WIEDEROLUNGSKLAUSUR ZUR ELEKTRODYNAMIK WS 2010/11

16.04.2011

Aufgabe 1: Elektrostatik (18 Punkte)

1. Theoretischer Teil ($8 = 1 + 2 + 2 + 3$ Punkte).

   (a) Gegeben sei die statische Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Wie lautet die allgemeine Definition des Dipolmoments $\vec{p}$?

   (b) Gegeben sei ein Punktteilchen mit Ladung $q_1 = 1/2$ C im Punkt $\vec{r}_1 = (2, 2, 2)$ m und ein Punktteilchen mit Ladung $q_2 = -1/2$ C im Punkt $\vec{r}_2 = (1, 1, 1)$ m. Wie lautet das Dipolmoment $\vec{p}$ für dieses System?

   (c) Wie lautet die renormierte elektrostatische Energie des Systems von Aufgabenteil 1.1 (b)?

   (d) Warum ist es im Aufgabenteil 1.1 (c) notwendig, die elektrostatische Energie zu renormieren?

2. Rechenaufgabe ($10 = 1 + 1 + 1 + 3 + 4$ Punkte).

   Gegeben seien drei Punktteilchen, die in der xy-Ebene liegen und jeweils die elektrische Ladung q besitzen. Das erste Teilchen befindet sich im Punkt $(d/2, 0, 0)$ und das zweite Teilchen im Punkt $(-d/2, 0, 0)$. Das dritte Teilchen befindet sich auf der y-Achse, so dass die drei Teilchen ein gleichseitiges Dreieck bilden.

   (a) Geben Sie die gesamte Ladungsdichte $\rho = \rho(\vec{r})$ in kartesischen Koordinaten an.

   (b) Bestimmen Sie das Potential $\varphi(\vec{r})$ für $|\vec{r}| \gg 1$ in der Monopolnäherung in kartesischen Koordinaten.

   (c) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ für $|\vec{r}| \gg 1$ in der Monopolnäherung in kartesischen Koordinaten.

   (d) Bestimmen Sie das Potential $\varphi(\vec{r})$ für $|\vec{r}| \gg 1$ in der Dipolnäherung in kartesischen Koordinaten.

   (e) Das Teilchen auf der y-Achse werde zu einem Zeitpunkt t_0 losgelassen. Es bewegt sich aufgrund der Kraft, die die anderen beiden Teilchen auf dieses Teilchen ausüben. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Teilchens zur Zeit $t \gg t_0$. (Hinweis: Energieerhaltung.)

Aufgabe 2: Magnetostatik (21 Punkte)

1. Theoretischer Teil ($9 = 2 + 2 + 1 + 4$ Punkte).

   (a) Gegeben sei ein Punkteilchen mit Ladung q, das sich mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag v entlang der z-Achse bewegt. Das Teilchen befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(t, \vec{r})$ an.

   (b) Geben Sie die Ladungsstromdichte $\vec{j}(t, \vec{r})$ des Punktteilchens von Aufgabenteil 2.1 (a) an.

   (c) Geben Sie die allgemeine Definition des magnetischen Moments einer Stromdichte an.

   (d) Bestimmen Sie das magnetische Moment $\vec{m}$ für das Teilchen von Aufgabenteil 2.1 (a).

2. Rechenaufgabe ($12 = 5 + 3 + 4$).

   (a) Gegeben sei die Ladungsstromdichte

   $$\vec{j}(x,y,z) = \big(0, 0, j_0\,\delta(x^2 - a^2)\,\delta(y)\big) \ , \tag{1}$$

   wobei a und j_0 positive Konstanten sind. Berechnen Sie den Strom I durch einen Kreis K, der in der xy-Ebene liegt und Zentrum im Koordinatenursprung hat. Geben Sie das Resultat I als Funktion des Radius R des Kreises an.

   (b) Welcher physikalischen Situation entspricht der Strom von Aufgabenteil 2.2 (a)? Ohne explizite Rechnungen durchzuführen, geben Sie das magnetische Feld $\vec{B}$ an, das von der Stromdichte erzeugt wird. (Hinweis: benutzen Sie dafür das magnetische Feld $\vec{B}$, das von einem langen eindimensionalen Draht erzeugt wird.)

   (c) Gegeben sei das magnetische Feld

   $$\vec{B}(x,y,z) = \Big(0, 0, B_0\,e^{-a|z|-b\left(x^2+y^2\right)}\Big) \ , \tag{2}$$

   wobei B_0, a und b positive Konstanten sind. Berechnen Sie die Energiedichte w und die gesamte Energie E_{feld} des magnetischen Feldes.

Aufgabe 3: Ebene Wellen (21 Punkte)

1. Theoretischer Teil ($5 = 1 + 4$ Punkte).

   (a) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen, wenn die Ladungsdichte und die Stromdichte verschwinden?

   (b) Beweisen Sie, dass aus den Maxwell-Gleichungen von Aufgabenteil 3.1 (a) die Gleichung $\Box\vec{E} = \vec{0}$ folgt.

2. Rechenaufgabe ($16 = 5 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3$ Punkte).

   Sei $\psi = \psi(t,z)$. Gegeben sei die Differenzialgleichung

   $$\Box\psi(t,z) = 0. \tag{3}$$

   (a) Bestimmen Sie die möglichen Lösungen von Gl. (3) unter Benutzung des Lösungsansatzes $\psi(t,z) = A(t)B(z)$. (Achtung: eine Fallunterscheidung ist notwendig!)

   (b) Welche Lösungen von Aufgabenteil 3.2 (a) sind physikalisch relevant und welche nicht? Begründen Sie dei Antwort.

   (c) Zeigen Sie, dass

   $$\psi(t,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, C(k)\, e^{ik(ct-z)} \tag{4}$$

   die Differentialgleichung (3) für jede beliebige Funktion $C(k)$ erfüllt.

   (d) Wie muss $C(k)$ in Gl. (4) lauten, damit $\psi(t,z) = e^{ik_0(ct-z)}$?

   (e) Wie muss $C(k)$ in Gl. (4) lauten, damit $\psi(t,z) = C_0\cos\left[k_0(ct-z)\right]$?

   (f) Gegeben sei $C(k) = C_0\theta(k_0^2 - k^2)$, wobei C_0 und k_0 positive Konstanten sind. Bestimmen Sie $\psi(t,z)$.