THEORETIKUM ZUR ELEKTRODYNAMIK WS 10/11

Aufgabenblatt 3 **12.11.2010**

Aufgabe 1: Massives A^μ-Feld (11 Punkte = 2 + 2 + 3 + 4)

Wenn das Photon eine Masse hätte, wäre das elektromagnetische 4-Potential A^μ durch die folgende Lagrange-Dichte beschrieben:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2 c^2}{2\mu_0 \hbar^2} A_\mu A^\mu \ , \tag{1}$$

wobei m eine Konstante ist und $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}$ J s das Plancksches Wirkungsquantum ist.

1. Bestimmen Sie die Dimension des Parameters m.
2. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für das Feld A^μ.
3. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung erfordert, dass die folgenden zwei Gleichungen separat gelten:
$$\left(\Box + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) A^\mu = 0, \ \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{2}$$
Erklären Sie auch warum, diese Eigenschaft im Fall $m = 0$ nicht gilt.
4. Betrachten Sie die folgende Form für das Feld A^μ:
$$A^\mu = b \varepsilon^\mu(K) e^{-\frac{i}{\hbar} K_\nu X^\nu} \ , \tag{3}$$
wobei $K^\nu = (\frac{\omega}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{k^2c^2 + m^2c^4}, 0, 0, k)$, $X^\nu = (ct, x, y, z)$ und $b = const$. Welche Bedingungen muss der 4-Vektor $\varepsilon^\mu(K)$ erfüllen, damit A^μ die zwei Gleichungen (2) löst? Bestimmen Sie eine Basis $\varepsilon^{(i)\mu}(K)$ für die Vektoren $\varepsilon^\mu(K)$, deren Elemente die Normierung
$$\varepsilon^{(i)}_\mu(K) \varepsilon^{(j)\mu}(K) = -\delta^{ij} \tag{4}$$
erfüllen.

Aufgabe 2: Bewegte, elektrische Ladungen (10 Punkte = 2 + 2 + 3 + 3)

Ein Teilchen der elektrischen Ladung q_1 hat in seinem Ruhesystem Σ' die Potentiale $\varphi'(\vec{r}\,') = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r'}$ und $\vec{A}'(\vec{r}\,') = 0$.

1. Welche Potentiale $\varphi(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r})$ hat es im Bezugssystem Σ, welches sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_z$ relativ zu Σ' bewegt?
2. Zeige, dass $\varphi(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r})$ der Lorentz-Eichbedingung genügen. In welchem Bezugssystem überprüft man dies am einfachsten? Warum kann man hierbei das Bezugssystem frei wählen?
3. Berechne aus $\varphi(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r})$ die Feldstärken $\vec{E}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$ in Σ. Zeige zunächst $\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$ und berechne dann $\vec{E}$ explizit.
4. Welche Kraft $\vec{F}$ übt von Σ aus gesehen das erste Teilchen auf ein zweites Teilchen der Ladung q_2 aus, das sich mit der selben Geschwindigkeit $\vec{v}$ wie das erste bewegt? Zerlege $\vec{F}$ in einen Anteil senkrecht und in einen parallel zur $z-$Achse, $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_{||}$.

Aufgabe 3: Lorentz-Kraft (9 Punkte = 2 + 7)

Gegeben seien die Felder $\vec{E} = \vec{0}$ und $\vec{B} = (0, 0, B_0 = const)$. Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q befindet sich zur Zeit $t = 0$ bei $\vec{r} = \vec{0}$ mit Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$. Auf das Teilchen wirkt die Lorentz-Kraft.

1. Bestimmen Sie die Trajektorie des Teilchens in parametrischer Form $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ für die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (0, 0, 1)$ m/s.

2. Bestimmen sie die Trajektorie des Teilchens in parametrischer Form $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ für die Anfangsgeschwinsigkeit $\vec{v}_0 = (3, 4, 1)$ m/s. Zeichnen Sie diese Trajektorie auf der xy-Ebene, auf der xz-Ebene und auf der yz-Ebene. Benutzen Sie dafür die numerischen Werte $q = 1$ C, $B_0 = 1$ T, $m = 2$ Kg in den jeweiligen Einheiten des SI-Systems.