

KLAUSUR ZUR MECHANIK II SS 10

28.7.2010

Aufgabe 1: Wirkung (17 Punkte)

1. Theoretische Frage (6 Punkte).

Leite die Euler-Lagrange-Gleichungen aus der Extremierung des Wirkungsfunktionals

$$S[\vec{q}(t), t_A, t_E] = \int_{t_A}^{t_E} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) \quad (1)$$

ab.

2. Rechenaufgabe (11 = 3 + 1 + 7 Punkte).

Gegeben sei die Wirkung

$$S[q(t), t_A = 0, t_E] = \int_0^{t_E} dt \frac{m}{2} \dot{q}^2, \quad (2)$$

wobei die Randbedingungen lauten: $q(t_A = 0) = q_A$ und $q(t_E) = q_E$.

- (a) Bestimme die Trajektorie $q_m(t)$, die die Wirkung extremalisiert.
- (b) Bestimme den Wert der Wirkung für $q_m(t)$.
- (c) Betrachte die Funktionen $q(t, \varepsilon) = q_m(t) + \varepsilon t(t - t_E)$ aus der Konkurrenzchar, wobei ε ein freier Parameter ist. Sind die Randbedingungen für $q(t, \varepsilon)$ erfüllt? Berechne die Wirkung für die Funktionen $q(t, \varepsilon)$. Zeige, dass die Wirkung für $\varepsilon = 0$ minimal ist.

Aufgabe 2: Hamilton (21 Punkte)

1. Theoretische Frage (6 Punkte).

Leite die kanonischen Gleichungen für die Hamilton-Funktion $H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$ ab.

2. Rechenaufgabe (15 = 1 + 3 + 4 + 2 + 2 + 3 Punkte).

Gegeben sei die folgende Hamilton-Funktion:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 p_2^2 + p_1 p_2. \quad (3)$$

- (a) Welches ist die zyklische Koordinate?
- (b) Bestimme die kanonischen Gleichungen.
- (c) Löse die kanonischen Gleichungen für die Anfangsbedingungen $q_1(0) = q_2(0) = p_1(0) = 0$, $p_2(0) = a$.
- (d) Ist die Hamilton-Funktion ein Integral der Bewegung? Berechne den expliziten Wert von H mit den Anfangsbedingungen aus Aufgabenteil (c).
- (e) Gegeben sei die Funktion $F = F(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Drücke die totale Zeit-Ableitung $\frac{dF}{dt}$ als Poisson-Klammer aus.
- (f) Berechne $\frac{dF}{dt}$ für den Fall $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 p_1 p_2$. Ist F ein Integral der Bewegung?

Aufgabe 3: Relativitätstheorie (22 Punkte)

1. Theoretische Frage (8 = 2 + 2 + 2 + 2).

- (a) Nenne die Einsteinsche Postulate.
- (b) Was versteht man unter der kovarianten Formulierung eines Naturgesetzes?
- (c) Gib das Transformationsverhalten des gemischten Tensors $A^{\mu\nu\lambda}_{\alpha}$ an.
- (d) Wie lautet die Lorentz-Transformationsmatrix Λ^{μ}_{ν} für (i) einen Boost mit Rapidität χ in der x -Richtung und (ii) für eine Rotation um den Winkel φ um die z -Achse.

2. Rechenaufgabe (14 = 3 + 4 + 4 + 3 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion

$$L = -m\sqrt{1 - \dot{x}^2} \quad (4)$$

wobei $|\dot{x}| < 1$.

- (a) Bestimme die Bewegungsgleichung und löse sie für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.
- (b) Bestimme die Hamilton-Funktion H als Legendre-Transformation von L .
- (c) Da das System konservativ ist, ist $H = E$. Ersetze p durch \dot{x} , um E als Funktion von \dot{x} zu bestimmen.
- (d) Entwickle die Lagrange-Funktion für $|\dot{x}| \ll 1$ bis zur Ordnung \dot{x}^2 .