigkeit hat.

2. Rechenaufgabe (12 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 Punkte).

   Gegeben sei der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators

   $$H = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) \ , \tag{3}$$

   wobei $[a, a^\dagger] = 1$, $a\,|0\rangle = 0$, und $|0\rangle$ der Grundzustand ist. Gegeben sei auch der Zustand zur Zeit $t = 0$:

   $$|s, t = 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(|0\rangle + |2\rangle \right) \ , \tag{4}$$

   wobei $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a^\dagger \right)^2 |0\rangle$ der zweite angeregte Zustand ist.

   (a) Verifizieren Sie, dass der Zustand $|2\rangle$ normiert ist: $\langle 2 \mid 2 \rangle = 1$.

   (b) Bestimmen Sie den Zustand des Systems für $t > 0$, $|s, t > 0\rangle$.

   (c) Bestimmen Sie den Mittelwert der Energie $\langle s, t|\, H\, |s, t\rangle$. Hängt das Resultat von t ab? Begründen Sie die Antwort.

   (d) Berechnen Sie $\langle s, t|\, H^2\, |s, t\rangle$ und ΔH.

   (e) Gegeben sei der Impuls-Operator $p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a + a^\dagger)$. Berechnen Sie den Kommutator $[H, p]$. Ist der Impuls eine Konstante der Bewegung?