THEORETIKUM ZUR QUANTENMECHANIK SS 2011

Aufgabenblatt 7 **3.06.2011**

Aufgabe 1: Adjungierte und hermitesche Operatoren (10 Punkte = 2 + 3 + 2 + 3 Punkte)

1. Sei A hermitesch. Zeigen Sie, dass auch A^n hermitesch ist.
2. Zeigen Sie, dass $\hat{x} \equiv x$, $\hat{p} \equiv -i\hbar\partial_x$, $\hat{p}^2$ und $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V$ hermitesche Operatoren sind und bestimmen Sie den zu $\hat{x}\,\hat{p}$ adjungierten Operator.
3. Seien A und B hermitesch. Zeigen Sie, dass $[A, B]$ anti-hermitesch ist und $\{A, B\}$ hermitesch ist.
4. Sei A hermitesch. Zeigen Sie, dass der Operator $U = \exp(iA)$ die Gleichung $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ erfüllt.

Aufgabe 2: Messung einer Observablen (8 Punkte = 4 + 4)

Eine Observable H sei bzgl. der Basis $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ durch die hermitesche Matrix aus Aufgabe 6.2 gegeben,

$$H = \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1 & 1 \\ i/\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Das quantenmechanische System sei im Zustand $|u_3\rangle$.

1. Welche möglichen Ergebnisse können bei einer Messung von H auftreten? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten mißt man diese Ergebnisse?
2. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle H\rangle$ und die Standardabweichung ΔH im Zustand $|u_3\rangle$.

Aufgabe 3: Nochmals die Kontinuitätsgleichung (12 Punkte = 2 + 2 + 4 + 4)

Betrachten Sie ein System in einer räumlichen Dimension x. Sei p der Impuls-Operator, für den $[x, p] = i\hbar$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass
$$[x, f(p)] = i\hbar\frac{df(p)}{dp} , \tag{1}$$
wobei $f(p)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion des Operators p ist.
2. Zeigen Sie, dass
$$[p, f(x)] = -i\hbar\frac{df(x)}{dx} , \tag{2}$$
wobei $f(x)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion des Operators x ist.
3. Zeigen Sie, dass
$$\left[p^2, f(x)\right] = -i\hbar\left(2p\frac{df(x)}{dx} + i\hbar\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right) . \tag{3}$$
wobei $f(x)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion des Operators x ist.
4. Zeigen Sie, dass
$$[p^n, f(x)] = -i\hbar\left(np^{n-1}\frac{df(x)}{dx}\right) + O(\hbar^2) , \tag{4}$$
wobei $f(x)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion des Operators x ist.