

Aufgabe 1: Klein-Gordon und Schrödinger (15 Punkte = 0.5 + 1.5 + 1.5 + 2 + 2 + 2 + 2.5 + 3)

Die Klein-Gordon-Gleichung für ein freies Teilchen mit Masse  $m$  lautet

$$\left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(t, \vec{x}) = 0 ; \quad (1)$$

die Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen mit Masse  $m$  lautet

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, \vec{x}) . \quad (2)$$

1. Zeigen Sie, dass

$$\phi(t, \vec{x}) = N e^{-\frac{i}{\hbar} (E(\vec{p})t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (3)$$

mit  $E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$  eine Lösung der Gl. (1) ist.

2. Sei  $\vec{p}^2 \ll m^2 c^2$ . Bestimmen Sie  $E(\vec{p})$  bis zur Ordnung  $\vec{p}^2$  (nicht-relativistischer Limes). Ist Gl. (3) eine Lösung der freien Schrödinger-Gleichung (2) in diesem Limes?
3. Ist  $\psi(t, \vec{x}) = e^{imc^2 t/\hbar} \phi(t, \vec{x})$  mit  $\phi(t, \vec{x})$  aus Gl. (3) eine Lösung der freien Schrödinger-Gleichung (2) im nichtrelativistischen Limes?
4. Sei  $\phi(t, \vec{x}) = e^{-imc^2 t/\hbar} \psi(t, \vec{x})$  eine beliebige Lösung von Gl. (1). Welche Bedingung muss  $\psi(t, \vec{x})$  erfüllen, um eine Lösung der Schrödinger-Gleichung zu sein? Ist diese Bedingung im Aufgabenteil 1.3 erfüllt, wenn der nichtrelativistische Limes  $\vec{p}^2 \ll m^2 c^2$  betrachtet wird?
5. Sei  $\psi(t)$  eine Lösung der Gl. (2), die nur von der Zeit  $t$  abhängt. Kann diese Lösung ein Teilchen im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik beschreiben?
6. Sei  $\psi(x)$  eine Lösung der Gl. (2), die nur von der Ortskoordinate  $x$  abhängt. Kann diese Lösung ein Teilchen im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik beschreiben?
7. Sei  $\Omega$  eine Raum-Region mit Volumen  $V$  und sei  $\psi(t, \vec{x})$  eine Lösung der Gl. (2), die außerhalb von  $\Omega$  null ist und innerhalb von  $\Omega$  nur von  $t$  abhängt. Bestimmen Sie die Form der Wellenfunktion.
8. Sei  $\psi(t, \vec{x})$  eine Lösung der Gl. (2), die außerhalb der disjunkten Raum-Regionen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  (mit Volumen  $V_1$  and  $V_2$ ) verschwindet. Innerhalb von  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  hängt  $\psi(t, \vec{x})$  nur von  $t$  ab. Bestimmen Sie die Wellenfunktion  $\psi(t, \vec{x})$  unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in  $\Omega_1$  zu finden, dreimal größer ist als die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in  $\Omega_2$  zu finden. (*Bemerkung:* in den Teilaufgaben 1.7 und 1.8 ignorieren Sie die Tatsache, dass die Schrödinger-Gleichung an den Rändern nicht erfüllt ist).

Aufgabe 2: Zur Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion (6 Punkte)

Die Wellenfunktion des Grundzustandes des harmonischen Oszillators ist

$$\psi_0(x) = \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left( -\frac{\alpha x^2}{2} \right) ,$$

wobei  $\alpha = m\omega/\hbar$ . Die Grundzustandsenergie ist

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} .$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in diesem Zustand außerhalb des “klassischen Bereichs” zu finden?

(Der klassische Bereich ist durch die “Umkehrpunkte” definiert.)

*Hinweis:* Man stößt in der Rechnung auf die Gaußsche Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt .$$

Um einen Zahlenwert für die Wahrscheinlichkeit anzugeben, benutzen Sie  $\operatorname{erf}(1) \simeq 0,84$ .

Aufgabe 3: Zeitentwicklung eines Wellenpakets (9 Punkte = 3 + 3 + 3)

$\psi(t, x)$  sei die Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens der Masse  $m$  in einer Dimension. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  gelte

$$\psi(0, x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) .$$

1. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte  $\psi(0, p)$  der Funktion  $\psi(0, x)$ .
2. Berechnen Sie  $\psi(t, p)$  mittels der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung im Impulsraum.
3. Transformieren Sie  $\psi(t, p)$  zurück auf  $\psi(t, x)$