

## THEORETIKUM ZUR MECHANIK II SS 10

### Aufgabenblatt 8

8.06.2010

Aufgabe 8.1: Galilei (10 = 2 + 3 + 3 + 2 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 - V(x_1 - x_2) . \quad (1)$$

1. Zeige, dass das System unter folgender Transformation invariant ist:

$$x_1 \rightarrow x_1 - v_0 t, \quad x_2 \rightarrow x_2 - v_0 t . \quad (2)$$

Was bedeutet diese Transformation physikalisch?

2. Berechne die dazugehörige Erhaltungsgröße. Welches berühmte physikalische Prinzip wird damit hergeleitet?
3. Berechne die Lagrange-Funktion als Funktion der neuen Koordinaten  $r$  und  $R$ , wobei

$$r = x_1 - x_2, \quad R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} . \quad (3)$$

Was ist die physikalische Bedeutung dieser neuen Variablen?

4. Sei  $V(x_1 - x_2) = -k(x_1 - x_2)^2$ , wobei  $k$  eine reelle Zahl ist. Löse die Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen  $x_1(0) = a$ ,  $x_2(0) = b$ ,  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = v_0$ .

Aufgabe 8.2: Lagrange vs. Hamilton (10 = 2 + 3 + 2 + 3 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion ( $\alpha > 0$ )

$$L = \frac{m}{2} t^\alpha \dot{x}^2 . \quad (4)$$

1. Löse die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen  $x(t_0) = x_0 > 0$ ,  $\dot{x}(t_0) = v_0 > 0$  ( $t_0 > 0$ ).
2. Berechne die Energie  $E$  des Systems. Ist die Energie erhalten? Wenn nicht, zeichne den Verlauf  $E = E(t)$  für  $t > t_0$ .
3. Bestimme den generalisierten Impuls  $p$  und die Hamilton-Funktion  $H$ .
4. Leite die Hamilton-Gleichungen ab und löse sie für die vorher angegebenen Anfangsbedingungen. Diskutiere den Hamilton-Formalismus im Vergleich zum Lagrange-Formalismus.

Aufgabe 8.3: Déjà-vu (10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Gegeben sei die folgende Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von  $x$  und  $y$  (wobei  $k > 0$ ) :

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} . \quad (5)$$

1. Was ist die physikalische Bedeutung dieser Lagrange-Funktion? Wann wurde ein ähnliches System schon besprochen?

2. Bestimme die Bewegungsgleichungen.
3. Führe die Polarkoordinaten auf der Ebene  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$  ein. Wie lautet die Lagrange-Funktion als Funktion von  $r$  und  $\varphi$ ? Wie lauten die entsprechenden Bewegungsgleichungen?
4. Berechne die generalisierten Impulse  $p_r$  und  $p_\varphi$  und die Hamilton-Funktion  $H$ . Bestimme die Hamilton-Gleichungen.
5. Was ist die Bahn des Teilchens für die Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0 > 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = v_0$ ?